Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

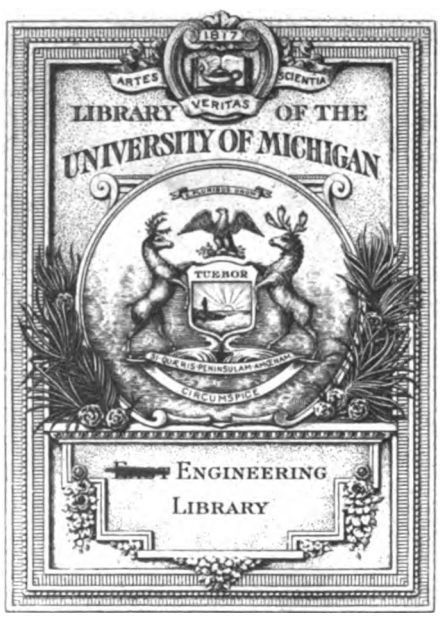
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

C 367743 DUPL

Digitized by Google



Digitized by Google

533
.L92

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung · Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. · Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute · Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig · Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften · Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt · Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher

BAND XVI

1939

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALTS-ÜBERSICHT

Verfasserverzeichnis.

	Lfg.	Seite
Bader, W.: Messungen an einem Tiefdeckermodell im rotierenden Strahl und ihr Vergleich mit Flugmessungen	2	104
Bausch, K.: Auftriebsverteilung und daraus abgeleitete Größen für Tragflügel in schwach inhomogenen Strömungen	3	129
Brenner, P., Kostron, H.: Der Einfluß der Zahl der Abschreckungen und der Glühdauer auf das Aushärten von Al-Cu-Mg-Legierungen	7	362
Cambilargiu, E.: Berechnung der Verdrehung kastenförmiger Träger, denen eine Wand fehlt	8/9	403
Dietze, F.: Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem)	2	84
Dziewior, K.: Zusammenstellung der bekannt gewordenen Vorschläge zur Abstandsbestimmung und zur Rückstrahlpeilung auf funktechnischem Wege und ihre kritische Betrachtung	6	326
Eujen, E.: Flugmessungen über den Einfluß von Schraubenstrahl und Landeklappenanstellung auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk	1	38
Fabricius, W.: Wechselwirkung zwischen anliegender und abgerissener Strömung	6	309
Fischer, G.: Untersuchung von Leichtmetall-Lagerwerkstoffen in der DVL-Lagerprüfmaschine	1	1
— Untersuchung von Bleibronze-Ausgüssen in der DVL-Lagerprüfmaschine	7	370
Fischer, W.: Betrachtungen zum Aufbau des elektrischen Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip	7	391
Glaser, W.: Der Einfluß der Betriebsbedingungen auf das Kolbenringstecken bei der Betriebsstoffdauerprüfung	8/9	438
Görner, J.: Beschleunigungsmessung durch Differentiation der Geschwindigkeit	1	54
Göthert, B.: Einfluß von Flächenbelastung, Flügelstreckung und Spannweitenbelastung auf die Flugleistungen	5	229
Haack, W.: Beeinflussungswiderstand zwischen Flügel und Rumpf	8/9	419
Hoerner, S.: Kräfte und Momente schräganggeströmter Tragflügel	4	178
Hoock, Th.: Untersuchung der Gaswechselvorgänge verschiedener Ventilsteuerungen und die erzielbaren Grenzwerte von ε, p_{me} und b_e	5	276
Jaeckel, K.: Über ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung der Auftriebsverteilung über die Breite eines Tragflügels	1	47
— Eine Formel für die von einem dünnen Tragflügelprofil induzierte Geschwindigkeit in Punkten, die auf der verlängerten Sehne liegen	1	53
— Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung für den zweidimensionalen Tragflügel bei beliebigen periodischen Bewegungen	3	135
— Das Geschwindigkeitsfeld eines beliebigen dünnen und schwach gewölbten Tragflügelprofils	4	209
Jordan, P.: Auftriebsberechnung und Strömungsvorgänge beim Überschreiten des Maximalauftriebes	4	184
Kaufmann, W.: Über die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen von Tragflügeln	1	21
Kohler, M.: Über die Strömungsvorgänge an steil angestellten und überzogenen Tragflügeln bei Parallelbewegung und Drehung	4	158
Kostron, H.: s. Brenner, P.		
Lutz, O.: Über eine einfache, näherungsweise Bestimmung von Kreisprozeßwirkungsgraden bei Ottomotoren unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen	2	59
— Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren Teil I	3	139
— Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren, Teil II	7	384
Magnus, K.: s. Schuler, M.		
Mangler, W.: Die Auftriebsverteilung am Tragflügel mit seitlichen Scheiben	5	219
Meyer, J.: Zur Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses auf die Biegeeigenfrequenzen von Luftschrauben	8/9	429
Müller, J.: Erhöhung der spezifischen Belastbarkeit bei Zug, Druck und Knickung von eingeschweißten Stahlrohr-Fachwerkstreben im Flugzeugbau durch Maßnahmen werkstofftechnischer und konstruktiver Art	1	14
Nautsch, H.: Der Flugweg in Blindflugkurven, insbesondere bei Schlechtwetterlandungen	3	148
Oppelt, W.: Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmäßigkeit Teil I	8/9	447

Digitized by Google

	Lfg.	Seite
Pflüger, A.: Aerodynamik des Drehflüglers mit Blattwinkelrücksteuerung	7	355
Reinitzhuber, F.: Über die Krafteinleitung in einholmige Flügeltragwerke durch unvollkommen ausgebildete Querwände	7	349
Richter, G.: Schiebe-Rollmomente bei Knickflügeln	2	112
Richter, M.: Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen	4	212
Riegels, F.: Korrekturfaktoren für Windkanäle elliptischen Querschnitts mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke	1	26
Schmid, E.: s. Stellmacher, K. L.		
Schmidt, F. R.: Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren	5	251
Schmidt, R.: Der Einfluß der Steuerungsmassen auf die Längsstabilität mit losem Ruder	1	31
Schörner, Chr.: Untersuchungen über die Beherrschung hoher Abgastemperaturen bei Abgasturboaufladung durch Innenkühlung. Berichtigung	1	20
Schuler, M., Magnus, K.: Dämpfungsarten für die Schwingungen des Kreiselhorizontes und ihre Wirkungen im Kurvenflug	6	318
Schultz-Grunow, F.: Zur Vorausbestimmung der turbulenten Ablösestelle	8/9	425
Seeber, F.: Prüfung hochklopffester Kraftstoffe im Flugmotoren-Einzylinder	1	18
— Neuere Verfahren der Kraftstoffprüfung	8/9	431
Simon, H.: Ein Iterationsverfahren zur Analyse von Störbelastungen bei Zylinderschalen	2	97
Solf, K.: Zur Berechnung der symmetrischen Längsbewegung eines Flugzeugs	4	198
Sottorf, W.: Neues Verfahren der Übertragung des Modellwiderstandes eines Gleitfahrzeuges auf die Hauptausführung	8/9	412
Stellmacher, K. L., Schmid, E.: Zum Schulerschen Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung	5	247
Teichmann, A.: Gedankengänge zur Flatterberechnung	6	283
Theile, U.: Höhenmeßverfahren auf funktechnischer Grundlage	6	339
Walz, A.: Übertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel	3	121
Weinhart, H.: Das Klopfen im Otto-Motor	2	74
Wenger, H.: Messung der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder eines fremdangetriebenen BMW-VI-Flugmotors	2	62

Sachverzeichnis.

	Lfg.	Seite
Aerodynamik und Flugmechanik.		
Korrekturfaktoren für Windkanäle elliptischen Querschnitts mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke, Riegels, F.	1	26
Der Einfluß der Steuerungsmassen auf die Längsstabilität mit losem Ruder, Schmidt, R.	1	31
Flugmessungen über den Einfluß von Schraubenstrahl und Landeklappenanstellung auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk, Eujen, E.	1	38
Über ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung der Auftriebsverteilung über die Breite eines Tragflügels, Jaeckel, K.	1	47
Eine Formel für die von einem dünnen Tragflügelprofil induzierte Geschwindigkeit in Punkten, die auf der verlängerten Sehne liegen, Jaeckel, K.	1	53
Messungen an einem Tiefdeckermodell im rotierenden Strahl und ihr Vergleich mit Flugmessungen, Bader, W.	2	104
Schiebe-Rollmomente bei Knickflügeln, Richter, G.	2	112
Übertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel, Walz, A.	3	121
Auftriebsverteilung und daraus abgeleitete Größen für Tragflügel in schwach inhomogenen Strömungen, Bausch, K.	3	129
Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung für den zweidimensionalen Tragflügel bei beliebigen periodischen Bewegungen, Jaekkel, K.	3	135
Über die Strömungsvorgänge an steil angestellten und überzogenen Tragflügeln bei Parallelbewegung und Drehung, Kohler, M.	4	158
Kräfte und Momente schrägangeströmter Tragflügel, Hoerner, S.	4	178
Auftriebsberechnung und Strömungsvorgänge beim Überschreiten des Maximalauftriebes, Jordan, P.	4	184
Zur Berechnung der symmetrischen Längsbewegung eines Flugzeugs, Solf, K.	4	198
Das Geschwindigkeitsfeld eines beliebigen dünnen und schwach gewölbten Tragflügelprofils, Jaeckel, K.	4	209
Die Auftriebsverteilung am Tragflügel mit seitlichen Scheiben, Mangler, W.	5	219
Einfluß von Flächenbelastung, Flügelstreckung und Spannweitenbelastung auf die Flugleistungen, Göthert, B.	5	229
Wechselwirkung zwischen anliegender und abgerissener Strömung, Fabricius, W.	6	309
Aerodynamik des Drehflüglers mit Blattwinkelrücksteuerung, Pflüger, A.	7	355
Neues Verfahren der Übertragung des Modellwiderstandes eines Gleitfahrzeuges auf die Hauptausführung, Sottorf, W.	8/9	412
Beeinflussungswiderstand zwischen Flügel und Rumpf, Haack, W.	8/9	419
Zur Vorausbestimmung der turbulenten Ablösestelle, Schultz-Grunow, F.	8/9	425
Festigkeit.		
Erhöhung der spezifischen Belastbarkeit bei Zug, Druck und Knickung von eingeschweißten Stahlrohr-Fachwerkstreben im Flugzeugbau durch Maßnahmen werkstofftechnischer und konstruktiver Art, Müller, J.	1	14
Über die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen von Tragflügeln, Kaufmann, W.	1	21
Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem), Dietze, F.	2	84
Ein Iterationsverfahren zur Analyse von Störbelastungen bei Zylinderschalen, Simon, H.	2	97
Gedankengänge zur Flatterberechnung, Teichmann, A.	6	283
Über die Krafteinleitung in einholmige Flügeltragwerke durch unvollkommen ausgebildete Querwände, Reinitzhuber, F.	7	349

Digitized by Google

	Lfg.	Seite
Berechnung der Verdrehung kastenförmiger Träger, denen eine Wand fehlt, Cambilargiu, E.	8/9	403

Werkstoffe.

Untersuchung von Leichtmetall-Lagerwerkstoffen in der DVL-Lagerprüfmaschine, Fischer, G.	1	1
Der Einfluß der Zahl der Abschreckungen und der Glühdauer auf das Aushärten von Al-Cu-Mg-Legierungen, Brenner, P./Kostron, H.	7	362
Untersuchung von Bleibronze-Ausgüssen in der DVL-Lagerprüfmaschine, Fischer, G.	7	370

Triebwerk und Brennstoffe.

Prüfung hochklopffester Kraftstoffe im Flugmotoren-Einzylinder, Seeber, F.	1	18
Untersuchungen über die Beherrschung hoher Abgastemperaturen bei Abgasturboaufladung durch Innenkühlung. Berichtigung, Schörner, Chr.	1	20
Über eine einfache, näherungsweise Bestimmung von Kreisprozeßwirkungsgraden bei Ottomotoren unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen, Lutz, O.	2	59
Messung der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder eines fremdangetriebenen BMW-VI-Flugmotors, Wenger, H.	2	62
Das Klopfen im Otto-Motor, Weinhart, H.	2	74
Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren, Teil I, Lutz, O.	3	139
Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen, Richter, M.	4	212
Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren, Schmidt, F. R.	5	251
Untersuchung der Gaswechselvorgänge verschiedener Ventilsteuerungen und die erzielbaren Grenzwerte von ε, p_{me} und b_e, Hoock, Th.	5	276
Höhenmeßverfahren auf funktechnischer Grundlage, Theile, U.	6	339
Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren, Teil II, Lutz, O.	7	384
Zur Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses auf die Biegeeigenfrequenzen von Luftschrauben, Meyer, J.	8/9	429
Neuere Verfahren der Kraftstoffprüfung, Seeber, F.	8/9	431
Der Einfluß der Betriebsbedingungen auf das Kolbenringstecken bei der Betriebsstoffdauerprüfung, Glaser, W.	8/9	438

Ausrüstung.

Beschleunigungsmessung durch Differentiation der Geschwindigkeit, Görner, J.	1	54
Der Flugweg in Blindflugkurven, insbesondere bei Schlechtwetterlandungen, Nautsch, H.	3	148
Zum Schulerschen Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung, Stellmacher, K. L./Schmid, E.	5	247
Dämpfungsarten für die Schwingungen des Kreiselhorizontes und ihre Wirkungen im Kurvenflug, Schuler, M./Magnus, K.	6	318
Zusammenstellung der bekannt gewordenen Vorschläge zur Abstandsbestimmung und zur Rückstrahlpeilung auf funktechnischem Wege und ihre kritische Betrachtung, Dziewior, K.	6	326
Betrachtungen zum Aufbau des elektrischen Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip, Fischer, W.	7	391
Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmäßigkeit, Teil I, Oppelt, W.	8/9	447

Digitized by Google

Digitized by Google

MAR 16 1939

East Engin.
Library

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über
Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 1 enthält Arbeiten von: G. Fischer S. 1-13. J. Müller S. 14-17, F. Seeber S. 18-20, Berichtigung S. 20, W. Kaufmann S. 21-25, F. Riegels S. 26-30, R. Schmidt S. 31-37, E. Eujen S. 38-46, K. Jaeckel S. 47-52, K. Jaeckel S. 53, Görner S. 54-58

LUFTF.-FORSCHG. | BAND 16 | LFG. 1 | SEITE 1 BIS 58 | MÜNCHEN, 10. 1. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:
Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Untersuchung von Leichtmetall-Lagerwerkstoffen in der DVL-Lagerprüfmaschine. Von G. Fischer . . . . . Seite 1
Erhöhung der spezifischen Belastbarkeit bei Zug, Druck und Knickung von eingeschweißten Stahlrohr-Fachwerkstreben im Flugzeugbau durch Maßnahmen werkstofftechnischer und konstruktiver Art. Von J. Müller . . . . . Seite 14
Prüfung hochklopffester Kraftstoffe im Flugmotoren-Einzylinder. Von F. Seeber, VDI . . . . . Seite 18
Untersuchungen über die Beherrschung hoher Abgastemperaturen bei Abgasturboaufladung durch Innenkühlung. Berichtigung . . . . . Seite 20
Über die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen von Tragflügeln. Von W. Kaufmann . . . . . Seite 21
Korrekturfaktoren für Windkanäle elliptischen Querschnitts mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke. Von F. Riegels . . . . . Seite 26
Der Einfluß der Steuerungsmassen auf die Längsstabilität mit losem Ruder. Von R. Schmidt . . . . . Seite 31
Flugmessungen über den Einfluß von Schraubenstrahl und Landeklappenanstellung auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk. Von E. Eujen . . . . Seite 38
Über ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung der Auftriebsverteilung über die Breite eines Tragflügels. Von K. Jaeckel . . . . . Seite 47
Eine Formel für die von einem dünnen Tragflügelprofil induzierte Geschwindigkeit in Punkten, die auf der verlängerten Sehne liegen. Von K. Jaeckel . Seite 53
Beschleunigungsmessung durch Differentiation der Geschwindigkeit. Von J. Görner . . . . . Seite 54

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 | 10. Januar 1939 | Lfg. 1

Untersuchung von Leichtmetall-Lagerwerkstoffen in der DVL-Lagerprüfmaschine.

Von G. Fischer.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

An 11 Leichtmetall-Lagerwerkstoffen, Al- und Mg-Legierungen, werden die Laufeigenschaften in der DVL-Lagerprüfmaschine auf vergüteten und gehärteten Laufzapfen festgestellt. Die Untersuchung erstreckt sich auf die Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze, des Verhaltens bei Dauerbeanspruchung und bei Unterbrechung der Ölzufuhr.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Werkstoffe für Versuchslager und -zapfen.
III. Prüfbedingungen und Versuchsdurchführung.
IV. Versuchsergebnisse:
a) Tragfähigkeitsgrenze unter ruhender und dynamischer Belastung,
b) Verhalten bei Dauerbeanspruchung,
c) Verhalten bei Einstellung der Ölzufuhr zum Lager.
V. Folgerungen aus den Versuchsergebnissen.
VI. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Im Rahmen der Bestrebungen, von der Verwendung ausländischer Werkstoffe (Cu, Sn, Pb, Cd usw.) abzugehen, kommt den Leichtmetall-Legierungen als Gleitlagerwerkstoff wieder größere Bedeutung zu. Die bisherigen Erfahrungen erlauben jedoch noch kein abschließendes Urteil über den Anwendungsbereich der Leichtmetall-Lagerwerkstoffe. Unter niedriger mechanischer und thermischer Beanspruchung haben sich die Leichtlager durchschnittlich gut bewährt. Größere Schwierigkeiten entstehen dagegen bei höheren Beanspruchungen, wie sie z. B. in den Hauptlagerstellen der Flugmotoren auftreten. Die Entwicklung hat gezeigt, daß in diesen Fällen die Verwendbarkeit von Aluminium- und Magnesiumlegierungen weniger von der chemischen Zusammensetzung als von der konstruktiven Durchbildung der Lager abhängig ist.

Die Leichtlagerfrage ist für die hochbeanspruchten Lagerstellen der Flugmotoren insofern von besonderer Bedeutung, als die zulässige Beanspruchungsgrenze der bisher hauptsächlich verwendeten Bleibronzelager bei dem heutigen Entwicklungsstand der Flugmotoren nahezu erreicht ist. Auf Grund der Schwierigkeiten, die unter verschiedenen Prüfbedingungen gewonnenen Ergebnisse miteinander zu vergleichen, ergab sich die Notwendigkeit, einen Teil der bisher im Schrifttum [1]) bis [7]) vorgeschlagenen sowie einige neuere Leichtmetall-Lagerlegierungen in der DVL-Lagerprüfmaschine unter besonderer Berücksichtigung der in Hauptlagern von Flugmotoren auftretenden Beanspruchungsverhältnisse einheitlich zu untersuchen.

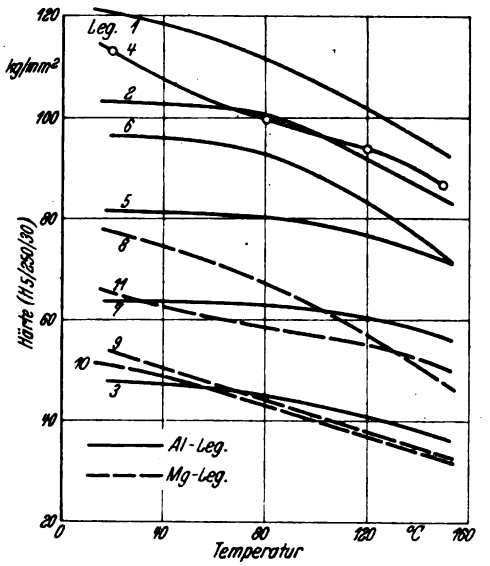


Bild 1. Warmhärtekurven der untersuchten Leichtmetall-Lagerlegierungen (Mittelwerte aus 2 Versuchsreihen).

II. Werkstoffe für Versuchslager und -zapfen.

Für die Untersuchungen standen 7 Aluminium- und 4 Magnesiumlegierungen, deren Zusammensetzung, Härte und mittlerer Wärmeausdehnungskoeffizient in Zahlentafel 1 angegeben sind, zur Verfügung. Der Warmhärteverlauf bis 150° C ist in Bild 1 dargestellt; der Gefügeaufbau der Legierungen geht aus Bild 2 bis 12 hervor.

Sämtliche Al-Legierungen, Bild 2 bis 8, zeigen den für viele Lagerwerkstoffe typischen Aufbau: harte Tragkristalle in weicher Grundmasse. Je nach der Zusammensetzung der Legierung treten Si-Kristalle, intermetallische Verbindungen von Al mit den Zusätzen (SbAl, $CuAl_2$, Mg_2Al_3 u. a.) oder auch Verbindungen der Legierungszusätze untereinander (z. B. Mg_2Si) als harte Bestandteile auf. Auch bezüglich der Form und Anordnung dieser Einlagerungen zeigen sich Unterschiede bei den verschiedenen Al-Legierungen. In den Gefügebildern der Legierungen 1, 2 und 7 sind innerhalb der eutektischen Grundmasse auch ziemlich große, regelmäßig ausgebildete Kristalle zu erkennen; dagegen weist Legierung 3 ausschließlich AlSb-Kristalle in nadeliger Form auf. Bei den Legierungen 4 und 5 liegen die Einschlüsse vorwiegend an den Korngrenzen, während sie in der heterogenisierten Legierung 6 in sehr feiner und gleichmäßiger Verteilung auftreten. Die Grundmasse be-

[1]) G. Steiner, Aluminiumlegierungen als Lagerwerkstoffe. Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Jahrb. 1936, S. 356 bis 371.

[2]) H. Steudell, Entwicklung von Leichtmetall-Lagern. Luftf.-Forsch. Bd. 13 (1936), S. 61 bis 66.

[3]) H. Wiechell, Einiges von der Entwicklung, der Konstruktion und dem Betrieb von Leichtmetall-Lagern. Automob.-techn. Z. Bd. 40 (1937), S. 235 bis 240.

[4]) M. v. Schwarz, Laufeigenschaften von Aluminium-Lagermetallen (Quarzal). Z. Metallkde. Bd. 28 (1936), S. 272 bis 275.

[5]) M. v. Schwarz, Über die Gleiteigenschaften von Leichtmetall-Lagermetallen mit besonderer Berücksichtigung von »Quarzal«. Metallwirtschaft Bd. 16 (1937), S. 771 bis 776.

[6]) E. Vaders, Neuere Aluminium-Lagermetalle. Z. Metallk. Bd. 29 (1937), S. 155 bis 158.

[7]) R. Hinzmann, Leichtmetall-Lager. Metallwirtschaft Bd. 16 (1937), S. 477 bis 481.

Digitized by Google

Zahlentafel 1. Zusammensetzung, Härte und mittlerer Wärmeausdehnungskoeffizient der untersuchten Leichtmetall-Lagerwerkstoffe.

Hersteller	Legierung Nr.	Zustand	Zusammensetzung in vH[1]										Brinellhärte H in kg/mm² bei 20°C			bei 150°C	mittl. Wärmeausdehnungskoeff. (20°/150°C) $\beta \cdot 10^{-6}$[4]	Gefüge nach Bild
			Cu	Zn	Si	Mg	Mn	Fe	Ni	Pb	andere	Al	5/62,5/30	5/125/30	5/250/30	5/250/30		
I	1	gegossen	4,5	—	14	0,7	0,8	—	1,5	—	—	Rest	—	114,6	120,6	94	19,6	2
	2	»	1,5	—	21	0,5	0,7	—	1,5	—	1,2 Co	»	—	96,8	102,5	84	18,2	3
	3	» [2]	—	—	—	—	—	—	—	—	6,5 Sb	»	44,9	47,3	47,5	36,5	24,3	4
II	4	gegossen	2,08	5,28	0,11	1,96	0,99	0,56	—	1,21	3,27 Cd	Rest	—	109,0	113,0	86,5	24,9	5
III	5	gegossen	4,70	0,09	0,23	0,13	0,55	0,40	0,08	—	0,15 Ti	Rest	—	72,0	81	71,5	24,6	6
IV	6	gepreßt[3]	—	—	—	9,0	0,2	—	—	—	—	Rest	—	87,0	96,1	73	24,5	7
	7	»	—	—	3,8	8,4	—	—	—	—	—	»	—	60,0	63,5	56,5	23,3	8
	8	» [3]	—	0,5	—	Rest	—	—	—	—	—	7,7	—	68,7	76,9	47,5	25,1	9
	9	»	—	—	1,3	»	—	—	—	—	—	0,8	—	47,8	53,6	33,5	25,8	10
	10	»	—	—	—	»	—	—	—	19,0	—	—	—	48,0	50,7	32,5	26,5	11
	11	»	—	—	—	»	2,0	—	—	—	5 Ce	—	—	59,4	65,2	50,5	27,0	12

[1]) Bei Legierung 4 und 5 nach DVL-Analyse; im übrigen nach Soll-Angaben der Hersteller. [2]) Etwa 2 mm starker Ausguß in Verbindung mit einer Stützschale aus Legierung 2. [3]) Heterogenisiert. [4]) Nach Versuchen von W. Bungardt und G. Schaitberger (Veröffentlichung demnächst).

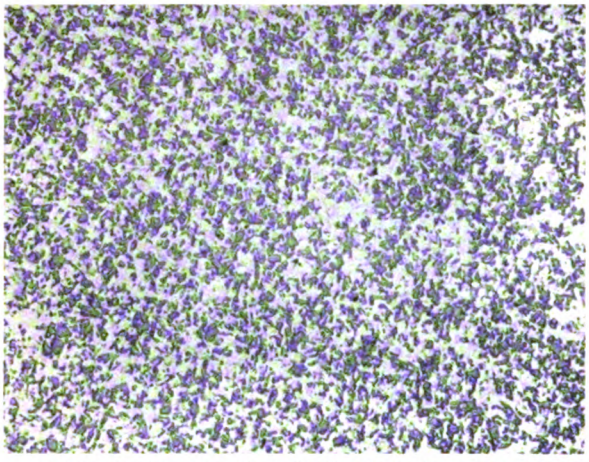


Bild 2. Legierung 1 (Al — 14 Si, 5 Cu) (Vergr. 50fach).

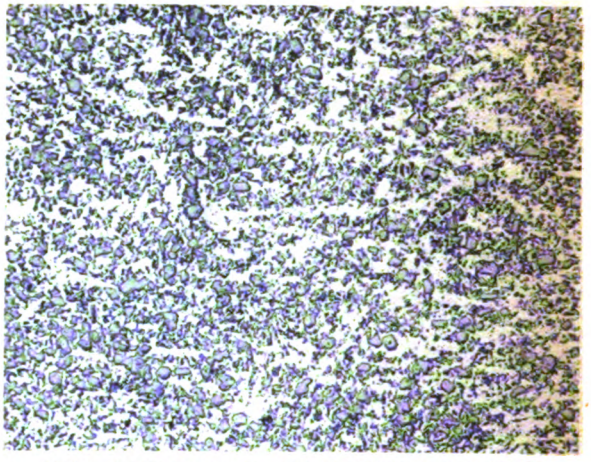
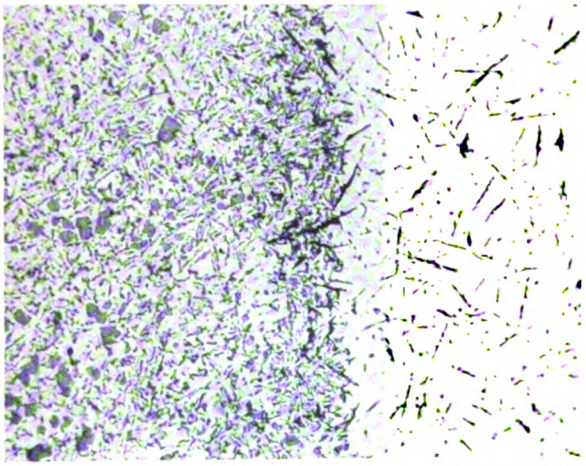


Bild 3. Legierung 2 (Al — 21 Si, 2 Cu) (Vergr. 50fach).



Stützschale aus Leg. 2. Verbundleg.
Bild 4. Verbundleg. 3 (Al — 7 Sb) (Vergr. 50fach).

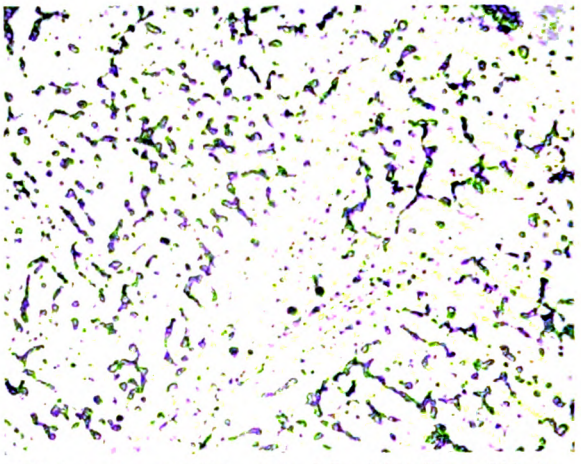


Bild 5. Legierung 4 (Al — 2 Cu, 5 Zn, 3 Cd) (Vergr. 50fach).

steht entweder aus Al-Kristallen (Leg. 3), aus Al-reichen Mischkristallen oder aus Eutektikum.

Die vier Mg-Legierungen, Bild 9 bis 12, wurden in Form von Preßstangen angeliefert und zeigen dementsprechend zeilenartige Anordnung der Einlagerungen und Seigerungen. Die Werkstoffe 8 und 10 bestehen vorwiegend aus Mischkristallen mit schlechtem Diffusionsausgleich. Bei Legierung 9 und 11 liegen die in Zeilen angeordneten Mg_2Si- bzw. Ce-Kristalle in einer weichen Grundmasse aus Mg-reichen Mischkristallen.

Die für die Untersuchung der beschriebenen Lagerwerkstoffe vorgesehenen Laufzapfen sind in Zahlentafel 2 unter Angabe der Oberflächenbehandlung und Härte zusammengestellt. Verwendet wurden vergütete, nitrierte, doppelduro- und einsatzgehärtete Zapfen, deren Oberflächenhärte an der Laufstelle innerhalb der Grenzwerte von 326 und 891 kg/mm² (Vickerszahl bei 30 kg Belastung) liegt. Die Zapfen waren für mehrere Lagerprüfungen vorgesehen und mußten daher nach jedem Versuch bis zur Entfernung der Riefen und Freßstellen überschliffen und sauber nachpoliert werden. Die Oberflächenhärte wurde daher an der Laufstelle gelegentlich nachgeprüft; wie aus Zahlentafel 2 hervorgeht, ist die durch das Nachschleifen etwa bedingte Härteabnahme der oberflächenbehandelten Zapfen nach Abschluß der Untersuchungen unbedeutend.

Digitized by Google

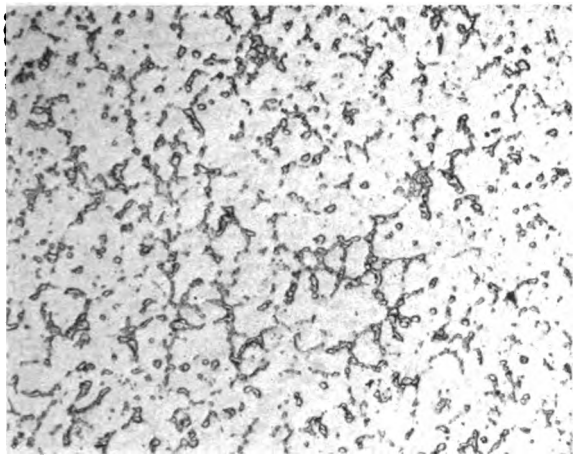


Bild 6. Legierung 5 (Al — 5 Cu) (Vergr. 50fach).

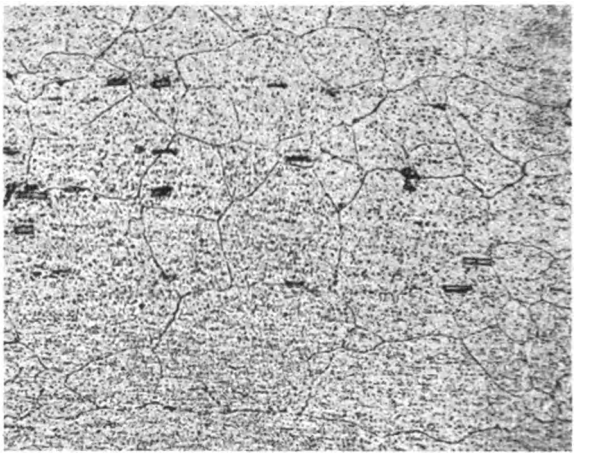
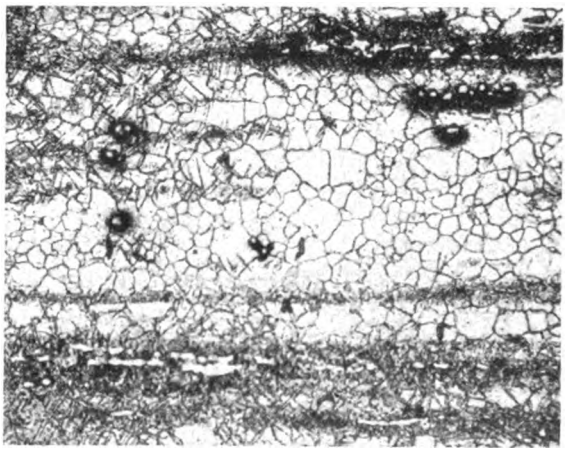


Bild 7. Legierung 6, geätzt (Al — 9 Mg) (Vergr. 200fach).

Bild 9 (rechts). Legierung 8, geätzt (Mg — 8 Al) (Vergr. 200fach).



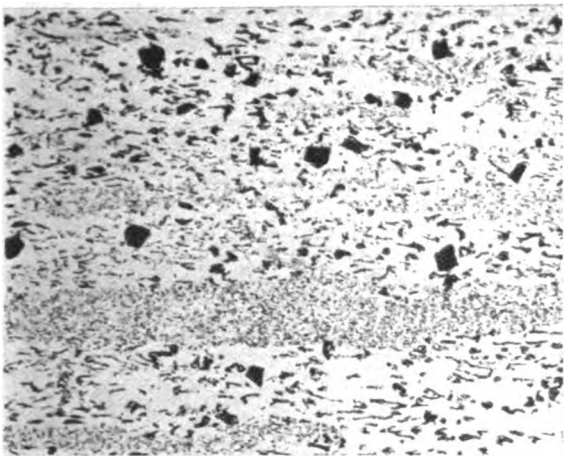


Bild 8. Legierung 7 (Al — 13 Mg_2Si) (Vergr. 100fach).

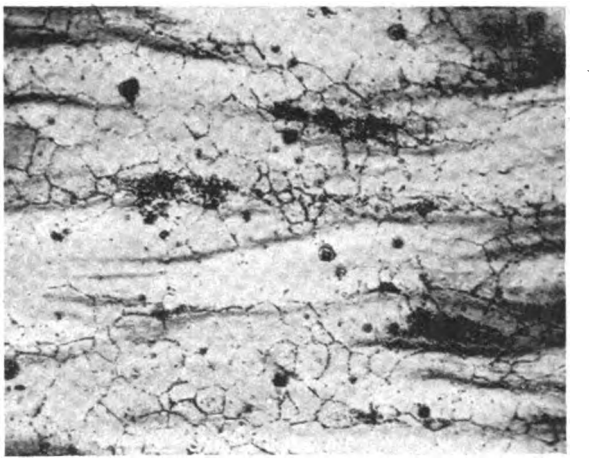


Bild 11 (rechts). Legierung 10, geätzt (Mg — 19 Pb) (Vergr. 200fach).

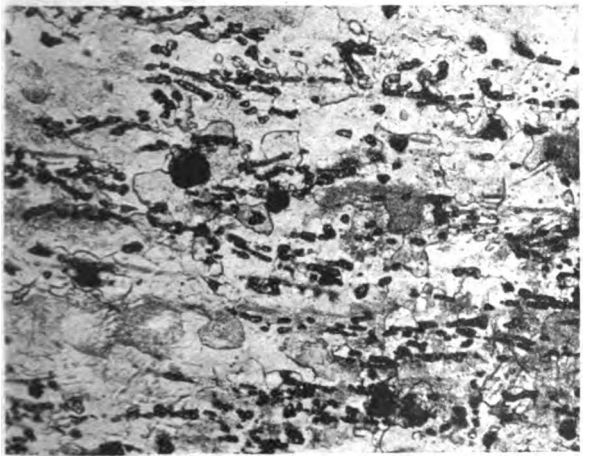


Bild 10. Legierung 9, geätzt (Mg — 1 Si, 1 Al) (Vergr. 100fach).

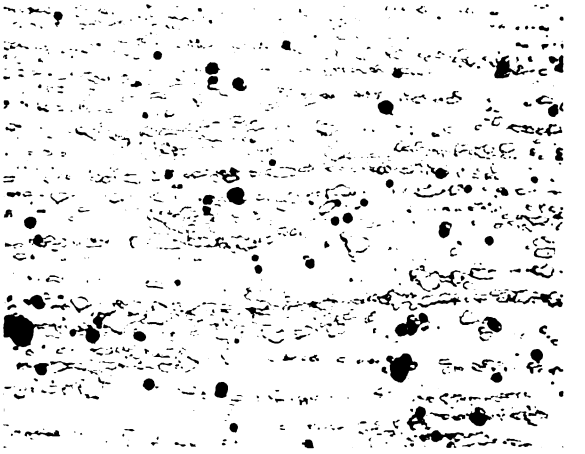


Bild 12 (rechts). Legierung 11 (Mg — 5 Ce, 2 Mn) (Vergr. 100fach).

Digitized by Google

Zahlentafel 2. Härte an der Laufstelle der Versuchszapfen vor und nach den Untersuchungen.

Zapfen Nr.	Werkstoffbezeichnung	Oberflächenzustand	Vor den Versuchen		Nach den Versuchen	
			H 2,5/187,5/30 kg/mm²	Vickerszahl (30 kg Bel.)	Vickerszahl (30 kg Bel.)	(20 kg Bel.)
10 V	VCMo 140	vergütet	329	330	332	323
11 V	VCMo 140	»	329	326	324	327
14 V	D 22 S	»	350	366	369	363
15 V	D 22 S	»	359	375	383	373
5 D	CM 40	doppeldurogehärtet	538	596	420	589
6 D	CM 40	»	569	641	616	632
7 D	CM 40	»	507	558	588	576
12 D	CM 40	»	602	702	654	652
13 D	CM 40	»	632	686	668	663
1 E	EFD 67 G	einsatzgehärtet	653	771	708	714
2 E	EFD 67 G	»	638	711	674	702
8 E	EFD 67 G	»	611	693	654	675
16 E	ECMo 80	»	682	734	747	755
17 E	ECMo 80	»	597	663	711	687
16 E	ECMo 80	ungehärtet	247	268	—	—
3 N	EFKM 54	nitriert	597	792	777	777
4 N	EFKM 54	»	592	792	792	791
9 N	N 54 G	»	573	891	792	846

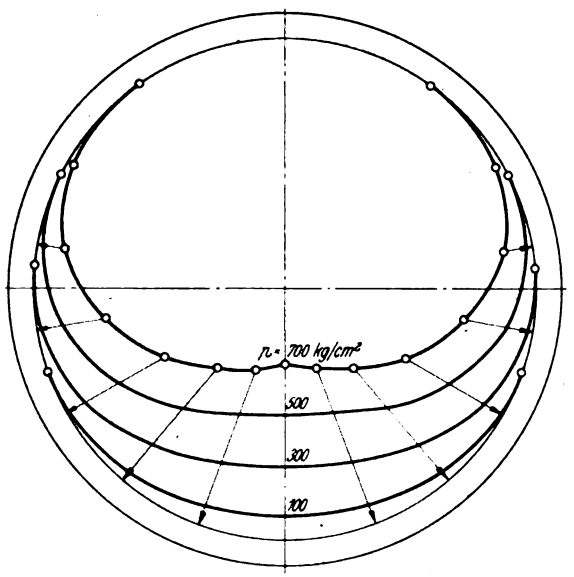
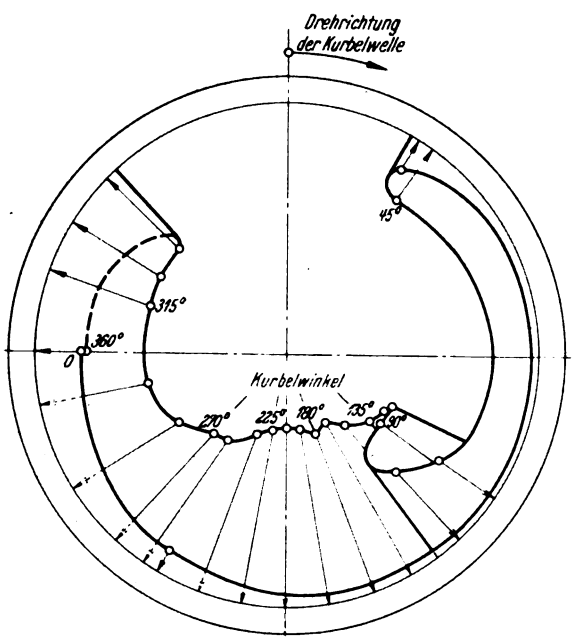


Bild 13. Druckverlauf für verschiedene Beanspruchungen in den auf der DVL-Lagerprüfmaschine mit dynamischer Belastung untersuchten Lagern während einer Lagerumdrehung.



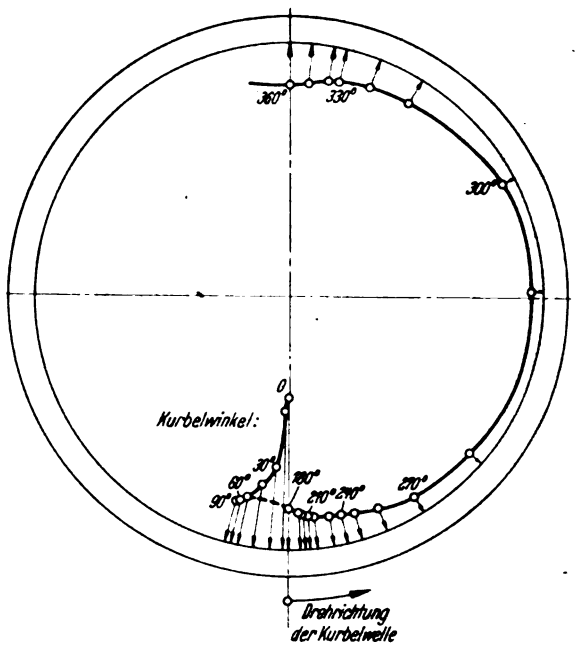


Bild 15. Druckverlauf im Pleuellager eines Reihenmotors während einer Kurbelwellen-Umdrehung.

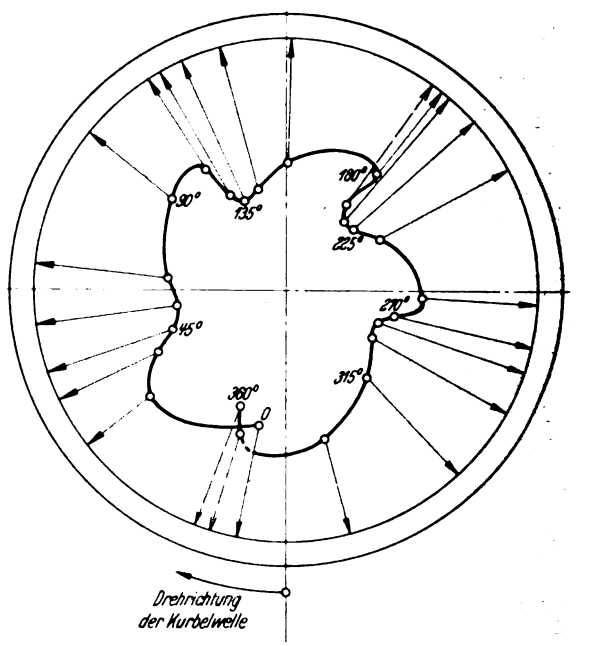


Bild 16. Druckverlauf im Hauptpleuellager eines Sternmotors während einer Kurbelwellen-Umdrehung.

III. Prüfbedingungen und Versuchsdurchführung.

Die in einem früheren Aufsatz[8]) beschriebene Lagerprüfmaschine mit dynamischer Belastung gestattet die Erprobung von Lagerwerkstoffen unter Beanspruchungsverhältnissen, wie sie annähernd in den Hauptlagern von Reihenmotoren auftreten. Bei feststehendem Zapfen und umlaufendem Lager wird die Belastung über einen Kniehebel aufgegeben, derart, daß der Lagerdruck während einer Umdrehung sowohl in der Größe als auch in der Richtung geändert wird. Den hierbei auftretenden Druckverlauf in der Lauffläche des Versuchslagers zeigt Bild 13 für verschiedene Lagerbelastungen. Zum Vergleich sind in Bild 14 und 15 die Lagerdrücke im Grund- und Pleuellager eines Reihenmotors dargestellt. Die ersten Versuchsergebnisse[8]) bestätigten bereits, daß eine Beurteilung der Lagerwerkstoffe bezüglich ihrer voraussichtlichen Verwendbarkeit in Flugmotorenhauptlagern möglich ist, und zwar auf Grund der während eines Prüflaufs von 10 Millionen Umdrehungen

[8]) H. O. Heyer, Lagermetallprüfmaschine mit dynamischer Belastung. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 14.

Bild 14 (links). Druckverlauf im Grundlager eines 6-Zylinder-Reihenmotors während einer Kurbelwellen-Umdrehung.

Digitized by Google

auftretenden Veränderungen bzw. Beschädigungen der Laufflächen von Lager und Zapfen.

Die bei der Weiterentwicklung der Flugmotoren angestrebten Herabsetzung des Leistungsgewichtes durch Drehzahlsteigerung führt zu einem Ausgleich der Druckunterschiede im Lager infolge des stark zunehmenden Einflusses der den Gasdrücken entgegen gerichteten Massenkräfte. Im Hauptpleuellager eines Sternmotors z. B. tritt infolge vorherrschender Wirkung der Massenkräfte eine Druckverteilung gemäß Bild 16 auf, die wesentlich geringere Schwankungen zeigt als die Lagerdrücke in Reihenmotoren; vgl. Bild 14 und 15. Der annähernd gleichbleibende Druckverlauf stellt gegenüber dem stark veränderlichen einen Belastungsfall dar, der einen wesentlich ungünstigeren Einfluß auf das Laufverhalten des Lagerwerkstoffes erwarten läßt. Es sei hier bereits erwähnt, daß bei Untersuchungen von Bleibronzeausgüssen die Tragfähigkeit im Falle dynamischer Prüfung als das Doppelte bis Dreifache des unter ruhender Last ermittelten Lagerhöchstdruckes festgestellt wurde.

In Rücksicht auf die durch Bild 16 gekennzeichneten und allgemein durch den Gang der Weiterentwicklung der Flugmotoren vorgezeichneten Belastungsverhältnisse wurde die Untersuchung vorwiegend unter ruhender Belastung durchgeführt. Zudem werden die Lagerwerkstoffe, die sich hierbei als brauchbar erwiesen haben, den unter gleich hohen dynamischen Belastungen auftretenden Beanspruchungen unbedingt gewachsen sein.

Die Untersuchung erfolgte an Lagerbüchsen von $d = 60$ mm Innen- und $D = 75$ mm Außendurchmesser. Die Breite der mit Diamant bearbeiteten Laufflächen wurde zu $b = 18$ mm entsprechend einem Verhältnis $b/d = 0{,}3$ gewählt, um möglichst hohe Lagerdrücke zu erzielen. Mit diesen Lagerabmessungen konnte bei einer oberen Lastgrenze der Prüfmaschine von 7500 kg eine mittlere Flächenpressung von etwa 700 kg/cm² erreicht werden. Das Lagerspiel wurde zu 1 vT des Durchmessers (0,06 mm) festgelegt und betrug bei den fertig bearbeiteten Versuchslagern 0,9 bis 1,1 vT. Die Umlaufgeschwindigkeit wurde bei sämtlichen Versuchen während des Prüflaufs auf 5 m/s ($n = 1600$ U/min) und die dicht neben der Laufstelle am Zapfen gemessene Betriebstemperatur auf 120° C konstant gehalten, soweit sich dies durch Temperaturregelung des Schmieröls ermöglichen ließ. Zur Schmierung diente Flugmotorenöl »Stanavo 120«, das unter einem Druck von 4 bis 5 atü der unbelasteten Lagerseite durch den hohlen Zapfen zugeführt wurde. Durch regelmäßigen Austausch einer bestimmten Menge von im Umlauf befindlichen und frischem Öl sollte ein annähernd gleichbleibender Zustand des Schmiermittels erreicht werden. Außerdem gelangte das Öl durch ein Feinfilter zur Schmierstelle, so daß die vom Abrieb herrührenden Verunreinigungen größtenteils zurückgehalten wurden.

Bei den Untersuchungen in der DVL-Lagerprüfmaschine sollten die im Flugbetrieb auftretenden normalen und außergewöhnlichen Beanspruchungsfälle der Hauptlager berücksichtigt werden. Zu beachten waren vor allen Dingen die bei Sturzflügen, im Dauerbetrieb sowie beim Versagen der Schmierung auftretenden Beanspruchungsverhältnisse. Im ersten Falle sind kurzzeitige, sehr hohe Lagerbelastungen zu erwarten; hierbei kann bereits eine Zerstörung des Lagerwerkstoffes eingeleitet werden, die nachträglich unter Umständen schon bei normaler Belastung im Dauerbetrieb zum Versagen des Lagers führt. Bei Unterbrechung der Ölzufuhr zum Lager erfolgt eine plötzliche starke Zunahme an trockener Reibung, die innerhalb weniger Sekunden vollkommene Zerstörung des Lagers und anderer Motorteile hervorrufen kann. Es wurde folgende Versuchseinteilung eingehalten:

a) Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze der Lagerwerkstoffe,
b) Untersuchung des Laufverhaltens bei Dauerbeanspruchung,
c) Erfassung der Notlaufeigenschaften bei Unterbrechung der Ölzufuhr.

Der Gang dieser Untersuchungen wird durch die in Zahlentafel 3 und 4 angeführten Beispiele erläutert.

Zur Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze (Zahlentafel 3) wurde der Lagerdruck stufenweise erhöht, und zwar jeweils nach annähernd zweistündiger Laufzeit um 100 oder 200 kg/cm², bis entweder Laufstörungen sich einstellen oder die Belastungsgrenze der Lagerprüfmaschine erreicht war. Die Laststeigerung von Stufe zu Stufe erfolgte allmählich, in der Regel innerhalb 1 bis 2 min, stets aber in der Weise, daß kein wesentlicher Anstieg der Leistungsaufnahme und Betriebstemperatur infolge vorherrschender Trockenreibung auftrat. Mehrmalige Besichtigung der Lager- und Zapfenlauffläche während des Versuchs ermöglichte gleichzeitig die Feststellung derjenigen Höchstlast, die kurzzeitig (Prüfdauer annähernd 2 h) ohne wesentliche Beschädigung der Laufflächen ertragen wurde.

Die Untersuchung der Lagerlegierungen bei Dauerbeanspruchung (Zahlentafel 4) erfolgte durch einen 100stündigen Prüflauf (entsprechend etwa $10 \cdot 10^6$ Beanspruchungswechsel) unter einem mittleren Lagerdruck von $p = 400$ kg/cm². Dieser hohe Prüfdruck, der die für Flugmotorenhauptlager zulässigen Lagerdrücke um etwa 150 kg/cm² übersteigt, war auf Grund der günstigen Prüfergebnisse bei Vorversuchen

Zahlentafel 3. Beispiel für die Ermittlung der Belastungsgrenze unter ruhender und dynamischer Last. Lagerbüchse aus Legierung 7 (DVL-Nr. 1331); Lagerspiel 1,02 vT; Laufzapfen aus D 22 S vergütet (DVL-Nr. 15 V).

Lagerdruck kg/cm²	Betriebstemperatur °C	Laufzeit h	Befund		Zapfen-Abnutzung mm 10^{-3}	Lagerdurchm.-Änderung mm 10^{-3}
			Lager	Zapfen		
1. Prüflauf unter ruhender Last:					gemessen in Kraftrichtung	gemessen in 2 sich senkr. schneidenden Ebenen
0	113	1,00	—	—		
100	116	2,00	schwache Riefen	schwache Riefen		
200	120	2,00	—	—		
300	122	2,00	wie vorher	wie vorher	(nach 1. Versuch)	
400	124	2,25	—	—		
500	123	2,75	wie vorher	wie vorher	links 0	+ 5 0
600	124	2,00	wie vorher	wie vorher	mitte 0	— 5 — 5
700	117	2,25	wie vorher	wie vorher	rechts 0	— 13 — 9
2. Prüflauf unter dynamischer Last:						
0	116	2,00	—	—		
200	115	2,00	—	—		
400	118	2,00	einzelne mittlere Riefen; einige kleine Narben; im übrigen wie vorher	1 mittlere Riefe; im übrigen wie vorher		
600	122	2,00	—	—		
700	120	2,00	wie vorher	schwache und einzelne mittlere Riefen		

Digitized by Google

Zahlentafel 4. Beispiel für Dauer- und Trockenlaufversuch unter ruhender Last; Lagerbüchse aus Legierung 1 (DVL-Nr. 614); Lagerspiel 1,05 vT; Laufzapfen aus VCMo 140 vergütet (DVL-Nr. 10 V).

1. Dauerversuch:

Lagerdruck kg/cm²	Betriebstemperatur °C	Laufzeit h	Befund Lager	Befund Zapfen	Zapfen-Abnutzung mm 10^{-3}	Lagerdurchm.-Änderung mm 10^{-3}
0	107	1,00	—	—	gemessen	gemessen in
100	116	2,25	—	—	in Kraft-	2 sich senkr.
250	122	2,25	sehr schwache Riefen	sehr schwache Riefen	richtung	schneiden-
400	120	16,00	wie vorher	wie vorher		den Ebenen
400	119	47,00	seitlich einige flache Narben; im übrigen wie vorher	wie vorher		
400	121	22,50	wie vorher	wie vorher	links 0	0 | 0
400	121	16,50	wie vorher	einzelne mittlere Riefen; im übrigen wie vorher	mitte 0 rechts 0	0 | 0 — 1 | — 1

2. Prüflauf bei Unterbrechung der Ölzufuhr ($p = 400$ kg/cm²):

Laufzeiten	3″	3″	2″	4″	1′ 27″	9″	1′ 35″	4″
Temperaturanstieg in °C	5°	5°	5°	5°	17°	7°	14°	5°

Befund nach Versuch

Lager: zahlreiche mittlere, links mehrere starke Riefen; Lauffläche stellenweise schwach angelaufen.

Zapfen: mehrere starke Riefen; links schwache Freßspuren.

Lagerdurchm.-Änderung (nach Trockenlauf) mm 10^{-3}

links — 17 | — 17
mitte — 32 | — 30
rechts — 29 | — 37

am Leichtmetall-Lagerwerkstoffen sowie bei der Ermittlung der Tragfähigkeit festgelegt worden. Der Versuch wurde mehrmals unterbrochen, um den Laufflächenzustand von Lager und Zapfen untersuchen und somit den Zerstörungsbeginn feststellen zu können. Die Ermittlung der Abnutzung von Lager und Zapfen erfolgte durch Ausmessen der Durchmesser vor und nach dem 100stündigen Prüflauf bei gleichen Temperaturen. Die Meßstellen lagen in der Mitte und zu beiden Seiten in etwa 2 bis 3 mm Abstand vom Rande der Laufflächen. Am Zapfen wurde die Abnutzung lediglich in Richtung der Kraftwirkung an den drei Meßstellen ermittelt; am Lager waren Messungen in zwei senkrecht zueinanderstehenden, besonders gekennzeichneten Ebenen vorgesehen, die im Falle dynamischer Belastung in Richtung des größten Lagerdruckes und senkrecht dazu lagen.

Die Versuche zur Ermittlung der Notlaufeigenschaften bei eingestellter Ölzufuhr (Zahlentafel 4) wurden an bereits geprüften, noch lauffähigen Lagern im Anschluß an die Höchstlastbestimmung oder nach dem Dauerversuch vorgenommen. Die Belastungsverhältnisse entsprachen hierbei den für den 100stündigen Prüflauf festgelegten. Die Durchführung dieser Versuche erfolgte in der Weise, daß die Ölzufuhr durch Schließen eines Absperrventils unterbrochen wurde, sobald die für Dauerprüfungen vorgesehenen Betriebsverhältnisse erreicht waren. Festgestellt wurden hierbei der Anstieg der Betriebstemperatur und die Auslaufzeit bis zur Auslösung der Prüfmaschine, die bei einer Leistungssteigerung der Antriebsmotoren um etwa 50 vH eintrat.

Schließlich ist noch auf folgende Störungen bzw. Unregelmäßigkeiten bei der Versuchsdurchführung hinzuweisen. Infolge der starren Lagerung in der Prüfmaschine war es unvermeidlich, daß bei schwach konischer Ausführung des Zapfens und Lagers zu Beginn des Versuches mehr oder weniger starke Kantenpressung auftrat, unter deren Wirkung schmale blanke Laufspuren auf der betreffenden Seite der Lagerlauffläche erzeugt wurden. In den meisten Fällen konnte diese Störung durch geringe Neigungsänderung des Zapfens rechtzeitig behoben werden. Ferner ließ sich bei Versuchen unter ruhender Belastung wegen der durch Bearbeitungsungenauigkeiten bedingten Exzentrizität zwischen Lager und Aufnahmehülse nicht immer ein praktisch gleichbleibender Lagerdruck erzielen. Durch den überlagerten sinusförmigen Druckverlauf wurden Schwankungen bis zu ± 40 kg/cm² gegenüber dem Soll-Lagerdruck hervorgerufen.

IV. Versuchsergebnisse.

Von einer Mitteilung der ausführlichen Versuchsergebnisse nach Art der Darstellungen in Zahlentafel 3 und 4 mußte abgesehen werden. Die Endergebnisse der Tragfähigkeitsbestimmungen, der Dauer- und Trockenlaufversuche sind in den Zahlentafeln 6 bis 8 unter Angabe der Mittel- bzw. Grenzwerte übersichtlich zusammengestellt.

a) Tragfähigkeitsgrenze unter ruhender und dynamischer Belastung.

Für die Versuche zur Ermittlung der Belastbarkeit der Leichtmetall-Lager war durchweg ruhende Belastung vorgesehen; lediglich bei unbedeutender Beschädigung der Laufflächen wurde anschließend mit demselben Versuchslager auch noch ein dynamischer Prüflauf durchgeführt. Die Lager liefen vorwiegend auf Zapfen mit gehärteter Lauffläche. Im übrigen schien besondere Rücksichtnahme auf die Härte des Lagerwerkstoffes bei der Wahl des Laufzapfens nicht erforderlich, nachdem festgestellt wurde, daß sogar die härteste Legierung (Leg. 1) in Verbindung mit einem vergüteten Zapfen bis zu dem höchsten, bei den vorliegenden Versuchen überhaupt verwirklichten Lagerdruck störungsfrei belastet werden konnte.

Sowohl die Al- als auch die Mg-Legierungen zeigen sehr geringe Belastungsempfindlichkeit; die Lager können innerhalb kurzer Zeit störungsfrei, d. h. ohne wesentlichen Leistungs- und Temperaturanstieg, hoch belastet werden. In mehreren Fällen wurde eine Drucksteigerung in Stufen von 200 kg/cm² nach jeweils zweistündiger Laufzeit ohne weiteres von den betreffenden Lagern ertragen. An dieser Stelle sei erwähnt, daß an Bleibronzelagern mit wenigen Ausnahmen bereits bei Lagerdrücken von 100 bis 150 kg/cm² Laufstörungen (Temperatur- und Leistungsanstieg) auftraten, die erst während des weiteren Einlaufvorganges beseitigt wurden.

Die Laufflächen der Leichtmetallager werden vorwiegend durch Riefen, weniger durch Narben und Ausbruchstellen verletzt; die Zerstörung des Lagerwerkstoffes erfolgt durch Fressen, Rißbildung und Verformung. Um die Übersicht der Zusammenstellungen in den Zahlentafeln 6 bis 8 zu erleichtern, wurde versucht, die beschreibenden Angaben über den Laufflächenzustand durch Ziffern zu ersetzen. In Zahlentafel 5 sind die im Laufe der Untersuchungen festgestellten Oberflächenveränderungen in einer dem Grade der Zerstörung entsprechenden Reihenfolge angeführt und sinngemäß durch Bewertungsziffern gekennzeichnet. Zur Erläuterung dieser Angaben sind in Bild 17 bis 25 die Laufflächen einiger untersuchter Versuchslager dargestellt. Von dem nach Zahlentafel 5 bestimmten Gütegrad der Laufflächen kann nicht in allen Fällen auf das Gleitverhalten des Lagerwerkstoffes in dem betreffenden Zustande geschlossen werden. Zahlreiche mittlere Riefen z. B. verursachen größere Laufstörungen als einzelne starke; selbst durch einige Risse in der Lauffläche erfolgt keine merkbare Beeinträchtigung der Gleitfähigkeit.

Digitized by Google

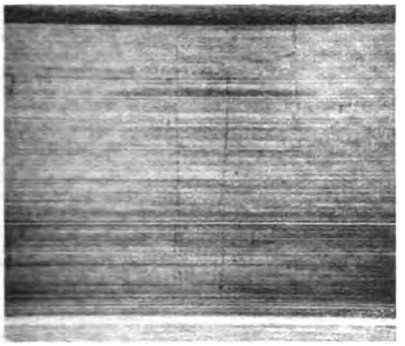


Bild 17. Leg. 1 (Versuchslager 612). Schwache und einzelne mittlere Riefen nach 100-stünd. Prüflauf unter ruhender Last mit $p = 400$ kg/cm² (in der Mitte Meßspuren) (Vergr. 2fach).

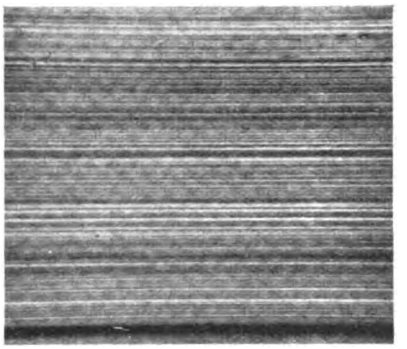


Bild 18. Leg. 3 (Versuchslager 636). Zahlreiche starke Riefen nach 9stündigem Lauf unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² auf ungehärtetem Laufzapfen (Vergr. 2fach).

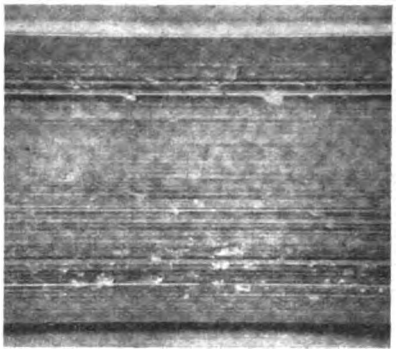


Bild 19. Leg. 5 (Versuchslager 1002). Seitlich zahlreiche flache Narben und schwache Ausbruchstellen; im übrigen schwache und einige mittlere Riefen. Zustand nach 107-stündigem Lauf unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² (Vergr. 2fach).

Bild 20. Leg. 3 (Versuchslager 637). Starke Rißbildung nach 48stündigem Prüflauf unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² (Verg. 2fach).

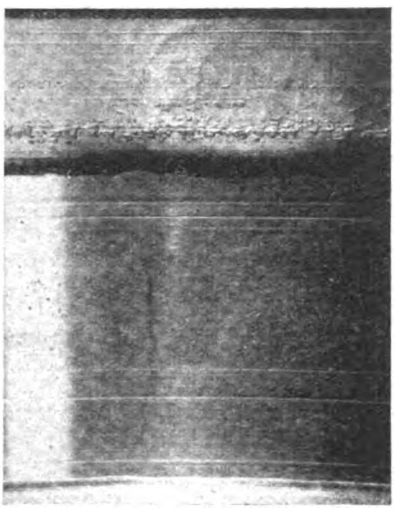


Bild 21. Leg. 3 (Versuchslager 632 B). Rißbildung infolge starker Verformung; zahlreiche schwache Ausbruchstellen; Lockerung des Ausgusses neben der Lauffläche (oben). Zustand nach Prüflauf unter ruhender Last mit $p = 600$ kg/cm² (Vergr. 2fach).

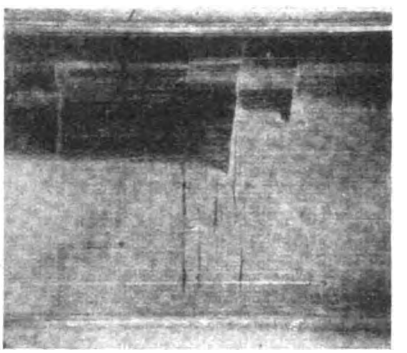


Bild 22. Leg. 7 (Versuchslager 1332). Rißbildung infolge starker Kantenpressung nach 17stündigem Lauf unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² (in der Mitte Meßspuren) (Vergr. 2fach).

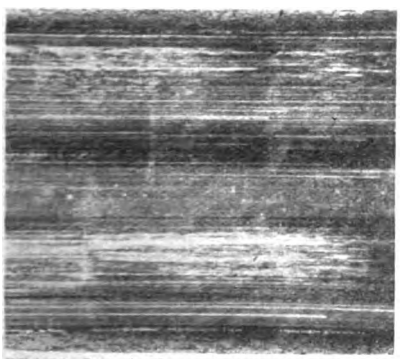


Bild 23. Leg. 2 (Versuchslager 608). Schwache Freßspuren und Längsrisse nach 3 Trokkenlaufversuchen unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² (Vergr. 2fach).

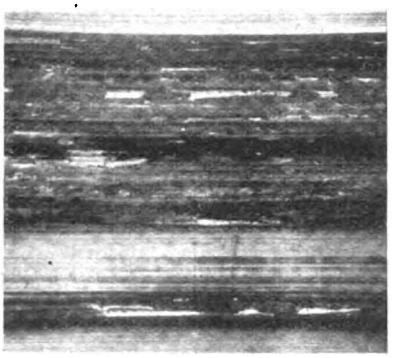


Bild 24. Leg. 6 (Versuchslager 1322). Mittlere Freßstellen; Lauffläche stellenweise angelaufen. Zustand nach 8 Trockenlaufversuchen unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² (Vergr. 2fach).

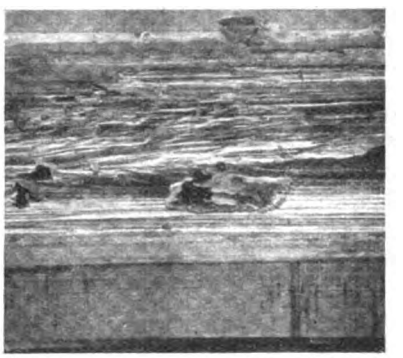


Bild 25. Leg. 11 (Versuchslager 1371). Vollständige Zerstörung der Lauffläche durch starke Freßspuren nach dem 1. Trockenlaufversuch unter ruhender Belastung mit $p = 400$ kg/cm² (unten rechts Meßspuren) (Vergr. 2fach).

Gemäß Zahlentafel 6 weisen fast sämtliche Al-Legierungen eine überaus hohe Belastbarkeit sowohl bei dynamischer als auch bei ruhender Belastung auf. Der durch die Belastungsgrenze der Lagerprüfmaschine gegebene höchstzulässige spez. Prüfdruck von 700 kg/cm² reichte nicht aus, um die durch das Auftreten trockener Reibung oder durch Werkstoffzerstörung bedingte Grenze der Tragfähigkeit festzustellen. Im Falle der eutektischen Al-Si-Legierung 1 konnte der mittlere Lagerdruck sogar bis $p = 925$ kg/cm² ohne merkbare Laufstörungen gesteigert werden; bei dieser hohen Beanspruchung wurde allerdings das Getriebe der Prüfmaschine derart beschädigt, daß für die weiteren Untersuchungen der zulässige Prüfdruck auf den bereits angegebenen niedrigeren Wert festgelegt werden mußte. Lediglich die weiche Al-Sb-Legierung 3 weist mit $p = 600$ kg/cm² eine geringere Belastbarkeit auf, die jedoch weniger durch Laufstörungen als vielmehr durch starke plastische Verformung bedingt ist. Das Lagerspiel wurde infolge Auswalzens derart vergrößert, daß ein starker Druckabfall in der Ölzuleitung eintrat; die Gleitfähigkeit des Lagerwerkstoffes ist jedoch bei 600 kg/cm² noch nicht erschöpft.

Auch die Versuchslager aus den beiden Mg-Legierungen 9 und 10 von annähernd gleicher Härte wie Legierung 3 versagen infolge vorzeitig einsetzender plastischer Verformung bereits bei einem mittleren Lagerdruck von 470 bzw. 500 kg/cm². Bei den härteren Lagerwerkstoffen 8 und 11

Digitized by Google

Zahlentafel 5. Bewertung des Zustandes der Zapfen- und Laufflächen.

Bewertungsziffer	Zustand der Lauffläche von Zapfen[1]) und Lager					Bemerkungen
	Riefen (*r*)	Flache Narben (*n*)	Ausbruchstellen (*a*)	Risse (*rs*)	Freßstellen (*f*)	
0	Lauffläche glatt					einwandfrei betriebsfähig
1	schwache	—	—	—	—	
2	einzelne mittlere	einige	einzelne schwache	—	—	
3	mehrere mittlere	zahlreiche	mehrere schwache	—	—	bedingt betriebsfähig. Beseitigung d. Oberflächenverletzungen od. Austausch zweckmäßig
4	zahlreiche mittlere	—	zahlreiche schwache	—	—	
5	einzelne starke	—	—	einzelne kurze	schwache	zerstört oder betriebsunfähig. Beseitigung oder Austausch erforderlich
6	mehrere starke	—	—	mehrere kurze	mittlere	
7	zahlreiche starke	—	—	lange	einige starke	
8	—	—	—	—	zahlreiche starke	

[1]) An den Laufzapfen wurden nur Riefen und Freßspuren beobachtet.

Zahlentafel 6. Ergebnisse bei Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze.

Lager aus	Lager-Nr.	Zapfen-Nr.	Lagerspiel vT	Tragfähigkeitsgrenze bei ruh. Belastung kg/cm²	Tragfähigkeitsgrenze bei dyn. Belastung kg/cm²	Befund nach Versuch Lager	Befund nach Versuch Zapfen	Gesamtlaufzeit unter Belastung h	Lagerdurchm.-Änderung[1]) (infolge Abnutzung und Verformung) mm · 10⁻³		Zapfen-Abnutzung mm · 10³	Kurzzeitig zulässiger Lagerdruck[2]) kg/cm²
Al-Leg. 1	611	11 V	0,90	> 925	—	1 *r*	1 *r*	47	+ 2	— 2	2	> 925
	611	11 V	—	—	> 925	2 *r*	2 *r*	45	+ 10	+ 7	1	> 925
Al-Leg. 2	604	7 D	0,90	—	> 700	2 *n*	1 *r*	110	+ 3	— 3	0	> 700
Al-Leg. 3	632 B	7 D	1,13	600	—	(verformt) 7 *rs*	2 *r*	12	+ 129	+ 128	1	300 bis 400
Al-Leg. 4	802	3 N	0,93	—	> 750	1 *r*	1 *r*	15	— 7	— 7	0	> 750
	802	3 N	—	> 700	—	1 *r*	1 *r*	7	+ 3	+ 3	0	> 700
Al-Leg. 5	1001	6 D	1,10	—	> 700	1 *r*	1 *r*	15	+ 2	— 2	0	> 700
	1001	6 D	—	> 700	—	2 *n*	1 *r*	7	+ 1	+ 5	1	> 700
Al-Leg. 6	1321	11 V	1,05	> 700	—	2 *r*	2 *r*	14	— 15	— 13	0	> 700
	1321	11 V	—	—	> 700	2 *r*	2 *r*	8	nicht gemessen			> 700
Al-Leg. 7	1331	15 V	1,02	> 700	—	1 *r*	1 *r*	15	— 4	— 5	0	> 700
	1331	15 V	—	—	> 700	2 *r*, *n*	2 *r*	8	nicht gemessen			> 700
Mg-Leg. 8	1341	5 D	0,92	600	—	6 *r*, *f*	5 *f*	12	— 125	— 103	0	400
Mg-Leg. 9	1351	6 D	1,00	500	—	(verformt) 7 *rs*	0	10	+ 208	+ 211	0	400
Mg-Leg. 10	1362	7 D	1,05	470	—	(verformt) 1 *r*	1 *r*	9	+ 429	+ 424	0	300 bis 400
Mg-Leg. 11	1373	15 V	1,02	650	—	3 *r*; 7 *rs*	2 *r*	15	— 25	— 11	1	300 bis 400

[1]) Gemessen in zwei senkrecht zueinanderstehenden Ebenen. [2]) Unter dem die Zapfen- und Lagerlaufflächen höchstens durch einzelne mittlere Riefen, flache Narben und schwache Ausbruchstellen (Bewertungsziffer 2) verletzt werden.

dagegen treten infolge starker Zunahme an trockener Reibung Laufstörungen auf, die höhere Drücke als 600 bzw. 650 kg/cm² nicht zulassen. Die Belastungsgrenze der untersuchten Mg-Legierungen liegt also unterhalb der für die härteren Al-Legierungen ermittelten Werte.

In Bild 26, in der die Belastbarkeitsgrenze in Abhängigkeit von der Warmhärte (bei 150° C) der Lagerwerkstoffe dargestellt ist, treten die Unterschiede in der Tragfähigkeit der Al- und Mg-Legierungen deutlicher hervor. Die um etwa 100 kg/cm² höher liegende Grenze der Belastbarkeit der Al-Verbundlegierung 3 gegenüber den Mg-Legierungen 9 und 10 von annähernd gleicher Härte ist auf Behinderung der plastischen Verformung durch die härtere Stützschale zurückzuführen.

Die unter den erwähnten hohen Drücken auftretenden Beschädigungen der Zapfen- und Lagerlaufflächen (vgl. Zahlentafel 6) sind bei den härteren Al-Legierungen gering und verursachen keine merkbaren Laufstörungen. Selbst nach mehrstündiger Einwirkung eines Lagerdruckes von 925 kg/cm² (Leg. 1) sind die Laufflächen noch in gut betriebsfähigem Zustande. Es treten fast ausschließlich Verletzungen durch schwache und einzelne mittlere Riefen auf. Die weiche Legierung 3 neigt bei plastischer Verformung zu starker Rißbildung; der zugehörige Laufzapfen wird jedoch nicht wesentlich angegriffen. Bei der Verformung der weicheren Mg-Legierungen unter einem Druck von etwa 500 kg/cm² tritt Rißbildung nur am Lager aus Legierung 9 auf; an Legierung 10 zeigen sich lediglich einige schwache

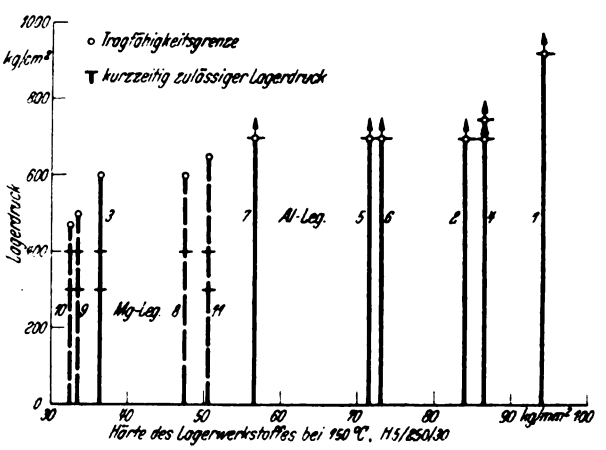


Bild 26. Tragfähigkeitsgrenze und kurzzeitig zulässiger Lagerdruck in Abhängigkeit von der Warmhärte des Lagerwerkstoffes.

Digitized by Google

Riefen. Die Laufflächen der zugehörigen Zapfen sind gar nicht oder nur sehr unbedeutend verletzt. Dagegen weisen die bei Untersuchung der härteren Mg-Legierungen 8 und 11 verwendeten Laufzapfen stärkere Beschädigungen auf; die Lager selbst werden durch Riefen, Freßstellen und Risse zerstört.

Um die durch das Auswalzen unter den hohen Lagerdrücken etwa hervorgerufenen Durchmessererweiterungen genauer zu erfassen, wurden die Lagerdurchmesser vor und nach dem Versuch an den in Abschnitt III bereits erwähnten Stellen ausgemessen. Aus den in Zahlentafel 6 angeführten negativen und positiven Mittelwerten für die Durchmesseränderungen ist zu ersehen, daß sowohl starke Durchmessererweiterungen als auch Schrumpfungen auftreten. Die für die Lager aus den weichen Al- und Mg-Legierungen 3, 9 und 10 ermittelte Erweiterung von etwa 0,13 bis 0,43 mm entspricht der bei den Versuchen durch die Druckabnahme des Schmieröls bereits angedeuteten starken Zunahme des Lagerspiels. Derartige Spielvergrößerungen führen zu einer wesentlichen Verschlechterung der Schmierverhältnisse; hierauf ist auch das vorzeitige Versagen des Lagers aus der Pb-haltigen Mg-Legierung 10 (Auslösung der Prüfmaschine infolge Leistungssteigerung) zurückzuführen. Die negativen Durchmesseränderungen (Schrumpfungen) sind bedingt durch die hohe Wärmeausdehnungszahl der Leichtmetalle (vgl. Zahlentafel 1). Die in eine Stahlhülse mit Treibsitz eingebauten Versuchslager werden bei der während des Prüflaufs herrschenden Betriebstemperatur von 120° C Druckspannungen ausgesetzt, die, falls infolge geringer Warmhärte nicht etwa ein Auswalzen des Lagers erfolgt, zu bleibenden Druckverformungen (tangentialen Stauchungen) und damit nach dem Erkalten zu einer Abnahme des Lagerdurchmessers führen. Die aus Abnutzung und plastischer Verformung resultierenden Durchmesseränderungen an Lagern aus den härteren Al-Legierungen sind gering und praktisch bedeutungslos. Die Mg-Legierungen 8 und 11 weisen entsprechend ihrer größeren Wärmeausdehnungszahl durchschnittlich eine stärkere Schrumpfung auf als die Al-Legierungen. Die mitunter an den verschiedenen Meßstellen voneinander abweichenden Durchmesseränderungen sind auf Spannungsunterschiede infolge ungleichmäßigen Sitzes der Lager in der Stahlhülse zurückzuführen.

Die Abnutzung an den Zapfen ist durchweg sehr gering; sie ist entweder überhaupt nicht meßbar oder erreicht Werte von der Größenordnung der Meßgenauigkeit.

Die höchsten, kurzzeitig ertragbaren Lagerdrücke, unter deren Einwirkung die Zapfen- und Lagerlaufflächen nach etwa zweistündigem Lauf noch keine wesentlichen Beschädigungen erleiden, wurden auf Grund der Beobachtungen während der Versuche ermittelt. Für die Festlegung der in Zahlentafel 6 und Bild 26 eingetragenen zulässigen Lagerhöchstdrücke bei begrenzter Wirkungsdauer ist maßgebend, daß die Laufflächen noch betrieblich einwandfrei sind, d. h. höchstens die Bewertungsziffer 2 nach Zahlentafel 5 erreichen. Die härteren Al-Legierungen weisen auch hier wieder die günstigeren Ergebnisse auf. Sie sind bei betrieblich einwandfreiem Verhalten mindestens bis zu den in der Prüfmaschine überhaupt erreichten größten Lagerdrücken (700 bzw. 925 kg/cm²) belastbar. Daraus dürfte hervorgehen, daß die Grenze der Tragfähigkeit noch wesentlich höher anzunehmen ist. Dagegen liegt der höchstzulässige Lagerdruck der Mg-Legierungen und Al-Verbundlegierung 3 zwischen 300 und 400 kg/cm². Innerhalb der nächsten Druckstufe treten am Lager aus Legierung 8 stärkere Riefen aus; die Legierung 9 und 10 versagen bereits bei 470 bzw. 500 kg/cm² infolge plastischer Verformung und bei den Legierungen 3 und 11 stellen sich oberhalb 300 bzw. 400 kg/cm² Risse ein.

b) Verhalten bei Dauerbeanspruchung.

Die Dauerversuche wurden fast durchweg mit ruhender Belastung unter den in Abschnitt III geschilderten Prüfbedingungen durchgeführt. Von einer Untersuchung der beiden weichen Mg-Legierungen 9 und 10 wurde wegen der niedrigen Tragfähigkeitsgrenze dieser Werkstoffe (470 bzw. 500 kg/cm²) abgesehen. Die anderen Legierungen sollten zumindest in Verbindung mit einem der gehärteten Laufzapfen, einige Werkstoffe mit günstigen Laufeigenschaften auch auf vergüteten Zapfen untersucht werden. Im übrigen wurden die Erfahrungen der Lagerhersteller bezüglich der Verwendung geeigneter Zapfenwerkstoffe nach Möglichkeit berücksichtigt.

Gemäß Zahlentafel 7 sind die Lager aus den Si-haltigen Al-Legierungen 1 und 2 sowie aus Legierung 4 mit Zusätzen von Zn, Cu und Cd nach 100stündigem Prüflauf unter einem Lagerdruck von 400 kg/cm² noch in einwandfrei betriebsfähigem Zustande. Auch die zugehörigen Laufzapfen zeigen nur unbedeutende Verletzungen durch schwache oder einzelne mittlere Riefen. Legierung 5 mit 5 vH Cu und die Al-Mg-Preßlegierungen 6 und 7 neigen zu stärkerer Narben- bzw. Riefenbildung. Fast alle Lager der Al-Legierungen weisen in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der in Abschnitt IVa besprochenen Versuche (vgl. Zahlentafel 6) geringe Durchmesseränderungen nach dem Dauerversuch auf. Lediglich bei den Lagern 1002 und

Zahlentafel 7. Ergebnisse der Dauerversuche.

Lager aus	Lager-Nr.	Zapfen-Nr.	Lagerspiel vT	Lagerdruck (Dauerbelastung) bei ruh. Belastung kg/cm²	Lagerdruck (Dauerbelastung) bei dyn. Belastung kg/cm²	Befund nach Versuch Lager	Befund nach Versuch Zapfen	Laufzeit bei Dauerbelastung h	Lagerdurchm.-Änderung (infolge Abnutzung und Verformung) mm · 10⁻³		Zapfen-Abnutzung mm · 10⁻³	Laufzeit[1]) b. einwandfr. Laufverhalten h
Al-Leg. 1	614	10 V	1,05	400	—	2 *n*	2 *r*	102	0	0	0	102
	612	5 D	0,85	400	—	2 *r*	1 *r*	100	— 1	0	1	100
	615	16 E	0,98	400	—	2 *n*	2 *r*	100	+ 1	0	3	100
Al-Leg. 2	606	10 V	1,23	400	—	2 *n*	1 *r*	110	+ 3	+ 2	0	110
	604	7 D	0,90	400	—	2 *n*	1 *r*	92	s. Zahlentafel 6			92
	608	13 D	0,97	400	—	2 *n*	1 *r*	100	— 1	— 1	2	100
	609	17 E	1,07	400	—	2 *n*	1 *r*	100	0	+ 2	2	100
Al-Leg. 3	637	11 V	1,15	400	—	7 *rs*	2 *r*	48	+ 3	0	4	22
	634 A	13 D	0,92	400	—	7 *rs*	3 *r*	95	— 7	— 3	5	0
	635	5 D	1,00	—	400	2 *n*	1 *r*	111	+ 5	+ 7	—	111
Al-Leg. 4	804	9 N	0,85	400	—	1 *r*	2 *r*	102	0	0	0	102
Al-Leg. 5	1002	12 D	1,02	400	—	4 *a*, *n*	2 *r*	107	— 60	— 55	2	16
Al-Leg. 6	1322	7 D	1,10	400	—	2 *r*, *n*	3 *r*	100	— 7	— 8	2	23
Al-Leg. 7	1333	12 D	1,00	400	—	2 *r*	3 *r*	99	— 37	— 24	0	68
Mg-Leg. 8	1342	5 D	1,17	400	—	6 *r*, *f*	5 *f*	21	— 96	— 73	0	20
Mg-Leg. 11	1372	12 D	0,97	400	—	5 *rs*	1 *r*	100	— 32	— 8	0	72

[1]) Die Zapfen- und Lagerlaufflächen weisen nach den angegebenen Laufzeiten höchstens Verletzungen durch einzelne mittlere Riefen, flache Narben und schwache Ausbruchstellen (Bewertungsziffer 2) auf.

Digitized by Google

1333 (Leg. 5 und 7) wird eine größere Abnahme des Durchmessers festgestellt, die sich auf hohe Schrumpfspannungen im Lager infolge zu strammen Sitzes in der Stahlhülse zurückführen läßt. Die Abnutzung an den in Verbindung mit den härteren Al-Legierungen verwendeten Laufzapfen erreicht in einigen Fällen die Größenordnung der Meßgenauigkeit und ist praktisch belanglos. Bemerkenswert ist allerdings, daß die vergüteten Zapfen der Lager 614 (Leg. 1) und 606 (Leg. 2) keinen meßbaren Verschleiß aufweisen, also bezüglich ihrer Verwendbarkeit nicht hinter den gehärteten Zapfen zurückstehen. Im übrigen zeigen diese Versuche, daß mit vergüteten, doppelduro- und einsatzgehärteten Zapfen gleich günstiges Laufverhalten erzielt wird.

Die Lager 637 und 634 A aus der Al-Legierung 3 werden bei Dauerbeanspruchung unter ruhender Last bereits nach kurzem Prüflauf durch Rißbildung zerstört. Während die im vorigen Abschnitt erwähnten Verformungsrisse vorzugsweise in Längsrichtung des Lagers auftreten (vgl. Bild 21) weisen die Dauerrisse nach Bild 27 einen unregelmäßigen Verlauf auf. Bild 28 zeigt die Lauffläche eines Lagers aus dieser Legierung nach sorgfältiger Bearbeitung mit dem Diamanten; die dunkleren Stellen deuten, wie aus Bild 29 bei stärkerer Vergrößerung näher hervorgeht, auf Ansammlungen von AlSb-Kristallen hin. Mit Hilfe einer binokularen Lupe ließ sich einwandfrei feststellen, daß die Tragkristalle aus der Lauffläche herausgerissen worden sind; in Bild 29 sind einige dieser Ausbruchstellen deutlich zu erkennen. Auch die stärkere Abnutzung der in Verbindung mit dieser weichen Legierung verwendeten Zapfen läßt sich auf die Wirkung ausgebrochener AlSb-Kristalle zurückführen. Es ist also anzunehmen, daß der Zusammenhang zwischen den

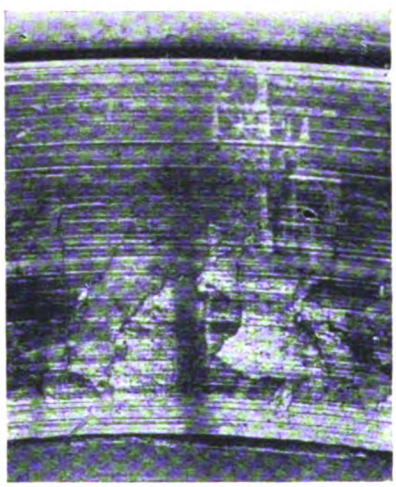


Bild 27. Ermüdungsrisse in der Lauffläche eines Lagers aus Leg. 3 (Vergr. 3fach).

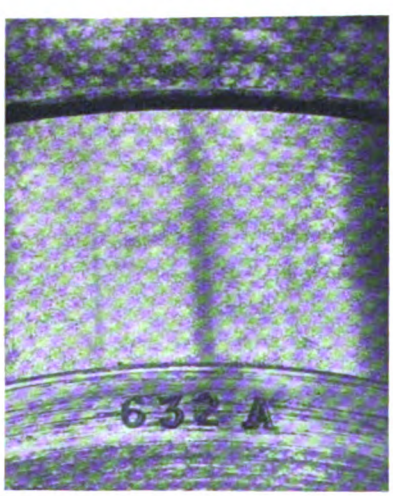


Bild 28. Lauffläche nach Bearbeitung mit Diamant (Vergr. 2fach).

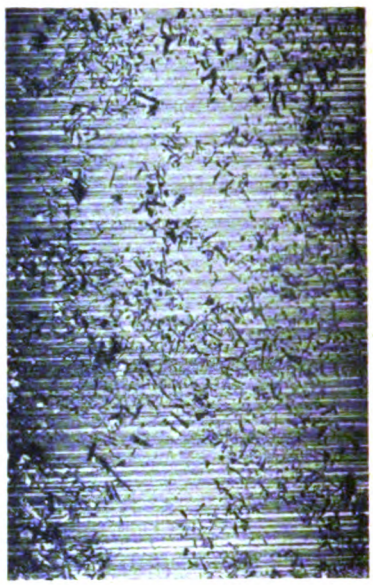


Bild 29. Ausbruchstellen der Al Sb-Kristalle nach Bearbeitung der Lauffläche mit Diamant (Vergr. 20fach).

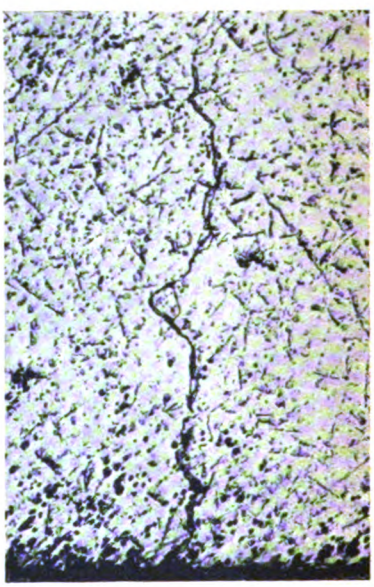


Bild 30. Rißverlauf im Innern des Lagerwerkstoffes (Vergr. 50fach).

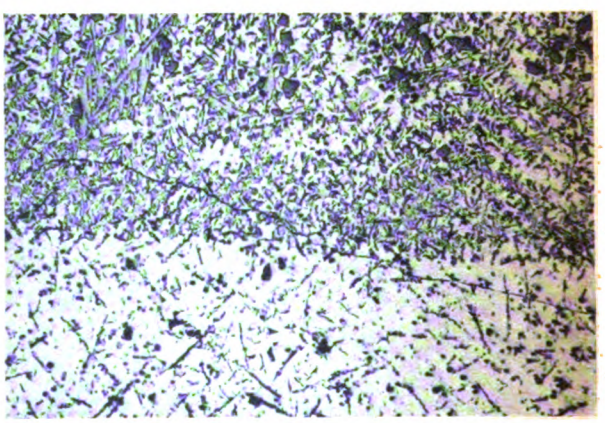


Bild 31. Tangentialriß in der Übergangszone (Vergr. 50fach).

Bild 27 bis 31. Rißbildung an Lagern aus der Al-Verbundlegierung 3.

Digitized by Google

Tragkristallen und der Grundmasse sehr locker ist. Die Einschlüsse wirken somit als scharfe Kerben und setzen die Dauerfestigkeit des Werkstoffes wesentlich herab. Die Dauerrisse gehen vermutlich von den mit Al-Sb-Kristallen angereicherten, dunkleren Stellen in der Lauffläche aus. Ferner zeigt Bild 30, daß sich die Risse im Innern des Werkstoffes bevorzugt in Richtung der nadelförmigen Einlagerungen fortpflanzen. Hervorzuheben ist noch, daß an einem Lager aus Legierung 3 mit einwandfreier Lauffläche nach 111stündigem, störungsfreiem Lauf unter dynamischer Belastung mit einem Lagerdruck von 400 kg/cm² weder Risse noch sonstige stärkere Verletzungen festgestellt werden konnten; vgl. Zahlentafel 7, Lager 635. Einen Sonderfall der Rißbildung bei dieser Verbundlegierung stellt Bild 31 dar. Dieser Tangentialriß liegt in der Bindungszone und verläuft teilweise durch den Ausguß und durch die Übergangsschicht. Die Entstehung dieses Risses läßt sich auf folgende Weise erklären. Gemäß Zahlentafel 1 ist der Wärmeausdehnungskoeffizient des Ausgußmetalls (Leg. 3) bedeutend größer als der des für die Grundschale verwendeten Werkstoffes (Leg. 2). Bei der Erwärmung auf Betriebstemperatur wird demnach die Ausgußschicht infolge Behinderung der Wärmeausdehnung Druckspannungen ausgesetzt, die unter Umständen zu einer bleibenden Stauchung dieses weichen Werkstoffes in tangentialer Richtung führen. In diesem Falle treten bei der Abkühlung des Lagers an der Innenschicht tangentiale Zugspannungen auf, deren Radialkomponente an Stellen mit schlechter Bindung eine Trennung von der Stützschale bewirken kann. Wahrscheinlicher ist jedoch, daß derartige Risse bereits während der Abkühlung nach dem Ausgießen der Stützschale entstehen, da hier die Radialzugkräfte wegen der stärkeren Ausgußdicke größer sind als im bearbeiteten Zustande des Lagers. Die in den Trennfugen etwa eingeschlossenen Gase können bei der Erwärmung im Betrieb unter hohen Druck geraten, so daß derartige Rißstellen, wie Bild 21 zeigt, nach außen durch Blasenbildung gekennzeichnet werden.

Das Lager aus der Mg-Preßlegierung 8 versagt bereits nach 20stündigem Prüflauf. Innerhalb 1½ h steigt die Leistung der Antriebsmotoren um 30 vH, so daß schließlich der Lagerdruck verringert werden muß, wenn die selbsttätige Auslösung der Prüfmaschine vermieden werden soll. Die Lagerlauffläche wird durch starke Riefen mit Freßstellen zerstört; auch am Laufzapfen treten schwache Freßspuren auf. Infolge Erhöhung der Betriebstemperatur ist die Durchmesserabnahme beträchtlich, so daß bei Raumtemperatur das Lager auf dem Zapfen festsitzen würde. Es ist nicht ausgeschlossen, daß das Spiel nach dem Wiedereinbau des etwas erkalteten Lagers (im Anschluß an die Besichtigung) so stark verringert wird, daß stellenweise metallische Berührung zwischen Zapfen und Lager stattfindet. Die Dauerrisse an Lagern aus der Mg-Legierung 11 treten gemäß den Angaben in Abschnitt IVa bereits bei sehr schwacher Kantenpressung unter verhältnismäßig niedrigen mittleren Lagerdrücken auf. Obwohl beim Dauerversuch auf eine genaue Ausrichtung des Laufzapfens besonders geachtet worden war, stellten sich noch nach 72stündigem Prüflauf (p = 400 kg/cm²) kleine Risse ein, die wie bei den früheren Versuchen durchweg in Längsrichtung des Lagers verliefen. Auch diese Rißbildung ist auf den schwachen Verband zwischen Tragkristallen und Grundmasse zurückzuführen; die starke Herabsetzung der Dauerfestigkeit wird aber erst dadurch bewirkt, daß die Zeilen der dicht nebeneinander liegenden Einlagerungen (vgl. Bild 12) in Richtung der Lagerachse, also innerhalb der Gleitfläche senkrecht zur Gleitrichtung verlaufen.

c) Verhalten bei Unterbrechung der Ölzufuhr.

Die Art der Versuchsdurchführung ist bereits in Abschnitt III geschildert worden. In vielen Fällen wurden mehrere Trockenlaufversuche (bis zu achtmal) vorgenommen, falls nach dem Wiederanfahren die ursprünglichen Betriebsverhältnisse annähernd wieder erreicht werden konnten. Die Unterbrechung der Ölzufuhr erfolgte in der Regel durch Schließen des Absperrventils an dem etwa 100 cm von der Schmierstelle entfernt liegenden Verteiler. Bei dicht schließendem Ventil wird damit der Ölzufluß sofort unterbrochen, so daß zur Schmierung nur noch das zwischen Zapfen und Lager umlaufende Öl zur Verfügung steht, falls nicht etwa infolge Luftzutritts ein Nachsaugen aus der Ölleitung ermöglicht wird. In einigen Fällen, zumal wenn vollkommene Absperrung der Leitung wegen Undichtheit des Ventils nicht erreicht werden konnte, wurde die Ölzufuhr durch Öffnen der Leitung kurz vor dem Laufzapfen (etwa 25 cm von der Schmierstelle entfernt) eingestellt, so daß der in der Zapfenbohrung vorhandene Ölrest noch zur Schmierung herangezogen werden konnte. Übrigens werden durch diese Art der Ölentziehung die im praktischen Betrieb z. B. bei Rohrbrüchen eintretenden Schmierverhältnisse besser nachgeahmt.

Die wesentlichen Merkmale günstigen Notlaufverhaltens sind lange Auslaufdauer bei schwacher oder vollkommen eingestellter Ölzufuhr und möglichst geringfügige Verletzungen der Zapfenlauffläche. Gemäß Zahlentafel 8 zeichnet sich keine der untersuchten Legierungen eindeutig durch lange Auslaufzeiten aus. Bei undichtem Ventil oder geöffneter Ölleitung schwankt sowohl bei ruhender als auch bei dynamischer Belastung die Laufzeit zwischen wenigen Sekunden und einigen Minuten; bei dichtschließendem Ventil werden durchweg nur geringe Laufzeiten erzielt. Die durch Trockenreibung bewirkte Erhöhung der Betriebstemperatur steigt mit zunehmender Auslaufdauer, wenn

Zahlentafel 8. Ergebnisse der Trockenlaufversuche.

Lager aus	Lager Nr.	Zapfen Nr.	Lagerdruck kg/cm²	Belastungsart	Laufzeit (nach Unterbrechung der Ölzufuhr)	Anstieg der Betriebstemperat. um °C	Zahl der Versuche	Befund nach Versuch: Lager	Befund nach Versuch: Zapfen	Lagerdurchmesser-Änderung mm 10^{-3}	
Al-Leg. 1	614	10 V	400	ruhend	2″ bis 1′ 35″	5° bis 17°	8[2]	6 *r*	6 r; 5 *f*	— 26	— 28
	615	16 E	400	»	3″ » 4′ 4″	5° » 32°	8[2]	7 *rs*; 5 *f*	5 *f*	— 40	— 40
	611	11 V	400	dynamisch	38″	6°	1[2]	6 *f*	6 *f*	—	—
Al-Leg. 2	606	10 V	400	ruhend	4″ » 7″[1])	25° » 31°	5[3]	7 *rs*; 5 *f*	5 r; 5 *f*	— 17	— 13
	608	13 D	400	»	5″ » 12″[1])	6° » 8°	3[3]	7 *rs*; 5 *f*	6 r; 5 *f*	— 41	— 41
	609	17 E	400	»	3″[1])	3° » 6°	2[3]	7 *rs*; 5 *f*	6 r; 5 *f*	— 10	— 13
Al-Leg. 3	635	5 D	400	dynamisch	30″	14°	1[2]	5 *f*	2 *r*	— 6	— 7
Al-Leg. 4	802	3 N	400	ruhend	1″ » 35″	4° » 26°	3[2]	6 *f*	5 *f*	—	—
	804	9 N	400	»	3″ » 5″[1])	8° » 14°	8[2]	5 *f*	2 *r*	— 2	— 2
Al-Leg. 5	1001	6 D	400	»	1″ » 20″	4° » 10°	8[2]	5 *f*	5 *f*	—	—
Al-Leg. 6	1322	7 D	400	»	2″ » 1′ 16″	5° » 30°	8[2]	6 *f*	5 *f*	— 85	— 81
	1321	11 V	400	dynamisch	4″ » 3′ 36″	3° » 25°	8[2]	8 *f*	6 *f*	etwa — 100	
Al-Leg. 7	1333	12 D	400	ruhend	6″ » 11″[1])	3° » 8°	8[2]	5 *f*	5 *f*	— 33	— 35
Mg-Leg. 11	1371	6 D	400	»	17″[1])	11°	1[4])	8 *f*	2 *r*	— 97	— 94
	1372	12 D	400	»	5″[1])	8°	1[4])	8 *f*	1 *r*	— 69	— 60

[1]) Absperrventil vollkommen dicht. [2]) Untersuchung anschließend abgebrochen. [3]) Weitere Versuche nicht durchgeführt, da ursprünglicher Lagerdruck (400 kg/cm²) nicht mehr erreicht wird. [4]) Weitere Versuche nicht möglich, da Lager sich festgefressen hat.

Digitized by Google

von einigen Schwankungen, die durch verschiedenen Laufflächenzustand bedingt sind, abgesehen wird. Die an Lager 606 aus Legierung 2 trotz sehr kurzer Laufzeiten ermittelten verhältnismäßig starken Temperatursteigerungen sind auf Laufflächenbeschädigungen in der Nähe der Temperaturmeßstelle zurückzuführen.

An den Lagern aus Al-Legierung 2 treten nach 2- bis 5maligem Trockenlaufversuch starke Laufstörungen auf, so daß beim anschließenden Wiederanfahren der ursprüngliche Lagerdruck von 400 kg/cm² nicht mehr erreicht wird. Mit den übrigen härteren Al-Legierungen lassen sich je 8 Trockenlaufversuche ohne wesentliche Leistungssteigerung nach dem Wiederanfahren durchführen. Dagegen sind die Lager aus der Mg-Legierung 11 bereits nach dem ersten Versuch infolge Festfressens nicht mehr lauffähig.

Die Lagerlaufflächen werden beim Trockenlauf durch Freßstellen oder Riefen sehr beschädigt. Die Al-Legierungen 1 und 2 (vor allem Leg. 2) neigen außerdem zu starker Rißbildung. Die Laufzapfen weisen vorwiegend schwache Freßspuren, in einigen Fällen nur schwache bis mittlere Riefen auf. Hervorzuheben ist, daß trotz vollständiger Zerstörung der Lager 1371 und 1372 (Mg-Leg. 11) die entsprechenden Zapfenlaufflächen lediglich durch schwache bzw. einzelne mittlere Riefen verletzt sind. Starke Riefenbildung zeigt sich nur an den in Verbindung mit den Si-haltigen Legierungen 1 und 2 verwendeten Zapfen.

Die nach den Trockenlaufversuchen ermittelten Änderungen der Lagerdurchmesser sind in allen Fällen negativ. Bei Gegenüberstellung mit den entsprechenden in Zahlentafel 7 angegebenen Werten läßt sich die Wirkung der höheren Temperatur auf die Lagerschrumpfung deutlich verfolgen.

Die in der DVL-Lagerprüfmaschine durchgeführten Trockenlaufversuche liefern insofern keine unmittelbar übertragbaren Ergebnisse, weil der Antriebsmotor der Prüfmaschine bei weitem nicht das in Flugmotoren auftretende Drehmoment erzeugt. Der Trockenlauf wird bereits bei 50proz. Leistungssteigerung unterbrochen, so daß die Vorgänge bei zunehmender trockener Reibung bis zum endgültigen Versagen des Lagers nicht verfolgt werden können. Immerhin bieten die Ergebnisse einen ersten Anhalt für die Beurteilung der Notlaufeigenschaften der untersuchten Leichtmetall-Lagerwerkstoffe.

V. Folgerungen aus den Versuchsergebnissen.

Aus den vorliegenden Ergebnissen der Untersuchungen an Leichtmetall-Lagerstoffen lassen sich folgende günstige Laufeigenschaften ableiten, die z. T. von Bleibronzelagern bei weitem nicht erreicht werden:

geringe Belastungsempfindlichkeit,
hohe Tragfähigkeitsgrenze,
hohe zeitlich begrenzte Belastbarkeit,
hohe Dauerhaltbarkeit,
geringe Abnutzung an Zapfen und Lager.

Bei einigen Werkstoffen würde sich noch eine Steigerung der Dauerhaltbarkeit durch gleichmäßigere Verteilung der Tragkristalle (Vermeidung von Seigerungen und Zeilenstruktur) erzielen lassen. Nadelförmige Einlagerungen (AlSb-Kristalle) begünstigen die Rißbildung und lösen sich leicht aus der Grundmasse. Die Tragfähigkeitsgrenze der weichen Legierungen ist lediglich durch das Auftreten starker plastischer Verformungen (Auswalzen) bedingt. Immerhin ist der Verformungswiderstand der Lager aus den Legierungen geringster Warmhärte (Leg. 9 und 10) noch größer als der von Bleibronzelagern derselben Abmessung. So wurde z. B. an einer Bleibronzevollschale nach 29stündigem dynamischen Prüflauf unter einem Lagerdruck von nur 110 kg/cm² vollkommene Zerstörung durch plastische Verformung festgestellt. Es liegt demnach nahe anzunehmen, daß die Tragfähigkeitsgrenze der erwähnten weichen Mg-Legierungen durch Verwendung harter Stützschalen (wie im Falle der Al-Leg. 3) wesentlich erhöht werden kann.

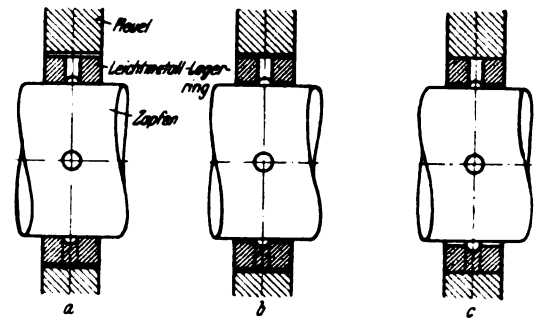


Bild 32. Ermöglichung der Wärmeausdehnung an einem Leichtmetallager zwecks Vermeidung von Verformungen (schem. Darstellung).
a Bei Raumtemperaturen (Anfahren) Gleiten in der äußeren Lauffläche.
b Bei mittleren Temperaturen Gleiten in beiden Laufflächen.
c Bei hohen Temperaturen Gleiten in der inneren Lauffläche.

Neben den oben angegebenen günstigen wurden folgende ungünstige Eigenschaften der Lager aus Al- und Mg-Legierungen festgestellt:

Empfindlichkeit gegenüber starker Kantenpressung,
starke Wärmeausdehnung, die bei hohen Betriebstemperaturen zur Verformungen und Schrumpfungen der Lager führt,
Empfindlichkeit gegenüber Ölmangel.

Die Empfindlichkeit gegenüber starker Kantenpressung äußert sich nicht so sehr in einer Beeinträchtigung der Gleitfähigkeit des Leichtmetall-Lagers als vielmehr in der vorzeitigen Zerstörung des Lagerwerkstoffes durch Rißbildung. Geringe, praktisch unvermeidliche Kantenpressung wird dagegen auch von den harten Legierungen einwandfrei ertragen, falls nicht etwa durch die Wirkung zeilenförmig angeordneter Einschlüsse die Rißbildung begünstigt wird. Durch geringe Lagerlänge und schwach ballige Form der Lauffläche läßt sich unter Umständen die Gefahr starker Kantenpressung beseitigen.

Die unterschiedliche Wärmeausdehnung von Lagerkörper und benachbarten Teilen stellt eine der hauptsächlichsten Störungsquellen im Betriebe hochbeanspruchter Leichtmetallager dar. Die Wärmespannungen bzw. die hierdurch bedingte Verformung und Schrumpfung des Lagers führt häufig infolge Störung der Schmierfilmbildung zu plötzlichem Versagen. Unter Umständen kann auch erst nach Abkühlung des Lagers beim Wiederanfahren Fressen eintreten, selbst wenn vorher betrieblich einwandfreies Laufverhalten festgestellt wurde. Derartige Betriebsstörungen an Leichtmetall-Lagern lassen sich sowohl durch Behinderung der Lagerverformung als auch durch Ermöglichung der Wärmeausdehnung vermeiden.

Eine wirksame Behinderung der Verformung wird durch Aufplattieren des Lagerwerkstoffes auf eine Stahlstützschale erzielt. Man verwendet in diesem Falle zweckmäßig weniger harte Legierungen, um die Wärmespannungen möglichst niedrig zu halten; derartige Verbund-Lagerwerkstoffe müssen hohes Formänderungsvermögen und günstige Zeitfestigkeitseigenschaften aufweisen.

Ungeteilte Leichtmetall-Lager, die nur mittleren Wärmebeanspruchungen ausgesetzt sind, werden zweckmäßig aus Legierungen mit hoher Streckgrenze hergestellt; der Beginn plastischer Verformung wird damit zu höheren Temperaturen hin verschoben, so daß eine Durchmesserabnahme (Schrumpfung) der Lager entweder überhaupt nicht, oder nur in geringem Maße eintritt. Bei hohen Wärmebeanspruchungen bietet diese Maßnahme jedoch keine sichere Gewähr für die Vermeidung der durch Verformungen bedingten Betriebsstörungen. Bild 32 zeigt eine Lagerausführung, bei der infolge Ermöglichung der Wärmeausdehnung keine betriebsschädlichen plastischen Verformungen zu erwarten sind. An dem ringförmigen Lagerkörper sind sowohl am inneren als auch am äußeren Umfang Laufflächen vorgesehen. Dieser Ring sitzt bei Raumtemperatur unter elastischer Vorspannung fest auf dem Zapfen, so daß ein Gleiten nur

Digitized by Google

an der äußeren Lauffläche stattfinden kann. Das Schmiermittel wird von der Innenseite her durch eine ringförmige Nut und radial nach außen verlaufenden Bohrungen der Gleitfläche zugeführt. Mit zunehmender Betriebstemperatur löst sich der Leichtmetallring vom Zapfen, wird schließlich am äußeren Umfang festgehalten und gleitet nunmehr auf der Innenlauffläche; im mittleren Temperaturbereich läuft das Lager als schwimmende Büchse. Die bei außergewöhnlich niedrigen oder hohen Temperaturen etwa auftretenden geringen plastischen Verformungen (Dehnungen und Stauchungen) sind insofern unschädlich, als die zylindrische Form des Lagerringes gewahrt bleibt und somit stets einwandfreie Laufflächen vorhanden sind.

Die Empfindlichkeit gegenüber Ölmangel äußert sich hauptsächlich in der geringen Auslaufdauer. Auch mit Bleibronzelagern wurden bisweilen Trockenlaufzeiten von nur wenigen Sekunden erzielt; in diesen Fällen scheint die für das Ausschmelzen der Pb-Einschlüsse erforderliche Lagertemperatur bei Auslösung der Prüfmaschine noch nicht erreicht worden zu sein. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß sich der Trockenlaufvorgang nur bis zu einer 50proz. Leistungssteigerung der Antriebsmotoren verfolgen ließ. Es ist vorstellbar, daß bei höheren Lagertemperaturen (größeren Drehmomenten) die in den Al-Legierungen enthaltenen Pb-, Zn- oder Cd-Einschlüsse in genügender Menge ausschmelzen und die Notschmierung übernehmen. Unter dieser Voraussetzung sind besonders von Legierung 4, die annähernd 10 vH niedrigschmelzende Zusätze aufweist, gute Notlaufeigenschaften zu erwarten. Die ungünstigen Ergebnisse der an Lagern aus Mg-Legierung 11 angestellten Trockenlaufversuche dürfen keineswegs auch auf die übrigen Mg-Lagerlegierungen übertragen werden. Die in Legierung 10 vorhandenen Pb-Seigerungen (vgl. Bild 11) z. B. werden nicht ohne Einfluß auf das Notlaufverhalten sein.

VI. Zusammenfassung.

In der DVL-Lagerprüfmaschine wurden die Laufeigenschaften von 7 Aluminium- und 4 Magnesiumlegierungen in Verbindung mit vergüteten und gehärteten Laufzapfen untersucht. Die Umfangsgeschwindigkeit betrug 5 m/s, die Betriebstemperatur 120° C. Die Versuche wurden vorwiegend unter ruhender Belastung, d. h. bei gleichbleibendem polaren Druckverlauf im umlaufenden Lager durchgeführt. Die Prüfung erstreckte sich auf die Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze und des Verhaltens bei Dauerbeanspruchung sowie bei Einstellung der Schmiermittelzufuhr. Der spez. Lagerdruck für die Dauerversuche wurde auf Grund der ersten Prüfergebnisse einheitlich auf 400 kg/cm² festgelegt.

Die Tragfähigkeitsgrenze liegt bei den härteren Al-Legierungen durchweg oberhalb $p = 700$ kg/cm²; mit einer eutektischen Al-Si-Legierung konnte bei störungsfreiem Lauf ein mittlerer Lagerdruck von 925 kg/cm² erreicht werden. Die übrigen Lagerwerkstoffe versagen bei Drucken von 470 bis 650 kg/cm² infolge starker Verformung (Auswalzen) oder vorherrschender Trockenreibung.

Bei Dauerbeanspruchung zeigen fast alle untersuchten Al-Legierungen einwandfreies Laufverhalten. Eine Mg-Preßlegierung (0,5 Zn, 7,7 Al, Rest Mg) neigt zu starker Riefenbildung. Rißbildung wird nur bei Werkstoffen mit ungleichmäßiger Verteilung der Tragkristalle (örtliche und zeilige Anordnung) beobachtet. Die Abnutzung an den Zapfen ist in allen Fällen unbedeutend. An den Lagern treten bisweilen durch die starke Wärmeausdehnung der Leichtmetalle bedingte Verformungen bzw. Schrumpfungen auf, die eine der hauptsächlichen Störungsquellen im praktischen Betrieb darstellen. Zur Behebung dieser Schwierigkeiten sind konstruktive Maßnahmen erforderlich, durch die entweder eine wirksame Behinderung der Verformung oder eine störungsfreie Ausdehnung des Lagers erreicht wird.

Bei eingestellter Ölzufuhr werden Auslaufzeiten von wenigen Sekunden bis zu einigen Minuten erzielt. Lager aus einer Mg-Legierung (2 vH Mn, 5 vH Ce, Rest Mg) sind nach kurzer Auslaufdauer vollkommen zerstört und nicht mehr lauffähig. In den meisten Fällen weisen die Zapfen nach dem Trockenlauf trotz bisweilen starker Lagerbeschädigungen nur schwache Freßspuren auf, die durch Nachpolieren leicht entfernt werden können. Im übrigen lassen die Ergebnisse der Trockenlaufversuche keine sichere Beurteilung der Notlaufeigenschaften zu, da wegen zu niedriger Antriebsleistung der Prüfmaschinen die praktischen Betriebsverhältnisse nicht erreicht werden.

Digitized by Google

Erhöhung der spezifischen Belastbarkeit bei Zug, Druck und Knickung von eingeschweißten Stahlrohr-Fachwerkstreben im Flugzeugbau durch Maßnahmen werkstofftechnischer und konstruktiver Art.

Von J. Müller.

Bericht der Focke-Wulf-Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen-Flughafen.

Wenn im neuzeitlichen Flugzeugbau die Leichtmetall-Schalenbauweise das geschweißte Stahlrohrfachwerk auch stark verdrängt hat, so wird man doch auf die Stahlrohrstrebe als Zug- und Druckelement nicht ganz verzichten können. Im Fahrgestell, im Motorträger und als Flächenabstützstrebe z. B. wird das Stahlrohr infolge der einfachen Anschlußmöglichkeit durch Schweißen und wegen seiner hervorragenden Festigkeitseigenschaften an Flugzeugen aller Art nach wie vor seinen Platz behaupten.

In folgendem sollen daher Überlegungen und Versuche mitgeteilt werden, die zu höheren Zug-, Druck- und Knickbeanspruchungen führten, als es bei den geschweißten Stahlrohrstreben der allgemein bekannten und gebräuchlichen Ausführung möglich ist. Die angegebene neuartige Bauweise, die eine erheblich bessere Werkstoffausnützung und somit Gewichtsersparnis ermöglicht, ist an einer Reihe von Focke-Wulf-Baumustern auch im Serienbau seit langem erprobt und hat sich voll bewährt.

Bei einer vorliegenden Bauaufgabe sind im allgemeinen die Länge der Strebe und die von ihr zu übernehmenden Lasten gegeben. Eine Flugzeugfachwerkstrebe muß infolge der verschiedenen Flug- und Landefälle oft eine gewisse Zug- und ebenso eine bestimmte Druckbelastung aufnehmen können. Oft auch kommt nur eine Belastungsart allein vor.

Weiter sind bekanntlich für die Querschnittsbemessung und somit für das Gewicht der an beiden Enden stumpf zu verschweißenden Rohrstrebe von seiten der Werkstoffeigenschaften maßgebend:

bei Zugbelastung die Festigkeit und Streckgrenze des Werkstoffes in der durch die Schweißung ausgeglühten Zone;

bei Druckbeanspruchung ist, genügend hohen Schlankheitsgrad der Strebe vorausgesetzt, entsprechend der Knickbeziehung von Euler der Elastizitätsmodul maßgebend, der unabhängig ist vom Werkstoffzustand, ungeschweißt oder geschweißt;
bei geringerer Schlankheit die Streck- bzw. Beulgrenze des geschweißten Rohres.

Man sieht, daß mit Ausnahme des Falles, daß nur Knickbeanspruchung, und zwar Knickung im Euler-Bereich vorliegt, die durch die Schweißung beeinflußte Zone immer für die Bemessung und das Gewicht der Strebe von maßgebender Bedeutung ist. Wie nun die im Flugzeugbau verwendeten Stahlrohre durch die Schweißung metallographisch und festigkeitsmäßig beeinflußt werden, ist bekannt [1], [2]. Als wesentlich sei hervorgehoben, daß die Zug- und Druckfestigkeit von stumpfgeschweißten Rohren der Festigkeit des ungeschweißten, geglühten Rohres entspricht, also einen Mindestwert annimmt, der jeder Stahlsorte eigen ist. Kalt- oder Warmverfestigung der einzuschweißenden Streben hat also — auch außerhalb des Euler-Bereiches — keinen Sinn, und die Vergütbarkeit eines Rohres kann weder bei Zug- noch bei Druckbeanspruchung ausgenutzt werden, wenn nicht das zusammengeschweißte Fachwerk als Ganzes vergütet wird, was aber wegen seiner Größe und wegen des gefürchteten Verziehens beim Härten meist unmöglich ist.

Dies hatte weiter keinen Nachteil, solange man im Flugzeugbau nur unlegiertes Stahlrohr verwendete, dessen Festigkeitseigenschaften nicht wesentlich über die des geschweißten Zustandes gesteigert werden können. Zu diesem Ergebnis kommt auch A. Rechtlich in seinen umfangreichen Untersuchungen aus dem Jahre 1930, den Grundlagen für die konstruktive Anwendung von zu verschweißenden unlegierten Stahlrohren im Flugzeugbau [1], S. 410, nämlich, »daß die Schweißung bis zu den ganz kleinen Schlankheitsgraden auch im unelastischen Bereich einflußlos« ist. Die Knickwerte von geschweißten unlegierten Rohren liegen für größere Schlankheiten als 15 ebenso hoch wie die der ungeschweißten Rohre.

Die Hauptergebnisse der Druck- und Knickversuche von Rechtlich mit zwei Rohrsorten verschiedenen Kohlenstoffgehaltes (0,1 bis 0,15 vH und 0,3 bis 0,5 vH) sind in Bild 8 mit eingezeichnet.

Seit der Einführung von Chrommolybdänstahlrohr bei den Albatroswerken in Berlin-Johannisthal wurde bei Albatros und später bei Focke-Wulf planmäßig das Ziel verfolgt, die Vergütbarkeit dieses Stahles auch bei einzuschweißenden Rohrstreben nach Möglichkeit auszunützen. Das wesentliche der Druck- und Knickversuche sei in folgendem mitgeteilt. Die Knickung ($\lambda > 10$) wurde auf einer liegenden Zerreißmaschine zwischen Schneidenlagerung durchgeführt, so daß der Einspanngrad nahezu gleich Null war. Jeder einzelne Stab wurde nach den Verformungen, die bei Belastung im elastischen Bereich mit seitlich angebrachten Meßuhren beobachtet wurden, mittels einer an der Schneidenlagerung angebrachten Verschiebevorrichtung zentriert. Die Druckstücke ($\lambda < 10$) wurden zwischen eben geführten Platten gedrückt, und zwar unter Zwischenschaltung eines Kugelsegments mit passender Kugelpfanne, um möglichst gleichmäßige Druckverteilung zu erreichen. Die Rohre sind vor dem Knicken gerade gerichtet und an den Enden eben geschliffen worden.

Die Versuchsrohre waren teils amerikanischer, teils schwedischer, teils deutscher Herkunft (s. Zahlentafel 1). Es handelt sich jedoch in allen Fällen nur um CrMo-Stähle, die in der Zusammensetzung dem Fliegwerkstoff 1452 entsprechen. Im Anlieferungszustand, der heute noch so der übliche ist, waren alle Rohre wärmebehandelt, und zwar allem Anschein nach nur angelassen nach dem letzten Kaltzug. Die Mindestfestigkeit des Stahles 1452, die für die Berechnung maßgebend ist, beträgt im geglühten und geschweißten Zustand 60 kg/mm², im vergüteten Zustand kann 120 kg/mm² erreicht werden.

Bild 1 ist das Ergebnis von drei Knickversuchsreihen aus dem Jahre 1930 mit CrMo-Stahlrohren, die von den betreffenden Stangen im Lieferzustand abgeschnitten waren und so unverändert geknickt wurden. Entsprechend der Erhöhung der Quetschgrenze und Bruchfestigkeit stellen wir eine Verbesserung der Beul- und Knickfestigkeit gegenüber den unlegierten Stahlrohren fest (Zahlenwerte s. Zahlentafel 1).

Digitized by Google

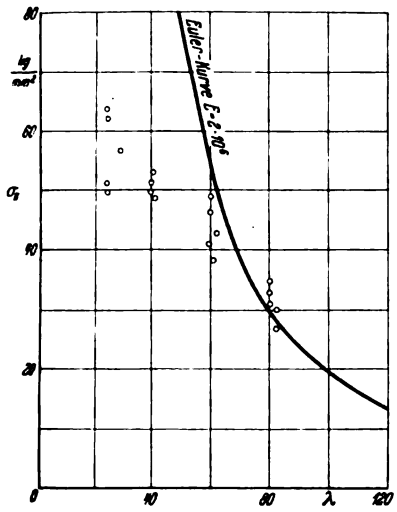


Bild 1 (links). Knickversuche mit unvergüteten Cr-Mo-Stahlrohren.

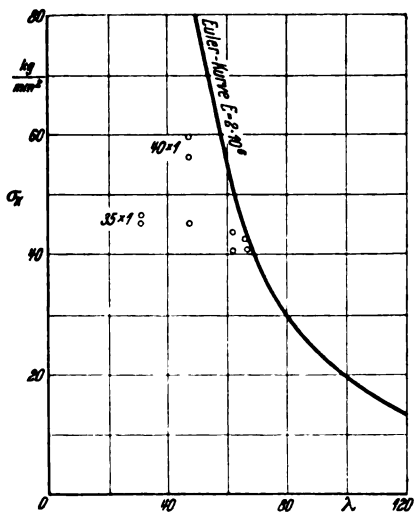


Bild 2 (rechts). Knickversuche mit Cr-Mo-Stahlrohren im Anlieferungszustand.

Zahlentafel 1 (zu Bild 1). Knick- und Festigkeitswerte von unvergüteten CrMo-Stahlrohren.

Werkstoff-Herkunft	λ	σ_K kg/mm²	$D \times S$ mm	$\sigma_{0,02}$ kg/mm²	$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ_B kg/mm²
amerikanisch	81,5	30,5	25,5 × 1,5	47,5	71	81
	60,9	42,4				
	40,6	52,9				
	40,6	48,7				
	25,2	61,3				
	24,9	63,2				
	81,8	26,4	25,5 × 3	45,8	60	82
	61,4	38,4				
deutsch	25	50,0	30 × 1	40,5	54,5	66,4
	25	50,5				
	60	46,4				
	40	49,6				
	40	49,3				
	80	31,7				
	80	31,8				
	60	41,4				
schwedisch	29,5	56,6	30 × 1	39	53,5	62,7
	60	48,3				
	80	34,5				

Bild 2 ist eine Versuchsreihe derselben Art aus dem Jahre 1931. Sie wird besonders aufgeführt, weil die beiden Knickwertepaare der Rohre 35 × 1 und 40 × 1 so verschieden hoch liegen, und zwar im umgekehrten Sinne als es ihre Schlankheitsgrade erwarten ließen, so daß dies zu einer genaueren Untersuchung der Rohre Veranlassung gab. Dabei wurden die in Zahlentafel 2 angegebenen Werte und die in Bild 3 und 4 gezeigte Gefügebeschaffenheit der Rohre festgestellt.

Zahlentafel 2 (zu Bild 2). Knickfestigkeiten und sonstige Eigenschaften von CrMo-Stahlrohren im Anlieferungszustand.

$D \times S$ mm	λ	σ_K kg/mm²	$\sigma_{0,02}$ kg/mm²	$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ_B kg/mm²	Gefüge
35 × 1	30	45,6	33,5	50	62	Körniger Perlit im freien Ferrit (s. Bild 3)
35 × 1	30	45,7	37	51	64	
40 × 1	47	56,9	50	68	85	Sorbit ohne freien Ferrit (s. Bild 4)
40 × 1	47	59,7	—	72	83	
32 × 1	62	40,7				
32 × 1	62	43,6				
34 × 0,75	68	42		—		—
34 × 0,75	68	42				
36 × 0,75	47	45				

Die Gefügebilder erklären ohne weiteres die unterschiedlichen Festigkeitseigenschaften. Im zweiten Falle ist das Eisen weit gleichmäßiger von dem härteren Bestandteil (Eisenkarbid) durchsetzt als bei Rohr 35 × 1. Dies verursacht die wesentlich höheren Dehngrenzen dieses Rohres und diese wiederum bedingen die höheren Knickfestigkeiten im plastischen Bereich. Gefüge und Eigenschaften von Rohr 40 × 1 lassen sich bekanntlich bei Stahl 1452 durch Vergütung erreichen.

Daraufhin wurde im Jahre 1932 eine Serie von Knickstäben des mittleren Schlankheitsgrades 35 bis 60 auf etwa 110 kg/mm² vergütet. Die erreichte Knickfestigkeitskurve steigt der Euler-Kurve entlang in die Höhe bis etwa 60 kg/mm² und im Tetmajer-Bereich noch höher, wie Bild 5 zeigt (Zahlenwerte s. Zahlentafel 3).

Infolge dringenderer Aufgaben konnte die Arbeit erst im Jahre 1934 durch folgende zwei größere Versuchsreihen zu Ende geführt werden:

Einmal sollte der Einfluß einer Schweißglühung am Ende des vergüteten Knickstabes ermittelt werden, da vermutet

Bild 3. Gefüge des St. R. 35 × 1: körniger Perlit mit freiem Ferrit. Vergr. 500fach.

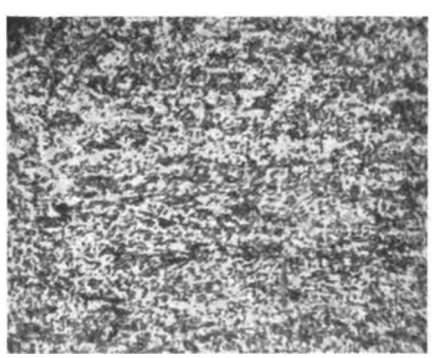


Bild 4. Gefüge des St. R. 40 × 1: Sorbit ohne freien Ferrit. Vergr. 500fach.

Digitized by Google

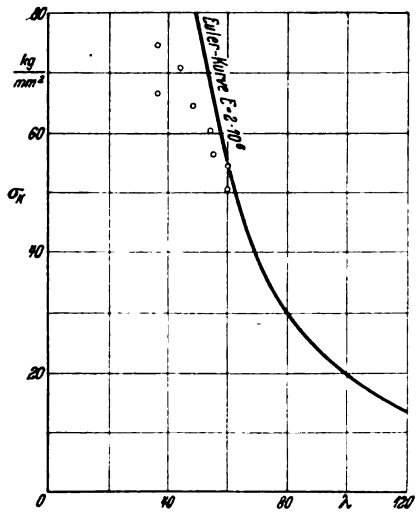


Bild 5 (links). Knickversuche mit vergütetem Cr-Mo-Stahlrohren.

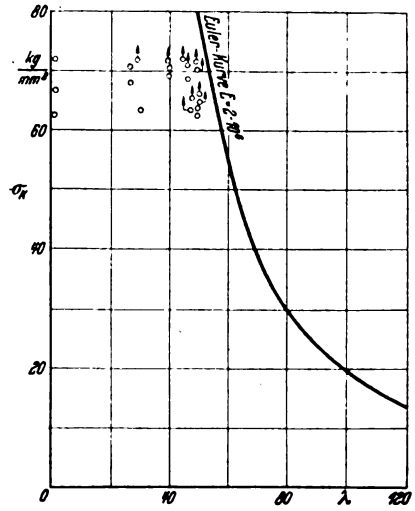


Bild 6 (rechts). Knick- und Druckversuche mit vergüteten und dann an den Enden geschweißten Cr-Mo-Stahlrohren.

Zahlentafel 8 (zu Bild 5). Knick- und Zugfestigkeiten von vergüteten CrMo-Stahlrohren.

$D \times S$ mm	σ_B kg/mm²	λ	σ_K kg/mm²
14 × 1	108,7	53,5	60
		60	54,5
26 × 1	112,3	36,5	75
		43,5	70,5
		37	66,5
		48,5	64,5
		55	56,5
		60	50,5

wurde, daß ein solcher Einfluß auf die Knickkurve verhältnismäßig gering sei. Es wurden 18 Knickstäbe der in Betracht kommenden Schlankheitsgrade zunächst auf 110 bis 125 kg/mm² Festigkeit vergütet. Dann wurde an beiden Enden, 10 mm von diesen entfernt, rund herum eine Stumpfnaht gelegt, indem ein nicht ganz durchgehender Sägeschnitt wieder zugeschweißt wurde.

Bild 6 und Zahlentafel 4 zeigen, daß so im gesamten unter der Euler-Kurve liegenden Bereich, also bis zum Schlankheitsgrad 55, eine Mindestknickspannung von 60 kg/mm² mit Sicherheit erreicht werden kann. Bemerkenswert ist, daß auch bei diesem hohen Schlankheitsgrad Beulbrüche an den Enden auftraten, während der Stab sonst auf seiner ganzen Länge unverändert blieb. Druckstücke von der Länge ihres Durchmessers, die vergütet und in der Mitte geschweißt waren, ergaben dieselben Druckfestig-

Zahlentafel 4 (zu Bild 6). Knickversuche mit vergüteten und dann an den Enden geschweißten CrMo-Stahlrohren.

$D \times S$ mm	σ_B kg/mm²	λ	σ_K kg/mm²
30 × 1	118,4	40	70,6
	119,1	40	69,3
	113,5	27,2	68,3
	114	27,2	70,3
35 × 1	124,5	50	> 71,2 Vers.-Masch. reichte nicht aus zum Bruch
	120,2	50	
	124	46,5	
	125,8	46,5	
	121	40	
	126,5	29,1	
40 × 0,75	112,2	50	63,3
	114	50	63,8
	127	46	68,3
	—	30	63,8
40 × 1	111	50	> 65,5
	—	50	> 64,7
	127	48,5	> 65,5
	119	48,5	> 63,5

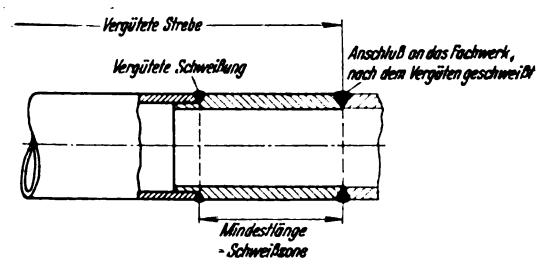


Bild 7. Verstärktes Ende der vergüteten einzuschweißenden Fachwerkstrebe.

keiten (s. Bild 6). Diejenigen Werte, bei denen der Bruch auf der zur Verfügung stehenden Versuchsmaschine nicht erreicht werden konnte, sind mit einem nach oben zeigenden Pfeil versehen.

Noch wesentlich höhere Knickspannungen können unter der Euler-Kurve verwirklicht werden, wenn man dafür sorgt, daß die eben erwähnten Beulbrüche vermieden werden, d. h. wenn man die Streben vor dem Vergüten konstruktiv so ausbildet, daß in den Bereichen, die durch das Einschweißen ins Fachwerk wieder ausgeglüht werden, die Wandstärke entsprechend stärker ist als in dem übrigen durch die Schweißwärme nicht beeinflußten Bereich[1]). Die Verstärkung der Enden wird am wirtschaftlichsten nach Bild 7 durch Anschweißen von stärkeren Rohrenden mit vergütbarem Schweißdraht 1453 erreicht.

Es wurden also 33 Knickstäbe nach Bild 7 mit einer vergüteten (110 bis 120 kg/mm²) und einer unvergüteten Schweißung an jedem Ende mit Schlankheitsgraden von 20 bis 55 angefertigt und zwischen Schneiden geknickt. Die erreichten Knickspannungen sind in Bild 8 eingezeichnet, und man sieht bei Vergleich mit den anderen unteren Grenzkurven, daß der Gewinn erheblich ist.

Am meisten trifft dies zu bei den Schlankheiten von 20 bis 60. Erst bei höheren Schlankheitsgraden als 75 reicht auch die Streckgrenze des geglühten CrMo-Stahlrohres aus, um mit der Knickspannung die Euler-Kurve zu erreichen. Über diesem Schlankheitsgrad ist eine Erhöhung der Knicklast durch Vergütung grundsätzlich nicht möglich. Die starken, das Gesamtgewicht des Flugzeugs besonders beeinflussenden Streben liegen aber meist in dem mittleren Schlankheitsgebiet, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß der wirksame Schlankheitsgrad durch die Einspannung im Fachwerk geringer wird, als es der Systemlänge entspricht.

Falls Zugbeanspruchung für die Bemessung eines einzuschweißenden Stahlrohres maßgebend ist, ist es durch die beschriebene Bauweise in allen Fällen, d. h. unabhängig von der Länge möglich, Gewicht zu sparen. Bei der normalen

[1]) Dieses Verfahren ist der Firma Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen, durch DRP gesetzlich geschützt. Erfinder: Dr.-Ing. Müller, Bremen.

Digitized by Google

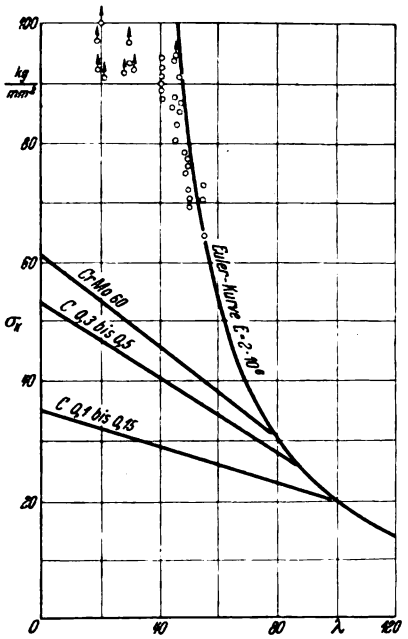


Bild 8. Knickversuche mit vergüteten Cr-Mo-Stahlrohren mit verstärkten Enden. (Die beiden unteren Grenzkurven nach Rechtlich.)

Ausführung mit gleichbleibendem Querschnitt kann, gleichgültig, welche Festigkeit vor dem Einschweißen vorhanden war, nur mit der Glühfestigkeit des Stahles gerechnet werden. Wurden aber die Enden vor dem Einschweißen verstärkt und der Stab dann vergütet, so kann jeder Querschnitt entsprechend seiner Festigkeit bemessen werden. Die dabei erzielte Gewichtserleichterung nähert sich mit wachsender Strebenlänge dem Verhältnis Glühfestigkeit : Vergütungsfestigkeit des Stahles, d. i. bei 1452 der Hälfte des Strebengewichtes.

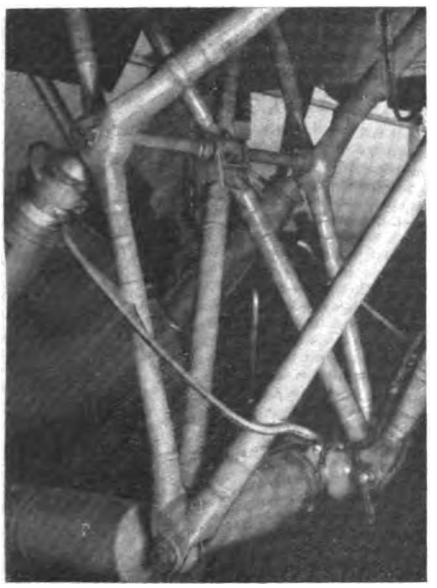


Bild 9. Ausschnitt aus dem Fahrwerk der Fw 200 »Condor« mit eingeschweißten, vergüteten Fachwerkstreben.

Zahlentafel 5 (zu Bild 8). Knickversuche mit vergüteten CrMo-Stahlrohren mit verstärkten Enden.

$D \times S$ mm	σ_B kg/mm²	λ	σ_K kg/mm²
28 × 1	117,5	55	69,7
	117	50,3	77,4
	111	50	76,8
	120,2	50	71,5
	117	50	70,5
	108,5	50	70,6
	117,5	47,5	86,8
	118,9	47,5	85,7
	121	45	86,5
	109,3	44,8	86,5
	113,2	44,8	93,5
	121,5	40,3	91
	123	40,2	88,7
	121,9	34,8	93,1
	121	30,2	> 91
	113	30	> 91,5
	—	20,4	> 91
	—	20,3	> 91,5
36 × 0,75	111	55	72
	109,5	55	64.8
	113,5	50	76,8
	104	49,8	78
	108,5	46,7	83
	125,1	45,5	90,8
	116	45	> 94,3
	111,4	45	80,8
	114,5	40	92,2
	111	39,7	89
	116,5	39,7	90,2
	113,4	29,9	> 96,5
	116,5	29,9	92,7
	113,5	19,6	> 96,3
	117,2	20	> 100,1

Bild 9 zeigt einen Ausschnitt aus dem Fahrwerk der Fw 200 »Condor«, bei dem z. B. die an den Enden verstärkte, vergütete Fachwerkstrebe Anwendung findet.

Schrifttum.

[1] A. Rechtlich, Grundlagen für die konstruktive Anwendung und Ausführung von Stahlrohrschweißungen im Flugzeugbau. Jahrbuch 1931 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt S. 379 bis 438.

[2] J. Müller, Untersuchung über die Schwingungsfestigkeit der Schweißverbindung von Stahlrohren verschiedener Zusammensetzung, die für Konstruktionszwecke, insbesondere für Fachwerkbau, in Betracht kommen. Diss. 1932 Berlin. Selbstverl. d. Verf.

Digitized by Google

Prüfung hochklopffester Kraftstoffe im Flugmotoren-Einzylinder.

Von Fritz Seeber, VDI.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Betriebstofforschung.

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Flugmotorenkraftstoffen für Otto-Motoren ist ihre Klopffestigkeit. Die im genormten CFR-Motor erfolgte motorische Beurteilung von Flugmotorenkraftstoffen der Klasse OZ 87 und darüber entspricht durchaus nicht immer dem tatsächlichen Verhalten dieser Kraftstoffe im Flugmotor. Daher wurde ein Verfahren entwickelt, das im Gegensatz zur Oktanzahlbestimmung eine Prüfung der Kraftstoffe unter den verschiedensten Temperatur- und Kraftstoffluftverhältnissen erlaubt.

Gliederung.

I. Stand der Klopffestigkeitsprüfung im CFR-Motor.
II. Kritik der Oktanzahl, Notwendigkeit der Entwicklung neuer Prüfverfahren.
III. Prüfung von Flugmotorenkraftstoffen auf ihre Überladbarkeit.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Stand der Klopffestigkeitsprüfung im CFR-Motor.

Die Bestimmung der relativen Klopfneigung von Flugmotorenkraftstoffen — ausgedrückt in Oktanzahlen — erfolgt bis heute fast ausschließlich im CFR-Motor bzw. in Deutschland neuerdings auch im I.G.-Prüfgerät. Bei beiden Motoren wird der Kraftstoff durch Veränderung der Verdichtung zum Klopfen gebracht. Die Stärke des Klopfens, die bei diesen Prüfungen eingehalten werden muß, wurde für den zu prüfenden Kraftstoff vereinbarungsgemäß auf einen bestimmten Ausschlag am sogenannten Klopfmesser (50 bis 60 Teilstriche) festgelegt.

Die Klopfeigenschaften des zu prüfenden Kraftstoffes werden, um den jeweiligen Zustand des Prüfmotors auszuschalten, mit denen von Gemischen aus Bezugskraftstoffen verglichen. Unter Bezugskraftstoff versteht man einen Kraftstoff, den man infolge seiner stets gleichbleibenden Eigenschaften zur Kennzeichnung der motorischen Brauchbarkeit der verschiedensten Kraftstoffe verwendet. Es kommen folgende Bezugskraftstoffe zur Anwendung:

1. Urbezugskraftstoffe: Iso-Oktan, *n*-Heptan.
2. Unterbezugskraftstoffe: Reinbenzol und synthetisches Benzin.

In Deutschland werden Flugmotorenkraftstoffe nach dem CFR- bzw. I.G.-Motorverfahren geprüft [1]. Die Prüfbedingungen beider Verfahren unterscheiden sich nur unwesentlich voneinander.

Erfolgt nun in den meisten Ländern der Welt die Prüfung der Flugmotorenkraftstoffe im genormten CFR-Motor, so konnte doch keine Einigung auf ein international anerkanntes Prüfverfahren erzielt werden. Die heute in den verschiedenen Staaten amtlich anerkannten Prüfverfahren sind folgende:

Deutschland: CFR-Motor-Verfahren, $n = 900$ U/min; Gemischvorwärmung: 150° C.

England und Frankreich: gemäßigtes CFR-Motor-Verfahren, $n = 900$ U/min; Gemischvorwärmung: 127° C.

Italien: CFR-Research-Verfahren, $n = 600$ U/min; Gemischvorwärmung: keine.

USA.: U.S.Army-Air-Corps-Verfahren, $n = 1200$ U/min; Gemischvorwärmung: keine.

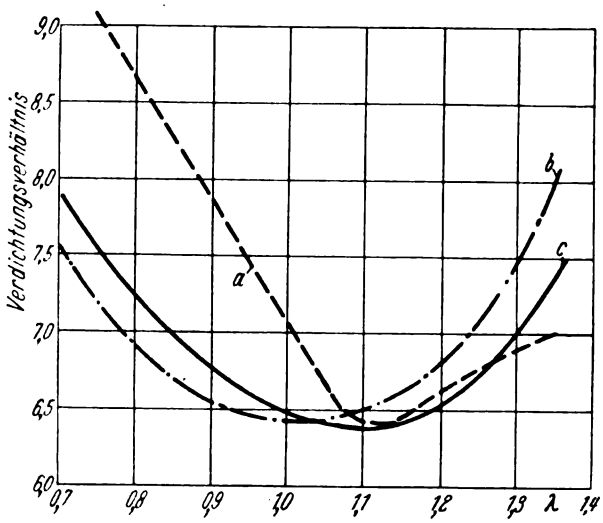


Bild 1. Bestimmung der Klopffestigkeit bei verschiedenen Luftüberschußzahlen.
a gebleites Flieger-Benzin O.Z. 86,5,
b Iso-Oktan/*n* — Heptan O.Z. 87,
c Benzin-Benzol-Gemisch (B.W. 74) O.Z. 87.
Maß der Klopfstärke: konst. Ausschlag 50 am Klopfmesser.

Die Vielzahl der heute im CFR-Motor angewendeten Prüfverfahren ist ein Zeichen für die Unsicherheit, die im Klopfprüfmotor gefundenen Ergebnisse auf den Flugmotor zu übertragen [2], [3]. Diese Schwierigkeiten traten besonders dann zutage, als Flugmotorenkraftstoffe der Klasse OZ 87 und darüber entwickelt wurden.

II. Kritik der Oktanzahl und Notwendigkeit der Entwicklung neuer Prüfverfahren.

Im Laufe der Entwicklung zeigte es sich, daß die heute geübte Oktanzahlbestimmung im CFR-Motor — also die Prüfung der motorischen Eigenschaft eines Kraftstoffes unter ganz bestimmt festgelegten Bedingungen — nicht genügt, um das wahrscheinliche motorische Verhalten von Kraftstoffen im Flugmotor ausreichend zu kennzeichnen. Es zeigen sich bei der Oktanzahlbestimmung folgende Mängel:

1. Die Bestimmung der Klopffestigkeit erfolgt nur bei einer einzigen Ansaug- bzw. Gemischtemperatur, die Temperaturempfindlichkeit eines Kraftstoffes wird also nicht festgestellt. Bestimmt man, um nur ein Beispiel anzuführen, die Oktanzahl eines Fliegerbenzins bei verschiedenen Gemischtemperaturen und sonst unveränderten Bedingungen des CFR-Motor-Verfahrens, so erhält man folgendes Bild:

Gemischtemperatur	150° C,	Oktanzahl	86,9
»	127° C,	»	87,4
»	30° C,	»	92,1.

2. Die Gemischstärke wird nur auf stärkstes Klopfen eingestellt; diese liegt erfahrungsgemäß ungefähr bei einem Luftüberschuß von ~5 vH ($\lambda = 1{,}05$).

Digitized by Google

Dieses Verhältnis entspricht jedoch nicht den im Flugbetrieb herrschenden Bedingungen. Bestimmt man z. B. die Oktanzahl eines Fliegerbenzines OZ 87 nach dem CFR-Motorverfahren bei verschiedenen Kraftstoffluftverhältnissen und vergleicht damit die unter den gleichen Bedingungen erhaltenen Ergebnisse der entsprechenden Ur- bzw. Unterbezugskraftstoffe, so erkennt man (s. Bild 1), daß die Oktanzahl auch in diesem Falle keinen genügenden Aufschluß über das tatsächliche Verhalten eines Kraftstoffes bei den Mischungsverhältnissen für Start und Reiseflug gibt [4].

3. Die Durchführung der Vergleichsprüfungen geschieht bei sehr starkem Klopfen. Dieses starke Klopfen entspricht jedoch nicht den in Flugmotoren auftretenden Verhältnissen. Infolge Fehlens eines einfachen, zuverlässig arbeitenden Indikators, der die Bestimmung einer je nach Wunsch einzustellenden Klopfstärke erlaubte, wäre auch im Klopfprüfmotor zur Bewertung der Kraftstoffe der Klopfbeginn die geeignetste Vergleichsgrundlage, da man bei Klopfmessungen im Flugmotor bzw. Flugmotoren-Einzylinder höchstens den Klopfbeginn einwandfrei feststellen kann. Nach den bisherigen Erfahrungen erfolgt die Ermittelung des beginnenden Klopfens am besten mit dem Gehör. — Jedoch beginnt neuerdings die Verwendung von Indikatoren zur Bestimmung des Klopfbeginnes sich einzubürgern [10].

4. Die Temperaturabhängigkeit der heute verwendeten Bezugs- und Flugmotorenkraftstoffe ist verschieden. Die Anwendung derartiger Bezugskraftstoffe würde bei den heute thermisch stark beanspruchten Flugmotoren die tatsächlich vorliegenden Verhältnisse fälschen (s. auch Bild 1).

Die angeführten Mängel bestätigen, daß eine umfassende Kennzeichnung des motorischen Verhaltens von Kraftstoffen im Flugmotor mit der bisher geübten Oktanzahlbestimmung im CFR-Motor nicht möglich ist.

Die Notwendigkeit, Flugmotorenkraftstoffe im CFR-Motor unter neueren Gesichtspunkten zu prüfen, kam deutlich auf der ISA-Tagung in Berlin, Juni 1938, im Ausschuß 20 (Luftfahrt) »Kraftstoffe« zur Sprache. Die deutschen Vorschläge [8] forderten besonders eine Prüfung bei verschiedenen Gemischtemperaturen (50, 100, 150° C) und bei den praktisch gefahrenen Mischungsverhältnissen. Ferner scheint neben der Oktanzahlbestimmung eine weitere motorische Charakterisierung der Klopffestigkeit der Kraftstoffe durch die Ermittelung der Verdichtung bei Klopfbeginn oder der Leistung wünschenswert. Diesen Vorschlägen wurde von französischer, italienischer und anderer Seite zugestimmt.

Diese Feststellungen sowie die z. B. in England im Bristol-Pegasus-Einzylindermotor durchgeführten Klopfversuche, die die Verhältnisse bei Start und Reiseflug berücksichtigen, zeigen die vielerseits empfundene Notwendigkeit, die Prüfung der Klopffestigkeit nicht allein unter festen Bedingungen durchzuführen.

Um Flugmotorenkraftstoffe auf ihre Verwendbarkeit in hochverdichteten oder/und überladenen Flugmotoren besser beurteilen zu können, wurden neue Bewertungsmaßstäbe vorgeschlagen. So empfiehlt Boerlage die bei Klopfbeginn zulässige Überladung [5], Evans, Dodd und Garner den bei Klopfbeginn meßbaren Verbrennungshöchstdruck [6] und M. Serruys die Leistung bei Überladung unter bestimmten Bedingungen [7]. Die Bestimmung des Klopfbeginnes erfolgt bei den vorgeschlagenen Verfahren mit Hilfe des Gehörs.

III. Prüfung von Flugmotorenkraftstoffen auf ihre Überladbarkeit.

In der DVL wurde nach dem Vorschlage von Boerlage [5] ein Kraftstoff-Prüfverfahren entwickelt, das die Überladung als Beurteilungsmaßstab verwendet. Dieses Verfahren schien besonders deshalb aufschlußreich, weil man auf diese Weise das motorische Verhalten eines Flugmotorenkraftstoffes unmittelbar im Flugmotoren-Einzylinder selbst prüfen kann. Da die Überladung der veränderliche Maßstab ist, ist es weiterhin möglich, den Kraftstoff in jedem gewünschten Flugmotoren-Einzylinder bei bestimmten Bedingungen zu prüfen.

Bei den Überladeversuchen wurde als Maßstab der Klopfintensität das erste hörbare Klopfen, der Klopfbeginn (gleiche Klopfschlagzahl i. d. Min.) gewählt. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß nach Ansicht von E. L. Baß ein geschickter Beobachter das Klopfen an Einzylindermotoren weit früher feststellen kann als es durch irgendeinen Temperaturanstieg im Zylinderblock oder -kopf mit dem empfindlichsten Thermoelement wahrgenommen werden kann.

Zur Kontrolle des Motorzustandes sowie zur eigenen Überprüfung des Beobachters ist es ratsam, jedesmal vor Beginn von Überladeversuchen ein lagerfestes, gebleites Vergleichsbenzin zu fahren. Zur Vermeidung von Schwankungen in der Qualität des Vergleichskraftstoffes ist es empfehlenswert, stets größere Mengen davon auf Lager zu halten.

Vor der Durchführung einer Messung muß von dem jeweiligen Kraftstoff die Elementaranalyse bekannt sein. Aus dem prozentualen Anteil von C, H_2 und O_2 ist der Luftbedarf zu errechnen. Dem Prüfer sind also der theoretische Luftbedarf (L_0), das spezifische Gewicht (γ) und der Luftdruck (B_0) bekannt. Der Beobachter kann fernerhin zur Erleichterung des Prüfvorganges schon sämtliche während des Versuches gleichbleibenden Versuchswerte vor der eigentlichen Prüfung in einer Konstanten C zahlenmäßig zusammenfassen. So ist es ohne große Rechenarbeit möglich, den tatsächlich gefahrenen Luftüberschuß (λ) zu ermitteln. Die bei der Prüfung dann anzuwendende Formel lautet:

$$\lambda = C \frac{t_B}{t_L}$$

wobei t_B = Stoppzeit der gemessenen Kraftstoffmenge in Sekunden und t_L = Stoppzeit der dazu verbrauchten Luftmenge in Sekunden darstellt. Die gewünschte Luftüberschußzahl schnell und sicher einzustellen, ist z. B. mit dem DVL-Abgasprüfgerät möglich [9].

Die bei der Durchführung von Überladeversuchen beispielsweise an einem BMW-132-Flugmotoren-Einzylinder einzuhaltenden Prüfbedingungen sind nach den bisherigen Erfahrungen folgende:

Drehzahl	1600 U/min
Drosselstellung	Vollgas
Zündung	Bestleistung bei λ = 0,7; 0,9; 1,1 bei nicht klopfendem Betrieb
Gemischstärke	über einem Bereich von λ = 0,7 bis 1,3
Ladelufttemperatur . .	35, 80 und 130° C
Maß des Klopfens . .	Gehör, Klopfbeginn.

Die übrigen Prüfdaten, wie Verdichtung, Kühlluftdruck usw. sind durch die jeweilige konstruktive Gestaltung des Prüfmotors festgelegt.

Um den Wert der Überladeprüfung eines Flugmotorenkraftstoffes, der nach dem CFR-Motorverfahren durch die OZ 87 gekennzeichnet ist, zu zeigen, sind die Ergebnisse einer derartigen Prüfung in Bild 2 wiedergegeben. Die Prüfung, die unter den oben angeführten Bedingungen erfolgte, zeigt im Gegensatz zur Einpunktbewertung der Oktanzahl, die starke Abhängigkeit des Kraftstoffes von der Ladelufttemperatur und der Gemischstärke. Eine wesentliche Ergänzung dieser Prüfung stellt die Messung der mittleren Verbrennungsraumtemperatur dar.

IV. Zusammenfassung.

Die beschriebene motorische Prüfung soll dazu beitragen, die Klopffestigkeit von Kraftstoffen für Hochleistungsflugmotoren ausreichender zu kennzeichnen. Die Möglichkeit, die Temperaturabhängigkeit sowie das Ver-

Digitized by Google

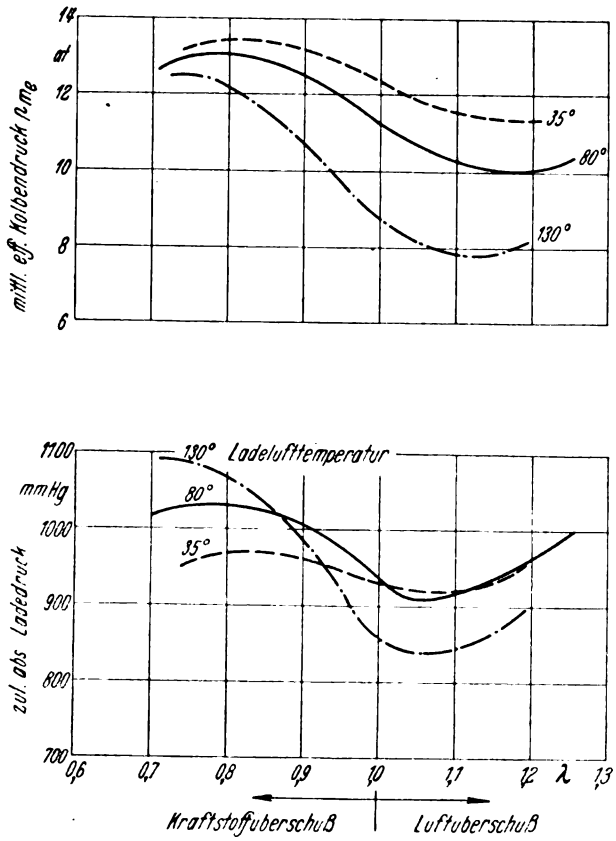


Bild 2. Prüfung eines Kraftstoffes O.Z. 87 auf Überladbarkeit im Flugmotoren-Einzylinder.

halten der Kraftstoffe bei den verschiedenen Gemischzusammensetzungen zu prüfen, ist für die motorische Prüfung der Kraftstoffe eine wertvolle Ergänzung.

V. Schrifttum.

[1] F. Seeber, Kraftstoffe für Flugmotoren. Luftwissen Bd. 5 (1938), Nr. 9, S. 321 bis 330.

[2] E. L. Baß, High octane number fuels for civil aviation. Vortrag, gehalten anläßlich des Pariser Luftfahrtsalons 25. 11. 36. Luftfahrtschrifttum des Auslandes Bd. 3 (1937), Nr. 1. — Prüfung von Kraftstoffen für Hochleistungsflugmotoren. Shell Aviation News Nr. 79 (Jan. 1938).

[3] F. R. Banks, Some problems of modern high-duty aero engine and their fuels. Journ. of Institution of Petroleum Technologists Bd. 23 (1937), S. 63/177.

[4] F. Seeber, Klopffestigkeitsprüfungen an Otto-Motoren. RDT Bd. 18 (1938), Nr. 39, S. 2.

[5] C. D. Boerlage, L. A. Peletier und J. L. Tops, The Allowable Boost Ratio, A new methode of knock rating for aviation fuels of high anti-knock value. Aircraft Engineering Bd. 7 (1935), Nr. 82.

[6] Evans, Dodd und Garner, The nature of the Octane Scale. J. Inst. Petrol. Techn. Bd. 21 (1935), S. 1000 bis 1012.

[7] M. Serruys, Sur une échelle rationelle de classement des carburants. Compt. rendu Bd. 201 (1935), S. 815.

[8] Protokoll über die 7. Hauptsitzung des Comitee ISA 20 (Luftfahrt) Berlin, 24. bis 27. Juni 1938, Aussprache Dr. v. Philippovich, S. 20 bis 21.

[9] H. H. Berg, DVL-Abgasprüfer für Verbrennungsmotoren. ATZ (1938) Heft 17.

[10] F. Lichtenberger und F. Seeber, Beitrag zur Frage der Klopfmeßverfahren. ATZ (1938) Heft 14, S. 372/374.

Untersuchungen über die Beherrschung hoher Abgastemperaturen bei Abgasturboaufladung durch Innenkühlung.

Berichtigung.

In der Arbeit Schörner, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), Lfg. 10/11 muß auf Seite 497 die Angabe über die Wärmeübergangszahl α_L auf Kühlseite lauten:

$$\alpha_L \approx [0{,}0235 - 0{,}0265] \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot P e^{0{,}86}$$

statt

$$\alpha_L \approx [2{,}35 - 2{,}65] \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot P e^{0{,}86}.$$

Dasselbe gilt für den Nachdruck im Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung II, S. 219 bis 223.

Digitized by Google

Über die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen von Tragflügeln.

Von W. Kaufmann.

Bericht aus dem Aerodynamischen Laboratorium der Technischen Hochschule München.

Modellmäßige Untersuchungen über die Flattereigenschaften bestimmter Flugzeugmuster wurden im Rahmen der deutschen Luftfahrtforschung bereits im Jahre 1933 in der DVL von H. G. Küssner an naturgetreuen Modellen vorgenommen. Diese modellmäßige Untersuchung beschränkte sich jedoch auf bestimmte Einzelfälle, weil sich bei diesen Versuchen zeigte, daß die Herstellung dynamisch ähnlicher Modelle außerordentliche Schwierigkeiten mit sich bringt. Die praktischen Schwierigkeiten erhöhen sich noch dadurch, daß es oft nötig ist, für das Modell einen anderen Baustoff als für die Großausführung zu verwenden; denn dann werden besondere Maßnahmen erforderlich, um dynamische Ähnlichkeit zu erzielen. Weiterhin muß damit gerechnet werden, daß die modellmäßig ermittelten Flattereigenschaften eines Flugzeugmusters wegen irgendwelcher Unvollkommenheiten des Modellversuches mehr oder weniger von der Wirklichkeit abweichen.

Mit gutem Erfolg wurden aber in neuerer Zeit Modellversuche mit möglichst einfachen Systemen benutzt, um damit — unabhängig von bestimmten Flugzeugmustern — grundsätzliche Fragen zu klären (s. Voigt, H.: Untersuchungen von angefachten Dreh-Biege-Tragflügelschwingungen im Windkanal, Luftf.-Forsch. Bd. 14 (1937), Nr. 9, S. 427 bis 433). ZWB.

Es werden die Ähnlichkeitsbedingungen untersucht, die erfüllt sein müssen, um aus den an Modellen beobachteten Flatterschwingungen auf entsprechende Vorgänge an Großausführungen schließen zu können. Dabei zeigt sich, daß unter Beachtung aller bei Flatterschwingungen in Erscheinung tretenden Kraftarten eine vollkommene Befriedigung der Modellgesetze nicht möglich ist. Durch Versuche im Windkanal wird geprüft, welche Modellbedingung dem wirklichen Verhalten der Flügel beim Flattern am besten gerecht wird.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen.
III. Windkanalversuche.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Zur Erforschung der für die Luftfahrt äußerst wichtigen Erscheinung der Flatterschwingungen von Tragflügeln ist in den letzten Jahren eine Reihe von Arbeiten entstanden, die im wesentlichen eine Lösung des Problems auf theoretischem Wege anstreben. Daneben spielten diesbezügliche experimentelle Untersuchungen bislang eine mehr untergeordnete Rolle, zumal sie in der Hauptsache dem Zwecke dienen sollten, die durch die Theorie gefundenen Ergebnisse — unter Berücksichtigung der von ihr zugrunde gelegten Annahmen — einer Prüfung zu unterziehen[1]). Das Hauptziel dieser Arbeiten ist die Ermittlung der »kritischen Geschwindigkeit«, d. h. derjenigen Geschwindigkeit, von welcher ab das Flattern bei wachsenden Schwingungsausschlägen einsetzt. Die bisher durchgeführten Untersuchungen haben — wenigstens in qualitativer Hinsicht — bereits zu wichtigen Erkenntnissen geführt und gelehrt, welche Umstände das Flattern besonders begünstigen [1], [2], [3], so daß verschiedene konstruktive Maßnahmen getroffen werden können, um einem Flattern nach Möglichkeit vorzubeugen. Indessen ist es z. Z. noch nicht möglich, die kritische Geschwindigkeit für neue Baumuster und bei allen in Betracht kommenden Fluglagen mit ausreichender Sicherheit vorauszubestimmen, zumal den bisherigen theoretischen Ansätzen weitgehende Idealisierungen des wirklichen Vorganges — ebene Strömung, kleiner Anstellwinkel, alleinfahrender Flügel, reibungsfreie Flüssigkeit usw. — zugrunde gelegt wurden.

In einer beachtenswerten Arbeit hat H. L. Studer [2] neuerdings auf die ganz wesentliche Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit vom Anstellwinkel hingewiesen und durch Modellversuche gezeigt, daß allem Anschein nach zwei verschiedene Formen von Flügelschwingungen auftreten können, je nachdem die Strömung bei der Schwingung am Flügel anliegt (*B*-Schwingung) oder ob sie sich bei entsprechend großem Anstellwinkel vom Flügel ablöst (*A*-Schwingung). Er spricht die Vermutung aus, daß der *B*-Schwingung ein eindeutiges Kraftgesetz zugrunde liegt (wie es auch in die Theorie eingeführt wird), während das Luftkraftgesetz der *A*-Schwingung im Abreißgebiet zweideutig ist. Die mit dem Stroboskop beobachteten Schwingungen zeigten tatsächlich für die beiden Schwingungsformen bemerkenswerte Unterschiede. Dabei ist besonders beachtenswert, daß gerade bei der *A*-Schwingung — die wegen der für sie maßgebenden Abreißvorgänge der theoretischen Erklärung ganz erhebliche Schwierigkeiten bereiten dürfte — die wesentlich kleineren kritischen Geschwindigkeiten beobachtet wurden.

Man wird daraus den Schluß ziehen dürfen, daß bei der Beurteilung der nach den bisherigen theoretischen Untersuchungen ermittelten kritischen Geschwindigkeiten eine gewisse Vorsicht geboten ist. Bedenkt man weiter, daß auch die Art der Verbindung des Flügels mit dem Rumpf und ein eventueller instationärer Bewegungszustand einen gewissen Einfluß auf das Eintreten des Flatterns haben können, so wird man immer mehr zu der Ansicht kommen, daß nur eingehende Versuche an naturgetreu nachgebildeten Flugzeugmodellen — nicht nur an einzelnen Flügeln — alle praktisch wichtigen Erscheinungen zu klären vermögen. Aber selbst dann bleibt immer noch die Frage offen, wieweit die an einem hinreichend großen geometrisch ähnlichen Modell gewonnenen Erkenntnisse unmittelbar auf eine Großausführung übertragen werden können, da für eine solche Übertragung nicht nur geometrische, sondern auch dynamische Ähnlichkeit der beiden Vorgänge erforderlich ist. Nachstehend sollen deshalb die für Flatterschwingungen maßgebenden Ähnlichkeitsbedingungen etwas eingehender untersucht werden.

II. Die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen.

Vollkommene dynamische Ähnlichkeit zweier Bewegungsvorgänge setzt voraus[2]):

[1]) Ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis ist zu finden in den Arbeiten von H. G. Küssner [1] und H. L. Studer [2].

[2]) Vgl. hierzu die ausführliche Darstellung des allgemeinen Ähnlichkeitsprinzips von M. Weber [4].

Digitized by Google

a) Geometrische Ähnlichkeit, d. h. entsprechende Längengrößen müssen dasselbe Verhältnis $\lambda = \frac{l}{\bar{l}}$ haben (die überstrichene Größe bezieht sich jeweils auf das Modell),

b) zeitliche Ähnlichkeit, d. h. entsprechende Zeitgrößen müssen dasselbe Verhältnis $\tau = \frac{t}{\bar{t}}$ haben,

c) Kräfteähnlichkeit, d. h. entsprechende Kraftgrößen müssen dasselbe Verhältnis $\varkappa = \frac{K}{\bar{K}}$ haben.

Bei den Flatterschwingungen eines Tragflügels hat man es mit folgenden Kraftarten zu tun:

1. Massenkräften,
2. elastischen Kräften,
3. Dämpfungskräften,
4. Luftkräften, und zwar
   a) solchen, die sich aus dem Wesen der idealen Flüssigkeit herleiten lassen (Auftrieb und induzierter Widerstand),
   b) solchen, die ihre Entstehung der Zähigkeitswirkung verdanken (Reibungseinflüsse).

Das Verhältnis der Massenkräfte für Modell und Großausführung wird durch Newtons allgemeines Ähnlichkeitsgesetz geregelt, wonach

$$\varkappa = \frac{\mu}{\bar{\mu}} \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wenn μ bzw $\bar{\mu}$ die Baustoffdichten der beiden beschleunigt bewegten Tragflügel bezeichnen.

Das Verhältnis der elastischen Kräfte Hookescher Art — auf solche sollen die nachstehenden Überlegungen beschränkt bleiben — ergibt sich aus der Bedingung

$$\varkappa = \frac{\varepsilon E F}{\bar{\varepsilon} \bar{E} \bar{F}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo ε und $\bar{\varepsilon}$ entsprechende Dehnungen, E und $\bar{E}$ die entsprechenden Elastizitätsmoduln und F bzw. $\bar{F}$ entsprechende Querschnitte bezeichnen. Da nun im Falle geometrischer Ähnlichkeit $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ und $\frac{F}{\bar{F}} = \lambda^2$ ist, so folgt aus (2)

$$\varkappa = \frac{E}{\bar{E}} \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dieser Ausdruck gilt zunächst für Biegungsvorgänge. Handelt es sich dagegen um Verdrehungen, so tritt an Stelle von Gleichung (3) mit G als Schubmodul

$$\varkappa = \frac{G}{\bar{G}} \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Im Falle der Flatterschwingungen hat man es mit Biegung und Verdrehung zu tun, weshalb noch die Bedingung

$$\frac{E}{\bar{E}} = \frac{G}{\bar{G}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

erfüllt sein muß.

Verbindet man Gleichung (1) mit (3), so folgt das Cauchysche Ähnlichkeitsgesetz

$$\frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{\mu}}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

mit der Nebenbedingung (4).

Die bei einem schwingenden Flügel auftretenden Dämpfungskräfte können sehr verschiedener Art sein. Im allgemeinen wird man es mit Dämpfung durch Luftkräfte, Baustoffdämpfung und Dämpfung durch Reibung in den Verbindungsmitteln und Lagerstellen zu tun haben. Letztere dürfte für das vorliegende Problem nur eine untergeordnete Rolle spielen und soll deshalb hier außer Betracht bleiben. Die Luftdämpfung wird weiter unten bei der Betrachtung der Luftkräfte mit erfaßt. Es handelt sich somit zunächst lediglich um die Baustoffdämpfung, für welche nach dem Vorschlag von B. v. Schlippe [5] der Ansatz

$$D = \Gamma F \varepsilon$$

gemacht werden soll, wo ε wieder die Dehnung, F eine Querschnittsfläche und Γ [kg/cm²] den sogenannten »Dämpfungsmodul« — einen vom Baustoff abhängigen Faktor — darstellen. Das vorstehende Gesetz beruht auf der durch Versuche belegten Annahme, daß die Dämpfung im wesentlichen unabhängig von der Frequenz, dagegen proportional der Amplitude ist [5]. Damit ergibt sich als Verhältnis der durch Baustoffdämpfung bedingten Kräfte der Wert

$$\varkappa = \frac{\Gamma F \varepsilon}{\bar{\Gamma} \bar{F} \bar{\varepsilon}} = \frac{\Gamma}{\bar{\Gamma}} \lambda^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit den Bedingungen (3) und (3a), so erkennt man, daß für die hier zu untersuchende Ähnlichkeit die Gleichung (4) in

$$\frac{E}{\bar{E}} = \frac{G}{\bar{G}} = \frac{\Gamma}{\bar{\Gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

zu erweitern ist. Für gleiche Baustoffe von Modell und Großausführung ist diese Bedingung identisch erfüllt.

Von besonderer Bedeutung für das Auftreten der Flatterschwingungen, die ja nicht durch periodisch veränderliche Massenkräfte des Triebwerkes oder dergleichen, sondern durch den Flugwind angefacht werden, sind die auf den Flügel wirkenden Luftkräfte. Dabei handelt es sich aber nicht nur um die stationären Luftkräfte, sondern auch um deren instationäre Änderungen während des Flatterns. Für die hier anzustellenden Ähnlichkeitsbetrachtungen ist die Kenntnis der Luftkräfte selbst nicht erforderlich, da es ja nur auf ihre dimensionslosen Verhältniswerte ankommt. Es führen also schon einfache Überlegungen zu dem gewünschten Ziele.

In Bild 1 stelle a—b eine Flügelsehne in der stationären Fluglage dar. Beim Flattern wird diese Sehne aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt, und zwar möge sie infolge reiner Biegung in die Lage a'—b' gelangen, während sie durch eine zusätzliche Torsion des Flügels um den Winkel φ die Lage a''—b'' erreichen möge. Mit dieser Lagenänderung ist aber auch eine Änderung des ursprünglichen Anstellwinkels α um den Betrag φ verbunden. Nun besitzt jeder Punkt der Sehne beim Flattern eine von der Frequenz der Biegungs- und Torsionsschwingungen abhängige Geschwindigkeit w, die i. a. für alle Punkte der Sehne verschiedene Werte hat. Bezeichnet ferner v die stationäre Strömungsgeschwindigkeit der Luft relativ gegen den Flügel, so wird durch dessen Schwingungsbewegung eine zusätzliche Windgeschwindigkeit — w erzeugt, die mit v zusammengesetzt die scheinbare Strömungsgeschwindigkeit v' liefert, was einer weiteren Änderung des Anstellwinkels um den Wert ψ entspricht [6]. Als gesamte Änderung von α erhält man somit

$$\delta\alpha = \varphi + \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wegen der vorausgesetzten Ähnlichkeit muß $\varphi = \bar{\varphi}$ und

$$\frac{v}{\bar{v}} = \frac{w}{\bar{w}} = \frac{\lambda}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

sein, weshalb nach Bild 1 auch $\psi = \bar{\psi}$ wird. Somit folgt aus (7)

$$\delta\alpha = \delta\bar{\alpha}.$$

Der Auftrieb A kann, wie bekannt, in der Form

$$A = c_a q F_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dargestellt werden, wo c_a den wesentlich vom Anstellwinkel α abhängigen Auftriebsbeiwert, $q = \frac{\varrho}{2} v^2$ den

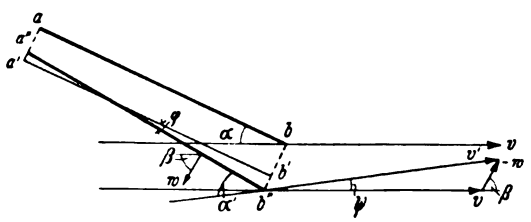


Bild 1.

Digitized by Google

Staudruck F_f die Flügelfläche bezeichnen. Für die vorliegende Betrachtung sollen ϱ und v — und damit auch q — als konstant angenommen werden. Dann erhält man aus (9) als periodische Änderung des Auftriebes den Wert

$$\delta A = \frac{d c_a}{d \alpha} \delta \alpha \, q \, F_f = c_a' \, \delta \alpha \, \frac{\varrho}{2} v^2 F_f,$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{d c_a}{d \alpha} = c_a'$$

gesetzt wird. Entsprechend gilt für das Modell

$$\delta \bar{A} = \bar{c}_a' \, \delta \bar{\alpha} \, \frac{\bar{\varrho}}{2} \bar{v}^2 \bar{F}_f.$$

Nun ist aber $\delta \alpha = \delta \bar{\alpha}$ (s. oben) $\frac{v^2}{\bar{v}^2} = \frac{\lambda^2}{\tau^2}$, $\frac{F_f}{\bar{F}_f} = \lambda^2$, weshalb

$$\varkappa = \frac{\delta A}{\delta \bar{A}} = \frac{c_a'}{\bar{c}_a'} \frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wird. Verbindet man diesen Ausdruck mit Gleichung (1), so erhält man als weitere Ähnlichkeitsbedingung

$$\frac{c_a'}{\bar{c}_a'} \frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Solange man die Luft als ideale Flüssigkeit ansieht, ist für geometrisch ähnliche Flügel $c_a(\alpha) = \bar{c}_a(\bar{\alpha})$ und $c_a'(\alpha) = \bar{c}_a'(\bar{\alpha})$, da die Auftriebsbeiwerte und ihre Ableitungen nur von den geometrischen Abmessungen und vom Anstellwinkel abhängen können. Die vorstehende Ähnlichkeitsbedingung ist also unter dieser Voraussetzung erfüllt, wenn

$$\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

d. h. etwa dann, wenn gleiche Materialdichten $\mu = \bar{\mu}$ und gleiche Luftdichten $\varrho = \bar{\varrho}$ verwendet werden.

Nun muß aber auch sein

$$\varkappa = \frac{A}{\bar{A}} = \frac{c_a \, q \, F}{\bar{c}_a \, \bar{q} \, \bar{F}} = \frac{c_a}{\bar{c}_a} \frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \frac{\lambda^4}{\tau^2}.$$

Für $c_a = \bar{c}_a$ und $c_a' = \bar{c}_a'$ ist diese Bedingung identisch mit Gleichung (10).

Bisher war von den Luftkräften nur der Auftrieb berücksichtigt. Für den induzierten Widerstand gilt im Falle elliptischer Auftriebsverteilung — auf diese können wir uns bei unserer Ähnlichkeitsbetrachtung beschränken —

$$W_i = \frac{A^2}{\pi b^2 q},$$

wenn b die Flügelspannweite bezeichnet. Demnach wird für q = konst. (s. oben)

$$\delta W_i = 2 A \frac{\delta A}{\pi b^2 q}$$

und somit

$$\frac{\delta W_i}{\delta \bar{W}_i} = \frac{A}{\bar{A}} \frac{\delta A}{\delta \bar{A}} \frac{\bar{b}^2 \bar{q}}{b^2 q} = \frac{c_a \, q \, F_f}{\bar{c}_a \, \bar{q} \, \bar{F}_f} \frac{\delta A}{\delta \bar{A}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\bar{q}}{q}$$

oder

$$\frac{\delta W_i}{\delta \bar{W}_i} = \frac{c_a}{\bar{c}_a} \frac{\delta A}{\delta \bar{A}}.$$

Da für ideale Flüssigkeit $c_a = \bar{c}_a$ gesetzt werden kann, so wird

$$\frac{\delta W_i}{\delta \bar{W}_i} = \frac{\delta A}{\delta \bar{A}}.$$

Weiter muß sein

$$\varkappa = \frac{W_i}{\bar{W}_i} = \frac{A^2}{b^2 q} \frac{\bar{b}^2 \bar{q}}{\bar{A}^2} = \varkappa^2 \frac{\bar{\varrho}}{\varrho} \frac{\tau^2}{\lambda^4}$$

oder

$$\varkappa = \frac{\varrho}{\bar{\varrho}} \frac{\lambda^4}{\tau^2}.$$

Wegen (1) folgt daraus $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = \frac{\mu}{\bar{\mu}}$, d. h. die Bedingung (12).

Man erhält also aus den induzierten Widerständen keine neue Ähnlichkeitsbedingung.

Schließlich ergibt sich aus dem Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeiten $\frac{v}{\bar{v}} = \frac{\lambda}{\tau}$ mit Rücksicht auf (5)

$$v = \bar{v} \sqrt{\frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{\mu}}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

mit den Nebenbedingungen (6) und (12).

Solange man sich auf die bisher besprochenen Kraftwirkungen beschränkt, bestimmt Gleichung (13) auch das Verhältnis $\frac{v_k}{\bar{v}_k}$ der kritischen Geschwindigkeiten von Großausführung und Modell, vorausgesetzt, daß gleichzeitig für die Einhaltung der Bedingungen (6) und (12) gesorgt wird.

Die Bedingung (6) wird man mit hinreichender Genauigkeit immer dann als erfüllt ansehen dürfen, wenn für Modell und Hauptausführung der gleiche Baustoff verwendet wird (z. B. Metallflügel).

Wesentlich schwieriger ist schon die Erfüllung der Bedingung (12), da das Verhältnis $\frac{\bar{\mu}}{\mu}$ durch den Baustoff gegeben ist, während das Dichteverhältnis $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ einerseits von der Luftdichte $\bar{\varrho}$ beim Modellversuch (Windkanal), andererseits von der Luftdichte ϱ in verschiedenen Höhen und bei verschiedenen Temperaturen der freien Atmosphäre bestimmt ist. Eine genaue Erfüllung der Bedingung (12) würde also voraussetzen, daß die Dichte $\bar{\varrho}$ im Windkanal der für den praktischen Flug jeweils maßgebenden Luftdichte ϱ von Fall zu Fall angepaßt werden könnte. Darin liegt naturgemäß eine erhebliche Schwierigkeit.

Bisher war von dem Einfluß der Luftzähigkeit vollständig abgesehen. Nun ist aber sicher, daß alle Grenzschichtvorgänge und Wirbelbildungen wesentlich von der Zähigkeit abhängen, und daß auch alle Dämpfungserscheinungen des Flügels durch Luftkräfte von der Flüssigkeitsreibung beeinflußt werden. Maßgebend für diese Vorgänge ist die Bilanz zwischen Reibungs- und Trägkeitskräften — d. h. vom Standpunkt der Ähnlichkeitsmechanik das Reynoldssche Gesetz. Nach diesem müßte aber für die Strömungsgeschwindigkeiten die Beziehung bestehen

$$\frac{v}{\bar{v}} = \frac{\nu}{\bar{\nu}} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

wenn ν die kinematische Zähigkeit bezeichnet. Die Bedingungen (13) und (14) lassen sich — abgesehen von dem trivialen Fall $\lambda = 1$ — praktisch nicht in Übereinstimmung bringen. Eine strenge dynamische Ähnlichkeit der Flatterschwingungen ist also nicht zu erreichen. Man befindet sich hier in einer ähnlichen Lage wie im Schiffbau, wo neben dem Reynoldsschen Gesetz noch das Froudesche Gesetz eine Rolle spielt.

Die Frage, welchem der beiden Gesetze (13) oder (14) für den Fall der Flatterschwingungen das größere Gewicht zukommt bzw. ob eine Erklärung der Vorgänge durch Ähnlichkeitsbetrachtungen überhaupt einige Aussicht auf Erfolg verspricht, kann nur der Versuch entscheiden. Dabei ist von vornherein klar, daß das Reynoldssche Gesetz wegen der großen Versuchsgeschwindigkeiten, die bei größeren λ-Werten notwendig sind, praktisch kaum in Frage kommen dürfte. Es wäre also zu prüfen, ob und wieweit etwa durch die Bedingung (13) die wirklichen Vorgänge mit einiger Sicherheit erfaßt werden können.

Bei den obigen Betrachtungen über die Verhältniswerte $\frac{A}{\bar{A}}$, $\frac{W_i}{\bar{W}_i}$, $\frac{\delta A}{\delta \bar{A}}$ und $\frac{\delta W_i}{\delta \bar{W}_i}$ wurde zunächst unter Vernachlässigung aller Zähigkeitseinflüsse $c_a = \bar{c}_a$ und $c_a' = \bar{c}_a'$ gesetzt. Nun haben Vergleichsmessungen an Modellen gezeigt [7], daß die Auftriebsmaxima $c_{a\max}$ außer von der Reynoldsschen Zahl R auch von der Rauhigkeit der Flügeloberfläche und vom Turbulenzgrad der anströmenden Luft abhängen. Zwar geht aus diesen Versuchen hervor, daß c_a und c_a' bei glatten Profilen von R nur wenig beeinflußt werden, solange

Digitized by Google

man sich auf kleine Anstellwinkel beschränkt. Man darf also vermuten, daß die oben hinsichtlich c_a und c_a' gemachten Annahmen zumindestens im Bereich kleiner Anstellwinkel mit einiger Sicherheit zutreffen. Stärkere Abweichungen sind für größere Anstellwinkel zu erwarten, also besonders dann, wenn die Flügelströmung beginnt, sich vom Flügel abzulösen. Ein weiterer Unsicherheitsfaktor wird immer in der verschiedenen Rauhigkeit für Modell und Großausführung und in der Verschiedenheit der Turbulenz beim Windkanalversuch gegenüber derjenigen der freien Atmosphäre liegen.

Für die Ähnlichkeitsbetrachtung ist noch der Vergleich der Schwingungsfrequenzen von Bedeutung, die beim Modellversuch leicht durch stroboskopische Beobachtung festgestellt werden können. Bezeichnet n die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde, so ist im Falle vollkommener Ähnlichkeit

$$\frac{n}{\bar{n}} = \frac{1}{\tau}$$

oder mit Rücksicht auf (5)

$$\frac{n}{\bar{n}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\bar{E}}\,\frac{\bar{\mu}}{\mu}}.$$

Insbesondere wird für $E = \bar{E}$ und $\mu = \bar{\mu}$

$$\bar{n} = n\,\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Geht man dagegen von dem Gesetz (14) aus, so ergibt sich mit $v = \bar{v}$ und wegen $\frac{v}{\bar{v}} = \frac{\lambda}{\tau}$ die Beziehung $\tau = \lambda^2$, und man erhält

$$\bar{n} = n\,\tau = n\,\lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Man sieht, daß auch die Gleichungen (15) und (16) für die Schwingungsfrequenzen in Widerspruch miteinander stehen. Auch hier muß also der Versuch entscheiden, welche der beiden Gleichungen (15) oder (16) der Wirklichkeit am nächsten kommt.

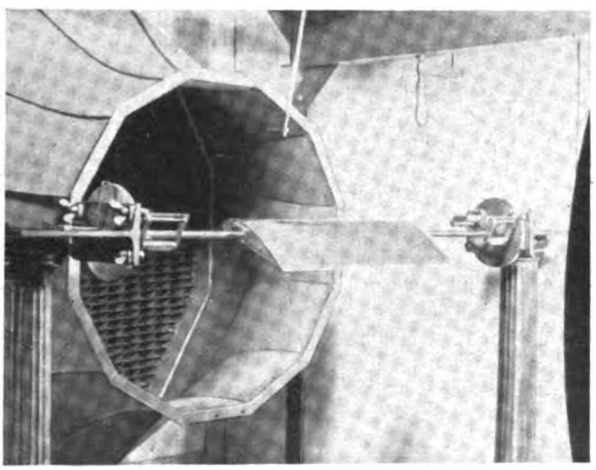


Bild 2. Gesamtanordnung der Versuchseinrichtung.

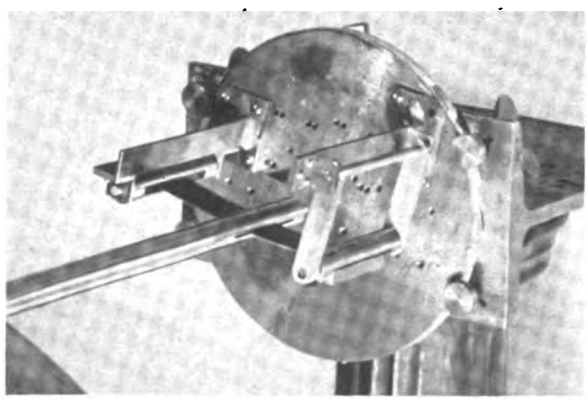


Bild 3. Elastische Lagerung der Flügel.

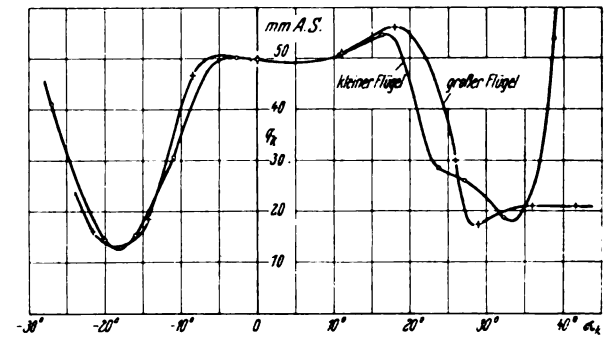


Bild 4. Kritischer Staudruck q_k in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α_k. O Meßpunkte für den kleinen, + Meßpunkte für den großen Flügel.

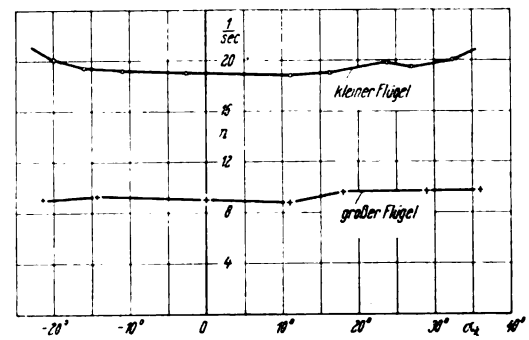


Bild 5. Flatterfrequenzen in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α_k.

III. Windkanalversuche.

Zur Prüfung der Frage, welche der oben entwickelten Modellbedingungen dem wirklichen Verhalten der Flügel beim Flattern am ehesten entspricht, wurden im Windkanal der Technischen Hochschule München Versuche an Modellflügeln angestellt, die zwar noch nicht abgeschlossen sind, aber doch schon einen gewissen Einblick in den Ähnlichkeitsmechanismus gestatten[3]). Verwendet wurden zwei geometrisch ähnliche Modellflügel (Göttinger Profil 625) vom Maßstabverhältnis $\lambda = 2$, deren Außenhaut aus Messingblech bestand. Die Blechstärken wurden ebenfalls im Verhältnis 1 : 2 gewählt, dagegen konnte eine Ähnlichkeit der Oberflächenrauhigkeit nicht — wie es eigentlich sein müßte — berücksichtigt werden. Die Modellflügel wurden beiderseits mit Hilfe von Blattfedern so gestützt, daß die Flügel in der Lage waren, sowohl Biegungs- als auch Torsionsschwingungen verschiedener Frequenz auszuführen. Durch drehfest mit den Flügeln verbundene Teilkreisscheiben war außerdem dafür gesorgt, daß die Anstellwinkel beliebig verändert werden konnten. Auf die Anordnung von Querrudern wurde zunächst verzichtet, da durch die vorliegenden Versuche in erster Linie festgestellt werden sollte, ob überhaupt ein dynamisch ähnliches Verhalten der Flügel erkennbar ist oder nicht. Besondere Sorgfalt wurde auf die genaue Einhaltung der Ähnlichkeitsbedingungen für die Lagerung der Flügel verwendet, da sich bei Vorversuchen gezeigt hatte, daß schon kleine Längenungenauigkeiten der einzelnen Lagerteile wesentliche Abweichungen bei den elastischen Konstanten zur Folge haben können. Die gesamte Versuchsanordnung ist aus Bild 2, die elastische Lagerung der Flügel einschließlich der Teilkreise aus Bild 3 ersichtlich.

Gemessen wurden die kritischen Staudrücke q_k und die Schwingungsfrequenzen n der Flügel für einen Anstellwinkelbereich von etwa $-25°$ bis $+30°$. Als kritische Geschwindigkeit wurde durch Staudruckmessung diejenige Luftgeschwindigkeit festgestellt, bei welcher die Flügelschwingungen beginnen und sich weiter aufschaukeln, sobald die Geschwindigkeit erhöht wird. Die zugehörigen Flatter-

[3]) Die Versuche wurden von meinem Mitarbeiter, Diplomphysiker H. Stefaniak, durchgeführt, welcher die Versuchsanordnung entworfen und die nachfolgenden Lichtbilder angefertigt hat.

Digitized by Google

frequenzen wurden durch stroboskopische Beobachtung gemessen. Zunächst wurden bei ruhender Luft für beide Flügel die gleichen Anstellwinkel eingestellt. Als maßgebender Anstellwinkel α_k wurde dann derjenige Winkel abgelesen, der sich jeweils kurz vor Erreichung der kritischen Geschwindigkeit ergab, d. h. unmittelbar bevor das Flattern einsetzte. Die Versuchsergebnisse sind in Bild 4 und 5 dargestellt, und zwar zeigt Bild 4 die kritischen Staudrücke in mm Alkoholsäule, Bild 5 die Flatterfrequenzen n, beide Größen in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α_k.

Die Versuche bestätigen zunächst alle von Studer [2] gemachten Beobachtungen hinsichtlich der Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit v_k vom Anstellwinkel. Auch die beiden verschiedenen Schwingungsarten konnten einwandfrei festgestellt werden, nämlich die B-Schwingung bei vollständig am Flügel anliegender Strömung und die A-Schwingung, die dann auftritt, wenn die Strömung während einer Schwingungsperiode erst anliegt und dann abreißt.

Aus dem Ähnlichkeitsgesetz (13) und den Nebenbedingungen (6) und (12) folgt, daß für geometrisch ähnliche Flügel aus dem gleichen Baustoff bei der Bewegung in Luft gleicher Dichte ϱ die kritische Geschwindigkeit — und demnach auch der kritische Staudruck — unabhängig von dem Maßstabverhältnis sein muß, d. h.

$$v_k = \overline{v}_k .$$

Der Verlauf von $q_k = f(\alpha_k)$ in Bild 4 zeigt nun tatsächlich eine recht gute Übereinstimmung für beide Flügel zumindest im Gebiet der anliegenden Strömung (B-Schwingung). Aber selbst im Bereich der A-Schwingung sind die Abweichungen der Werte q_k und $\overline{q}_k$ nur gering[4]). Die starke Abweichung an der Stelle der größten gemessenen positiven Anstellwinkel läßt auf einen Versuchsfehler schließen. Eine diesbezügliche Kontrolle soll noch vorgenommen werden. Sicher ist jedenfalls, daß das Ähnlichkeitsgesetz (14) nicht in Betracht kommt, was wohl zu dem Schluß berechtigt, daß der Schwingungsvorgang von den elastischen Kräften viel stärker beeinflußt wird als von den Luftreibungskräften und den damit verbundenen Dämpfungen.

[4]) Es sei in diesem Zusammenhang auf die Modellversuche für die Luftschrauben des Luftschiffes LZ 129 verwiesen, die mit einem Modell vom Maßstab 1 : 5 durchgeführt wurden. Das beim Rückwartslauf der Großausführung beobachtete Flattern trat am Modell genau bei der fünffachen Drehzahl auf, d. h. es war auch dort $v_k = \overline{v}_k$. (Vgl. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 296.

Auch hinsichtlich der Frequenzen gilt dasselbe. Nach Gl. (15) muß wegen $\lambda = 2$

$$\overline{n} = 2\,n$$

sein, was durch den Versuch befriedigend bestätigt wird, während nach Gleichung (16)

$$\overline{n} = 4\,n$$

sein müßte.

IV. Zusammenfassung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Ähnlichkeitsgesetze (13) bzw. (15) bei Einhaltung der Nebenbedingungen (6) und (12) mit guter Genauigkeit im Bereich der anliegenden Strömung erfüllt, und daß auch über diesen Bereich hinaus die Abweichungen nicht beträchtlich sind. Wie weit dieses Ergebnis erhalten bleibt, wenn größere Maßstabsverhältnisse, etwa $\lambda = 5$ oder 10, gewählt werden, bleibt abzuwarten. Offen ist außerdem noch die Frage, wie sich etwa der Einfluß verschiedener Oberflächenrauhigkeit sowie eines stark abweichenden Turbulenzgrades der strömenden Luft auf die obigen Ergebnisse auswirkt. Zur Klärung dieser Fragen müssen weitere Versuche angestellt werden, über die später berichtet werden soll.

V. Schrifttum.

[1] H. G. Küßner, Augenblicklicher Entwicklungsstand der Frage des Flügelflatterns. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 193.

[2] H. L. Studer, Experimentelle Untersuchungen über Flügelschwingungen. Mitt. aus d. Inst. f. Aerodyn. E.T.H. Zürich, 1936.

[3] J. Essers, Untersuchung von Flügelschwingungen im Windkanal. Jahrb. 1929 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, S. 345. Verlag R. Oldenbourg, München-Berlin.

[4] M. Weber, Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik. Jahrb. d. Schiffsbautechn. Ges. 1930 und »Hütte« 26. Aufl., Bd. I, S. 330.

[5] B. v. Schlippe, Die innere Dämpfung. Ing. Archiv Bd. 6 (1935), S. 127.

[6] H. Blasius, Über Schwingungserscheinungen an einholmigen Unterflügeln. Z. Flugtechn. Bd. 15 (1925), S. 39.

[7] Ray W. Hooker, The aerodynamic characteristics of airfoils as affected by surface roughness. Nat. Advisory Commitee for Aeronautics. Techn. Note Nr. 457 (1933).

Digitized by Google

Korrekturfaktoren für Windkanäle elliptischen Querschnitts mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke.

Von F. Riegels.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Bei Untersuchungen verhältnismäßig großer Modelle in Windströmen mit offener Meßstrecke ist man häufig gezwungen, einen Teil der Meßstrecke durch eine Wand abzudecken. Man wählt diese Abdeckung dann so groß, daß die Korrekturen für Anstellwinkel und Widerstand möglichst klein werden. Für den Kreisstrahl ist die Größe dieser günstigsten Abdeckung auf Grund theoretischer Rechnung bekannt, für den elliptischen Strahl wird sie in der vorliegenden Arbeit ermittelt.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Elliptischer Strahl mit einer festen Wand (Bild 1).
III. Elliptischer Strahl mit zwei festen Wänden (Bild 5).
IV. Ergebnis.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

1. Einleitung.

Durch die endliche Begrenzung von Windströmen werden in der Strömung und besonders am Ort des Flügels zusätzliche Geschwindigkeiten erzeugt. Das hat zur Folge, daß der im Windstrom gemessene Anstellwinkel und Widerstandskoeffizient bei gegebenem Auftrieb berichtigt werden muß. Rechnungen, die den Einfluß der Windstromgrenzen erfassen, liegen in großer Zahl vor. Es sind offene und geschlossene Windströme untersucht und auch solche, deren Begrenzung teilweise aus festen Wänden und teilweise aus freien Strahlgrenzen besteht (vgl. [1] bis [6]).

Die letzteren Anordnungen haben den Vorteil, daß sie die Durchführung mancher Versuche erleichtern und außerdem gestatten, gerade eine solche Begrenzung zu wählen, daß die mittlere Zusatzgeschwindigkeit am Ort des Flügels und damit der Korrekturfaktor für die Messungen gerade Null wird. Denn denken wir uns das Flügelmodell mit der Saugseite nach unten aufgehängt, dann erzeugen Windströme mit festen Grenzen abwärts gerichtete, solche mit freien Strahlgrenzen aufwärts gerichtete Zusatzgeschwindigkeiten. Man kann daher erwarten, daß bei entsprechender Verteilung von festen und freien Grenzen über den Querschnitt gar keine Zusatzgeschwindigkeit erzeugt wird.

In dieser Arbeit wird der Einfluß der Grenzen eines teilweise offenen und teilweise geschlossenen Windstromes mit elliptischem Querschnitt untersucht.

2. Elliptischer Strahl mit einer festen Wand (Bild 1).

Unter der Annahme kleiner Zusatzgeschwindigkeiten, deren Quadrate vernachlässigbar sind, und einer nicht deformierten Strahlgrenze, kann man die Ermittlung der Zusatzströmung zurückführen auf die Betrachtung der Strömungsverhältnisse in einem Querschnitt unendlich weit hinten, wo eine Zusatzgeschwindigkeit herrscht, die doppelt so groß wie die am Ort des Flügels ist [1].

Der Windstrom habe den in Bild 1 gezeigten elliptischen Querschnitt mit den Achsen $2a'$ und $2b'$. Der Flügel befinde sich in der Mitte des Windstromquerschnittes, er habe die Spannweite $b = 2$ s und rechteckige Auftriebsverteilung. Wir wählen jetzt ein Koordinatensystem (x, y) so, daß sein Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse liegt. Dann durch-

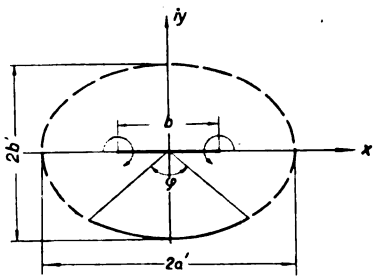


Bild 1. Der elliptische Strahl mit einer festen Wand.

stoßen die abgehenden Wirbel des Flügels den in Bild 1 gezeichneten Querschnitt in den Punkten $x = \pm$ s.

Es muß nun eine Zusatzströmung ermittelt werden, derart, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind. Diese lauten für den festen Teil: Verschwinden der Normalkomponente der Geschwindigkeit, für die freie Strahlgrenze: Konstanz des Druckes, was bei der angenommenen Kleinheit der Geschwindigkeit identisch ist mit der Forderung, daß die tangentiale Geschwindigkeitskomponente verschwinden soll [1]. Eine solche Zusatzströmung läßt sich aber in der z-Ebene schwer ermitteln, weshalb wir versuchen werden, durch konforme Abbildung eine Ebene zu finden, in der das Potential der geforderten Zusatzströmung leicht anzugeben ist. Nun ist in der im Schrifttumsverzeichnis unter [5] zitierten Arbeit von K. Kondo das entsprechende Problem für einen Windstrom mit Kreisquerschnitt behandelt. Dabei ist die Abbildungsfunktion

$$z'' = c \operatorname{tg} \zeta$$

benutzt, die das Innere eines Kreises in der z''-Ebene in das Innere eines Streifens in der ζ-Ebene abbildet derart, daß ein Teil des Kreisumfanges in die eine, der restliche Teil in die andere der den Streifen begrenzenden Geraden übergeführt wird (vgl. Bild 3). In der Streifenebene ist es aber leicht möglich, ein Zusatzpotential anzugeben, das die Grenzbedingungen befriedigt. Wenn es nun noch gelingt, das Innere der Ellipse konform auf das Innere eines Kreises abzubilden, so ist die obenerwähnte Abbildung grundsätzlich geleistet.

Wir wollen diesen Weg jetzt schrittweise gehen: Mit Hilfe der Funktion

$$z' = \int k \cdot sn\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{e}\right) \ldots\ldots (1)$$

wird das Ellipseninnere in der z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises in der z'-Ebene (vgl. Bild 2) abgebildet. Dabei bedeutet: $2K$ die halbe reelle Periode, k den Modul der Jakobischen elliptischen Funktion $sn\,Z$ und

$$e = \sqrt{a'^2 - b'^2}$$

den halben Abstand der Ellipsenbrennpunkte.

Bezüglich der Theorie dieser Abbildungsfunktion sei auf die Arbeit von de Haller [7] und die »Schwarzschen Abhandlungen« [8] verwiesen.

Digitized by Google

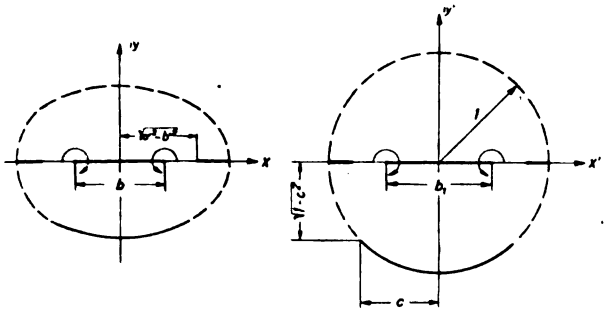


Bild 2. Die Abbildung der z- auf die z'-Ebene.

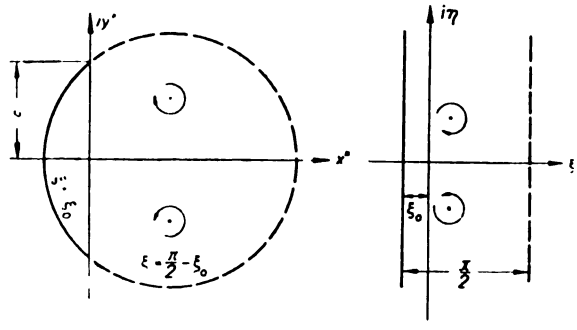


Bild 3. Die Abbildung der z''- auf die ζ-Ebene.

Die Ebene z' wird jetzt um $\frac{\pi}{2}$ gedreht und anschließend eine Translation ausgeführt:

$$z'' = \sqrt{1-c^2} - i z' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wodurch bewirkt wird, daß die Ordinatenachse der neuen z''-Ebene gerade den festen Teil des Kreisumfanges vom freien trennt (vgl. Bild 2 und 3). Beide Teile stoßen zusammen in den Punkten $z'' = \pm i c$. Die nun folgende Transformation:

$$z'' = c \operatorname{tg} \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wirft diese beiden Punkte ins Unendliche, wobei die Kreisbögen in gerade Linien vom Abstand $\frac{\pi}{2}$ übergehen (s. Bild 3). Setzt man diese Abbildungen zusammen, so erhält man schließlich für die Abbildungsfunktion der z- auf die ζ-Ebene:

$$\zeta = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c}\left[\sqrt{1-c^2} - i \sqrt{k}\, sn\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{z}{c}\right)\right] \quad (4)$$

Da später noch die Ableitung dieser Funktion gebraucht wird, sei diese hier mit angegeben:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{-i\frac{2K}{\pi}\sqrt{k}\cdot c \cdot cn\,Z\,dn\,Z}{\sqrt{e^2 - z^2\,(1 - k\,sn^2 Z + 2i\sqrt{k}\,(1-c^2)\,sn\,Z)}} \quad \ldots \quad (5)$$

wobei zur Abkürzung $\frac{2K}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{z}{e} = Z$ eingeführt ist.

Die Grenzbedingungen: Verschwinden der Normalkomponente auf dem festen Teil und Verschwinden der Tangentialgeschwindigkeit auf dem freien Teil des Ellipsenumfanges lassen sich jetzt in der ζ-Ebene durch wiederholte Spiegelung des ursprünglichen Wirbelpaares an den Grenzen erfüllen. Es ergibt sich das in Bild 4 angegebene Wirbelsystem. Das Potential dieser Strömung ist leicht anzugeben, da sich die Wirbelreihen in horizontaler Richtung summieren lassen [5]:

$$F_0 = \frac{\Gamma i}{2\pi} \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\zeta - \xi' - i\eta'}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\zeta + 2\xi_0 + \xi' + i\eta'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\zeta - \xi' + i\eta'}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\zeta + 2\xi_0 + \xi' - i\eta'}{2}} \quad (6)$$

$\xi' + i\eta'$ und $\xi' - i\eta'$ sind dabei die den Wirbelpunkten $z = \mp s$ entsprechenden Punkte in der ζ-Ebene. Das Potential der Zusatzströmung ergibt sich durch Subtraktion des Potentials der ursprünglichen Wirbel in der z-Ebene vom Potential F_0:

$$F = \frac{\Gamma i}{2\pi} \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\zeta - \xi' - i\eta'}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\zeta + 2\xi_0 + \xi' + i\eta'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\zeta - \xi' + i\eta'}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\zeta + 2\xi_0 + \xi' - i\eta'}{2}} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \log \frac{z+s}{z-s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wenn $F = \Phi + i\Psi$ gesetzt wird, ist die mittlere zusätzliche Abwärtsgeschwindigkeit über die Spannweite in der z-Ebene:

$$\overline{w} = \frac{\Psi(-s) - \Psi(s)}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

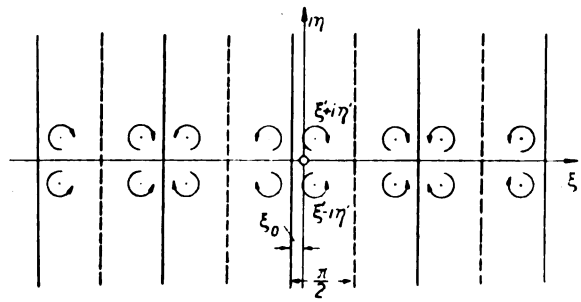


Bild 4. Das Spiegelungssystem zur Erfüllung der Randbedingungen.

Hieraus folgt der zusätzliche Abwind am Ort des Flügels zu:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma}{4\pi s} \log\left[s^2 \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2_{(z=s)} \frac{\operatorname{tg}(\xi_0 + \xi' + i\eta')\operatorname{tg}(\xi_0 + \xi' - i\eta')}{\operatorname{tg}^2(\xi_0 + \xi')\,\mathfrak{Tg}^2\eta'}\right] \quad (9)$$

Der mittlere Abwind $\overline{w}$ dient zur Bestimmung der Anstellwinkelkorrektur:

$$\Delta\alpha = \frac{\overline{w}}{V}.$$

Setzt man in der üblichen Weise

$$\Delta\alpha = \frac{c_a}{8}\frac{F}{F_0}\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei δ als Korrekturfaktor bezeichnet wird und c_a die Auftriebszahl, F die Flügelfläche und F_0 die Querschnittsfläche des Windstroms bedeuten, und für die Zirkulation

$$\Gamma = \frac{c_a V t}{2} \qquad (t = \text{Flügeltiefe}),$$

so erhält man für den Korrekturfaktor:

$$\delta = \frac{a'b'}{4s^2}\left\{\log s^2 \cdot \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2_{(z=s)} + \log \frac{\operatorname{tg}^2(\xi_0+\xi') + \mathfrak{Tg}^2\eta' + \operatorname{tg}^2(\xi_0+\xi')\,\mathfrak{Tg}^4\eta' + \operatorname{tg}^4(\xi_0+\xi')\,\mathfrak{Tg}^2\eta'}{\operatorname{tg}^2(\xi_0+\xi')\,\mathfrak{Tg}^2\eta'\,[1+\operatorname{tg}^2(\xi_0+\xi')\,\mathfrak{Tg}^2\eta']^2}\right\} \quad (11)$$

Für die Rechnung seien noch die folgenden Beziehungen angegeben.

Die Abbildungsfunktion (1) geht für Punkte der großen Achse über in die folgenden Ausdrücke

1. für $0 < x < e$:

$$x' = \sqrt{k}\, sn\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{e};\ k\right) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

2. für $e < x < a'$:

$$x' = \frac{\sqrt{k}}{dn\left(\frac{2K}{\pi}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\frac{x}{e};\ k'\right)} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Dabei ist k' der zu k komplementäre Modul ($k' = \sqrt{1-k^2}$). Die Punkte $z = \pm s$, in denen die Wirbel in der z-Ebene liegen, gehen mit (12) und (13) über in $z' = \pm s_1$; in der ζ-Ebene liegen dann die Wirbel an den Stellen:

$$\xi' = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 - 2c^2 + s_1^2 + \sqrt{1 + s_1^2\,(2 - 4c^2 + s_1^2)}}{2c\sqrt{1-c^2}} \quad (14)$$

$$\eta' = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{1 + s_1^2 + \sqrt{1 + s_1^2\,(2 - 4c^2 + s_1^2)}}{2c\,s_1} \quad (15)$$

Digitized by Google

Für den Grenzfall eines Flügels mit der Spannweite Null geht die Formel (11) über in:

$$\delta = \frac{a'\,b'}{4\,(a'^2 - b'^2)} \cdot \frac{4\,K^2}{\pi^2}\, k\,[-4\,\sqrt{1 - c^2} + 2\,c^2 + C] \quad (16)$$

wobei

$$C = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1 - \frac{b'^2}{a'^2}}\left[\frac{4\,K^2}{\pi^2}\,(1 + k^2) - 1\right] + \frac{1}{k}\left(\frac{\pi^2}{4\,K^2} - 1\right) - k$$

eine nur vom Achsenverhältnis des elliptischen Kanalquerschnitts abhängige Konstante ist.

3. Elliptischer Strahl mit zwei festen Wänden (Bild 5).

In diesem Fall führt man zweckmäßig eine konforme Abbildung des Inneren des elliptischen Querschnitts auf das Innere eines Rechtecks durch (vgl. Bild 5). Die festen Wände entsprechen dann zwei gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks und die freien Strahlgrenzen den beiden anderen Rechteckseiten. Der erste Schritt zu diesem Ziel ist derselbe wie im Abschnitt 2, nämlich die Abbildung des Ellipseninneren auf das Innere des Einheitskreises mit Hilfe der durch Gl. (1) gegebenen Abbildungsfunktion:

$$z' = \sqrt{k}\cdot sn\left(\frac{2\,K}{\pi}\arcsin\frac{z}{e};\ k\right) \quad \ldots \quad (17)$$

Das Innere des Einheitskreises geht nun in das Innere eines Rechteckes über vermittels der Funktion

$$sn\left(\zeta;\ \cos\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{2\,z'}{1 + z'^2} \quad \ldots \quad (18)$$

wenn ζ die Koordinate der Rechteckebene darstellt und $\cos\frac{\Theta}{2}$ der Modul der elliptischen Funktion $sn\,\zeta$ ist (siehe [6], S. 170). Dabei ist Θ ein das Öffnungsverhältnis des Kanalquerschnitts in der Kreisebene angebender Winkel (vgl. Bild 5). Der Zusammenhang der ζ-Ebene mit der ursprünglichen z-Ebene ist also gegeben durch die Abbildungsfunktion:

$$sn\left(\zeta;\ \cos\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{2\sqrt{k}\,sn\,(Z;\ k)}{1 + k\,sn^2\,(Z;\ k)} \quad \ldots \quad (19)$$

wobei zur Abkürzung wie früher $\frac{2\,K}{\pi}\arcsin\frac{z}{e} = Z$ gesetzt ist. Der Modul k ist wieder abhängig vom Achsenverhältnis des elliptischen Querschnitts. Das Quadrat der Ableitung dieser Funktion, ist gegeben durch

$$\left(\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right)^2 = \frac{\frac{16\,K^2}{\pi^2}\,k\,cn^2\,Z\,dn^2\,Z}{(c^2 - z^2)\,(1 - 2\,k\cos\Theta\,sn^2\,Z + k^2\,sn^4\,Z)} \quad \ldots \quad (20)$$

Die Bedingungen auf den Windstromgrenzen werden jetzt erfüllt durch wiederholte Spiegelung des Wirbelpaares an den Rechteckseiten, wobei der Drehsinn der Wirbel sich umkehrt bei Spiegelung an den Seiten, die den festen Wänden entsprechen und erhalten bleibt bei Spiegelung an den Rechteckseiten, die den freien Strahlgrenzen entsprechen. Das Potential eines solchen Wirbelsystems ist gegeben (vgl. [6]) durch:

$$F_0 = \frac{\Gamma i}{2\pi}\left\{-\log\frac{sn\,\frac{\zeta - \xi'}{2}\ cn\,\frac{\zeta + \xi'}{2}}{dn\,\frac{\zeta + \xi'}{2}} + \log\frac{sn\,\frac{\zeta + \xi'}{2}\ cn\,\frac{\zeta - \xi'}{2}}{dn\,\frac{\zeta - \xi'}{2}}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

Dabei ist $\mp\,\xi'$ der Ort der ursprünglichen Wirbel in der ζ-Ebene (in der z-Ebene befindet sich der Flügel in der Mitte des Windstromes, also $z = \mp\,s$). Wenn man von diesem Ausdruck das Potential der ursprünglichen Wirbel in der z-Ebene

$$F_1 = \frac{\Gamma i}{2\pi}\log\frac{z + s}{z - s} \quad \ldots \quad (22)$$

subtrahiert, so erhält man das Potential der gesuchten Zusatzströmung:

$$F = F_0 - F_1 \quad \ldots \quad (23)$$

Da $F = \Phi + i\,\Psi$ ist, läßt sich hieraus die Stromfunktion angeben und damit erhält man die mittlere Abwärtsgeschwindigkeit über der Spannweite eines Flügels, der in der Mitte des Querschnitts aufgehängt ist:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\,\frac{\Psi(-s) - \Psi(s)}{2\,s}$$

$$w = \frac{\Gamma}{4\,\pi\,s}\log\left|\left(\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right)_{z\,=\,s}\cdot s\cdot\frac{cn\,\xi'}{sn\,\xi'\,dn\,\xi'}\right| \quad \ldots \quad (24)$$

Mit

$$\Gamma = \frac{c_a\,V\,t}{2}$$

und aus der Beziehung für den zusätzlichen Anstellwinkel

$$\Delta\,\alpha = \frac{w}{V} = \frac{c_a}{8}\,\frac{F}{F_0}\,\delta \quad \ldots \quad (25)$$

ergibt sich für den Korrekturfaktor δ der Wert:

$$\delta = \frac{a'\,b'}{2\,s^2}\log\frac{\frac{2\,K}{\pi}\cdot s\cdot cn\,Z\,dn\,Z\,(1 - k^2\,sn^4\,Z)}{\sqrt{c^2 - s^2\,sn\,Z\,(1 - 2\,k\cos\Theta\,sn^2\,Z + k^2\,sn^4\,Z)}} \quad (26)$$

wobei k der Modul der hier vorkommenden elliptischen Funktionen ist. Für den Grenzfall eines Flügels mit verschwindender Spannweite geht diese Gleichung über in die einfachere:

$$\delta = \frac{a'\,b'}{6\,(a'^2 - b'^2)}\left\{1 - \frac{4\,K^2}{\pi^2}\,(1 - 6\,k\cos\Theta + k^2)\right\} \quad (27)$$

4. Ergebnis.

Für einen Kanal, dessen Querschnitt eine Ellipse vom Achsenverhältnis 1 : $\sqrt{2}$ ist, sind nach den Gl. (11) bzw. (16) und (26) bzw. (27) die Korrekturfaktoren δ für Flügel mit rechteckiger Auftriebsverteilung, und zwar für die Verhältnisse Spannweite zu großer Ellipsenachse: $\frac{b}{2\,a'} = 0;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8$ berechnet und in Bild 6 und 7 über einem Winkel φ bzw. ϑ aufgetragen, der für das Verhältnis von fester Wand und freier Strahlgrenze maßgebend ist. Man bemerkt, daß die Korrekturfaktoren für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\,\pi$ bzw. $\varphi = \pi$, d. i. für ganz offene und ganz geschlossene Windströme, in die von Sanuki und Tani [9] gerechneten Werte übergehen.

Aus den Auftragungen ist abzulesen, wie weit der feste Teil der Strahlbegrenzung reichen muß, damit die Korrektur Null wird. Mit der Spannweite des Flügels ändert sich die Größe dieser günstigen Abdeckung. In Bild 8 sind darum die Winkel, für welche $\delta = 0$ wird, über dem Verhältnis Spannweite zu Kanalbreite aufgetragen.

Anschaulicher als die Auftragung der Winkel ist eine Darstellung des Verhältnisses $\frac{d}{b'}$, wobei d den Abstand an-

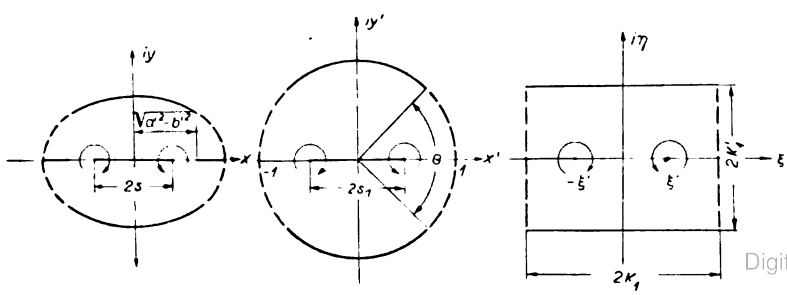


Bild 5. Die Abbildung des von zwei Wänden begrenzten elliptischen Querschnitts auf ein Rechteck.

Digitized by Google

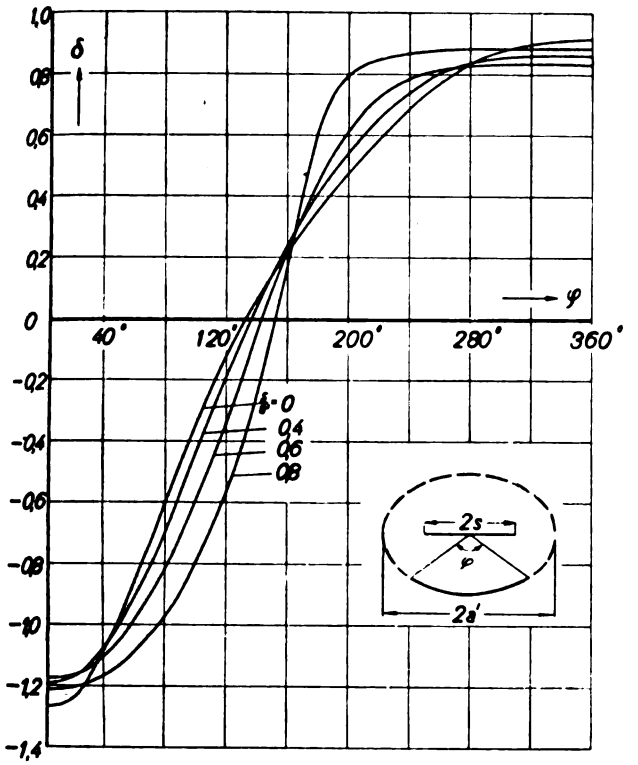


Bild 6. Der Korrekturfaktor δ abhängig vom Winkel φ bei Anbringung einer festen Wand.

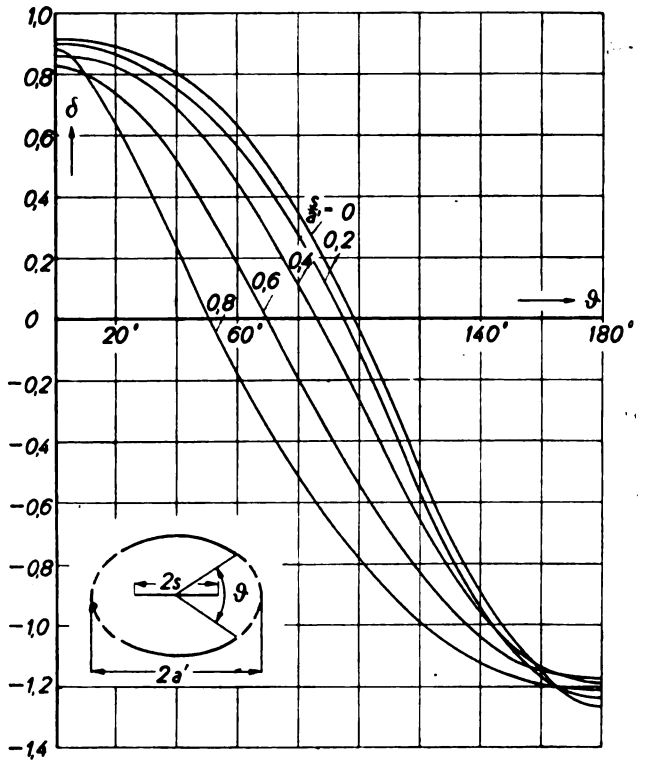


Bild 7. Der Korrekturfaktor δ abhängig vom Winkel ϑ bei Anbringung von zwei festen Wänden.

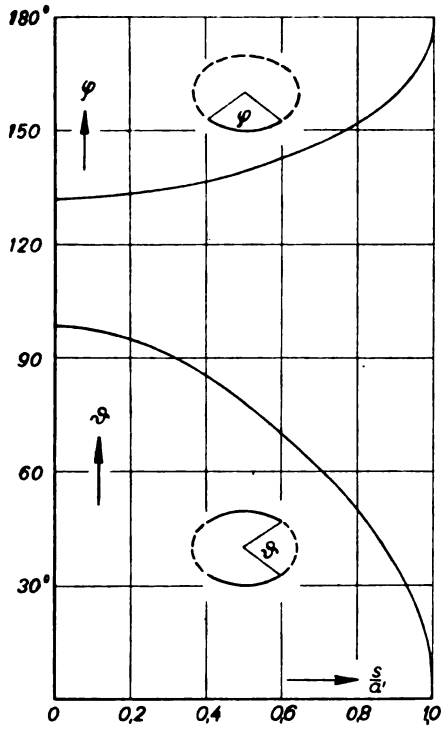


Bild 8. Die Werte von φ und ϑ, für die der Korrekturfaktor Null wird, abhängig vom Verhältnis Spannweite zu Kanalbreite.

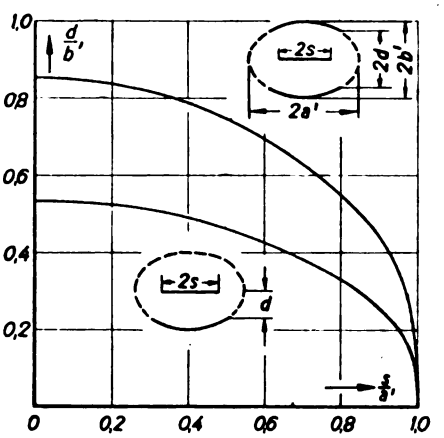


Bild 9. $\frac{d}{b'}$ für $\delta = 0$.

gibt zwischen der großen Achse und dem Punkt, an dem feste und freie Grenze zusammentreffen (siehe Bild 9).

Im allgemeinen wird die Spannweite eines Modellflügels für einen elliptischen Kanal vom Achsenverhältnis $1 : \sqrt{2}$ etwa $b = 0{,}7 \cdot 2a'$ betragen. In diesem Falle würde also beim Anbringen einer festen Wand die Abdeckung bis $\frac{d}{b'} = 0{,}385$ reichen müssen, um die Korrektur zu Null zu machen. Wählt man eine teilweise Abdeckung der Windstromgrenzen mit zwei festen Wänden, so würde bereits bei $\frac{d}{b'} = 0{,}64$ die Korrektur verschwinden, so daß die letztere Anordnung in mancher Hinsicht versuchstechnisch günstiger erscheint, aber natürlich umfangreichere Versuchsvorbereitungen erfordert.

5. Zusammenfassung.

In einem Windkanal elliptischen Querschnitts mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke befinde sich ein Flügel mit rechteckiger Auftriebsverteilung. Die durch die Kanalgrenze hervorgerufene zusätzliche Strömung wird mit Hilfe einer konformen Abbildung ermittelt.

Für einen Strahl, dessen Querschnitt elliptisch ist und das Achsenverhältnis $1 : \sqrt{2}$ hat, ist der Korrekturfaktor aufgetragen für verschiedene Verhältnisse von Spannweite zu Kanalbreite und verschiedene Öffnungswinkel, das sind die Winkel, die die Verbindungslinien der Endpunkte des festen Teils der Kanalgrenze mit dem Mittelpunkt der Ellipse bilden (vgl. Bild 1 und 5). Wie beim Kreisstrahl (vgl. [5] und [6]) zeigt sich, daß bei einem bestimmten Öffnungswinkel die Korrektur für Anstellwinkel und Widerstand Null wird. Dieser Winkel ändert sich mit der Spannweite des Flügels.

Digitized by Google

Die Theorie ist so durchgeführt, daß sie auch auf elliptische Kanäle mit anderem Achsenverhältnis angewandt werden kann. Eine Erweiterung auf Flügel, die über der Kanalmittelebene aufgehängt sind, ist ebenfalls leicht möglich.

Für erteilte Ratschläge bei Durchführung der Arbeit bin ich Frau Dr.-Ing. J. Flügge-Lotz dankbar.

6. Schrifttum.

[1] Prandtl-Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927.
[2] Th. Theodorsen, The theory of wind-tunnel wall interference. NACA Rep. 410 (1931).
[3] Th. Theodorsen u. A. Silverstein, Experimental verification of the theory of wind-tunnel boundary interference. NACA Rep. 478 (1933).
[4] J. Tani u. M. Taima, Two notes on the boundary influence of wind tunnels of circular cross section. Rep. Aeronaut. Res. Inst. Tokyo Nr. 121 (1935).
[5] K. Kondo, The wall interference of wind tunnels with boundaries of circular arcs. Rep. Aeronaut. Res. Inst. Tokyo Nr. 126 (1935).
[6] K. Kondo, Boundary interference of partially closed wind tunnels. Rep. Aeronaut. Res. Inst. Tokyo Nr. 137 (1936).
[7] P. de Haller, L'influence des limites de la veine fluide sur les charactéristiques aérodynamiques d'une surface portante. Comm. de l'Institute d'Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zürich 1934.
[8] H. A. Schwarz, Gesammelte Math. Abhandlungen, Bd. II, S. 102.
[9] M. Sanuki u. J. Tani, The wall interference of wind-tunnel of elliptic cross-section. Proc. Phys. Math. Soc. Jap. III. s., Bd. 14 (1932), S. 592.

Digitized by Google

Der Einfluß der Steuerungsmassen auf die Längsstabilität mit losem Ruder.

Teil I.

Von Rudolf Schmidt.

Bericht der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen, Bodensee.

Die Längsstabilität eines Flugzeuges wird beim Modellversuch meist nur mit festem Höhenruder gemessen. Die im Fluge bedeutend wichtigere Stabilität bei freiem Ruder wird nachträglich berechnet, indem für die aerodynamische Selbsteinstellung des freien Ruders unter der Wirkung der Luftkräfte bekannte Werte eingesetzt werden. Außer diesen aerodynamischen Einflüssen wirken am fliegenden Flugzeug aber auch die Gewichtsmomente aller Steuerungsteile auf das Ruder ein, die die Selbsteinstellung und damit die Stabilität beeinflussen. Die Änderung der Stabilität kann theoretisch berechnet werden, wenn der Verlauf dieser Steuerungs-Gewichtsmomente bekannt ist. Im vorliegenden Teil I der Arbeit werden zunächst die flugmechanischen Zusammenhänge bei der Wirkung von Gewichtsmomenten untersucht und ein Beispiel einer Stabilitätsrechnung für einen praktisch vorliegenden Fall durchgeführt. In einem später erscheinenden Teil II sollen die Einflüsse der Steuerungsmassen auf die dynamische Längsstabilität behandelt werden.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Die Längsstabilität bei freiem Höhenruder.
III. Bezeichnungen.
IV. Der Staudruck als Geber.
V. Der Anstellwinkel als Geber.
VI. Die Längsneigung als Geber.
VII. Durchführung der Rechnung.
VIII. Beispiel.
IX. Schlußbemerkung.

I. Einleitung.

Die Erscheinung, daß die Längsstabilität eines Flugzeuges beim Flug mit freiem Ruder durch die Wirkung der Gewichtsmomente der Höhensteuerung und des Höhenruders beeinflußt wird, ist seit langem bekannt. Bereits im Jahre 1930 sind Veröffentlichungen der DVL erschienen, in denen die Ergebnisse von Flugmessungen mitgeteilt wurden, die den Einfluß verschiedener Steuerungszustände auf die statische Längsstabilität zeigen. Durch verhältnismäßig einfache Rechnungen lassen sich diese Einflüsse flugmechanisch erklären und vorausberechnen. Eine besondere Bedeutung erhalten diese Einflüsse, wenn z. B. an einem Flugzeug Leitwerksänderungen vorgenommen werden, die eine Änderung des Massenausgleichs des Höhenruders zur Folge haben. Derartige Maßnahmen ergeben sich oft bei Standschwingungsversuchen. Es ist daher wünschenswert, daß der Einfluß einer solchen Änderung auf die Längsstabilität vorausberechnet werden kann.

Ein anderer Gesichtspunkt liegt darin, daß bei einem Vergleich zwischen der im Flugversuch gemessenen Stabilität und der auf Grund des Modellversuches vorausberechneten häufig erhebliche Unterschiede auftreten, an denen der meist nicht berücksichtigte Einfluß der Steuerungsmassen einen beträchtlichen Anteil haben kann. Diese Tatsache verdient bei großen Flugzeugen besondere Beachtung. Denn die für die Selbsteinstellung des Höhenruders und damit für die Stabilität maßgebenden Massenkräfte der einzelnen Steuerungsteile werden bei Vergrößerung der Flugzeuge im Verhältnis zu den Luftkräften immer größer, da letztere nahezu unabhängig von der Flugzeuggröße sein müssen, um überhaupt eine Ruderbetätigung durch menschliche Kraft zu ermöglichen. Um klarzumachen, wie stark dies in Erscheinung tritt, soll im folgenden eine einfache Maßstabbetrachtung durchgeführt werden.

Ist λ der Längenmaßstab zweier geometrisch ähnlicher Flugzeuge, dann verhalten sich die Massen der Ruder etwa wie λ^3. Die Massen der Steuerung wachsen mit niedrigerer Potenz. Bei einer Stoßstangen-Steuerung wird der Vergrößerungsfaktor λ^2 der Wirklichkeit sehr nahe kommen, da die Stoßstangen bei dem größeren Flugzeug meist nicht nur länger sind, sondern auch größere Durchmesser erhalten, um die notwendige Knickfestigkeit zu gewährleisten. Ebenso werden auch die Steuersäulen bei großen Flugzeugen meist doppelt angeordnet. Man kann deshalb für die gesamte Höhensteuerung einschließlich Ruder mit einem Faktor $\lambda^{2,5}$ [1]) rechnen. Da es nicht auf die Steuerungsmassen selbst, sondern auf die statischen Momente derselben, bezogen auf die Höhenruder-Drehachse, ankommt, so muß man demnach mit $\lambda^{3,5}$ rechnen. In Anlehnung an die in Deutschland bestehenden Anschauungen über die zulässigen Höhensteuerkräfte kann man annehmen, daß diese etwa mit $\lambda^{0,5}$, jedenfalls bis zu einer Grenze wachsen dürfen, die bei den heutigen Flugzeuggrößen noch nicht erreicht ist. Das Verhältnis der Massenmomente zu den Luftkraftmomenten wächst also mit $\frac{\lambda^{3,5}}{\lambda^{0,5}} = \lambda^3$, d. h. der Einfluß der Steuerungsmassen wächst etwa linear mit dem Fluggewicht. Selbst wenn in dieser Betrachtung der Vergrößerungsfaktor für die Steuerung nur roh abgeschätzt wurde, so läßt sich doch ersehen, daß auch bei einem niedrigeren Exponenten eine beachtliche Erhöhung des Steuerungseinflusses eintritt, der bei der Vorausberechnung berücksichtigt werden muß, zumal wenn dadurch eine Verringerung der Längsstabilität eintritt.

In der vorliegenden Arbeit werden die flugmechanischen Zusammenhänge erläutert und ein Verfahren angegeben, die Einflüsse der Steuerungsmassen rechnerisch zu erfassen. Ferner soll die Arbeit dazu dienen, für den Steuerungsentwurf Unterlagen zu geben, um nach Möglichkeit eine Verringerung der Längsstabilität durch ungünstige Anordnung von Steuerleitung und Umlenkhebeln zu vermeiden.

II. Die Längsstabilität bei freiem Höhenruder.

Der Zustand des Fluges mit freiem Höhenruder ist nur dadurch definiert, daß von seiten des Flugzeugführers keine Kräfte auf das Ruder ausgeübt werden. Dies besagt indessen nicht, daß in diesem Zustand das Luftkraftmoment des Ruders gleich Null ist, denn im praktischen Fall wirken auch bei losgelassenem Steuer mehr oder weniger große Kräfte auf das Ruder ein, die infolge der praktisch meist unausgeglichenen Massen der einzelnen Steuerungsteile, wie Knüppel, Steuersäule, Stoßstangen und Umlenkhebel, sowie des Ruders selbst entstehen. Im Falle des stationären Fluges muß also das am Ruder wirksame Luftkraftmoment dem resultierenden Moment aller dieser Masseneinflüsse das Gleichgewicht halten. Ändern sich nun bei einer Flugzustandsänderung aus irgendwelchen Gründen die Luftkraft-

[1]) Dieser Wert stimmt sehr gut mit der Wirklichkeit überein, wie eine Auftragung der Gewichte der Höhensteuerungsteile über dem Fluggewicht einer großen Anzahl bei den Dornierwerken gebauter Flugzeugmuster zeigt.

Digitized by Google

und die Gewichtsmomente, z. B. bei einer Bahnneigungsänderung, wenn das Flugzeug vom Horizontalflug in den Steigflug übergeht, dann ändert das Ruder seine Lage. Diese Momentenänderung am Ruder übt natürlich genau dieselbe Wirkung auf die Flugbewegung aus, wie es eine entsprechende Steuermaßnahme des Flugzeugführers tun würde. Verlaufen diese Momentenänderungen bei irgendwelchen Flugzustandsänderungen derart, daß das Ruder von selbst gegen die Richtung der Flugzustandsänderung steuert, dann kann man die Wirkung der am Ruder angreifenden Momente als automatische Stabilisierung betrachten. Umgekehrt üben diese Momente eine instabilisierende Wirkung aus, wenn die Ruderbewegung so erfolgt, daß sie die Flugzustandsänderung unterstützt.

Stellt man sich vor, daß sämtliche Teile der Steuerung, auch das Ruder, durch Gegengewichte völlig ausgeglichen sind, so daß keinerlei Gewichtsmomente am Ruder wirken, dann stellt sich das Ruder allein unter der Wirkung der Luftkräfte so ein, daß sein Luftkraftmoment gleich Null wird. Auch in diesem Falle ändert das Ruder bei Flugzustandsänderungen seine Lage und wirkt je nach dem Vorzeichen seiner Lageänderung stabilisierend oder instabilisierend. Da diese Lageänderung nur von der Anströmrichtung, nicht aber vom Staudruck abhängt, so soll im folgenden als »Geber« für diesen rein aerodynamischen Einfluß der »Anstellwinkel« betrachtet werden.

Bei Vorhandensein von Steuerungs-Gewichtsmomenten kann man deren Einfluß in ähnlicher Weise auf flugmechanische Größen zurückführen, die als »Geber« für die stabilisierende oder instabilisierende Wirkung der Ruderbewegung zu betrachten sind. Stellt man sich vor, daß ein Teil dieser Momente von der Lage des Flugzeugs im Raum unabhängig ist, dann ist es, wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden, der »Staudruck«, dagegen bei den von der Lage des Flugzeuges abhängigen Momenten die »Längsneigung«, die als »Geber« wirken.

Diese drei flugmechanischen Größen, Anstellwinkel, Staudruck und Längsneigung reichen also aus, um die Bewegung des freien Höhenruders zu beschreiben und damit ihren Einfluß auf die Längsstabilität des Flugzeuges anzugeben.

Im folgenden Kapitel wollen wir die Wirkung von Gewichtsmomenten in der Steuerung untersuchen, und zwar solcher, die sowohl unabhängig von der Lage des Flugzeuges sind, als auch solcher, die ihre Größe mit der Flugzeug-Längsneigung ändern. Zur besseren Übersicht über das Gesamtproblem der Längsstabilität mit freiem Ruder ergibt sich zwangslos auch eine Behandlung der Vorgänge, wenn keine Gewichtsmomente wirken; deshalb ist auch die durch den Anstellwinkel als Geber bedingte Selbsteinstellung des Ruders in einem der folgenden Kapitel dargestellt.

III. Bezeichnungen.

c_a = Auftriebsbeiwert des ganzen Flugzeuges,
c_w = Widerstandsbeiwert des ganzen Flugzeuges,
c_m = Momentenbeiwert des ganzen Flugzeuges (um y-Achse),
c_R = Rudermomentbeiwert des Höhenruders,
c_{nH} = Normalkraftbeiwert des Höhenleitwerks,
α = Anstellwinkel des Flugzeuges,
α_H = Anstellwinkel des Höhenleitwerks,
ϑ = Längsneigungswinkel,
γ = Bahnneigungswinkel,
β_H = Höhenruderausschlag,
v = Bahngeschwindigkeit,
w = Sinkgeschwindigkeit,
q_0 = Bahnstaudruck,
q_H = Staudruck am Leitwerk,
F = Flügelfläche,
F_H = Höhenleitwerksfläche,
F_R = Höhenruderfläche,
t = Bezugsflügeltiefe,
t_R = Höhenrudertiefe,
l_H = Abstand Leitwerkskraft — Schwerpunkt,
G = Fluggewicht,
M_R = Höhenrudermoment,
c_s = Schubbeiwert der Luftschraube, bezogen auf die Schraubenkreisfläche F_s.

Weitere Bezeichnungen sind im Text erklärt.

IV. Der Staudruck als Geber.

Es soll zunächst der flugmechanisch einfachste Fall angenommen werden, daß auf das Ruder lediglich Momente einwirken, die vom Anstellwinkel und von der Lage des Flugzeuges im Raum unabhängig sind. Eine derartige Steuerung ist auch tatsächlich ausführbar. Man braucht nur durch eine geeignete Wahl der Ruderform, auf deren Eigenheiten hier nicht weiter eingegangen werden soll, dafür zu sorgen, daß das Ruder sich bei Anstellwinkeländerungen nicht bewegt, daß es sich also wie ein festes Ruder verhält; ferner denken wir uns alle Teile der Steuerung durch Gegengewichte so ausgeglichen, daß keine Momente am Ruder wirken. Leitet man jetzt in die Steuerung eine Kraft ein, deren Moment auf das Ruder bezogen stets konstant ist, dann liegt eine derartige Steuerung vor.

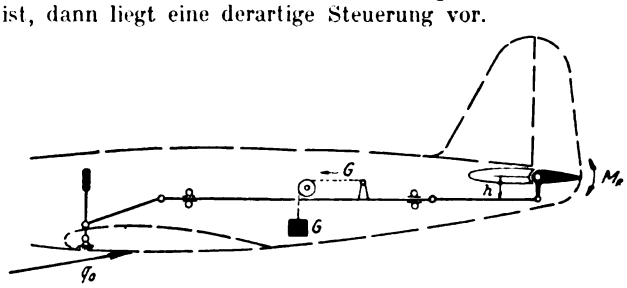


Bild 1. Schema einer »Staudruck-Stabilisierung«.

Schematisch ist diese Art der Steuerung in Bild 1 dargestellt. Die zusätzlich eingeleitete Kraft wollen wir uns durch ein Gewicht G' erzeugt denken, das sich bei Längsneigungsänderungen stets in Richtung der Schwerkraft einstellt und durch ein Seil und eine geeignete Rollenführung ein auch von der Ruderstellung unabhängiges Drehmoment $M_R = G' \cdot h$ ausübt.

Befindet sich das Flugzeug zunächst ohne Wirkung eines zusätzlichen Momentes im Gleichgewichtszustand und leitet man nun ein derartiges Moment ein, dann verstellt sich das Ruder um den Betrag $\Delta\beta_H$ und damit ändert sich der Längsmomentbeiwert c_m des Flugzeuges. Diese c_m-Änderung ist

$$\Delta c_m = \frac{\Delta c_{n_H} \cdot F_H \cdot l_H \cdot q_H}{F \cdot t \cdot q_0} \quad \ldots\ldots (1)$$

Die Änderung des Normalkraftbeiwertes des Höhenleitwerkes bei einem Ruderausschlag $\Delta\beta_H$ ist

$$\Delta c_{n_H} = \frac{\partial c_{n_H}}{\partial \beta_H} \Delta\beta_H \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Da das Luftkraftmoment am Ruder dem zusätzlich eingeleiteten Moment M_R das Gleichgewicht hält, so ergibt sich der Rudermomentbeiwert

$$c_R = \frac{M_R}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} = \frac{\partial c_R}{\partial \beta_H} \cdot \Delta\beta_H \quad \ldots\ldots (3)$$

Hieraus:

$$\Delta\beta_H = \frac{M_R}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \quad \ldots\ldots (4)$$

Setzt man dies in Gl. (2) ein, dann erhält man

$$\Delta c_{n_H} = \frac{\partial c_{n_H}}{\partial \beta_H} \cdot \frac{M_R}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R}$$

und damit nach Gl. (1):

$$\Delta c_m = \underbrace{\frac{F_H \cdot l_H}{F \cdot t \cdot F_R \cdot t_R}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_R}}_{B} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{M_R}{q_0}}}_{C} \quad \ldots\ldots (5)$$

A stellt nur Baugrößen dar, B ist ein aerodynamischer Beiwert des Leitwerkes, der auch nur von der Formgebung ab-

Digitized by Google

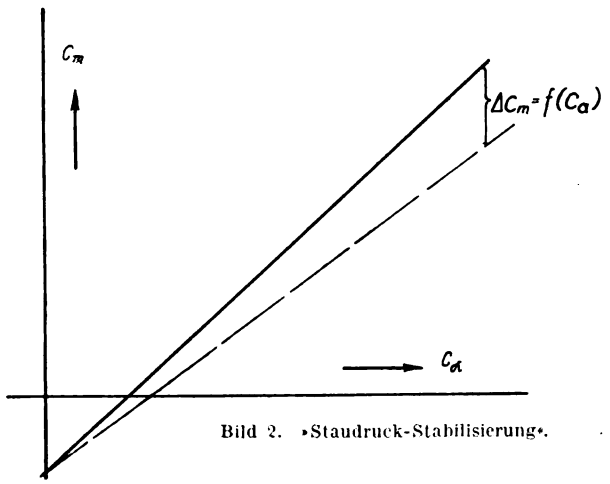


Bild 2. »Staudruck-Stabilisierung«.

hängt. C ist die Einflußgröße des zusätzlichen Momentes. Man erkennt, daß bei gegebenem Zusatzmoment M_R die c_m-Änderung des Flugzeuges nur vom Kehrwert des Staudruckes q_0 abhängt. Wir bezeichnen daher diese Stabilisierung mit

»Staudruck-Stabilisierung«.

Ersetzt man $\frac{1}{F \cdot q_0}$ in Gl. (5) durch $\frac{c_a}{G}$, dann geht die Gleichung über in

$$\Delta c_m = \frac{F_H \cdot l_H}{t \cdot F_R \cdot t_R \cdot G} \cdot \frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_R} \cdot M_R \cdot \boxed{c_a} \quad \ldots \quad (6)$$

Die Änderung der Stabilität ergibt sich dann durch Differentiation zu:

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = \frac{F_H \cdot l_H}{t \cdot F_R \cdot t_R \cdot G} \cdot \frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_R} \cdot M_R \quad \ldots \quad (7)$$

Man sieht also, daß die Stabilität unabhängig vom Flugzustand (Drosselstellung, Anstellwinkel) geändert wird. Trägt man c_m über c_a auf (s. Bild 2), dann wird unter der Wirkung des zusätzlichen Momentes M_R die Neigung der Kurve um den in Gl. (7) angegebenen Betrag geändert. Die Kurven schneiden sich im Punkte $c_a = 0$, da gemäß Gl. (6) bei $c_a = 0$ auch $\Delta c_m = 0$ wird.

V. Der Anstellwinkel als Geber.

Die im vorigen Abschnitt getroffene Annahme, daß das Ruder sich zunächst wie ein festes Ruder verhalten soll, trifft nur in gewissen Fällen zu. Meistens stellt sich ein normales Klappenruder im instabilisierenden Sinne ein, es ist aber bei Horn- oder anderen Außenausgleichen auch eine stabilisierende Selbsteinstellung möglich. Bei zurückverlegter Drehachse (»Innenausgleich«) kann man erreichen, daß die Selbsteinstellung gerade gleich Null wird.

Wir wollen im folgenden den allgemeinen Fall untersuchen, wie der Anstellwinkel als Geber für die Selbsteinstellung des Ruders wirkt. Hierzu wollen wir uns wieder die Steuerung schematisiert denken, wie es in Bild 3 dargestellt ist.

Hierbei soll das Höhenruder, das wir uns wie im vorigen Kapitel so vorstellen wollen, daß es gerade keine Selbsteinstellung hat, über ein geeignetes Gestänge mit einer frei im Luftstrom befindlichen Hilfsfläche F_z gekuppelt sein. (Ob sich diese Hilfsfläche vor oder hinter ihrer Drehachse befindet, ist für die flugmechanische Betrachtung gleichgültig; dies beeinflußt lediglich das Vorzeichen.) Diese Hilfsfläche übt auf das Höhenruder ein Luftkraftmoment von der Größe

$$M_z = c_1 \cdot c_{n_z} \cdot F_z \cdot l_z \cdot q_H$$

aus. Die Größe c_1 stellt einen Faktor für die Hebelübersetzung dar.

Gehen wir nun nach denselben Gedankengängen wie im vorigen Kapitel vor, dann ergibt sich wieder

$$\Delta \beta_H = \frac{M_R}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \quad \ldots \quad (4)$$

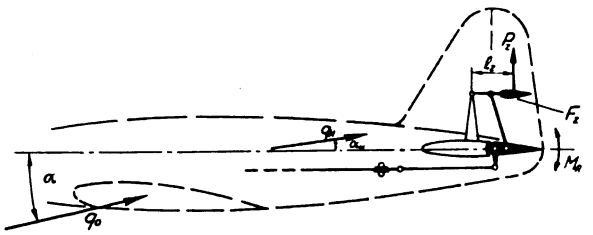


Bild 3. Schema einer »Anstellwinkel-Stabilisierung«.

Setzt man für M_R das zusätzliche Moment M_z der Hilfsruderfläche ein, dann ergibt sich

$$\Delta \beta_H = \frac{c_1 \cdot c_{n_z} \cdot F_z \cdot l_z \cdot q_H}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \quad \ldots \quad (5)$$

c_{n_z} ist eine Funktion von α_H und $\Delta \beta_H$.

Setzt man

$$c_{n_z} = \frac{\partial c_{n_z}}{\partial \alpha_H} \cdot \alpha_H + \frac{\partial c_{n_z}}{\partial \beta_H} \cdot \Delta \beta_H \quad \ldots \quad (6)$$

und für

$$\frac{\partial c_{n_z}}{\partial \beta_H} = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{\partial c_{n_z}}{\partial \alpha_H}$$

und setzt dies in Gl. (5) ein, dann ergibt sich:

$$\Delta \beta_H = \frac{\dfrac{F_z \cdot l_z \cdot c_1}{F_R \cdot t_R} \cdot \dfrac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \cdot \dfrac{\partial c_{n_z}}{\partial \alpha_H} \cdot \alpha_H}{1 - \dfrac{F_z \cdot l_z}{F_R \cdot t_R} \cdot \dfrac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \cdot \dfrac{\partial c_{n_z}}{\partial \alpha_H}} \quad \ldots \quad (7)$$

Vereinfacht man $\frac{F_z \cdot l_z}{F_R \cdot t_R} = A_1$ und setzt Gl. (7) in Gl. (2) und (1) ein, dann wird

$$\Delta c_m = \underbrace{\frac{F_H \cdot l_H}{F \cdot t} \cdot \frac{\partial c_{n_H}}{\partial \beta_H} \left[\frac{A_1 \cdot c_1 \cdot \dfrac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \cdot \dfrac{\partial c_{n_z}}{\partial \alpha_H}}{1 - A_1 \cdot \dfrac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \cdot \dfrac{\partial c_{n_z}}{\partial \alpha_H}} \right]}_{A} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\alpha_H \cdot q_H}{q_0}}}_{B} \quad (8)$$

A stellt wieder einen Faktor dar, der nur von der äußeren Formgebung abhängt, während B die eigentliche Einflußgröße ist. Man sieht, daß die Momentenänderung Δc_m außer vom Staudruckverhältnis $\frac{q_H}{q_0}$ auch vom Anstellwinkel α_H des Leitwerks, und, da dieser eine Funktion des Anstellwinkels α ist, von diesem abhängt. Wir bezeichnen daher diese Stabilisierung mit

»Anstellwinkel — Stabilisierung«.

Zur Untersuchung, wie sich die Stabilität $\frac{d c_m}{d c_a}$ ändert, müssen wir den Faktor $B = \frac{\alpha_H \cdot q_H}{q_0}$ so umformen, daß nur noch c_a als Variable erscheint.

Wir wollen hier zwei Fälle untersuchen:

a) den theoretischen Fall, daß die Hilfsruderfläche sich nicht im Einflußbereich des Schraubenstrahles und des Flügelabwindes befindet;
b) den praktisch meist vorliegenden Fall, daß dies der Fall ist.

Wir wollen also untersuchen, wie der Strahl- und Abwindeinfluß die Verhältnisse ändert.

a) Im ersten Falle wird $q_H = q_0$ und $\alpha_H = \alpha$. Der Faktor B wird dadurch

$$B = \alpha.$$

Ersetzt man α durch $\frac{\partial \alpha}{\partial c_a} \cdot c_a$, dann ergibt die Differentiation nach c_a:

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = A \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial c_a}$$

d. h. die Stabilitätsänderung ist nur von den Baugrößen und der durch die Formgebung (Seiten-

Digitized by Google

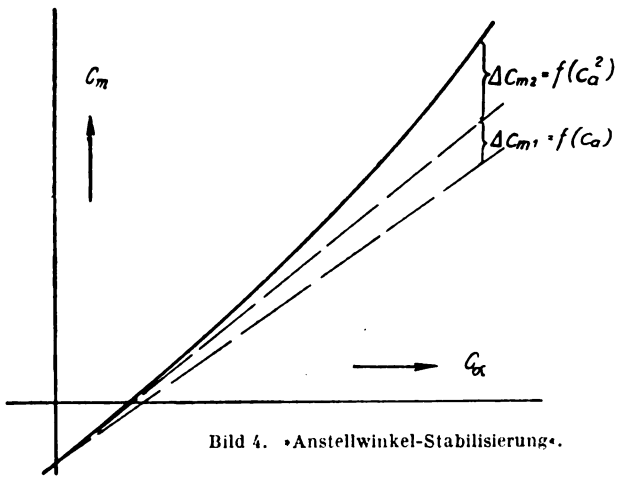


Bild 4. »Anstellwinkel-Stabilisierung«.

verhältnis) bedingten Größe $\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}$ abhängig, nicht aber vom Flugzustand. Eine derartige »Anstellwinkel-Stabilisierung« verhält sich also genau so wie die »Staudruckstabilisierung«.

b) Im zweiten Falle müssen für α_H und $\frac{q_H}{q_0}$ Funktionen von c_a eingesetzt werden, die den Schraubenstrahl- und Abwindeinfluß enthalten.

Das Staudruckverhältnis $\frac{q_H}{q_0}$ ist nach der Strahltheorie $\frac{q_H}{q_0} = 1 + c_s$, wobei $c_s = \frac{S}{F_s \cdot q_0}$ die Schubbelastung der Schraube ist. Die Schubbelastung c_s kann man mit guter Annäherung proportional c_a ansetzen, zumal bei Betrachtung nur kleiner c_s-Änderungen. Damit wird

$$\frac{q_H}{q_0} = 1 + K_1 \cdot c_a.$$

Der Anstellwinkel α_H ist ebenfalls c_a proportional,

$$\alpha_H = K_2 \cdot c_a,$$

dann wird der Ausdruck B in Gl. (8)

$$B = \alpha_H \cdot \frac{q_H}{q_0} = K_2 \cdot c_a + K_1 \cdot K_2 \cdot c_a^2 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Setzt man für B diesen Ausdruck in Gl. (8) ein und differenziert nach c_a, dann ergibt sich die Stabilitätsänderung

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = A \cdot K_2 (1 + 2 K_1 \cdot c_a) \quad \ldots\ldots (10)$$

Man sieht, daß in diesem Falle die Stabilitätsänderung nicht mehr unabhängig vom Flugzustand ist. Die Stabilitätsänderung wird um so größer, je größer c_a wird. Sie ändert sich mit der Drosselstellung, dargestellt durch die Faktoren K_1 und K_2. K_1 enthält den Einfluß der Drosselstellung und K_2 den gesamten Abwindeinfluß.

Tragen wir wieder c_m über c_a auf (Bild 4), dann kann man die Änderung in zwei Abschnitte teilen: Der eine ist von c_a linear, der andere von c_a^2 abhängig. — Man sieht, daß bei der Anstellwinkelstabilisierung ein weiteres von c_a^2 abhängiges Glied hinzukommt. Dies hat zur Folge, daß die Anstellwinkelstabilisierung besonders bei hohen c_a-Werten energischer wirksam wird, als die Staudruckstabilisierung. Dieser Fall der Anstellwinkelstabilisierung liegt meist in der Praxis vor. Die für die Wirkung der Hilfsfläche in der Darstellung des Schemas angenommene Beziehung $c_{n_z} = \frac{\partial c_n}{\partial \alpha_H} \cdot \alpha_H + \frac{\partial c_n}{\partial \beta_H} \cdot \beta_H$ läßt sich sinngemäß auf jedes Ruder übertragen, ganz gleichgültig, wie das Ruder und sein Kraftausgleich ausgebildet ist. Die abgeleiteten Beziehungen sind also allgemeingültig und nicht an das Vorhandensein einer solchen Hilfsfläche, die nur zum besseren Verständnis der Vorgänge diente, gebunden.

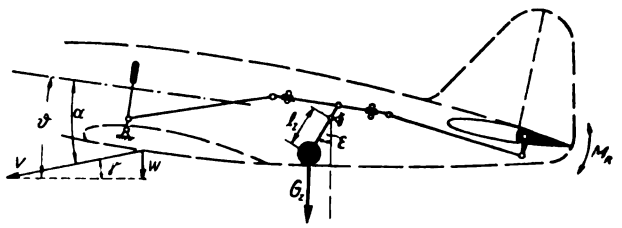


Bild 5. Schema einer »Längsneigungs-Stabilisierung«.

Eine Bestätigung der Theorie kann man in der Praxis häufig feststellen. Mißt man beim Flugversuch den c_m-Verlauf in Abhängigkeit von c_a, dann wird man fast stets eine Abweichung vom linearen Verlauf erhalten, die durch die vorangehende theoretische Untersuchung erklärt wird.

VI. Die Längsneigung als Geber.

Eine Steuerung, bei der zusätzlich Kräfte bzw. Momente eingeleitet werden, die von der Lage des Flugzeuges im Raum abhängen, ist in Bild 5 schematisch dargestellt. Hierbei ist im Flugzeug ein Schwerependel eingebaut, das bei Änderung der Längsneigung ϑ ein Gewichtsmoment M_z in die Steuerung einleitet. Dieses ist $M_z = c_1 \cdot G_z \cdot l_z \cdot \sin \varepsilon$ (c_1 = Übersetzungsfaktor). Gehen wir wieder nach denselben Gedankengängen wie bei Kapitel IV und V vor, dann gilt wieder

$$\Delta \beta_H = \frac{M_R}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Setzt man

$$M_R = c_1 \cdot G_z \cdot l_z \cdot \sin\left(\vartheta - \frac{1}{c_1} \cdot \Delta \beta_H\right),$$

wofür man bei kleinen Winkeln ϑ und $\Delta \beta_H$ angenähert schreiben kann:

$$M_R = c_1 \cdot G_z \cdot l_z \cdot \vartheta - G_z \cdot l_z \cdot \Delta \beta_H \quad \ldots\ldots (5$$

in Gl. (4) ein, dann wird

$$\Delta \beta_H = \frac{c_1 \cdot G_z \cdot l_z \cdot \vartheta}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R} - \frac{G_z \cdot l_z \cdot \Delta \beta_H}{F_R \cdot t_R \cdot q_H} \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R}$$

umgeformt, und für $\frac{G_z \cdot l_z}{F_R \cdot t_R} = A_2$ gesetzt, ergibt

$$\Delta \beta_H = \frac{c_1 \cdot A_2 \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R} \cdot \vartheta}{q_H + A_2 \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

eingesetzt in Gl. (1) und (2):

$$\Delta c_m = \underbrace{\frac{F_H \cdot l_H}{F \cdot t} \cdot \frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_R} \cdot c_1 \cdot A_2}_{A} \cdot \underbrace{\frac{\vartheta \cdot \frac{q_H}{q_0}}{q_H + A_2 \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R}}}_{B} \quad \ldots (7)$$

Die Größe A stellt wieder eine durch die äußere Formgebung gegebene Größe dar, während B der eigentliche Einflußfaktor ist. In ihm erscheint neben den Staudrücken q_0 und q_H als Einflußgröße die Längsneigung ϑ. Wir bezeichnen daher diese Stabilisierung mit

»Längsneigungs-Stabilisierung«.

Zur Untersuchung der Größe der Stabilitätsänderung $\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a}$ müssen wir wieder das Glied B der Gl. (7) in einen Ausdruck umformen, in dem nur c_a erscheint.

Auch hier wollen wir, wie bei der »Anstellwinkel-Stabilisierung« die beiden Fälle untersuchen: den einen, in dem das Leitwerk sich in einem Gebiet befindet, in dem kein Strahleinfluß vorhanden ist, den anderen, in dem dies der Fall ist, und wie es der Praxis am häufigsten entspricht.

a) Im ersten Falle ist wieder $q_H = q_0$, dann wird $B = \frac{\vartheta}{q_0 + A_2 \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_R}}$. Die Längsneigung ϑ setzt sich aus dem Anstellwinkel α und dem Bahnneigungswinkel γ zusammen.

Digitized by Google

Wir wollen die Betrachtung nur auf den Steigflug mit $\gamma \geq 0$ erstrecken:

Im Steigflug ist

$$\gamma = \frac{w}{v} = \frac{c_s - c_w}{c_a}.$$

Der Schubbeiwert c_s[2]) ist in erster Näherung proportional c_a. Der Widerstandsbeiwert setzt sich aus dem Anteil des induzierten und des Restwiderstandes c_w' zusammen.

Damit wird

$$\gamma = \frac{K_1 \cdot c_a - (K_2 \cdot c_a^2 + c_w')}{c_a}.$$

Die Längsneigung ϑ ergibt sich aus

$$\vartheta = \gamma + \alpha.$$

Für $\alpha = K_3 \cdot c_a$ gesetzt, wird

$$\vartheta = K \cdot c_a - \frac{c_w'}{c_a} + K_1 \quad (K_3 - K_2 = K \text{ gesetzt}).$$

Setzt man für $q_0 = \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{c_a}$, dann geht Gl. (7) über in

$$\Delta c_m = A \cdot \left(\frac{K \cdot c_a^2 - c_w' + K_1 \cdot c_a}{\frac{G}{F} + A_2 \cdot \frac{\partial \beta_H}{\partial c_K} \cdot c_a} \right) \quad \ldots \quad (8a)$$

Durch Differentiation erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = \frac{a_1 \cdot c_a^2 + b_1 \cdot c_a + c_1}{d_1 \cdot c_a^2 + e_1 \cdot c_a + f_1} \quad \ldots \quad (9a)$$

Hierin sind a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 Koeffizienten, in denen die Baugrößen und die von diesen abhängigen aerodynamischen Beiwerte implizit enthalten sind.

Die Ableitung der Gleichungen für den Horizontalflug $\gamma = 0$ und Gleitflug $\gamma < 0$ ergeben nichts wesentlich Neues. Die Ausdrücke für $\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a}$ enthalten lediglich andere Koeffizienten.

Im Horizontalflug erhält man analog

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = \frac{a_2 \cdot c_a^2 + b_2 \cdot c_a}{d_2 \cdot c_a^2 + e_2 \cdot c_a + f_2} \quad \ldots \quad (9b)$$

und im Gleitflug

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = \frac{a_3 \cdot c_a^2 + b_3 \cdot c_a + c_3}{d_3 \cdot c_a^2 + e_3 \cdot c_a + f_3} \quad \ldots \quad (9c)$$

Die Gl. (9a, b u. c) zeigen, daß bei allen drei betrachteten Flugzuständen die Stabilitätsänderung von den Baugrößen mitbestimmt wird. Dies wird klar, wenn man berücksichtigt, daß die Längsneigung ϑ keine eindeutige Funktion von c_a ist, wie der Staudruck und der Anstellwinkel. Bei gleichem c_a kann die Längsneigung positiv und negativ sein, je nachdem, ob das Flugzeug steigt oder sinkt. Es lassen sich also nur von Fall zu Fall, je nach den äußeren Verhältnissen, die Stabilitätsänderungen angeben.

b) Die Ableitung der Gleichungen für den zweiten Fall, bei dem das Leitwerk im Einflußgebiet des Schraubenstrahles liegt, ergibt keine grundsätzliche Änderung. In der Gleichung tritt lediglich im Zähler ein zusätzliches Glied mit c_a^3 auf. Die Gleichung für den Steigflug lautet

$$\frac{d(\Delta c_m)}{d c_a} = \frac{a \cdot c_a^3 + b \cdot c_a^2 + c \cdot c_a + d}{e \cdot c_a^2 + f \cdot c_a + g} \quad \ldots \quad (9d)$$

VII. Durchführung der Rechnung.

Bei der Berechnung der Einflüsse der Steuerungsgewichte wollen wir die Selbsteinstellung des Ruders unter der Wirkung des Anstellwinkels als bekannt voraussetzen. Diese Anstellwinkel-Stabilisierung läßt sich auch stets abschätzen, wenn man von einer Modellmessung mit festem Höhenruder ausgeht und die sowohl aus theoretischen Arbeiten als auch experimentell erhaltenen Werte für die betreffenden Ruderformen berücksichtigt.

Eine rechnerische Behandlung der Staudruck-Stabilisierung ist entsprechend der in Kapitel IV abgeleiteten Gleichungen ohne Schwierigkeiten möglich. Der aerodynamische Beiwert $\frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_K}$ läßt sich sowohl nach der Glauertschen Theorie als auch aus Modellmessungen entnehmen. Besser ist es natürlich, zumal, wenn bei großen Flugzeugen ein stark wirkender Kraftausgleich notwendig wird, unmittelbar diese Größe im Flugversuch zu ermitteln, was ohneSchwierigkeiten möglich ist.

Eine rechnerische Behandlung der Längsneigungs-Stabilisierung in allgemeiner Form dürfte jedoch eine zeitraubende Arbeit sein. Eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung tritt ein, wenn man den Verlauf der durch die Steuerungsteile auf das Ruder ausgeübten Drehmomente in Abhängigkeit von der Längsneigung und vom Ruderausschlag ermittelt. Dies ist, wenn die Konstruktion der Steuerung festliegt, leicht durchzuführen, da die Gewichte der einzelnen Steuerungsteile und ihre Schwerpunktlagen genau genug abgeschätzt werden können.

Der Rechnungsgang ist folgender: Wir wollen, ausgehend von der c_m/c_a-Kurve, die für freies Ruder im Modellversuch oder durch Rechnung ermittelt wurde, die c_m-Änderung berechnen, wenn das resultierende Moment aller Steuerungsteile an der Ruderdrehachse eine bekannte Funktion von Längsneigung und Ruderausschlag ist. Aus dieser Funktion berechnen wir für einen bestimmten Flugzustand (c_a, γ) das wirkende Gewichtsmoment zunächst unter der Annahme, daß β_H sich dabei nicht ändert. Dieses Moment setzen wir in Gl. (4) ein und erhalten die Ruderlagenänderung $\Delta \beta_H$. Aus der Funktion $M_K = f(\beta_H, \gamma)$ läßt sich nun das tatsächlich wirkende Moment M_K ermitteln. Dieses setzen wir in Gl. (5) ein und erhalten so für jeden Flugzustand einen Punkt der neuen c_m/c_a-Kurve. Durch graphische Differentiation erhält man daraus die Stabilitätsänderung.

VIII. Beispiel.

Wir wollen einen praktischen Fall herausgreifen und diese Rechnung durchführen, und zwar für Vollgaszustand im Bereich des besten Steigens bis $c_{a\,max}$, sowie für den Leerlaufzustand bis zum senkrechten Sturzflug.

Das Flugzeug hat folgende Daten:

$G = 6500$ kg,
$F = 55$ m²,
$F_H = 9{,}5$ m²,
$F_K = 3{,}1$ m²,
$t_K = 0{,}7$ m,
$l_H = 9{,}5$ m,
$F_S = 2 \times 8{,}05$ m²,
$N_V = 2 \times 625$ PS im Vollgasflug.

Die Leitwerksbeiwerte $\frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_K} = 7{,}42$ und $\frac{\partial \beta_H}{\partial c_K} = 3{,}80$ sollen aus einer Modellmessung des Leitwerks entnommen sein. Sie lassen sich auch angenähert aus ähnlichen Modellmessungen oder nach der Glauertschen Theorie berechnen.

Die Abhängigkeit des resultierenden Gewichtsmomentes der Höhensteuerung von Längsneigung und Ruderausschlag ist in Bild 6 dargestellt, und zwar sowohl für die Steuerung allein mit völlig ausgeglichenem Höhenruder, als auch für einen Über- und Unterausgleich des Ruders von ± 250 kgcm. Die Abhängigkeit von dem Ruderausschlag ist hauptsächlich durch den Einfluß der Steuersäule zu erklären, da die im Rumpf längs verlaufenden Stoßstangengewichte nur eine Abhängigkeit von der Längsneigung ergeben.

Die Ermittlung der zu den einzelnen Flugzuständen gehörenden Längsneigungswinkel erfolgt nach den bekannten flugmechanischen Methoden. Auf ähnlichem Wege erhält man den Anstellwinkel α, so daß die Längsneigung berechnet werden kann.

Das Beispiel ist für drei Fälle durchgerechnet:

1. Das Höhenruder ist völlig ausgeglichen, d. h. daß sein Schwerpunkt mit dem Drehpunkt zusammenfällt. Die Steuerungseinflüsse stammen nur von der Steuersäule und der Steuerleitung.
2. Durch Anbringung eines Gewichtes am Ruder wird ein Moment in Richtung »Drücken« von —250 kgcm zusätzlich eingeleitet, der Schwerpunkt des Ruders liegt also hinter dem Drehpunkt.

[2]) Der Schubbeiwert ist hier auf die Flügelfläche bezogen!

Digitized by Google

a) Ruder-Gewichtsmoment = — 250 kgcm (Unterausgleich),

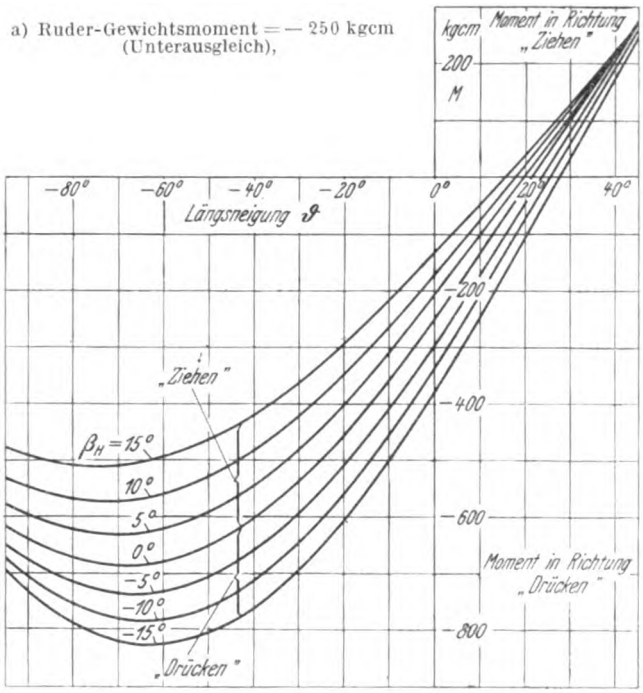
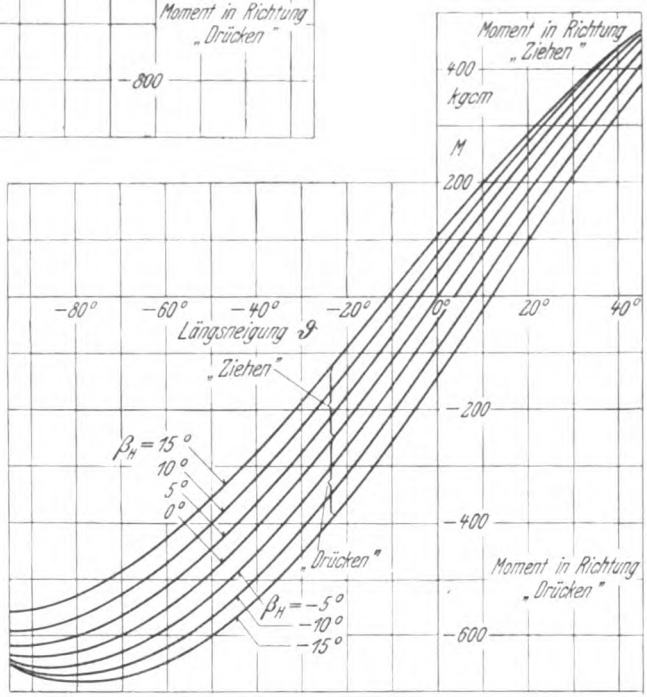
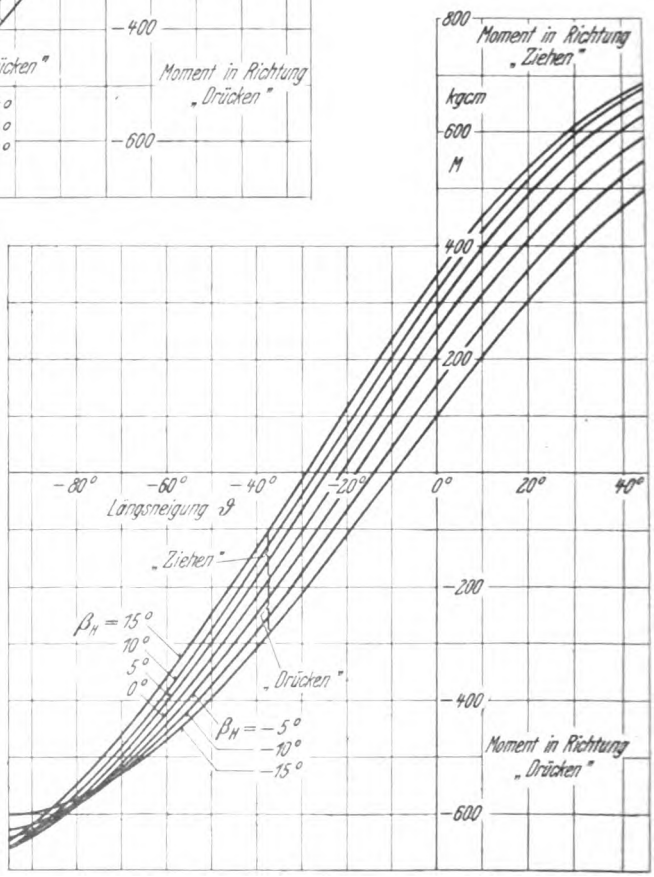


Bild 6. Gewichtsmomente der Höhensteuerung.

b) Ruder-Gewichtsmoment = 0 kgcm,



c) (unten) Ruder-Gewichtsmoment = + 250 kgcm (Überausgleich).



bringen. Man kann diese Verringerung durch ein entsprechendes Gegengewicht in der Steuerung natürlich wieder ausgleichen.

Wie aus den abgeleiteten Formeln hervorgeht, hängt die Wirkung der Gewichtsmomente linear von dem aerodynamischen Beiwert $\frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_R}$ ab. Dies heißt aber, daß bei einer Verringerung von c_R, also bei einer Verringerung der Ruderkräfte, die beschriebenen Einflüsse wachsen. Man kann beispielsweise die Stabilität erhöhen, wenn man bei einem Ruder, dessen Schwerpunkt hinter dem Drehpunkt liegt, den Kraftausgleich erhöht und umgekehrt.

IX. Schlußbemerkung.

Infolge des starken Anwachsens der Flächenbelastung und damit der die Längsstabilität verringernden Abwind- und Schraubenstrahleinflüsse, haben moderne Schnellflugzeuge, zumal bei Vollgas-Drosselzuständen, im allgemeinen nur noch geringen Längsstabilitätsüberschuß. Andererseits erfordern aber die heutigen Anforderungen an Blindflug-

3. Durch Anbringung eines Gewichtes am Ruder wird ein Moment in Richtung »Ziehen« von + 250 kgcm eingeleitet, der Schwerpunkt des Ruders liegt also vor dem Drehpunkt.

In den Bildern 7 und 8 sind die c_m/c_a-Kurven für die beiden Flugzustände dargestellt. Durch graphisches Differentieren wurde die Stabilitätsgröße $\frac{d\,c_m}{d\,c_a}$ ermittelt und in den Bildern 9 und 10 dargestellt. Das Beispiel zeigt, daß allein der Einfluß der Steuerung ohne Ruder so groß ist, daß bei einem Flugzeug, dessen Stabilität infolge großer Strahl- und Abwindeinflüsse verhältnismäßig gering ist, wie bei fast allen modernen Schnellflugzeugen, die Stabilität bei großen c_a-Werten im Vollgas-Steigflug negativ werden kann. Durch Anbringen eines Gewichtsmomentes in Richtung »Drücken« kann die Stabilität erhöht und jener Einfluß teilweise wieder ausgeglichen werden. Es sei bemerkt, daß ein zusätzliches Gewichtsmoment von 250 kgcm am Höhenruder bei einem 6-t-Flugzeug eine fliegerisch in keiner Weise störende Größe ist.

Ein Gewichtsmoment in Richtung »Ziehen« wirkt stets stabilitätsverringernd. Dies ist von ganz besonderer Bedeutung, wenn man aus Schwingungs-Sicherheitsgründen gezwungen wird, am Höhenruder Massenausgleich anzu-

Digitized by Google

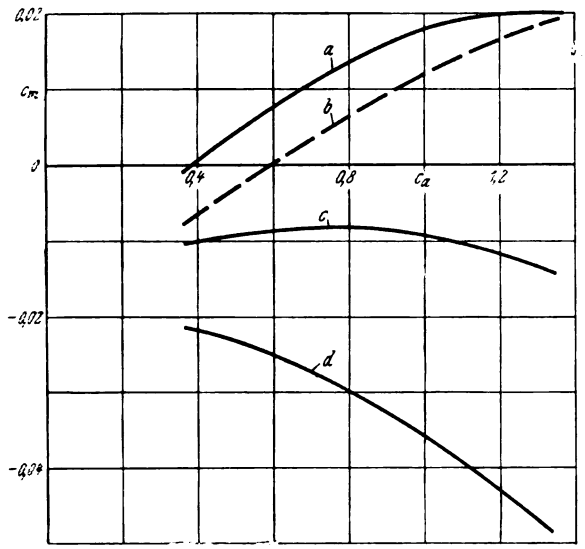


Bild 7. c_m/c_a-Kurven bei Vollgas.

Legende zu den Bildern 7 bis 10.
a) Ruder —250 kgcm (Unterausgleich) Steuerung ohne Ausgleich,
b) Ruder und Steuerung ausgeglichen,
c) Ruder ausgeglichen Steuerung ohne Ausgleich,
d) Ruder +250 kgcm (Überausgleich), Steuerung ohne Ausgleich.

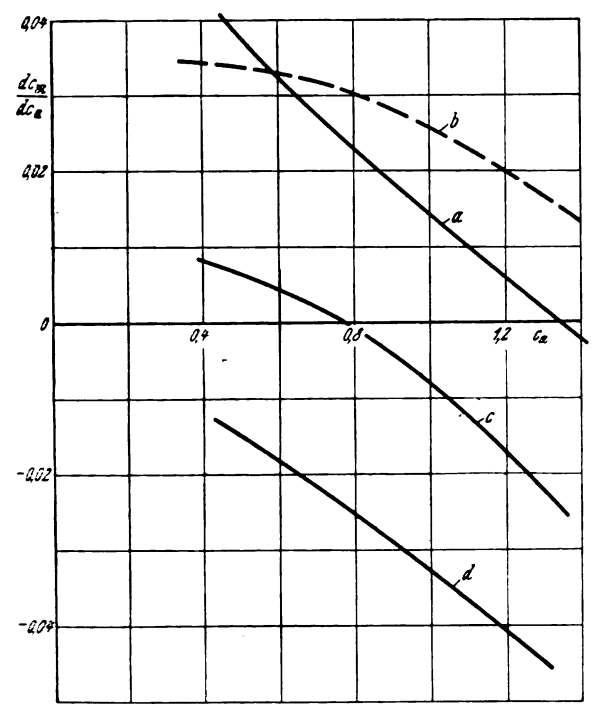


Bild 9. Längsstabilität $\frac{d\,c_m}{d\,c_a}$ bei Vollgas.

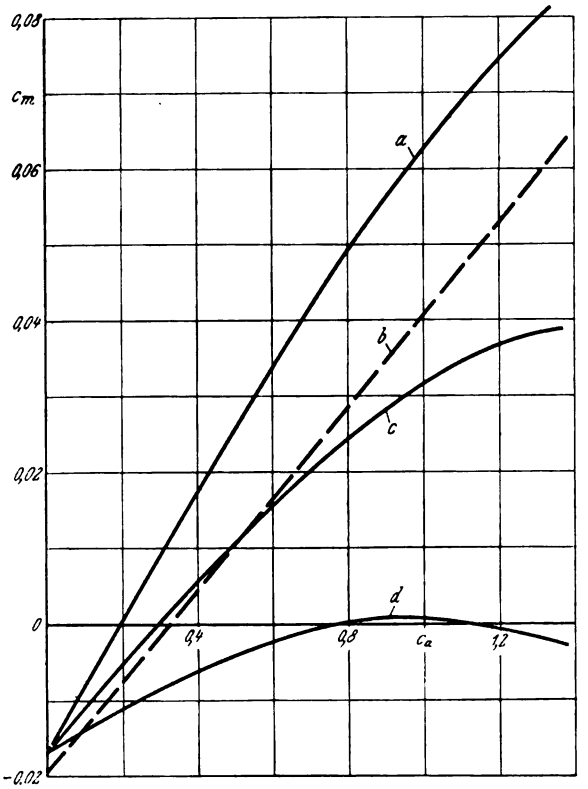


Bild 8. c_m/c_a-Kurven bei Leerlauf.

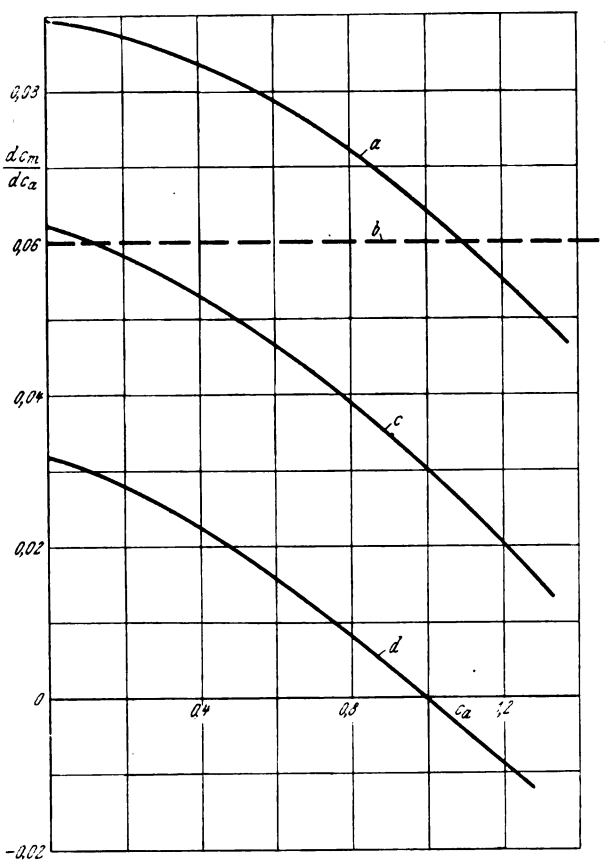


Bild 10. Längsstabilität $\frac{d\,c_m}{d\,c_a}$ bei Leerlauf.

eignung ein gewisses Stabilitätsmaß. Das durchgerechnete, der Praxis entnommene und durch Messungen bestätigte Beispiel zeigt, welchen beträchtlichen und entscheidenden Einfluß die Wirkung der Gewichtsmomente der Steuerungsteile ausübt. Ohne deren Berücksichtigung ist jede Vorausberechnung der Längsstabilität aus Modellversuchen fragwürdig. Auch der Konstrukteur sollte sich von vornherein bemühen, durch richtige kinematische Anordnung aller Steuerungsteile dafür zu sorgen, daß die Einflüsse der Steuerungsgewichte die Stabilität des Flugzeuges erhöhen. Der nachträglich u. U. erforderlich werdende Gewichtsausgleich von Steuerungsteilen ergibt stets eine unerwünschte Gewichtserhöhung, die häufig bereits beim Steuerungsentwurf aus Unkenntnis der geschilderten Verhältnisse verschuldet wird.

Digitized by Google

Flugmessungen über den Einfluß von Schraubenstrahl und Landeklappenanstellung auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk.

Von E. Eujen, Göttingen.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlersdorf, Institut für Flugmechanik.

Durch den Schraubenstrahl und durch Landeklappenanstellung wird die Zirkulation am Flügel beeinflußt und damit eine Änderung der Abwindverteilung am Höhenleitwerk verursacht; der Schraubenstrahl ändert außerdem die Staudruckverteilung. Über diese Änderungen läßt sich je ein Mittelwert längs der Leitwerksspannweite bestimmen, wenn das Höhenleitwerk als Meßwerkzeug benutzt wird. Im vorliegenden Bericht ist das Meßverfahren angegeben, und es werden die Ergebnisse einer Erprobung durch Messungen mit dem Flugzeugmuster Kl 36 mitgeteilt.

Gliederung:

I. Einleitung.
II. Grundlagen des Meßverfahrens.
III. Durchführung der Messungen.
1. Einbau der Meßgeräte.
2. Durchführung und Auswertung der Meßflüge
IV. Ergebnis der Messungen.
V. Zusammenfassung und Ausblick.
VI. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die Kenntnis der Strömungsvorgänge am Leitwerk ist für die Vorausberechnung der Längsstabilität eines im Entwurf befindlichen Flugzeugmusters von großer Wichtigkeit. Die restlose Lösung dieser Aufgabe durch die Theorie ist jedoch bisher nur teilweise möglich und gestaltet sich besonders schwierig, sobald es sich um die Stabilität im Motorflug handelt. Die Einflußgrößen sind in diesem Falle von solcher Mannigfaltigkeit, daß theoretische Betrachtungen kaum noch befriedigende Resultate liefern und zur Lösung des Problems weitgehend Versuchsmaterial (meistens in statistischer Auswertung) herangezogen werden muß. Der Windkanal hat sich bereits in wachsendem Ausmaße der Beschaffung dieses Materials angenommen und auch versucht, die Einzeleinflüsse systematisch zu erforschen. Die Forschung am fliegenden Flugzeug jedoch hat sich bisher meistens darauf beschränkt, die Änderung der Stabilität um die Querachse durch die laufende Schraube durch Messungen zu belegen, ohne tiefer in die Ursachen einzudringen, die zu diesen Stabilitätsänderungen führen. Dies mag im wesentlichen daran liegen, daß die meßtechnischen Schwierigkeiten bei solchen Untersuchungen groß sind und der notwendige Aufwand meistens nicht durch die Ergebnisse gerechtfertigt wird. Das im folgenden beschriebene Meßverfahren bedeutet in dieser Hinsicht einen Fortschritt, da es mit verhältnismäßig einfachen Mitteln recht brauchbare Ergebnisse liefert und damit einer allgemeineren Anwendung in der Praxis zugänglich wird.

Das Leitwerk eines Flugzeugs arbeitet im allgemeinen in einer Strömung, die in Richtung und Geschwindigkeit längs der Spannweite ziemlich inhomogen ist und sich mit jeder Änderung der Zirkulation am Tragflügel, sei es durch Einwirkung des Schraubenstrahls oder durch Anstellung von Landeklappen, weitgehend verändert. Diese Änderung der Richtungs- wie der Staudruckverteilung am Leitwerk ist bereits Gegenstand vieler experimenteller Untersuchungen gewesen, indem man im Windkanal wie auch teilweise am fliegenden Flugzeug die Strömung in der Nähe des Höhenleitwerks punktweise vermaß. Aus dem Ergebnis solcher Messungen ist dann ein flugmechanisch sinnvoller Mittelwert über die Leitwerksspannweite für die Anströmrichtung und für den Staudruck zu errechnen. Für eine solche Mittelwertbildung fehlen aber zur Zeit noch die theoretischen Grundlagen[1]); außerdem wird sie jedenfalls sehr großen Arbeitsaufwand erfordern. Zweckentsprechender ist es daher, die Mittelwertbildung experimentell zu erreichen, indem man das ganze Höhenleitwerk unter Ausnutzung seiner Funktion als integrierende Fühlfläche benutzt. Diese Methode wird manchmal auch im Windkanal zur Strömungsmessung herangezogen. Hierbei wird der mittlere Strömungswinkel aus dem an der Fühlfläche gemessenen Auftrieb bzw. Moment bestimmt, es müssen jedoch hohe Anforderungen an die Meßgenauigkeit gestellt werden, da die zu messenden Größen ziemlich klein werden, wenn — wie es ja für eine sinnvolle Mittelwertbildung erforderlich ist — die Fühlfläche die Größenverhältnisse des Leitwerks hat.

II. Grundlagen des Meßverfahrens.

Der Ausgangspunkt des nachstehend beschriebenen Meßverfahrens ist nicht der Auftrieb bzw. das Moment des Leitwerks, sondern das Momentengleichgewicht um die Ruderachse: Steuerkraftmoment + Luftkraftmoment = Null,

$$M_{st} + c_{rH} \cdot q \cdot \frac{q_H}{q} \cdot F_{Hr} \cdot l_{Hr} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Gewichtsmomente der Steuerungsteile seien dabei durch statischen Ausgleich ausgeschaltet. (Die gewählten Bezeichnungen entsprechen, sofern sie nicht im Text besonders erläutert sind, der Norm DIN L 100.)

Die Rudermomentenbeizahl c_{rH} ist im Bereich kleiner Anstellwinkel und Ruderwinkel von diesen linear abhängig, so daß man den Ansatz machen kann:

$$c_{rH} = c'_{rH_\alpha} \cdot \alpha_H + c'_{rH_\eta} \cdot \eta \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wobei

$$c'_{rH_\alpha} = \frac{d\, c_{rH}}{d\, \alpha_H} \quad \text{und} \quad c'_{rH_\eta} = \frac{d\, c_{rH}}{d\, \eta}$$

als Konstante anzusehen sind, die von der Formgebung des Leitwerks (vor allem l_{Hr}/l_H) abhängen, aber zunächst nicht bekannt sind. Direkt meßbar ist der Ruderwinkel η, der Anstellwinkel α_H soll bestimmt werden. Ist das Steuerkraftmoment $M_{st} = 0$, so bleibt das Luftkraftmoment für sich gleich Null (gleichbedeutend mit Selbsteinstellung des Ruders) und man erhält unmittelbar aus

$$c_{rH} = c'_{rH_\alpha} \cdot \alpha_H + c'_{rH_\eta} \cdot \eta = 0$$

eine Beziehung für den als Mittelwert über die Leitwerksspannweite aufzufassenden Anströmwinkel α_H des Leitwerks

[1]) Handelt es sich doch um die Berechnung des Leitwerkauftriebs bei nach Größe und Richtung variierender Geschwindigkeitsverteilung, wobei auch der Rumpfeinfluß kaum mehr außer acht bleiben dürfte.

Digitized by Google

$$\alpha_H = -\frac{c'_{rH_{\eta}}}{c'_{rH_{\alpha}}} \cdot \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der noch unbekannte Quotient $-\frac{c'_{rH_{\eta}}}{c'_{rH_{\alpha}}}$ kann nach Gl. (3), da lineare Abhängigkeit von den Strömungswinkeln vorausgesetzt war, durch den Differentialquotienten $\frac{d\alpha_H}{d\eta}$ ersetzt werden[2]), der im Flugversuch meßbar ist. Man ermittelt hierzu die einer bestimmten Höhenflossenverstellung (also α_H-Änderung) zugeordnete Änderung des Ruderwinkels η, wobei der Flugzustand, gekennzeichnet durch einen bestimmten Anstellwinkel des Flügels und Fortschrittsgrad der Luftschraube, und mithin der Staudruck am Leitwerk sich nicht ändern darf. Um dies zu erreichen, ist es also notwendig, das durch Änderung der Flossenstellung gestörte Gleichgewicht der Längsmomente durch entsprechende Verlagerung des Flugzeugschwerpunktes wiederherzustellen.

Der auf diese Weise gefundene Quotient $-\frac{c'_{rH_{\eta}}}{c'_{rH_{\alpha}}}$ bzw. $\frac{d\alpha_H}{d\eta}$, der als Mittelwert über die ganze Leitwerksspannweite aufzufassen ist, wird von der jeweiligen Verteilung des Anströmwinkels und des Staudrucks weitgehend unabhängig werden, wenn das Leitwerk aus geometrisch ähnlichen Schnitten besteht. Der Versuch muß zeigen, ob diese Voraussetzung, die ja exakt nur für eine Parallelströmung gilt, im vorliegenden Fall der Wirklichkeit befriedigend gerecht wird. Es müßte also der Meßwert $d\alpha/d\eta$ für alle Flugzustände konstant ausfallen.

Unter Zugrundelegung der durch Messungen mit freiem Ruder nach Gl. (3) gefundenen mittleren Anströmwinkel α_H des Leitwerks lassen sich nun Aussagen über die Änderungen des Staudruckmittelwertes, ausgedrückt durch den Quotienten $\frac{q_H}{q}$, machen. Man erhält durch Zusammenfassung der Gl. (1) bis (3) den Ausdruck

$$\left(\frac{q_H}{q}\right) \cdot c'_{rH_{\alpha}} \cdot F_{Hr} \cdot l_{Hr} = \left(\frac{q_H}{q}\right) \cdot K = -\frac{M_{st}}{\left(\alpha_H + \frac{c'_{rH_{\eta}}}{c'_{rH_{\alpha}}} \cdot \eta\right) \cdot q} \quad (4)$$

Der Faktor $K = c'_{rH_{\alpha}} \cdot F_{Hr} \cdot l_{Hr}$ ist durch Flugmessungen nicht ohne weiteres zu bestimmen, daher läßt sich der Absolutwert des Staudruckverhältnisses $\frac{q_H}{q}$ nicht angeben. Da aber $c'_{rH_{\alpha}}$ und damit der Faktor K voraussetzungsgemäß vom Flugzustand unabhängig sein soll, ist der Verhältniswert aus dem Vergleich zweier verschiedener Luftschrauben-Fortschrittsgrade λ_1 und λ_2

$$\left[\frac{q_H}{q}\right]_{\lambda_1}$$
$$\left[\frac{q_H}{q}\right]_{\lambda_2}$$

von dem genannten Faktor frei und daher zur Darstellung der Meßergebnisse bezüglich $\frac{q_H}{q}$ geeignet.

[2]) Diese Beziehung gilt allgemein, sobald das Steuerkraftmoment und damit c_{rH} konstant bleibt; $c_{rH} = 0$ ist lediglich als Sonderfall hiervon anzusehen.

Bild 1. Gesamtansicht des Flugzeugmusters Kl 36 A.

III. Durchführung der Messungen.

1. Einbau der Meßgeräte und Vorbereitung der Messungen.

Als Versuchsträger für die Erprobung des Meßverfahrens wurde das Flugzeugmuster Kl 36 A gewählt (Bild 1 und 2), von dem bereits eine Flugpolarenmessung vorlag und das für die Messungen besonders geeignet erschien, da es außer einer klaren Formgebung ausreichende Geräte-Einbaumöglichkeiten und die für die Anwendung des Meßverfahrens vorausgesetzte verstellbare Höhenflosse besaß.

Daten des Flugzeugs:

Fluggewicht: $G = 980$ kg i. M.,
Flügelfläche: $F = 20{,}4$ m²,
Flächenbelastung: $\frac{G}{F} = 48{,}0$ kg/m²,
Flügelspannweite: $b = 11{,}0$ m,
Flügelstreckung: $\Lambda = \frac{b^2}{F} = 5{,}93$,
Flügeltiefe an der Flügelwurzel: $l = 2{,}72$ m,
Mittlere aerodynamische Flügeltiefe, gemessen im Abstande $\frac{2b}{3\pi}$ von Rumpfmitte: $l_m = 2{,}03$ m,
Einstellwinkel: Flügel vom Wurzelprofil bis Querruder $+1^0$, Flügelende $-2{,}5^0$,
Höhenleitwerksfläche: $F_H = 3{,}48$ m²,
Höhenruderfläche: $F_{Hr} = 1{,}38$ m²,
Rudertiefenverhältnis: $\frac{l_{Hr}}{l_H} = 0{,}4$,
Wirksame Spannweite des Höhenleitwerks: $b_H = 3{,}45$ m,
Leitwerksstreckung: $\Lambda_H = \frac{b_H^2}{F_H} = 3{,}42$.

Daten der Luftschraube:

Schraubendurchmesser: $D = 2{,}4$ m,
Steigung in 0,7 $R = 22^0$,
Blattzahl: $Z = 3$.

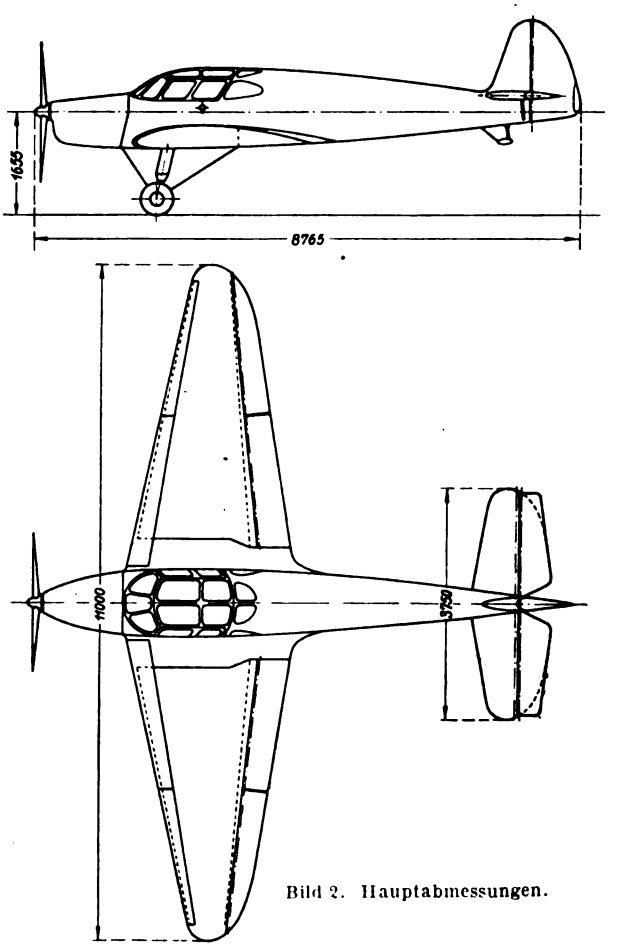


Bild 2. Hauptabmessungen.

Digitized by Google

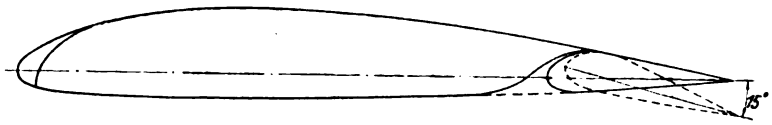
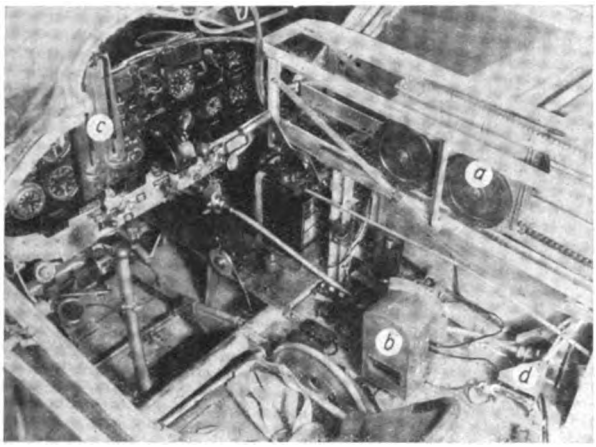


Bild 3. Profil an der Flügelwurzel. Wölbung $f/t = 2{,}8$ vH, Dicke $d/t = 13$ vH.



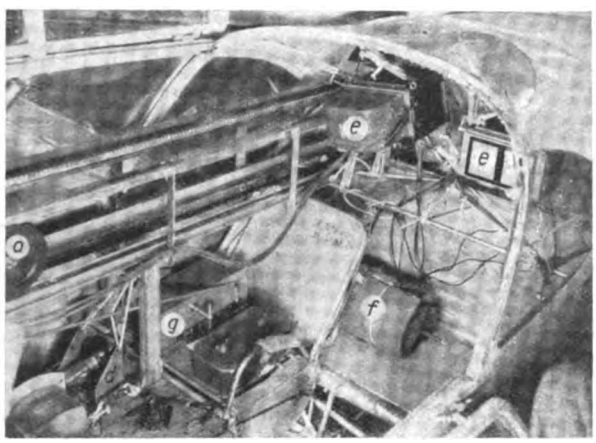


Bild 4 und 5. Laufgewicht- und Geräteeinbau in der Kabine.
a Laufgewicht, *b* Längsneigungsschreiber, *c* Manometer für den Flugstaudruck (Kontrollgerät), *d* Drehzahlschreiber, *e* optischer Zweifachschreiber, *f* Isolierflasche für Steig- und Sinkgeschwindigkeitsschreiber, *g* Zeitmarkengeber.

Die gewählten Bezeichnungen entsprechen der Norm DIN L 100.

Da es darauf ankam, möglichst gut den Voraussetzungen des Meßverfahrens gerecht zu werden, wurde zunächst der Einfluß von Ruder- und Steuerungsgewichtsmomenten durch sorgfältigen statischen Ausgleich ausgeschaltet. Weiterhin wurde das Höhenleitwerk durch Vergrößern der äußeren Rudertiefen auf ein längs der Spannweite konstantes Verhältnis von Rudertiefe zu Gesamttiefe gebracht.

Allerdings konnte bei der vorliegenden Leitwerksanordnung die Forderung des konstanten Tiefenverhältnisses nicht restlos erfüllt werden, da das Höhenruder einen Ausschnitt für das Seitenruder hat; es war jedoch anzunehmen, daß der Einfluß dieses Leitwerksteiles wegen der Abschirmung durch den Rumpf besonders klein sein würde.

Das im vorhergehenden Abschnitt dargelegte Meßverfahren erfuhr in seiner praktischen Anwendung insofern eine Abänderung, als von vornherein darauf verzichtet wurde, gleiche Staudrücke bei verschiedener Flossenstellung direkt zu erfliegen. Denn es mußte mit einer gewissen Meßungenauigkeit gerechnet werden, die nur durch Interpolation einer größeren Zahl von Meßpunkten auszugleichen war. Es wurden daher Meßreihen unter Variation des Anstellwinkels (Staudrucks) mit jeweils konstanter Flossenstellung durchgeführt, was auch meßtechnisch und fliegerisch wesentlich einfacher war. Aus diesen Meßergebnissen ergeben sich die für die Auswertung notwendigen Punkte gleichen Anstellwinkels durch Interpolation. Die Steuerung des Anstellwinkels erfolgte dabei durch Schwerpunktverschiebung. Um diese während des Fluges schnell und kontinuierlich durchführen zu können, war auf der Steuerbordseite der Kabine eine Brücke eingebaut, auf der ein auf Rollen laufendes Bleigewicht von etwa 80 kg durch einen Kettenantrieb hin- und herbewegt werden konnte (Bild 4 und 5). Es erwies sich als zweckmäßig, daß die Betätigung vom Flugzeugführer aus erfolgte, da sie die gleiche gefühlsmäßige Einstellung verlangt wie eine Ruderbetätigung. Nach Erreichen des gewünschten Staudrucks ließ sich das Gewicht in der jeweiligen Stellung durch eine Raste mit Fußauslösung feststellen.

Sichere Ergebnisse waren bei dem zur Anwendung kommenden Meßverfahren nur zu erwarten, wenn bei Bestimmung der geometrischen Winkel am Leitwerk genügende Meßgenauigkeit erreicht werden konnte. Als Bezugsachse für die Strömungswinkel ist die Rumpfachse, d. h. im vorliegenden Falle die Kurbelwellenachse als jederzeit reproduzierbar gewählt. Bei Nullstellung von Höhenflosse und -ruder müssen die symmetrischen Leitwerks-Profilschnitte parallel zu dieser Achse sein. Die Einstellung geschah mit einem Nivellierinstrument, nachdem das Flugzeug bezüglich der gewählten Bezugsachse waagerecht gestellt war. Die Flossenverstellungsanzeige ging von Grad zu Grad über eine Kontaktleiste an der Flosse (Bild 6) auf entsprechende Lämpchen im Führersitz; diese Anzeige war sehr zuverlässig und genau.

Die Ruderwinkel wurden (relativ zur Höhenflosse) mit einem normalen DVL-Ruderausschlagschreiber auf Wachspapier aufgezeichnet. Nachdem durch einen Flugversuch die maximal sich einstellenden Ruderwinkel bestimmt waren, konnte die Hebelübersetzung des Schreibers so eingestellt werden, daß die volle Schreibtrommelhöhe zur Aufzeichnung ausgenutzt war. Dadurch steigerte sich die Ablesegenauigkeit in der Auswertung der Ruderwinkel auf $\sim 0{,}02^0$. Die Meßgenauigkeit war natürlich geringer (vgl. Bild 7); sie dürfte bei der vorliegenden Anordnung $\pm\, 0{,}05^0$ betragen haben. Bild 7 zeigt als Beispiel einen Ruderwinkel-Meßschrieb. Die Eichung des Ruderausschlagschreibers erfolgte mit einer auf das Ruder aufgesetzten Winkelwasserwaage; die Nullstellung konnte mittels eines Paßstiftes nach jedem Flug kontrolliert werden.

Für die Messungen mit konstantem Steuerkraftmoment wurde eine einfache Vorrichtung verwendet, wie die Bild 9 zeigt. Die Änderung der Angriffsrichtung der Kraft

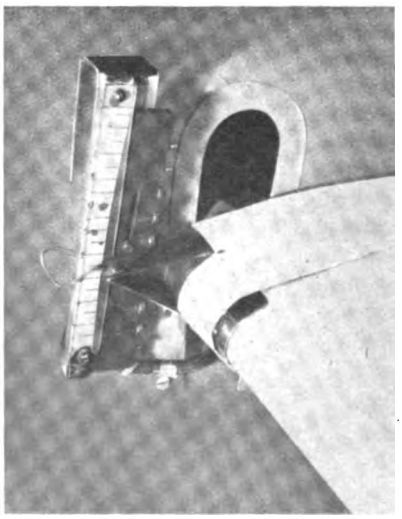


Bild 6. Kontaktleiste für die Flossenstellungsanzeige.

Digitized by Google

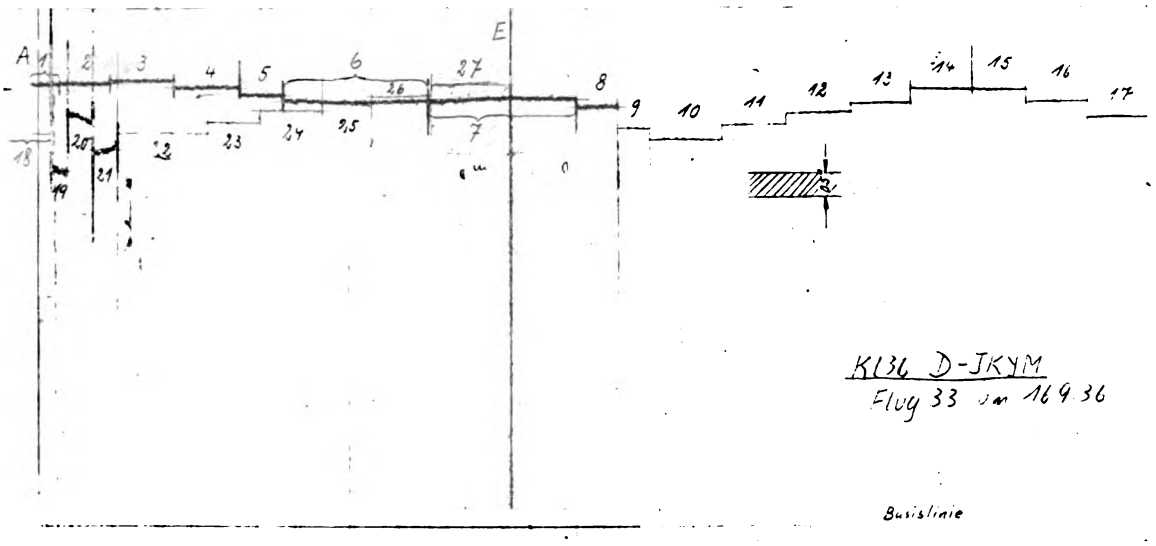


Bild 7. Meßschrieb des Ruderwinkelschreibers.

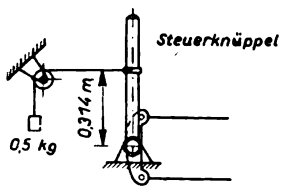


Bild 8. Vorrichtung für Messungen mit konstantem Steuerkraftmoment.

durch Ausschläge des Steuerknüppels kann vernachlässigt werden. Die eingeleitete Steuerkraft war demnach verhältnismäßig klein. Es sollte jedoch dadurch vermieden werden, daß die zusätzliche Reibung infolge Belastung der Steuerzüge unnötig groß wurde.

An weiteren Meßgeräten waren eingebaut:

1 optischer Zweifachschreiber (DVL) für Staudruck und barometrische Höhe,
1 Pendel-Längsneigungsschreiber und
1 Drehzahlschreiber.

Der Staudruck wurde an einem mit Gesamtdruckgerät und statischer Schleppsonde geeichten Prandtlrohr entnommen.

2. Durchführung und Auswertung der Meßflüge.

Um den Einfluß des Schraubenstrahls zu ermitteln, wurden zwei Meßreihen durchgeführt: Laufende Schraube (Vollgas) und stehende Schraube. Da das Flugzeug mit einer Dreiblattschraube von kleinem Durchmesser ausgerüstet war, dürfte der Einfluß der Schraubenstellung auf die Meßergebnisse bei stehender Schraube belanglos sein.

Die Schraubenstrahlmessungen wurden späterhin durch eine Untersuchung über die Änderung des Abwindes am Höhenleitwerk bei Anstellung der Landeklappen ergänzt. Der Klappenausschlag betrug hierbei 15°. Die im Normalzustand mit der Klappe gekuppelten inneren Hilfsflügel (Slots) wurden entkuppelt und in geschlossenem Zustande blockiert. Die Beseitigung des Hilfsflügelspaltes hatte im wesentlichen den Zweck, das Strömungsbild am Flügel für eine eventuelle Anwendung von theoretischen Betrachtungen (Auftriebsverteilungsberechnung) möglichst zu vereinfachen; aus dem gleichen Grunde wurde die Landeklappenanstellung verhältnismäßig klein gehalten.

Als Vergleichsmessung zu dem Zustand »Landeklappen in Nullstellung« wurden die Messungen mit ausgefahrener Landeklappe bei stehender Luftschraube durchgeführt.

Zur Bestimmung des Schraubenstrahleinflusses wurde für zwei bzw. drei Höhenflossenstellungen der Ruderwinkel η abhängig vom Flugstaudruck

1. mit freiem Ruder (Steuerkraftmoment $M_{st} = 0$),
2. mit konstantem Steuerkraftmoment ($M_{st} = 0{,}157$ mkg),

jeweils für laufende und stehende Schraube gemessen. Es ergaben sich die in Abb. 9 bis 12 dargestellten Abhängigkeiten, die für die weitere Auswertung als Ausgangsmaterial dienten.

Da auf eine Untersuchung der Staudruckänderung am Leitwerk bei Landeklappenausschlag verzichtet wurde, war für die Abwindbestimmung lediglich eine Messung des Ruderwinkels bei freiem Ruder und zwei Höhenflossenstellungen notwendig. Die Ergebnisse sind in Bild 13 enthalten.

Die Durchführung der Messungen wurde durch die nach dem vollständigen Gewichtsausgleich der Steuerung eintretende Verschlechterung der Stabilitätseigenschaften des Flugzeugs sehr erschwert, so daß es dem Meßflieger erst nach einiger Übung gelang, brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Einen wesentlichen Anteil an der Streuung der Meßpunkte dürfte die Reibung in der Steuerung haben, obwohl sie durch Ausbau der Doppelsteuerung und Gängigmachen der Lager auf ein Mindestmaß reduziert war.

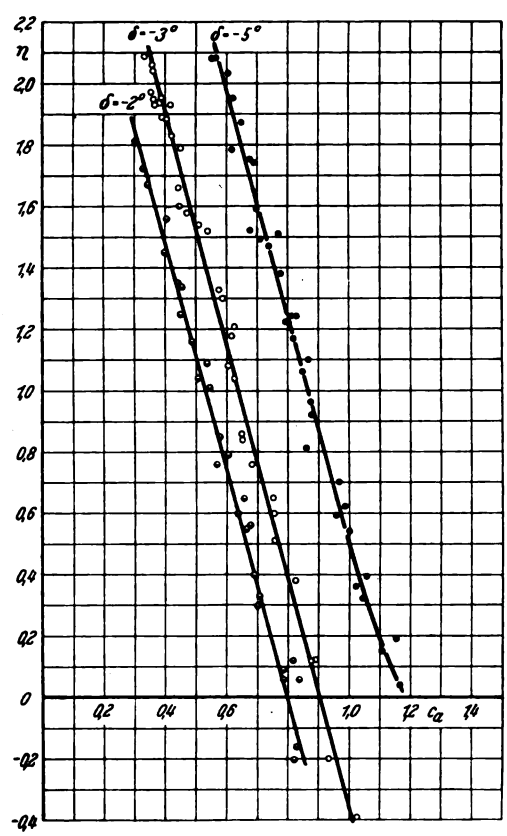


Bild 9. Ruderwinkel η in Abhängigkeit von der Auftriebsbeizahl c_a für stehende Luftschraube und Steuerkraftmoment $M_{st} = 0$. Landeklappenausschlag $\eta_K = 0$.

Digitized by Google

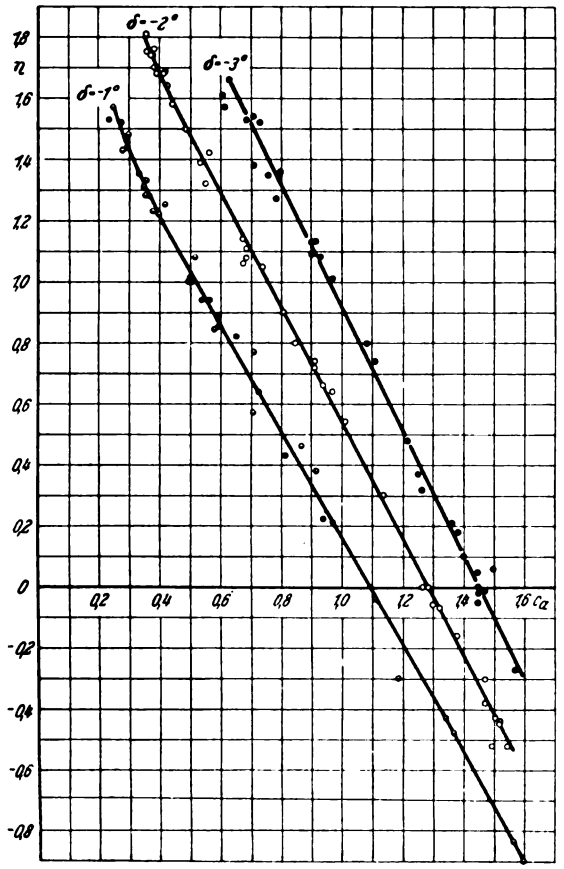


Bild 10. Ruderwinkel η in Abhängigkeit von der Auftriebsbeizahl c_a für laufende Luftschraube und Steuerkraftmoment $M_{st} = 0$.

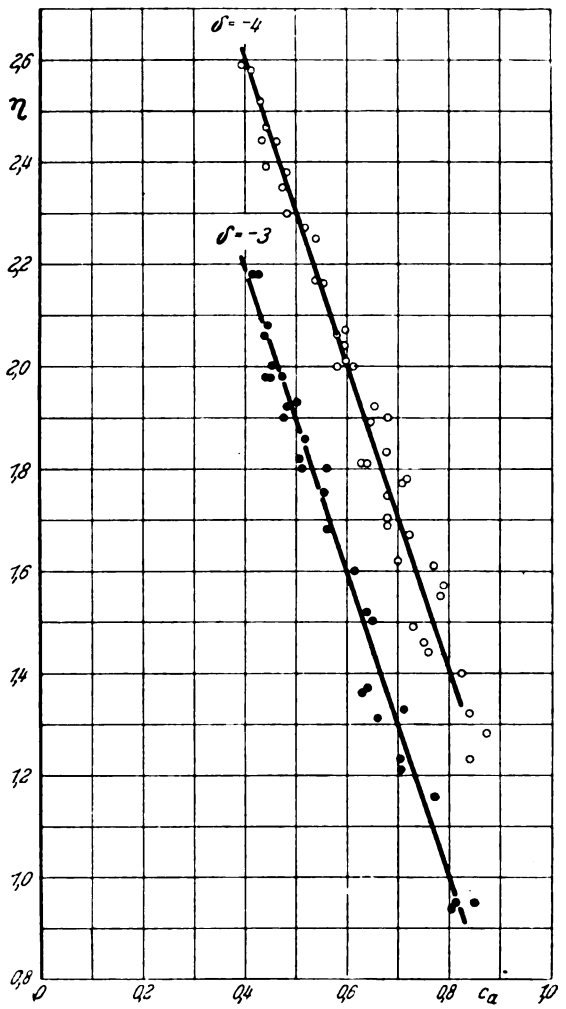


Bild 11. Ruderwinkel η in Abhängigkeit von der Auftriebsbeizahl c_a für stehende Luftschraube und Steuerkraftmoment $M_{st} = 0{,}157$ mkg.

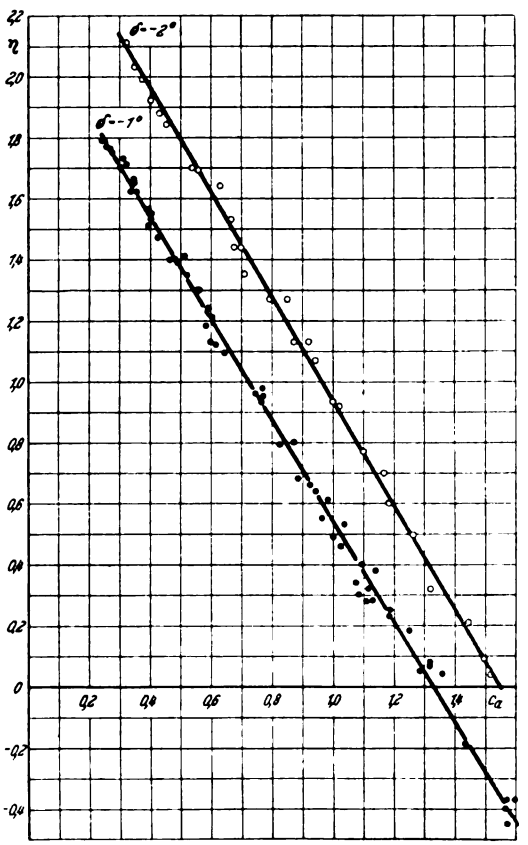


Bild 12. Ruderwinkel η in Abhängigkeit von der Auftriebsbeizahl c_a für laufende Luftschraube und Steuerkraftmoment $M_{st} = 0{,}157$ mkg.

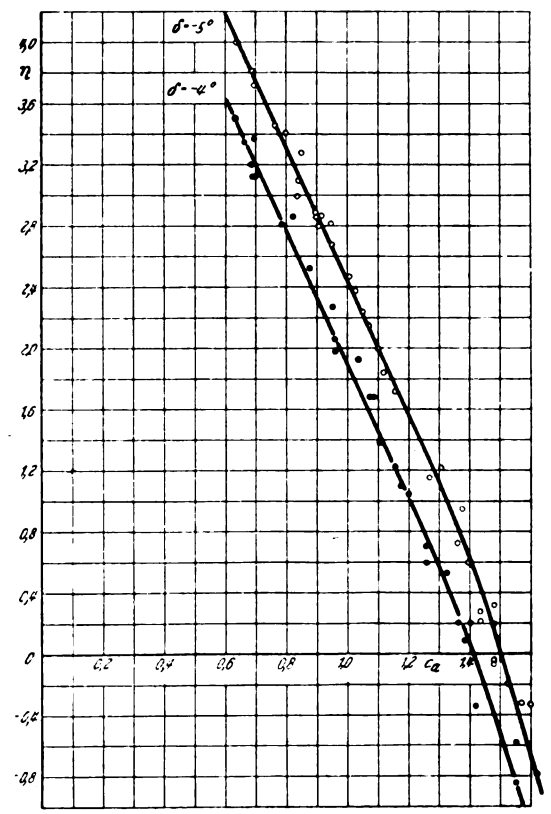


Bild 13 (rechts). Ruderwinkel η in Abhängigkeit von der Auftriebsbeizahl c_a für stehende Luftschraube und Landeklappenausschlag $\eta_k = 15°$.

Digitized by Google

Die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes vom Anstellwinkel war für laufende Schraube bereits aus früheren Messungen bekannt und wurde durch Kontrollmessungen vollauf bestätigt. Es waren somit lediglich für stehende Schraube bei eingefahrener und ausgefahrener Landeklappe eingehendere Messungen nötig. Die Ergebnisse sind in Bild 14 zusammengestellt.

Für die Auswertung der Meßergebnisse wurden interpolierte Werte zugrunde gelegt. Der Beiwert c_a wurde ohne Berücksichtigung des Bahnwinkels ($\cos\gamma = 1$ gesetzt) berechnet aus

$$c_a = \frac{G}{F\,q}.$$

Für laufende Schraube enthalten die so berechneten Werte außerdem noch die Schubkomponente $S \cdot \sin\alpha$. Daher ist ein Vergleich der Auftriebsbeizahlen für stehende und laufende Schraube nicht einwandfrei, und deshalb sind alle diesbezüglichen vergleichenden Darstellungen der Ergebnisse als Funktion des Anstellwinkels α_F gegeben.

Um ein Bild über die Strömungsvorgänge am Flügel, insbesondere an der für die Leitwerksbeeinflussung wichtigen Flügelwurzel zu gewinnen, wurden die Messungen durch Wollfadenaufnahmen ergänzt, von denen einige in den Bild 17 bis 21 wiedergegeben sind.

IV. Ergebnis der Messungen.

Die Ergebnisse der Auswertung sind in den Bildern 22 bis 27 dargestellt.

Es ergibt sich nach Bild 23 ein beträchtlicher Einfluß der laufenden Schraube auf den Abwind am Leitwerk, und zwar liegt dieser Einfluß weniger in einer Vergrößerung der absoluten Abwindwinkel als in der destabilisierenden Verkleinerung des Abwindfaktors $\varepsilon = \left(1 - \frac{d\,\Delta\,\alpha}{d\,\alpha_F}\right)$. Die für stehende Schraube mit eingefahrener Landeklappe gemessenen Abwindwinkel lassen sich mit rechnerisch gewonnenen Werten vergleichen. Unter Berücksichtigung der Verwindung des Tragflügels und der Absenkung des Wirbelbandes erhält man den in Bild 23 gestrichelt wiedergegebenen Abwindverlauf.

Die Übereinstimmung der gemessenen Abwindwinkel mit den theoretisch gewonnenen ist bei größeren Anstell-

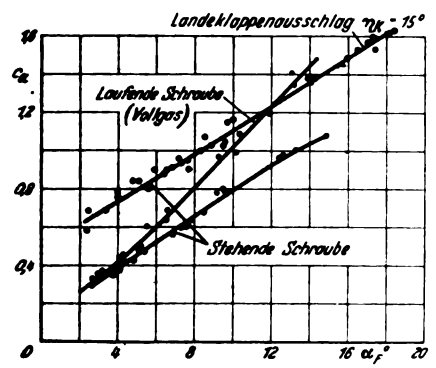


Bild 14. Auftriebsbeizahl c_a in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α_F.

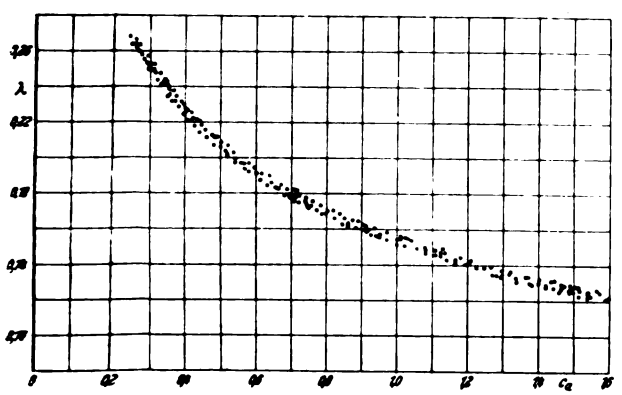


Bild 15. Fortschrittsgrad λ in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_a.

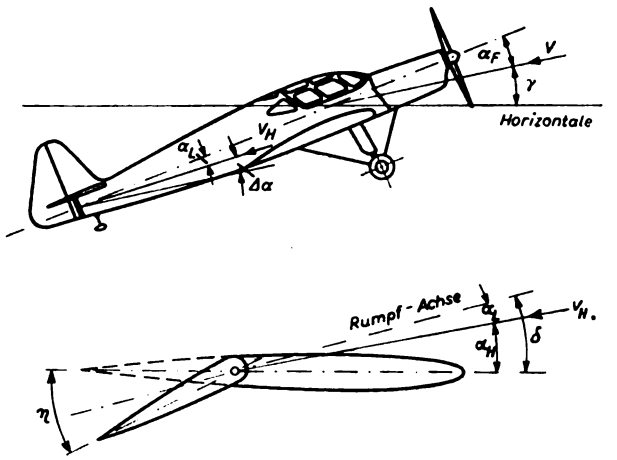


Abb. 16. Bezeichnungen.

winkeln befriedigend. Bei kleineren Anstellwinkeln verläuft dagegen die gemessene Kurve sehr flach, so daß sich bei geradliniger Extrapolation auf den Abwind Null — sofern eine solche zulässig — ein unwahrscheinlich kleiner Nullauftriebs-Anstellwinkel ergeben würde. In Bild 23 sind fernerhin Meßpunkte eingetragen, die am Modell mittels Seidenfädchenmessungen gewonnen wurden und die die arithmetischen Mittelwerte der Messung auf der Backbord- und Steuerbordseite darstellen. Das Überschneiden der Kurven

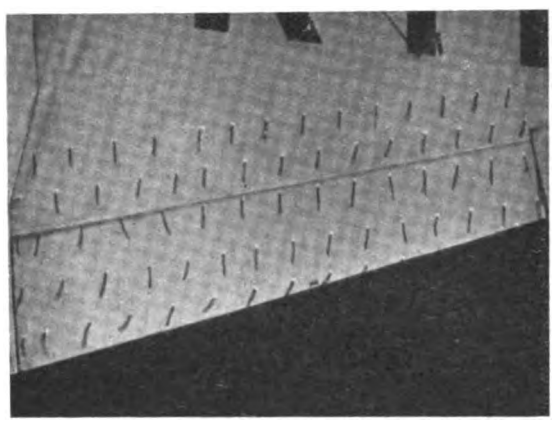


Bild 17. Wollfadenbild an der Landeklappe im Gleitflug mit stehender Luftschraube und Landeklappenausschlag $\eta_{Kl} = 0°$; $c_a = 0{,}93$.

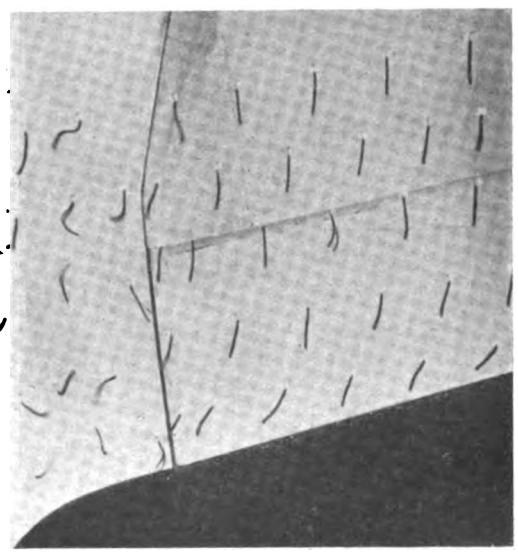


Bild 18. Wollfadenbild an der Flügelwurzel im Gleitflug mit stehender Luftschraube bei Landeklappenausschlag $\eta_{Kl} = 0°$; $c_a = 0{,}88$.

(Zu Bild 17 u. 18). Die Strömung an der Klappe liegt an, jedoch zeigen die Wollfäden leichte Unruhe. An der Flügelwurzel ist die Strömung schon bei kleinen c_a-Werten abgerissen. Das Abreißen an der Klappe beginnt in der Mitte bei $c_a = 1{,}1$.

Digitized by Google

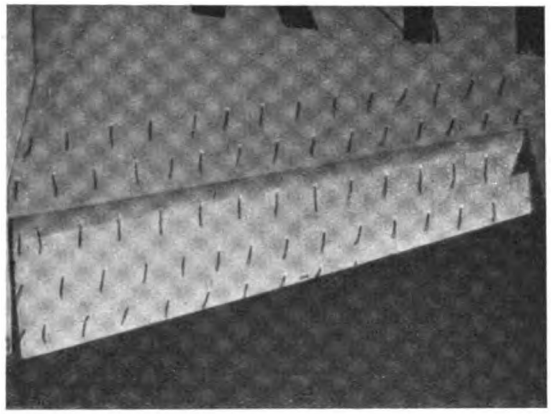


Bild 19. Wollfadenbild an der Landeklappe im Gleitflug mit stehender Luftschraube und Landeklappenausschlag $\eta_{Kl} = 15°$; $c_a = 1{,}32$.

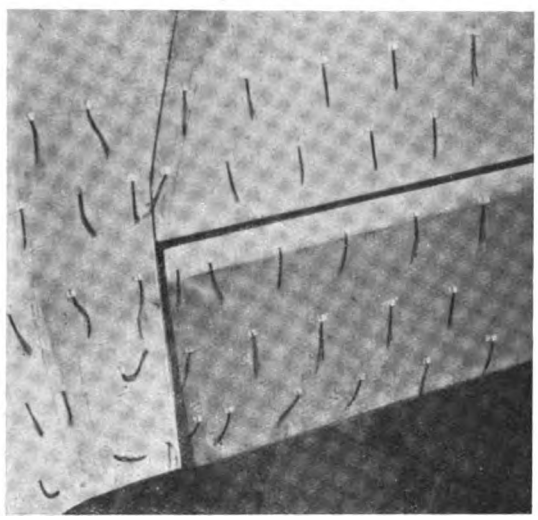


Bild 20. Wollfadenbild an der Flügelwurzel im Gleitflug mit stehender Luftschraube bei Landeklappenausschlag $\eta_{Kl} = 15°$ ohne Endscheibe; $c_a = 1{,}32$.

(Zu Bild 19 u. 20). Die Strömung an Klappe und Flügelwurzel liegt an; ein Abreißen tritt allgemein ein bei $c_a = 1{,}6$.

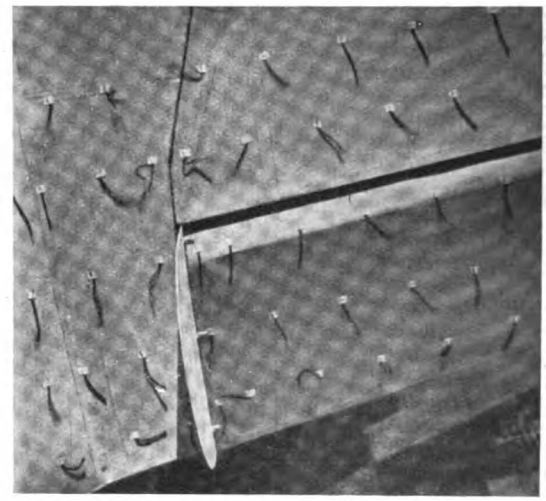


Bild 21. Wollfadenbild an der Flügelwurzel im Gleitflug mit stehender Luftschraube bei Landeklappenausschlag $\eta_{Kl} = 15°$ mit Endscheibe; $c_a = 1{,}32$.

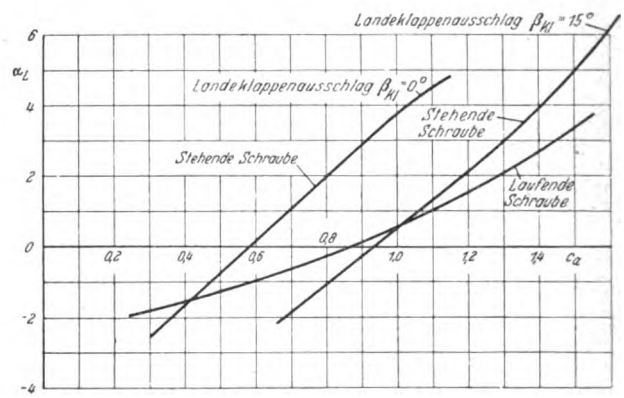


Bild 22. Anstellwinkel am Ort des Leitwerks α_L in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_a.

für stehende und laufende Schraube bei kleinen Anstellwinkeln ist bereits bei ähnlichen Messungen im Windkanal [1] festgestellt und auf eine Auftriebsverminderung am Flügel durch den Drall des Schraubenstrahls zurückzuführen.

Obwohl man bei Anstellung der Landeklappen eine beträchtliche Vergrößerung der Abwindwinkel erwarten möchte, ergeben die Messungen eine nur geringe Änderung (Bild 24); bezogen auf den Auftriebsbeiwert wird der Abwind bei ausgefahrenen Klappen sogar kleiner (Bild 25). Ohne Kenntnis der Auftriebsverteilung des Flügels ist dieses Ergebnis nicht ohne weiteres verständlich. Es kann zunächst angeführt werden, daß durch das Ausfahren der Landeklappen der Auftrieb mehr in der Mitte des Flügels konzentriert wird und sich somit eine weniger völlige Auftriebsverteilung ergibt. Dies hat zur Folge, daß (nach einem Bericht von J. Flügge-Lotz und D. Küchemann (2) zwar der Abwind an der Stelle der Wirbelfläche wächst, zugleich aber die Absenkung dieser Wirbelfläche bei gleichem Gesamtauftrieb sich verstärkt, so daß im Endergebnis der Abwind an dem flugzeugfesten Leitwerk kleiner als vorher sein kann. Eine rohe Abschätzung ergab im vorliegenden Falle bei dem Auftriebsbeiwert $c_a = 1{,}0$ eine mögliche Abwindverringerung bis zu 20 vH, was mit dem Ergebnis der Messungen ganz gut übereinstimmt. Nicht erklärt wird jedoch durch diesen Effekt die zunehmende Verringerung des Abwindes bei kleineren c_a-Werten, da der Einfluß der Wirbelflächenabsenkung mit abnehmendem c_a-Wert auch abnimmt. Die Vermutung, daß durch Abreißen der Strömung an der Flügelwurzel bei kleineren Auftriebsbeiwerten eine Einsenkung in der Auftriebsverteilung in Flügelmitte erzeugt wird, hat sich durch die Wollfadenuntersuchung nicht bestätigt (Abb. 20). Nun entsteht jedoch durch das Ausfahren der Landeklappen an der Flügelwurzel ein Spalt, durch den offenbar ein Druckausgleich stattfindet. Wird nämlich die Umströmung des inneren Landeklappenendes durch Anbringen einer Endscheibe an der Klappe verhindert, so erfolgt bei gleichem Auftriebsbeiwert wie vorher ein Abreißen der Strömung (Abb. 21). Da der Auftriebsanteil der Landeklappe bei kleinen c_a-Werten erheblich zunimmt [3], wäre damit auch die im Vergleich mit Landeklappenstellung $\eta_K = 0$ gemessene stärkere Abhängigkeit des Abwindwinkels $\Delta\alpha$ vom Gesamt-Auftriebsbeiwert erklärlich.

Hinsichtlich des für die Berechnung der Abwindwinkel wichtigen Quotienten $d\alpha_H/d\eta$ ergeben die Messungen ohne Landeklappenausschlag für stehende und laufende Schraube den fast konstanten Wert $\frac{d\alpha_H}{d\eta} = -2{,}48$, was die im II. Abschnitt gemachte Voraussetzung rechtfertigt. Bei Anstellung der Landeklappen ist der Wert zwar noch im gemessenen Auftriebsbereich konstant, aber um 25 vH kleiner als vorher $\left(\frac{d\alpha_H}{d\eta} = -1{,}85\right)$. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es sich hierbei nicht um eine Fehlmessung handeln kann, da bei vorgenommenen Kontrollmessungen sich sämtliche Abhängigkeiten (Abb. 9 bis 13) als einwandfrei reproduzierbar erwiesen. Die beträchtliche Änderung des Quotienten $\frac{d\alpha_H}{d\eta}$ muß vielmehr als Anzeichen einer grundlegenden Änderung der Anströmwinkel- und Staudruckverteilung am Leitwerk gedeutet werden.

Digitized by Google

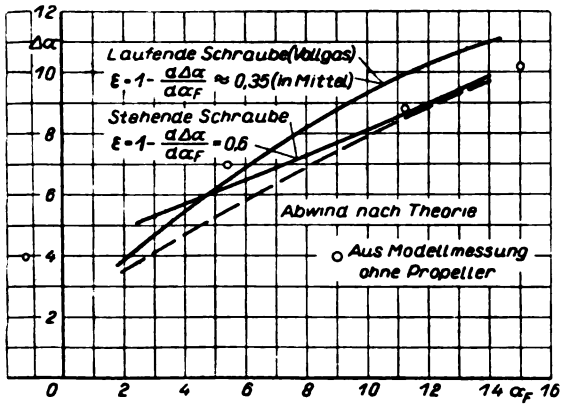


Bild 23. Abwindwinkel $\Delta\alpha$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α_F für stehende und laufende Luftschraube.

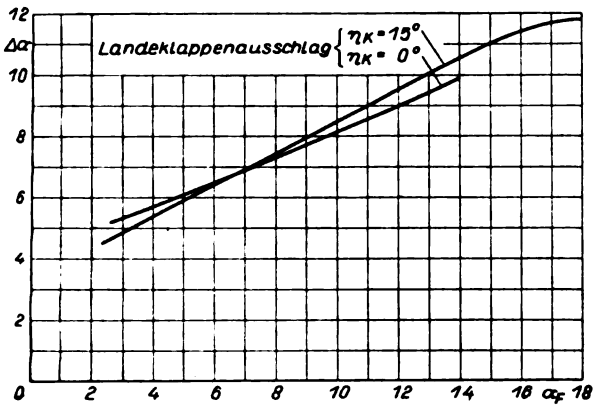


Bild 24. Abwindwinkel $\Delta\alpha$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α_F für stehende Luftschraube und Landeklappenausschlag $\eta_K = 0°$ und $\eta_K = 15°$.

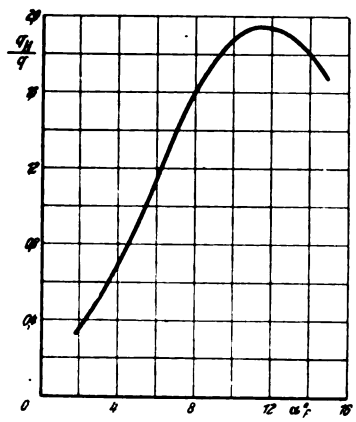


Bild 27. Staudruckerhöhung am Leitwerk bei laufender Schraube.

Die Bestimmung des Staudruckverlaufs abhängig vom Anstellwinkel konnte nur für laufende Schraube zuverlässig erfolgen, da die Meßpunkte für stehende Schraube und konstantes Steuerkraftmoment (Abb. 11) bei kleiner werdenden Flugstaudrücken erheblich streuen. Offenbar überwiegt das Reibungsmoment in der Steuerung das Luftkraftmoment am Ruder, so daß die Einstellung des freien Ruders dadurch unsicher wird. Da eine Interpolation der Meßpunkte bei größeren Auftriebsbeiwerten infolge der Streuung nicht mehr einwandfrei möglich war, erstreckt sich die Auswertung nur auf einen kleinen c_a-Bereich. Hier ist der sich ergebende Wert $q_H/q \cdot K$ praktisch konstant (Bild 26).

Die Staudruckerhöhung am Leitwerk wurde unter Zugrundelegung dieses konstanten Wertes $q_H/q \cdot K = 0{,}108$ aus dem Verhältnis

$$\frac{(q_H/q \cdot K)_\lambda}{(q_H/q \cdot K)_{\lambda=\infty}} = \frac{(q_H/q)_\lambda}{(q_H/q)_{\lambda=\infty}}$$

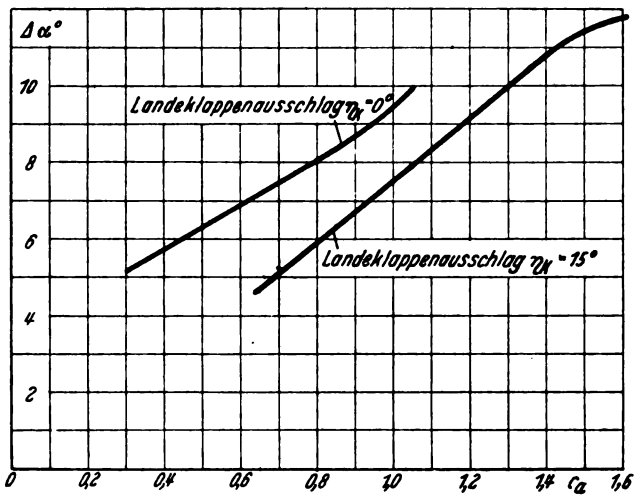


Bild 25. Abwindwinkel $\Delta\alpha$ in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_a für Landeklappenausschlag $\eta_K = 15°$.

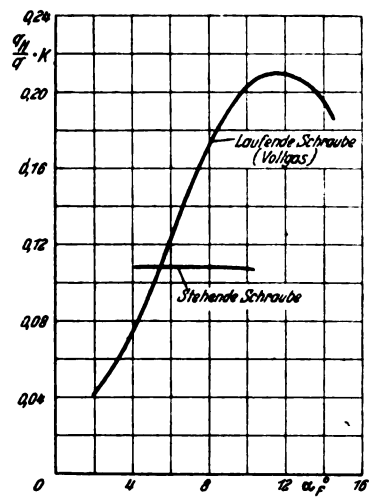


Bild 26. Staudruckverlauf bei stehender und laufender Luftschraube.

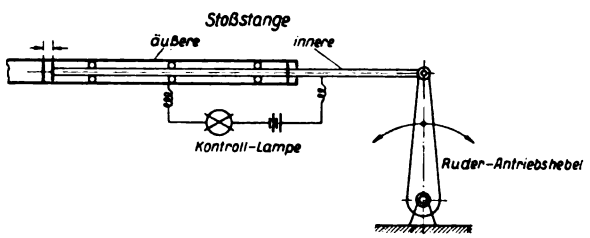


Bild 28. Stoßstangen-Entkupplung des Höhenruders.

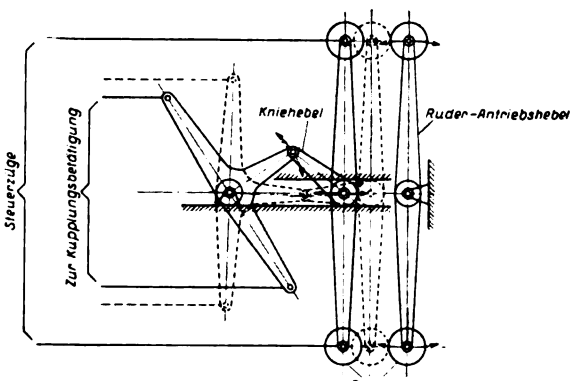


Bild 29. Hebel-Entkupplung des Höhenruders.

bestimmt, wobei $(q_H/q)_{\lambda=\infty} = 1$ angenommen wurde. Damit ergeben sich die Werte des Bildes 27. Nun wird $(q_H/q)_{\lambda=\infty}$ im allgemeinen 10 bis 20 vH < 1 sein, so daß sich damit alle Werte des Bildes 27 um diesen Betrag erhöhen würden. Aber auch dann kann das Ergebnis nicht befriedigen.

Digitized by Google

V. Zusammenfassung.

Aufgabe der vorliegenden Untersuchung war es, ein Meßverfahren zu erproben, das es ermöglicht, durch Messungen am fliegenden Flugzeug die Strömungsvorgänge am Leitwerk zu untersuchen, insbesondere wenn die Zirkulation des Flügels durch Einwirkung des Schraubenstrahls oder Anstellung von Klappen geändert ist. Es zeigte sich, daß das gewählte Meßverfahren bei Erfüllung gewisser Voraussetzungen befriedigende Ergebnisse liefert und somit dazu dienen kann, sowohl Windkanalmessungen zu ergänzen als auch bei neu entwickelten Flugzeugmustern die Ursache ungenügender Stabilitätseigenschaften oder großer Lastigkeitsänderungen, soweit sie in der Beeinflussung des Höhenleitwerks begründet sind, festzustellen und zu beseitigen.

In der Durchführung der Messungen sind noch einige Vereinfachungen möglich. Man wird z. B. die Schwierigkeit, einen vollständigen Gewichtsausgleich in der Steuerung anbringen zu müssen, zweckmäßigerweise umgehen, indem man das Höhenruder für sich auswuchtet und es während des Meßvorgangs vollständig von der Steuerung löst. Dies hat den weiteren Vorteil, daß der Reibungseinfluß auf ein Minimum reduziert wird. Die konstruktive Gestaltung sowie der Einbau einer derartigen Entkupplungsvorrichtung dürfte nicht allzu schwierig sein, da der für die Messung in Betracht kommende Ruderwinkelbereich im allgemeinen sehr klein ist und man daher mit einer Vorrichtung auskommt, die dem Ruder die nötige Bewegungsfreiheit gibt, jedoch dem Flugzeugführer noch die Möglichkeit genügender Ruderbetätigung läßt. Die Entkupplung macht sich also lediglich als »toter Gang« bemerkbar. Die Abb. 28 und 29 geben im Schema zwei Vorschläge für eine Entkupplungsvorrichtung.

Zum Steuern des Anstellwinkels bei losem Ruder wird die Schwerpunktverschiebung benutzt; es ist zwar angenehm, aber nicht unbedingt erforderlich, daß diese Verschiebung kontinuierlich und leicht bedienbar ist. Man wird bei größeren Flugzeugmustern am einfachsten »lebenden Ballast« mitnehmen; bei kleineren wird man trimmbaren Wasserballast einbauen oder sich bei Vorhandensein einer Verstellflosse auf die Messung einiger fester Schwerpunktlagen unter Variation der Höhenflossenstellung beschränken. In jedem Fall bleibt das Ziel der Messung die Ermittlung des Quotienten $\frac{d\alpha_H}{d\eta}$ für gleichbleibenden Flugzustand, womit gleichzeitig alle für die Berechnung benötigten Größen bekannt sind.

VI. Schrifttum.

[1] J. Stüper, Einfluß des Schraubenstrahls auf Flügel und Leitwerk. Luftf.-Forschung Bd. 15 (1938), S. 181.

[2] J. Flügge-Lotz und D. Küchemann, zusammenfassender Bericht über Abwindmessungen ohne und mit Schraubenstrahl. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I/172.

[3] G. Kiel, Druckverteilungsmessungen an einem Flügelschnitt mit Landeklappe. Luftf.-Forschung Bd. 14 (1937), S. 71.

Abgeschlossen August 1938.

Digitized by Google

Über ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung der Auftriebsverteilung über die Breite eines Tragflügels.

Von Karl Jaeckel, Breslau.

Bei Durchsicht der Verfahren zur Auflösung der Prandtlschen Integro-Differentialgleichung für die Zirkulationsverteilung eines Tragflügels endlicher Spannweite findet man Hinweise über die Sonderstellung, die der elliptische Umriß unter allen Flügelformen einnimmt, doch ist diese Feststellung erst in den neueren Arbeiten von H. Schmidt [5] und H. Schubert [6] verwertet worden. Ich will in der vorliegenden Mitteilung diese Tatsache benutzen, um die Auftriebsverteilung eines vorgegebenen Tragflügels aus dem elliptischen durch schrittweise Näherung zu ermitteln, da die üblichen Flügelformen im allgemeinen in der Umgebung eines elliptischen Umrisses liegen. Dieser Gedanke ist allerdings, wie mir jetzt durch Herrn Professor H. Schmidt bekannt wird, nicht neuartig; so haben unabhängig voneinander H. Gebelein [1] und H. Schubert [2] ein derartiges Verfahren bereits verwendet. Die vorliegende Mitteilung, die in anderer Darstellungsweise bis zur numerischen Berechnung der Auftriebsverteilung hinführt, soll eine Ergänzung dieser bereits veröffentlichten Arbeiten sein, wenn auch die Ergebnisse nur unter engeren Vorraussetzungen gültig sind.

Gliederung.

I. Entwicklung des Verfahrens.
II. Konvergenznachweis für die Näherungsfolge und Eindeutigkeitsbeweis für die Lösung.
III. Prüfung des Verfahrens an einem Flügel mit elliptischem Umriß und Anwendung auf ein Beispiel mit symmetrischer Tiefen- und Anstellwinkelverteilung.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Entwicklung des Verfahrens.

Wir gehen aus von der ursprünglichen Prandtlschen Integro-Differentialgleichung

$$\Gamma(y) = \lambda \cdot l(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i(y)) \quad \ldots \quad (1)$$

wobei $\Gamma(y)$ die Zirkulationsverteilung über die Breite, λ eine mittlere Profilkonstante, $l(y)$ die wirksame Flügeltiefe, v die Fluggeschwindigkeit, $\alpha_g(y)$ die Anstellwinkelverteilung und $\alpha_i(y)$ die Verteilung des induzierten Anstellwinkels bedeutet.

Die Funktion $\Gamma(y)$ ist gesucht und mit $\alpha_i(y)$ durch die Beziehung

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi v} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(s)}{y-s} \quad \ldots \quad (2)$$

verknüpft, mit b als Spannweite des Flügels. Gegeben sind die Funktionen $l(y)$ und $\alpha_g(y)$.

Die Zirkulationsgleichung schreiben wir mit

$$l(y) = l^*(y) + l^{**}(y) \quad \ldots \quad (3)$$

wie folgt, wobei wir später $l^*(y)$ als elliptische Tiefenverteilung annehmen werden:

$$\Gamma(y) - \lambda l^*(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i(y)) = \lambda \cdot l^{**}(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i(y))$$

oder auch

$$\Gamma(y) - \lambda l^*(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i(y)) = \frac{l^{**}(y)}{l(y)} \cdot \Gamma(y) \quad \ldots \quad (4)$$

Wir berechnen nun $\Gamma(y)$ durch schrittweise Näherung nach folgender Vorschrift:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^{(0)}(y) - \lambda l^*(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i^{(0)}(y)) = 0, \\ &\Gamma^{(1)}(y) - \lambda l^*(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i^{(1)}(y)) = \frac{l^{**}(y)}{l(y)} \cdot \Gamma^{(0)}(y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Gamma^{(\varkappa)}(y) - \lambda l^*(y) \cdot v \cdot (\alpha_g(y) - \alpha_i^{(\varkappa)}(y)) = \frac{l^{**}(y)}{l(y)} \cdot \Gamma^{(\varkappa-1)}(y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Zur Auswertung verfahren wir so, daß wir $\Gamma^{(0)}(y)$ als bereits bestimmt ansehen und durch Differenzbildung, bei der die Funktion $\alpha_g(y)$ herausfällt, die Werte $\Gamma(y)$ fortgesetzt verbessern. Allgemein werden diese Differenzen von der Form:

$$(\Gamma^{(\varkappa)}(y) - \Gamma^{(\varkappa-1)}(y)) + \lambda \cdot l^*(y) \cdot v \cdot (\alpha_i^{(\varkappa)}(y) - \alpha_i^{(\varkappa-1)}(y)) = \frac{l^{**}(y)}{l(y)} \cdot (\Gamma^{(\varkappa-1)}(y) - \Gamma^{(\varkappa-2)}(y)) \quad (6)$$

mit

$$\Gamma^{(-s)}(y) = 0. \qquad s > 0.$$

Um die Berechnung möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, führen wir wie üblich an Stelle der Variablen x die Variable φ ein durch die Gleichung

$$y = -\frac{b}{2} \cos\varphi \quad \ldots \quad (7)$$

und denken uns die gesuchte Funktion $\Gamma^{(\varkappa)}(y)$ in eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe entwickelt:

$$\Gamma^{(\varkappa)}(y) = 2 b v \cdot \sum_1^\infty A_n^{(\varkappa)} \sin n\varphi \quad \ldots \quad (8)$$

Nehmen wir auch für die Ableitung dieser Funktion gleichmäßige Konvergenz an, so kann man das Integral für $\alpha_i(y)$ auswerten, man erhält bekanntlich:

$$\alpha_i^{(\varkappa)}(y) = \sum_1^\infty n \cdot A_n^{(\varkappa)} \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots \quad (9)$$

Setzt man weiterhin

$$\left.\begin{aligned} l^*(y) &= l_0 \sin\varphi \\ \frac{l^{**}(y)}{l(y)} &= \sum_0^\infty \epsilon_n \cos n\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

und für spätere Verwendung

$$\alpha_g(y) = \sum_1^\infty \alpha_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}, \quad \ldots \quad (11)$$

so kann man die allgemeine Differenzenformel (6) wie folgt schreiben:

Digitized by Google

$$2\,b\,v\cdot\sum_{1}^{\infty}(A_n^{(x)}-A_n^{(x-1)})\sin n\varphi + \lambda\,l_0\sin\varphi\cdot v\cdot\sum_{1}^{\infty}n\cdot(A_n^{(x)}-A_n^{(x-1)})\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = \sum_{0}^{\infty}\varepsilon_\mu\cos\mu\varphi\cdot\sum_{1}^{\infty}2\,b\,v\cdot(A_\nu^{x-1)}-A_\nu^{(x-2)})\sin\nu\varphi.$$

Nach Kürzung durch v und Zusammenfassung ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\,b+\lambda\,l_0\,n)\,(A_n^{(x)}-A_n^{x-1)})\sin n\varphi = 2\,b\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu^{(x-1)}-A_\nu^{(x-2)})\,\varepsilon_\mu\cos\mu\varphi\cdot\sin\nu\varphi = b\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu^{(x-1)}-A_\nu^{(x-2)})\,\varepsilon_\mu\,(\sin(\mu+\nu)\varphi - \sin(\mu-\nu)\varphi)$$

und unter Berücksichtigung, daß mit $s>0$ $\varepsilon_{(-s)}=0$ ist, erhält man:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\,b+\lambda\cdot l_0\,n)\,(A_n^{(x)}-A_n^{(x-1)})\sin n\varphi = b\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu^{(x-1)}-A_\nu^{(x-2)})\times\times(\varepsilon_{n-\nu}-\varepsilon_{n+\nu}+\varepsilon_{\nu-n})\sin n\varphi.$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man hieraus:

$$(A_n^{(x)}-A_n^{(x-1)}) = \frac{b}{2\,b+\lambda\cdot l_0\,n}\times\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu^{(x-1)}-A_\nu^{(x-2)})\,(\varepsilon_{n-\nu}-\varepsilon_{n+\nu}+\varepsilon_{\nu-n}) \quad \ldots \quad (12)$$

An Stelle der Funktion $\Gamma^{(x)}(y)$ können wir mit Hilfe dieser Gleichung auch die Koeffizienten der zugehörigen Fourier-Reihe iterieren.

Zunächst brauchen wir die Koeffizienten $A_n^{(0)}$, die sich aus der ersten Iterationsgleichung berechnen lassen.

Aus

$$\Gamma^{(0)}(y)-\lambda\cdot l^*(y)\cdot v\cdot(\alpha_a(y)-\alpha_i(y))=0$$

erhält man mit den Ansätzen (8) bis (11)

$$2\,b\,v\cdot\sum_{1}^{\infty}A_n^{(0)}\sin n\varphi-\lambda\,l_0\sin\varphi\cdot v\times\times\left(\sum_{1}^{\infty}\alpha_n\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}-\sum_{1}^{\infty}n\,A_n^{(0)}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right)=0$$

oder

$$\sum_{1}^{\infty}(2\,b+\lambda\cdot l_0\,n)\,A_n^{(0)}\sin n\varphi=\lambda\cdot l_0\sum_{1}^{\infty}\alpha_n\sin n\varphi,$$

die Koeffizienten $A_n^{(0)}$ werden demnach:

$$A_n^{(0)}=\frac{\lambda\cdot l_0}{2\,b+\lambda\cdot l_0\,n}\cdot\alpha_n \quad \ldots \quad (13)$$

Setzen wir $\sum_{1}^{\infty}|\alpha_n|$ als konvergent voraus, so finden wir, daß $\sum_{1}^{\infty}|A_n^{(0)}|$ und auch $\sum_{1}^{\infty}n|A_n^{(0)}|$ konvergent sind, so daß alle Bedingungen erfüllt sind, die von der Fourier-Reihe für die Funktion $\Gamma^{(0)}(y)$ verlangt werden.

Mit diesen Werten stellen wir uns folgendes Rechenschema auf, wobei wir zur Abkürzung setzen:

$$\delta_{n\nu}=\varepsilon_{n-\nu}-\varepsilon_{n+\nu}+\varepsilon_{\nu-n};\quad f_n=\frac{\lambda\cdot l_0}{2\,b+\lambda\cdot l_0\,n}\cdot\frac{b}{\lambda\cdot l_0} \quad (14)$$

$A_\nu^{(0)}$	$\delta_{1\nu}$	$A_\nu^{(0)}\delta_{1\nu}$	$\delta_{2\nu}$	$A_\nu^{(0)}\delta_{2\nu}$	$\delta_{3\nu}$	$A_\nu^{(0)}\delta_{3\nu}$	....
$A_1^{(0)}$	δ_{11}	$A_1^{(0)}\delta_{11}$	δ_{21}	$A_1^{(0)}\delta_{21}$	δ_{31}	$A_1^{(0)}\delta_{31}$	....
$A_2^{(0)}$	δ_{12}	$A_2^{(0)}\delta_{12}$	δ_{22}	$A_2^{(0)}\delta_{22}$	δ_{32}	$A_2^{(0)}\delta_{32}$	....
$A_3^{(0)}$	δ_{13}	$A_3^{(0)}\delta_{13}$	δ_{23}	$A_3^{(0)}\delta_{23}$	δ_{33}	$A_3^{(0)}\delta_{33}$	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	....
		$\sum_{1}^{n}A_\nu^{(0)}\delta_{1\nu}\times f_1$		$\sum_{1}^{n}A_\nu^{(0)}\delta_{3\nu}\times f_2$		$\sum_{1}^{n}A_\nu^{(0)}\delta_{5\nu}\times f_3$	
$A_\nu^{(1)}-A_\nu^{(0)}$	$\delta_{1\nu}$	$(A_\nu^{(1)}-A_\nu^{(0)})\delta_{1\nu}$	$\delta_{2\nu}$	$(A_\nu^{(1)}-A_\nu^{(0)})\delta_{2\nu}$	$\delta_{3\nu}$	$(A_\nu^{(1)}-A_\nu^{(0)})\delta_{3\nu}$	....
$A_1^{(1)}-A_1^{(0)}$							
$A_2^{(1)}-A_2^{(0)}$							
$A_3^{(1)}-A_3^{(0)}$ ⋮							

Man sieht leicht, wie dieses Schema die Vorschrift der Gleichung (12) berücksichtigt und wie bequem man zu den Verbesserungen mit den einmal berechneten Faktoren $\delta_{n\nu}$ und f_n gelangen kann, gleichgültig mit welcher Genauigkeit man zu rechnen beabsichtigt. Wir kommen auf dieses Schema noch bei der Durchrechnung eines Zahlenbeispiels zurück. Zunächst wollen wir uns mit der Konvergenz dieses Verfahrens beschäftigen.

II. Konvergenznachweis für die Näherungsfolge.

Die nach der Iterationsvorschrift (5) zu erhaltenden Näherungen

$$\Gamma^{(0)}(y),\ \Gamma^{(1)}(y),\ \ldots,\ \Gamma^{(x)}(y),\ \ldots$$

müssen notwendig der Grenzfunktion $\Gamma(y)$ zustreben, wenn das Verfahren überhaupt einen Sinn haben soll:

$$\lim_{x\to\infty}\Gamma^{(x)}(y)=\Gamma(y).$$

Dazu genügt es zu beweisen, daß der Ausdruck

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{r=0}^{x}|\Gamma^{(r)}(y)-\Gamma^{(r-1)}(y) \quad \ldots \quad (15)$$

existiert und die Ausgangsgleichung erfüllt. Die Rekursionsformel für die hier auftretenden Differenzen haben wir bereits in der Gleichung (6) vorliegen.

Wegen des Ansatzes

$$\Gamma^{(x)}(y)=2\,b\,v\cdot\sum_{1}^{\infty}A_n^{(x)}\sin n\varphi$$

können wir auch schreiben:

$$(\Gamma^{(x)}(y)-\Gamma^{(x-1)}(y))=2\,b\,v\cdot\sum_{1}^{\infty}(A_n^{(x)}-A_n^{(x-1)})\sin n\varphi$$

und daher

Digitized by Google

$$\Gamma^{(\varkappa)}(y) - \Gamma^{(\varkappa-1)}(y) < 2\,b\,v \sum_{1}^{\infty} |A_n^{(\varkappa)} - A_n^{(\varkappa-1)}| .$$

Für die Konvergenz des Ausdrucks (15) genügt es demnach, die Existenz von

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \sum_{r=0}^{\varkappa} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(r)} - A_n^{(r-1)}| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

zu untersuchen.

Aus der Gleichung (12) folgt zunächst, indem wir den absoluten Betrag bilden und über n summieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(\varkappa)} - A_n^{(\varkappa-1)}| < \sum_{n,\nu=1}^{\infty} |A_\nu^{(\varkappa-1)} - A_\nu^{(\varkappa-2)}| \times \frac{b}{2\,b + \lambda\, l_0\, n} \cdot |\varepsilon_{n-\nu} - \varepsilon_{n+\nu} + \varepsilon_{\nu-n}| \quad (17)$$

oder auch mit (14)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(\varkappa)} - A_n^{(\varkappa-1)}| < \sum_{n,\nu=1}^{\infty} |A_\nu^{(\varkappa-1)} - A_\nu^{(\varkappa-2)}| \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_{n\nu} .$$

Wir dürfen hier für den Index $\varkappa = 1$ die Summation über n und ν vertauschen, wenn wir voraussetzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\delta_{n\nu}|}{2} < q$$

für alle ν, da dann der N-Abschnitt der Doppelsumme beschränkt ist, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(0)}| < S^{(0)}$$

war bereits nachgewiesen. Aus Gleichung (17) erhalten wir demnach für den ersten Index

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(1)} - A_n^{(0)}| < q\, S^{(0)}.$$

Dieses Schlußverfahren können wir nun fortsetzen; allgemein gilt mit der Abkürzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(\varkappa)} - A_n^{(\varkappa-1)}| = S^{(\varkappa)}$$

die Gleichung

$$S^{(\varkappa)} < q^{\varkappa}\, S^{(0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Die Konvergenzbedingung (16) wird mit $q < 1$ erfüllt, denn

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \sum_{r=0}^{\varkappa} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(r)} - A_n^{(r-1)}| = \lim_{\varkappa \to \infty} \sum_{r=0}^{\varkappa} S^{(\varkappa)} < S^{(0)} \cdot \frac{1}{1-q} \quad . \quad . \quad (21)$$

ist beschränkt.

Demnach ist für die Konvergenz unseres Verfahrens hinreichend, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < A \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\delta_{n\nu}|}{2} < q < 1$$

für alle ν gültig ist. Formt man die zweite Bedingung um, so findet man bei geeigneten Existenzforderungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{n\nu}| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_{n-\nu} - \varepsilon_{n+\nu} + \varepsilon_{\nu-n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \{|\varepsilon_{n-\nu}| + |\varepsilon_{n+\nu}| + |\varepsilon_{\nu-n}|\} < \sum_{1-\nu}^{\infty} |\varepsilon_\mu| + \sum_{1+\nu}^{\infty} |\varepsilon_\mu| + \sum_{\nu=1}^{-\infty} |\varepsilon_\mu|$$

oder wegen $\varepsilon_{(-s)} = 0$ mit $s > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n\nu} < \sum_{0}^{\infty} |\varepsilon_\mu| + \sum_{1+\nu}^{\infty} |\varepsilon_\mu| + \sum_{\nu-1}^{0} |\varepsilon_\mu| \leq 2 \sum_{0}^{\infty} |\varepsilon_\mu| - |\varepsilon_\nu|$$

und schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n\nu} < 2 \sum_{0}^{\infty} \varepsilon_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Die Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens sind demnach endgültig die folgenden:

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_n < A \text{ und } \sum_{0}^{\infty} \varepsilon_n < q < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Güte der Konvergenz ist mindestens so gut, wie die einer geometrischen Reihe.

Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihen für $\Gamma^{(\varkappa)}(q)$ und $\frac{d\,\Gamma^{(\varkappa)}(q)}{d\,\varphi}$.

Die bei der Entwicklung des Verfahrens vorausgesetzte gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihen

$$\Gamma^{(\varkappa)}(q) = 2\,b\,v \cdot \sum_{1}^{\infty} A_n \sin n\,\varphi$$

$$\frac{d\,\Gamma^{(\varkappa)}(q)}{d\,\varphi} = 2\,b\,v \sum_{1}^{\infty} n\, A_n \cos n\,\varphi$$

läßt sich nachträglich leicht nachweisen. Der Nachweis ist erbracht, wenn gezeigt werden kann, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa)}| < M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

für alle $\varkappa$ ist. Diese Bedingung ist für den Index $\varkappa = 0$ nach Gleichung (13) bereits erfüllt. Für alle übrigen Indizes wird nach Gleichung (12) zunächst

$$A_n^{(\varkappa)} = A_n^{(\varkappa-1)} + \frac{b}{2\,b + \lambda\, l_0\, n} \times \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu^{(\varkappa-1)} - A_\nu^{(\varkappa-2)})\, (\varepsilon_{n-\nu} - \varepsilon_{n+\nu} + \varepsilon_{\nu-n})$$

und die Summe über die mit n multiplizierten absoluten Beträge liefert bei Berücksichtigung der Gleichung (14):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa)}| < \sum_{n=1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa-1)}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\,n}{2\,b + \lambda \cdot l_0\, n} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu^{(\varkappa-1)} - A_\nu^{(\varkappa-2)}| \cdot \delta_{n\nu}|$$

oder indem wir in der hinteren Summe $\frac{2\,b}{\lambda \cdot l_0}$ ausklammern:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa)}| < \sum_{n=1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa-1)}| + \frac{2\,b}{\lambda \cdot l_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu^{(\varkappa-1)} - A_\nu^{(\varkappa-2)}| \cdot \delta_{n\nu}| .$$

Die Summationen über n und ν der Doppelsumme lassen sich wegen der abschnittsweisen Konvergenz vertauschen, so daß wir erhalten:

$$\sum_{1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa)}| < \sum_{1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa-1)}| + p\, S^{(\varkappa-1)} \text{ mit } p = \frac{2\,b}{\lambda \cdot l_0} \cdot q.$$

Setzen wir wegen (13)

$$\sum_{1}^{\infty} n\, |A_n^{(0)}| < M^{(0)},$$

so finden wir aus dieser Gleichung:

$$\sum_{1}^{\infty} n\, |A_n^{(1)}| < M^{(0)} + p\, S^{(0)}$$

$$\sum_{1}^{\infty} n\, |A_n^{(2)}| < M^{(0)} + p\, (S^{(0)} + S^{(1)})$$

. . . . . .

$$\sum_{1}^{\infty} n\, |A_n^{(\varkappa)}| < M^{(0)} + p \sum_{r=0}^{\varkappa-1} S^{(r)}$$

. . . . . .

Digitized by Google

und bemerken, daß Gleichung (24) für den oberen Index $\varkappa + 1$ richtig ist, wenn sie für $\varkappa$ bereits gilt.

Da nach Gleichung (21)

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \sum_{r=0}^{\varkappa-1} S^{(r)}$$

als konvergent nachgewiesen ist, ist demnach für alle $\varkappa$ gleichmäßige Konvergenz gesichert.

Um auf die Fourier-Koeffizienten selbst zu kommen, schließen wir aus der Gleichung (21)

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \sum_{r=0}^{\varkappa} |A_n^{(r)} - A_n^{(r-1)}| < \frac{S^{(0)}}{1-q} \quad \ldots \quad (26)$$

für alle n, woraus folgt, daß auch die Folge der Fourier-Koeffizienten einem Grenzwert zustrebt:

$$\lim_{\varkappa \to \infty} A_n^{(\varkappa)} = A_n \quad \ldots \quad (27)$$

Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung.

Die mit diesen Koeffizienten gebildete Fourier-Reihe erfüllt nun aus Stetigkeitsgründen die Ausgangsgleichung; unser Verfahren liefert demnach eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (1). Da es nun bekannt ist [4], daß bei unseren Bedingungen für die gegebenen Funktionen diese Gleichung nur eine Lösung besitzt, ist unsere Lösung auch die einzige. Wir wollen mit unserem Verfahren nachweisen, daß es jedenfalls keine zweite Lösung geben kann, die mit ihrer Ableitung in eine gleichmäßig konvergente sin-Reihe entwickelbar ist. Nehmen wir an, es gäbe neben der eben bestimmten Lösung Γ noch eine zweite Γ', so wäre für die Eindeutigkeit nachzuweisen, daß $\Gamma' - \Gamma$ verschwindet. Aus der Gleichung (1) folgt

$$\Gamma'(y) - \Gamma(y) = -\lambda\, l(y) \cdot v \cdot (\alpha_i'(y) - \alpha_i(y)).$$

Wir setzen

$$\Gamma'(y) - \Gamma(y) = \bar{\Gamma}$$
$$\alpha_i'(y) - \alpha_i(y) = \bar{\alpha}_i$$

und können die obige Gleichung auch in der folgenden Form schreiben:

$$\bar{\Gamma}(y) = -\lambda \cdot l(y) \cdot v \cdot \bar{\alpha}_i(y) \quad \ldots \quad (28)$$

Nach dem Iterationsverfahren, in dem wir dort $\alpha_g(y) = 0$ setzen, finden wir zunächst die Fourier-Koeffizienten $\overline{A_n^{(0)}} = 0$, wegen (13), und daraus aus der Gleichung (12) $\overline{A_n^{(\varkappa)}} = 0$ für alle $\varkappa$. Demnach wird auch $\bar{\Gamma}(y) = 0$, d. h. aber

$$\Gamma'(y) = \Gamma(y), \quad \ldots \quad (29)$$

was zu beweisen war.

III. Prüfung des Verfahrens an dem Fall elliptischer Tiefenverteilung.

Wir wollen das vorher entwickelte Verfahren zunächst prüfen an dem Fall, daß die Tiefe elliptisch verteilt ist, die wir durch eine ebenfalls elliptische Verteilung annähern wollen. Wir schreiben die Gleichung (3) mit

$$l(y) = \bar{l} \sin\varphi,\ l^*(y) = l_0 \sin\varphi,\ l^{**}(y) = l_1 \sin\varphi$$

und finden

$$\bar{l} = l_0 + l_1 \quad \ldots \quad (30)$$

Die Entwicklung der Funktion $\frac{l^{**}(y)}{l(y)}$ in eine Fourier-Reihe nach Gleichung (10) liefert also nur das konstante Glied ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{l_1}{\bar{l}}.$$

Damit vereinfacht sich die Iterationsvorschrift zu

$$(A_n^{(\varkappa)} - A_n^{(\varkappa-1)}) = \frac{b \cdot 2\,\varepsilon_0}{2\,b + \lambda\, l_0\, n} \cdot (A_n^{(\varkappa-1)} - A_n^{(\varkappa-2)}) \quad (31)$$

Nehmen wir nach Gleichung (13) die Koeffizienten $A_n^{(0)}$ durch die Fourier-Koeffizienten α_n als gegeben an:

$$A_n^{(0)} = \frac{\lambda\, l_0}{2\,b + \lambda\, l_0\, n} \cdot \alpha_n,$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} (A_n^{(1)} - A_n^{(0)}) &= \frac{b \cdot 2\,\varepsilon_0}{2\,b + \lambda\, l_0\, n} \cdot A_n^{(0)} \\ (A_n^{(2)} - A_n^{(1)}) &= \left(\frac{b \cdot 2\,\varepsilon_0}{2\,b + \lambda\, l_0\, n}\right)^2 \cdot A_n^{(0)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

Wir finden

$$A_n = \lim_{\varkappa \to \infty} A_n^{(\varkappa)} = A_n^{(0)}\,(1 + \beta + \beta^2 + \ldots),$$

wenn $\frac{b \cdot 2\,\varepsilon_0}{2\,b + \lambda\, l_0\, n} = \beta$ gesetzt wird. Mit $\beta < 1$ erhält man:

$$A_n = \frac{\lambda\, l_0 \cdot \alpha_n}{2\,b\,(1 - \varepsilon_0) + \lambda\, l_0\, n} \quad \ldots \quad (33)$$

Andererseits lassen sich die Koeffizienten genau angeben; wir haben nur in Gleichung (13) die vorliegende elliptische Tiefe zu nehmen, die sich durch die Näherungstiefenverteilung $l_0 \sin\varphi$ ausdrücken läßt. Mit

$$l = \frac{l_0}{1 - \varepsilon_0} \sin\varphi$$

erhalten wir genau das Ergebnis (33).

Anwendung des Verfahrens.

Für die Anwendungen muß noch darauf hingewiesen werden, daß wir bei unstetiger Anstellwinkelverteilung wegen der hierbei nicht erfüllbaren Konvergenzbedingungen nur den sprungfreien Anteil nach unserem Verfahren behandeln können. Die Lösung für den unstetigen Restanteil gelingt nur mit potentialtheoretischen Hilfsmitteln, die insbesondere von Schubert [6] entwickelt worden sind.

Für solche Funktionen $l^{**}(y)/l(y)$, die sich durch ein trigonometrisches Polynom darstellen lassen, liefert das vorliegende Verfahren in seinem Gültigkeitsbereich nach genügend vielen Schritten der sukzessiven Näherung ein beliebig genaues Ergebnis für die Werte der einzelnen Zirkulationskoeffizienten. Beim Abbrechen des Verfahrens nach dem $\varkappa$-ten Schritt ist nach (26) der Fehler kleiner als der Rest der dort angegebenen geometrischen Reihe.

Ist die obengenannte Funktion durch eine unendliche trigonometrische Reihe dargestellt, so muß man für die Auswertung, wie auch $\alpha_g(y)$ gegeben sein mag, einen Fehler begehen, der, unabhängig von dem Approximationsverfahren an sich, von der Größe und Anzahl der im Rechenschema unberücksichtigt gelassenen Faktoren in den Spalten herrührt, auf dessen Berechnung wir aber hier verzichten wollen.

Wir zeigen den Rechenvorgang im einzelnen an dem Beispiel, das durch die folgenden Festwerte gegeben ist:

Spannweite $b = 8{,}00$ m, Streckung $\Lambda = 6{,}00$,
Mittlere Profilkonstante $\lambda = 0{,}914\,\pi$,
Max. Verwindung $s(0) = 7^0$,
Max. Tiefe der ellipt. Näherung $l_0 = 1{,}70$ m.

$\frac{y}{b/2}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,0
$\sin\varphi$	1	0,995	0,980	0,954	0,916	0,866	0,800	0,714	0,600	0,436	0,312	0
$\frac{l(y)}{l(0)}$	1	1	0,953	0,906	0,857	0,810	0,761	0,717	0,652	0,535	0,413	0
$\frac{s(y)}{s(0)}$	1	0,988	0,946	0,868	0,770	0,658	0,522	0,385	0,244	0,117	0,060	0

Digitized by Google

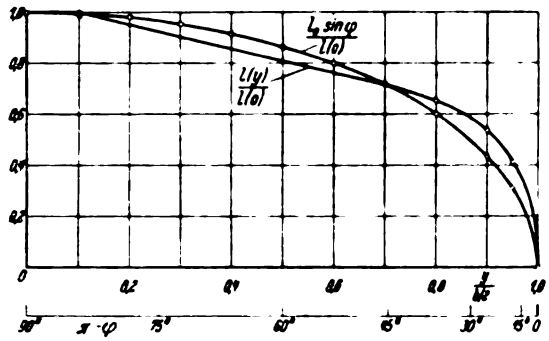


Bild 1. Gegebene Tiefenverteilung mit der flächengleichen elliptischen Näherung.

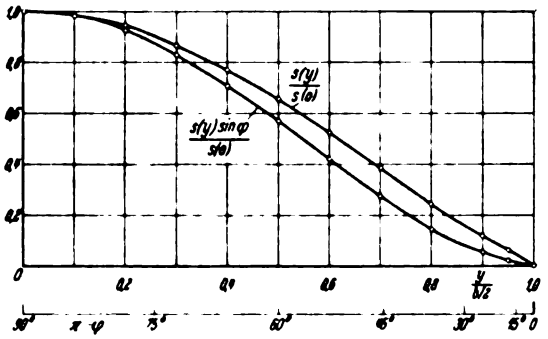


Bild 2. Verwindungsverteilung des gegebenen Flügels.

Zunächst tragen wir den Verwindungsverlauf $s(y)/s(0)$ und die Tiefenverteilung $l(y)/l(0)$ auf (Bild 1, 2) und zeichnen in die Darstellung der Tiefenverteilung noch die Funktion $l^*(y) = l_0 \sin\varphi$ ein. Um überhaupt zu einer Festsetzung für l_0 zu kommen, können wir zweckmäßig die elliptische Verteilung wählen, die gerade die richtige Fläche liefert. Sollte sich aber in besonderen Fällen eine andere elliptische Verteilung der gegebenen Tiefenverteilung besser anpassen, so wird man auch diese benutzen können. In unserem Beispiel wird zufällig die flächengleiche elliptische Verteilung derart, daß $l_0 \cong l(0)$ wird.

Die gesuchte Funktion $l^{**}(y)/l(y)$ läßt sich dann leicht entnehmen, insbesondere wenn wir die wirkliche Flügelform an den Enden so abrunden, daß sie in die elliptische übergeht. Andernfalls hat man hier den Wert eines unbestimmten Ausdrucks durch Extrapolation genauer zu bestimmen. Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten entnehmen wir aus dieser Darstellung die Ordinaten z_0, z_1, z_2, z_3 an den Stellen 0°, 30°, 60°, 90° und können daraus unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der Funktion nach dem Runge-Verfahren [7] die folgenden Koeffizienten näherungsweise berechnen. Die Genauigkeit dieser Annäherung dürfte vollauf genügen.

$$a_0 = {}^1/_6 (z_0 + 2 z_1 + 2 z_2 + z_3)$$
$$a_2 = {}^1/_3 (z_0 + z_1 - z_2 - z_3)$$
$$a_4 = {}^1/_3 (z_0 - z_1 - z_2 + z_3)$$
$$a_6 = {}^1/_6 (z_0 - 2 z_1 + 2 z_2 - z_3).$$

Für unser Beispiel erhalten wir mit

$$z_0 = 0{,}300,\quad z_1 = 0{,}154,\quad z_2 = -0{,}068,\quad z_3 \sim 0$$
$$a_0 = 0{,}079,\quad a_2 = 0{,}174,\quad a_4 = 0{,}071,\quad a_6 = -0{,}024,$$

so daß die Fourier-Reihe für die Funktion $\frac{l^{**}}{l}$ mit $a_n = \varepsilon_n$ von folgender Form wird:

$$\frac{l^{**}(y)}{l(y)} = 0{,}079 + 0{,}174 \cos 2\varphi + 0{,}071 \cos 4\varphi - 0{,}024 \cos 6\varphi.$$

In ähnlicher Weise verfahren wir auch zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten von $\frac{s(y)\sin\varphi}{s(0)}$ für einen symmetrischen Verwindungsverlauf. Mit den Ordinaten z_1, z_2, z_3 an den Stellen 30°, 60°, 90°, finden wir

$$b_1 = {}^1/_3 (z_1 + \sqrt{3}\, z_2 + z_3)$$
$$b_3 = {}^1/_3 (2 z_1 - z_2)$$
$$b_5 = {}^1/_3 (z_1 - \sqrt{3}\, z_2 + z_3)$$

und somit als Fourier-Reihe für die Funktion $\alpha_g(y) = \alpha + s(y)$:

$$\alpha_g(y) = [(\alpha + s(0) \cdot b_1) \sin\varphi + s(0)\, b_3 \sin 3\varphi + s(0)\, b_5 \sin 5\varphi] \cdot \frac{1}{\sin\varphi},$$

wobei die Verwindung im Gradmaß gemessen wird, die wir später auf das Bogenmaß umrechnen müssen.

Für unser vorliegendes Beispiel erhalten wir mit

$$z_1 = 0{,}083,\quad z_2 = 0{,}570,\quad z_3 = 1{,}000$$
$$b_1 = 0{,}690,\quad b_3 = -0{,}278,\quad b_5 = 0{,}032$$

schließlich die folgende Fourier-Reihe:

$$\alpha_g(y) = [(\alpha + 4{,}830) \sin\varphi - 1{,}945 \cdot \sin 3\varphi + 0{,}224 \cdot \sin 5\varphi] \cdot \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Näherung nicht nur in den angesetzten Punkten, sondern auch an weiteren Zwischenpunkten außerordentlich gut übereinstimmt. Die an diese Entwicklungen geknüpften Voraussetzungen sind erfüllt, denn es gilt

$$\sum_1^\infty |\alpha_n| < A \qquad \sum_0^\infty \varepsilon_n = 0{,}348 < 1.$$

Somit können wir jetzt mit der Zahlenrechnung für die Koeffizienten A_n beginnen. Die erste Näherung gewinnen wir nach der Gleichung (13):

$$A_n^{(0)} = \frac{\lambda l_0}{2b + \lambda l_0 n} \alpha_n = \frac{4{,}88}{16 + 4{,}88\, n}\, \alpha_n.$$

Es ergibt sich

$$A_1^{(0)} = 0{,}234 \cdot (\alpha + 4{,}830)$$
$$A_3^{(0)} = 0{,}159 \cdot (-1{,}945)$$
$$A_5^{(0)} = 0{,}121 \cdot (+0{,}224).$$

Das Rechenschema entwickelt sich für unser Beispiel wie folgt:

$+0{,}234\,\alpha + 1{,}130$	$-0{,}016$	$-0{,}004\,\alpha - 0{,}018$	$+0{,}103$	$+0{,}024\,\alpha + 0{,}116$	$+0{,}095$	$+0{,}022\,\alpha + 0{,}107$
$-0{,}310$	$+0{,}103$	$-0{,}032$	$+0{,}182$	$-0{,}056$	$+0{,}174$	$-0{,}054$
$+0{,}027$	$+0{,}095$	$+0{,}003$	$+0{,}174$	$+0{,}005$	$+0{,}158$	$+0{,}004$
		$-0{,}004\,\alpha - 0{,}047$		$+0{,}024\,\alpha + 0{,}065$		$+0{,}022\,\alpha + 0{,}057$
		$1{,}64 \cdot 0{,}234 = 0{,}384$		$1{,}64 \cdot 0{,}159 = 0{,}261$		$1{,}64 \cdot 0{,}121 = 0{,}198$
$-0{,}002\,\alpha - 0{,}018$	$-0{,}016$	$+0{,}000\,\alpha + 0{,}000$	$+0{,}103$	$-0{,}000\,\alpha - 0{,}002$	$+0{,}095$	$-0{,}000\,\alpha - 0{,}002$
$+0{,}006\,\alpha + 0{,}017$	$+0{,}103$	$+0{,}001\,\alpha + 0{,}002$	$+0{,}182$	$+0{,}001\,\alpha + 0{,}003$	$+0{,}174$	$+0{,}001\,\alpha - 0{,}003$
$+0{,}004\,\alpha + 0{,}011$	$+0{,}095$	$+0{,}000\,\alpha + 0{,}001$	$+0{,}174$	$+0{,}001\,\alpha + 0{,}002$	$+0{,}158$	$+0{,}001\,\alpha + 0{,}002$
		$+0{,}001\,\alpha + 0{,}003$		$+0{,}002\,\alpha + 0{,}003$		$+0{,}002\,\alpha + 0{,}003$
		$0{,}384$		$0{,}260$		$0{,}198$
$+0{,}000\,\alpha + 0{,}001$						
$+0{,}001\,\alpha + 0{,}001$						
$+0{,}000\,\alpha + 0{,}001$						

Digitized by Google

Durch Addition der einzelnen Schritte ergibt sich:

$$A_1 = +0{,}232\,\alpha + 1{,}113$$
$$A_3 = +0{,}007\,\alpha - 0{,}292$$
$$A_5 = +0{,}004\,\alpha + 0{,}039$$

Demnach wird die Auftriebsverteilung bei Umrechnung auf das Bogenmaß

$$\frac{dA}{dy} = \varrho \cdot v \cdot \Gamma = \varrho \cdot v \cdot \frac{2bv}{57{,}3} \sum_{1}^{\infty} A_n \cdot \sin n\varphi, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\varrho/2\,v^2} \cdot \frac{dA}{dy} = 0{,}558 \cdot \big((0{,}232\,\alpha + 1{,}113)\ \sin\varphi + (0{,}007\,\alpha - 0{,}292)\ \sin 3\varphi + (0{,}004 + 0{,}039)\ \sin 5\varphi\big) \cdot$$

IV. Zusammenfassung.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird die Vorschrift für ein Näherungsverfahren entwickelt; man geht von einer besonderen etwa der elliptischen Tiefenverteilung $l^*(y)$ aus und berücksichtigt die wirkliche Verteilung $l(y)$ in den nachfolgenden Schritten. Die Fourier-Entwicklungen von $\frac{l(y) - l^*(y)}{l(y)} = \frac{l^{**}(y)}{l(y)}$ in Gleichung (10) und $\alpha_g(y)$ in Gleichung (11) spielen dabei eine wichtige Rolle. Es werden dann hinreichende Bedingungen angegeben, die die Konvergenz des Verfahrens sicherstellen. Sie sind für die hauptsächlich auftretenden Flügelformen im allgemeinen gut erfüllt und lauten: Die Koeffizientensummen der gegebenen Fourier-Entwicklungen für $\alpha_g(y)$ und $l^{**}(y)/l(y)$ müssen absolut konvergieren, der Summenwert muß für die Tiefenkorrekturverteilung unterhalb von 1 bleiben. Das Verfahren konvergiert wie eine geometrische Reihe, so daß es in den meisten Fällen genügt, die Rechnung nach dem zweiten Näherungsschritt abzubrechen.

V. Schrifttum.

[1] H. Gebelein, Über die Integralgleichung der Prandtlschen Tragflügeltheorie. Ing.-Arch. Bd. 7 (1936), S. 297.

[2] H. Schubert, Ermittlung der Auftriebsverteilung nichtelliptischer Tragflügel mit der Methode der sukzessiven Approximation. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), Lfg. 10/11, S. 560.

[3] H. Schmidt, Über die Grundtatsachen der Theorie der tragenden Linie. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 223.

[4] H. Schmidt, Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 17 (1937), S. 101.

[5] H. Schmidt, Theorie der Auftriebsverteilung beliebig verwundener elliptischer Flügel. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 232.

[6] H. Schubert, Über einige Eigenschaften elliptischer und nichtelliptischer Tragflügel. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 235.

[7] Hütte I, 25. Auflage, S. 170. Berlin 1925. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.

Anmerkung bei der Korrektur: Wie man aus (13) und (17) erkennt, hätte man den Konvergenznachweis unter allgemeineren Bedingungen als (23) führen können, wenn man auf die Forderung (24), die hier für die Bildung von (9) aus (2) benötigt wird, hätte verzichten können. Formal ist (9) auch ohne (24) gültig, so daß es dann genügt, anstatt über die Summe der absoluten Beträge über die Summe der Koeffizienquadrate gewisse Beschränktheitsaussagen zu machen.

Digitized by Google

Eine Formel für die von einem dünnen Tragflügelprofil induzierte Geschwindigkeit in Punkten, die auf der verlängerten Sehne liegen.

Von Karl Jaeckel, Breslau.

Für manche Zwecke im Flugzeugbau wird die induzierte Geschwindigkeit gesucht, die von einem Tragflügel in einem Punkte außerhalb des Profils erzeugt wird [3]. Insbesondere sind dabei die Punkte von Bedeutung, die auf der verlängerten Sehne liegen oder wenigstens nicht weit davon entfernt sind [2]. Begnügt man sich in erster Näherung mit der Wirkung, die ein zweidimensionaler Flügel ausübt, so kann man den Ausdruck für die induzierte Geschwindigkeit in diesen Punkten explizit angeben.

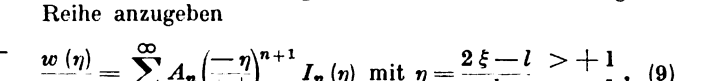
Denken wir uns die Zirkulationsverteilung $\gamma(x)$ in Tiefenrichtung des vorliegenden Profils gegeben in der Form [1

$$\gamma(x)\cdot\frac{dx}{d\varphi} = l\cdot v\cdot\sum_0^\infty A_n\cos n\varphi\,, \quad\ldots\ldots\quad (1)$$

$$x=\frac{l}{2}(1-\cos\varphi), \qquad \begin{matrix}0\leqq x\leqq l\\ 0\leqq\varphi\leqq\pi\end{matrix},$$

wobei die Koeffizienten A_n durch die zweidimensionale Theorie als berechnet angenommen werden können, so erhalten wir für die Aufwärtsgeschwindigkeit im Punkte $\xi > l$, wenn wir noch gleichmäßige Konvergenz von (1) voraussetzen

$$w(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l\frac{\gamma(x)\,dx}{\xi-x}$$



$$= -\frac{v}{\pi}\cdot\sum_0^\infty A_n\int_0^\pi\frac{\cos n\varphi\,d\varphi}{\frac{2\xi-l}{l}+\cos\varphi}\,. \quad\ldots\ldots\quad (2)$$

Es ergibt sich somit eine Summe von Integralen von der Form

$$J_n(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos n\varphi\,d\varphi}{\eta+\cos\varphi} \qquad |\eta|>1 \quad\ldots\ldots\quad (3)$$

Für die ersten Zeiger n findet man leicht die folgenden Funktionen:

$$J_0(\eta) = \frac{\eta}{|\eta|\sqrt{\eta^2-1}}, \qquad J_1(\eta) = 1-\frac{|\eta|}{\sqrt{\eta^2-1}}, \quad\ldots\quad (4)$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen ist. Aus der Rekursionsformel für die J_n[1])

$$J_n(\eta) + J_{n+2}(\eta) + 2\eta\,J_{n+1}(\eta) = 0, \quad\ldots\ldots\quad (5)$$

die man durch eine einfache Rechnung gewinnen kann, schließen wir mit Hilfe vollständiger Induktion, daß die Funktion

$$J_n(\eta) = \left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^{n+1}\frac{\mathfrak{Sin}\,n\psi-\mathfrak{Cof}\,n\psi}{\mathfrak{Sin}\,\psi}$$

$$= -\left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^{n+1}\frac{e^{-n\psi}}{\mathfrak{Sin}\,\psi} \text{ mit } |\eta| = \mathfrak{Cof}\,\psi,\ \psi>0, \quad (6)$$

das Ausgangsintegral (3) richtig darstellt, da sie der Funktionalgleichung (5) genügt und für die ersten Zeiger mit den direkt gefundenen J_n in (4) übereinstimmt.

[1]) Für einen wertvollen Hinweis zur Behandlung dieser Funktionalgleichung bin ich Herrn Professor Schmeidler zu Dank verpflichtet.

Wir können diese Funktion auch in der Ausgangsvariablen η schreiben und erhalten

$$J_n(\eta) = -\left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^{n+1}\frac{(|\eta|-\sqrt{\eta^2-1})^n}{\sqrt{\eta^2-1}},$$

wobei wir feststellen, daß für große η die folgende Abschätzung gilt:

$$J_n(\eta) \cong -\left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n\cdot|\eta|^{n+1}}\cdot \qquad \eta\gg 1$$

Schreiben wir J_n in der folgenden Weise

$$J_n(\eta) = -\left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^{n+1}\cdot I_n(\eta) \quad\ldots\ldots\quad (7)$$

so erhalten wir die Funktionen

$$I_n(\eta) = \frac{(|\eta|-\sqrt{\eta^2-1})^n}{\sqrt{\eta^2-1}} \text{ oder } I_n(\psi) = \frac{e^{-n\psi}}{\mathfrak{Sin}\,\psi} \quad\ldots\quad (8)$$

Mit ihrer Hilfe ist es nun ohne Schwierigkeiten möglich, die vom Tragflügelprofil erzeugte Geschwindigkeit in jedem Punkte auf der verlängerten Sehne durch die folgende Reihe anzugeben

$$\frac{w(\eta)}{v} = \sum_0^\infty A_n\left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^{n+1} I_n(\eta) \text{ mit } \eta = \frac{2\xi-l}{l}\ \begin{matrix}>+1\\ <-1\end{matrix}, \quad (9)$$

deren Konvergenz mit der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihe (1) gesichert ist.

Ergänzend sei noch die Formel für die Aufwärtsgeschwindigkeit angegeben, die von einer Wirbelbelegung von der Form

$$\gamma(x) = 2v\left(a_0\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}+\sum_1^\infty a_n\sin n\varphi\right) \quad\ldots\quad (10)$$

herrührt, man erhält durch einfache Umordnung schließlich

$$\frac{w(\eta)}{v} = \sum_0^\infty a_n\left(\frac{-\eta}{|\eta|}\right)^n K_n(\eta)$$

$$\text{mit } K_0(\eta) = \frac{e^{-\psi}-\eta}{|\eta|\,\mathfrak{Sin}\,\psi} \text{ und } K_n(\eta) = e^{-n\psi}, \quad\ldots\quad (11)$$

wobei dieselben Bezeichnungen wie früher gelten. Man erkennt, daß für $\eta = \pm 1$ sämtliche $|K_n|$ gegen 1 streben, außer $|K_0|$ für $\eta = -1$, und findet im übrigen Kurvenverlauf Übereinstimmung mit den Darstellungen von Kleinwächter [2].

Schrifttum.

[1] H. Glauert, Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Springer 1929.

[2] J. Kleinwächter, Beitrag zur ebenen Leitwerkstheorie. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 127.

[3] Kurt Jaeckel, Beitrag zur Berechnung der Auftriebsverteilung in Tiefenrichtung bei Doppelflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 598.

Digitized by Google

Beschleunigungsmessung durch Differentiation der Geschwindigkeit.

Von J. Görner.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Bordgerät und Navigation.

Ausgehend von den Grenzen, die der Empfindlichkeit von Beschleunigungsmessern gesetzt sind, wird untersucht, ob die Beschleunigungsmessung durch graphische oder elektrische Differentiation der Geschwindigkeit gegenüber der direkten Messung Vorteile bietet. Die elektrische Differentiation mit Hilfe eines Kondensators wird eingehend behandelt und das Ergebnis dem mechanischen Beschleunigungsmesser gegenübergestellt.

Gliederung.

I. Grenzen der Empfindlichkeit bei Beschleunigungsmessern.
II. Differentiation der Geschwindigkeit.
1. Geschwindigkeitsmessung.
2. Graphische Differentiation der Geschwindigkeit.
3. Elektrische Differentiation mit Hilfe eines Kondensators.
4. Experimentelle Ergebnisse.
III. Zusammenfassung.

I. Grenzen der Empfindlichkeit bei Beschleunigungsmessern.

Ein Beschleunigungsmesser besteht schematisch aus einem Rahmen, in dem ein Feder-Massesystem schwingt. Der Feder ist ein Dämpfer parallel geschaltet, Bild 1. Bezeichnet man als Empfindlichkeit E des Beschleunigungsmessers das Verhältnis der Beschleunigungsanzeige a — das ist der Relativausschlag der Masse gegenüber dem Rahmen — zur wirkenden Beschleunigung b, so erhält man

$$E = \frac{a}{b} = \frac{1}{\omega^2} V. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Dabei bedeutet ω die Eigenfrequenz des ungedämpften Feder-Massesystems und V einen Faktor, der von der Dämpfung und vom Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ abhängt, wobei Ω die dem Rahmen aufgedrückte Zwangsfrequenz darstellt. Aus Gl. (1) ersieht man, daß die Empfindlichkeit um so größer ist, je niedriger die Eigenfrequenz des Beschleunigungsmessers gelegt ist. Leider kann man aber ω nicht beliebig klein wählen. Mit Rücksicht darauf, daß V für das zu messende Frequenzband $0 \ldots \Omega_{max}$ möglichst konstant sein soll, darf man den Beschleunigungsmesser nur bis zu einem η benutzen, für das V noch nicht viel von dem Wert 1 abweicht, Bild 2. Bei Anwendung der für geringste Amplitudenverzerrung günstigsten Dämpfung[1] $D = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (D = Dämpfungsmaß nach Lehr) kann man den Beschleunigungsmesser praktisch bis $\eta = 0{,}5$ benutzen, d. h. es muß $\omega \geq 2\,\Omega_{max}$ sein. Diese Dämpfung sorgt auch unterhalb $\eta = 0{,}5$ für geringe Phasenverzerrungsfehler. Der günstigste Wert hierfür wäre $D = \frac{1}{2}\sqrt{3}$[2]. Zusammenfassend erhält man also:

$$E = \frac{1}{\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\omega \geq 2\,\Omega_{max} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$D = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

[1]) Bei dieser Dämpfung weicht V bis zu besonders großem η nur wenig von dem Wert 1 ab. (S. Klotter, Einführung in die Techn. Schwingungslehre, Bd. 1, S. 147 und S. 161.)

[2]) S. Klotter, Einführung in die Techn. Schwingungslehre, Bd. 1, S. 151.

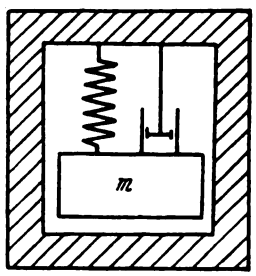


Bild 1. Schematisch dargestellter Beschleunigungsmesser.

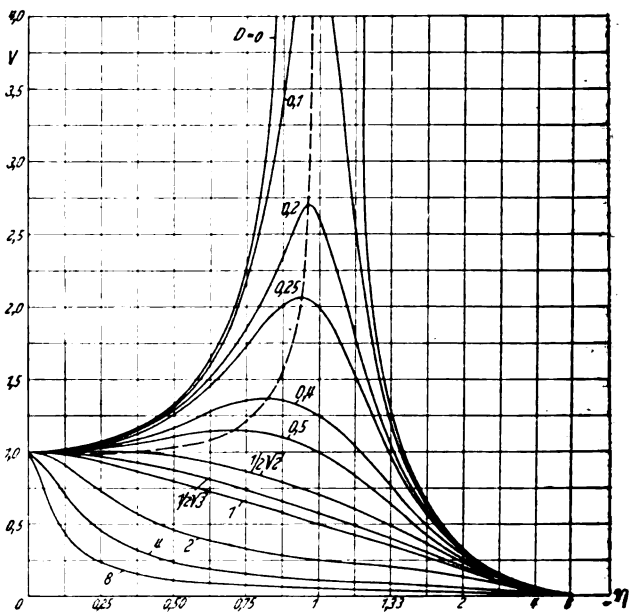


Bild 2. Abhängigkeit des für die Amplitudenverzerrung maßgeblichen Faktors V von dem Frequenzverhältnis η.

Je höher die zu messende Frequenz Ω liegt, um so höher muß die Eigenfrequenz ω gewählt werden, und um so unempfindlicher wird damit der Beschleunigungsmesser. Die Ausschläge der Masse gegenüber dem Rahmen werden dann bei höheren zu messenden Frequenzen so klein, daß sie nicht mehr ohne weiteres ausgewertet werden können. Man muß diese kleinen Wege vergrößern. Bezeichnet man den Vergrößerungsmaßstab der Ausschläge der Masse gegenüber dem Rahmen mit p, so erhält man:

$$E = \frac{p}{\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Das Problem der Beschleunigungsmessung bei höheren Frequenzen läuft auf die Möglichkeit der Messung kleiner Wege hinaus. Man findet Beschleunigungsmesser mit mechanischer, optischer und elektrischer Vergrößerung. Rein mechanisch ist man bald an einer Grenze angelangt, und optisch erreicht man z. B. beim Beschleunigungsmesser von Norton $p = 60$. Elektrisch benutzt man zur Wegmessung

Digitized by Google

die Änderung von Scheinwiderständen durch Änderung des Luftspaltes, die Widerstandsänderung einer als Feder dienenden Kohlesäule oder die bei der Deformation eines Piezoquarzes auftretende Spannung. Man erreicht mit Kohlesäule ohne Röhrenverstärker etwa $p = 10^4$. Ein Beschleunigungsmesser der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zeichnet die elastische Verkürzung des Piezoquarzes $p = 6.3 \cdot 10^6$fach auf. Im großen und ganzen kann man bei der elektrischen Wegmessung das p nur durch Vergrößern des schaltungstechnischen Aufwandes erhöhen. Diese Tatsache rechtfertigt die Frage, ob es nicht möglich ist, die naturgesetzlich bedingte Beziehung (5) mit der damit verbundenen unbequemen Messung kleiner Wege dadurch zu umgehen, daß man die Beschleunigung durch Differentiation des Geschwindigkeitsverlaufes bestimmt. Zur Beantwortung dieser Frage sei zunächst einiges Grundsätzliches über die Aufzeichnung der Geschwindigkeit gesagt.

II. Differentiation der Geschwindigkeit.

1. Geschwindigkeitsmessung.

Einen unmittelbaren nur aus Feder und Masse bestehenden mechanischen Geschwindigkeitsmesser gibt es nicht. Es ist mit diesen Elementen nur Beschleunigungs- und Ausschlagsmessung möglich. Die Geschwindigkeit erhält man am zweckmäßigsten durch Differentiation des Ausschlages. Im Gegensatz zum Beschleunigungsmesser ist beim Ausschlagsmesser das Feder-Massesystem niedrig abgestimmt, und zwar niedriger als die langsamste zu messende Schwingung. Dadurch bleibt praktisch die Masse im Raume ruhend, und die Relativbewegung zwischen Masse und Rahmen ist praktisch der Absolutbewegung des Rahmens gleichzusetzen. Um die Ausschläge zwischen Masse und Rahmen zu differenzieren, braucht man nur an der Masse eine Tauchspule zu befestigen, die im Ringspalt eines Topfmagneten schwingt, Bild 3. Dann ist die in dieser Spule induzierte EMK e der Geschwindigkeit des Rahmens verhältnisgleich. Diese EMK kann mit dem Kathodenstrahloszillograph aufgezeichnet werden, und man erhält dann ein getreues Abbild der Geschwindigkeit; denn es wird dem Geschwindigkeitsgeber nur der praktisch vollkommen zu vernachlässigende Strom zum Aufladen der Elektroden entzogen. Meist verwendet man jedoch einen Schleifenoszillograph. Da dieser nur den durch die erzeugte EMK bewirkten Strom aufzeichnet und nicht diese selbst, so ist seine Anzeige nur unter einschränkenden Bedingungen ein richtiges Bild der Geschwindigkeit. Die Tauchspule besitzt eine gewisse Selbstinduktion. Dadurch wächst der Widerstand des Kreises bei höheren Frequenzen. Das bedeutet, daß bei konstanter Geschwindigkeitsamplitude (konstanter EMK) der Strom (die Anzeige) mit wachsender Frequenz kleiner wird. Dies geht aus dem für die Schaltung nach Bild 4 dargestellten Leitwertbild hervor, Bild 5.

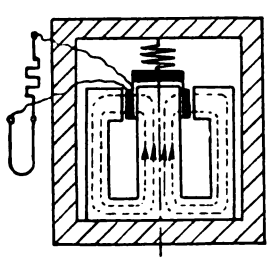


Bild 3. Geschwindigkeitsmessung mit Magnet und Tauchspule im Schema.

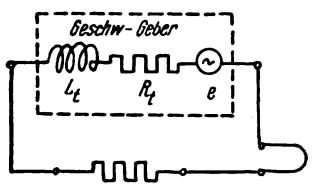


Bild 4. Ersatzschaltung für den Geschwindigkeitsmesser.

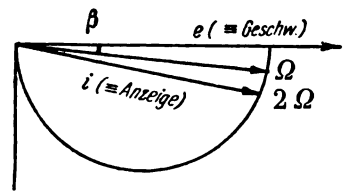


Bild 5. Gesamtleitwert der Schaltung nach Bild 4 als Funktion der Kreisfrequenz.

Nimmt man die Oszillographenschleife als rein Ohmschen Widerstand R_{os} an und paßt zwecks bestmöglichster Ausnutzung die Spule an die Schleife an: $R_t = R_{os}$, so gilt zwischen Amplitudenverzerrung Δ und der Zeitkonstanten $\frac{L_t}{R_t}$ der Tauchspule folgende Näherungsgleichung:

$$\Delta \approx \frac{1}{4}\,\Omega\,\frac{L_t}{R_t} \cdot 100\ \text{vH}.$$

Damit liegt für gegebene Frequenz und gegebene Verzerrung die Zeitkonstante der Tauchspule fest und damit auch bei einer gegebenen Spulenform die aufzuwendende Kupfermenge. Da mit der Kupfermenge die zur Verfügung stehende Energie steigt, so muß man eine Spulenform wählen, die bei gegebener Zeitkonstante die Unterbringung von möglichst viel Kupfer gestattet. Diese Kupfermenge ist dann in so viele Windungen aufzuteilen, daß der Widerstand der Spule gleich dem der Schleife wird. Aus Bild 5 erkennt man ferner, daß zwischen der EMK und dem Strom eine Phasenverschiebung β herrscht. Diese ist aber belanglos und verursacht keine Verzerrungen, solange β proportional mit der Frequenz zunimmt. Denn dann ist die im Zeitmaßstab sichtbare Phasenverschiebung — die Phasenverschiebungszeit — für alle Frequenzen gleich groß. Für kleine Winkel β ist diese Bedingung erfüllt. Jm folgenden ist angenommen, daß der Geschwindigkeitsschrieb ein wahres Bild der Geschwindigkeit ist.

2. Graphische Differentiation der Geschwindigkeit.

Grundsätzlich ergibt sich durch die Ungenauigkeit des Tangenteziehens ein beträchtlicher Fehler. Nimmt man z. B. an, daß es gelingt, an allen Punkten des Geschwindigkeitsverlaufes die Tangente auf $\pm 1°$ genau zu ziehen, so hängt die Größe des Fehlers wesentlich davon ab, welchen Winkel die Tangente zur Zeitachse bildet. Zwischen 25° und 65° beträgt der Fehler ± 5 vH. Bei 45° liegt das Minimum mit $\pm 3{,}5$ vH. Bei kleineren Winkeln als 25° und größeren als 65° steigt der Fehler sehr rasch an. Es kommt also wesentlich auf eine richtige Papiergeschwindigkeit an. Begnügt man sich mit dieser Genauigkeit von 5 vH, so gestattet diese Methode für eine rein harmonische Schwingung, wie eine rechnerische Untersuchung zeigt, bei hohen Frequenzen geringere Beschleunigungen zu messen, als es mit dem Kohlebeschleunigungsmesser möglich ist. Sobald man aber nicht nur eine einzige Sinusschwingung betrachtet, sondern ein ganzes Frequenzband, ergeben sich sofort wesentlich ungünstigere Verhältnisse. Der Grund ist folgender: Zur Aufzeichnung steht nur eine bestimmte Papierbreite zur Verfügung. Die raschen Schwingungen nehmen davon im Geschwindigkeitsbild einen viel geringeren Betrag ein als im Beschleunigungsbild, weil ja die Beschleunigungsamplitude Ω mal größer ist als die Geschwindigkeitsamplitude. Man muß also mit Rücksicht auf die Papierbreite die raschen Schwingungen, die ja vor allem interessieren, weil ihnen große Beschleunigungen entsprechen, um so kleiner wiedergeben, je mehr von der zur Verfügung stehenden Papierbreite schon durch die langsamen Schwingungen ausgenutzt wird. Diese Tatsache erweckt den Wunsch, die Geschwindigkeitsanzeige in einer definierten Weise so zu verzerren, daß die hohen Frequenzen größer wiedergegeben werden als die niedrigen. Geht man diesen Gedankengang zu Ende und fordert, daß die Geschwindigkeitsamplitude proportional der Frequenz vergrößert aufgezeichnet wird, so bedeutet das nichts anderes als die Differentiation der Geschwindigkeit. In der Tat

Digitized by Google

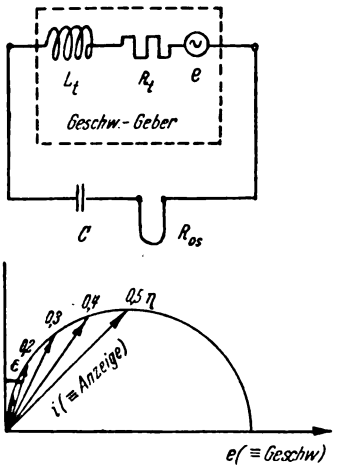


Bild 6. Schaltung zur Beschleunigungsmessung und der zu dieser Schaltung gehörige Gesamtleitwert in Abhängigkeit von der Frequenz.

läßt sich schaltungstechnisch eine derartige Differentiation durchführen.

3. Elektrische Differentiation mit Hilfe eines Kondensators.

Schaltet man in den Stromkreis noch einen Kondensator C ein, den man so wählt, daß die Eigenfrequenz des Kreises sich ergibt zu:

$$\omega = 1/\sqrt{L_t \cdot C} \geq 2\,\Omega_{max} \quad \ldots\ldots (6)$$

und macht man ferner durch richtiges Bemessen des Ohmschen Widerstandes R des Kreises die Dämpfung

$$D = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L_t}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

so erhält man als Leitwertbild Bild 6. Den Strompfeilen entspricht die Anzeigeamplitude bei konstanter EMK, d. h. bei konstanter Geschwindigkeitsamplitude. Bei Einhaltung der Bedingungen (6) und (7) ergibt sich, daß der Strom in dem Gebiet bis $\eta = \frac{\Omega}{\omega} = 0{,}5$ ziemlich genau mit der Frequenz proportional zunimmt, und das entspricht der Beschleunigung. Für eine richtige Aufzeichnung der Beschleunigung genügt es aber allein noch nicht, daß die Beschleunigungsamplituden der einzelnen Frequenzen richtig wiedergegeben werden; es muß noch zusätzlich gefordert werden, daß kein Phasenverzerrungsfehler auftritt. Inwieweit ist dies bei vorliegender Schaltung gewährleistet? Wenn der Strom (Beschleunigungsanzeige) der Differentialquotient der EMK (Geschwindigkeit) sein soll, dann muß der Strom entweder genau um 90° voreilen, oder der von 90° abweichende Winkel ε muß proportional der Frequenz zunehmen. Auch für letzteren Fall tritt keine Phasenverzerrung ein, denn im Zeitmaßstab ausgedrückt ist dann für alle Frequenzen die Abweichung gegen die 90°-Versetzung gleich groß.

Die Bedingungen (6) und (7) stimmen genau mit den Gleichungen (3) und (4) beim mechanischen Beschleunigungsmesser überein. In der Tat läßt sich zeigen, daß diese Schaltung nichts anderes als den ins Elektrische übersetzten mechanischen Beschleunigungsmesser darstellt. Der Masse des mechanischen Beschleunigungsmessers entspricht hier die Selbstinduktion L_t der Tauchspule, der Dämpfung, der Ohmsche Widerstand des Kreises und der Feder die Kapazität. Dividiert man die Leitwerte durch $C\,\Omega$ und trägt das Verhältnis über $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ auf, so erhält man das V des Bildes 2. Auch hinsichtlich der Empfindlichkeit gilt Analoges. Je höher die Frequenzen liegen, bei denen Beschleunigungen gemessen werden sollen, desto höher muß das Feder-Massesystem bzw. der elektrische Kreis abgestimmt werden: $\omega > 2\,\Omega_{max}$. Bei konstanter Masse bzw. Selbstinduktion bedeutet das, daß die Feder steifer bzw. der Kondensator kleiner gewählt werden muß. Damit wird der Ausschlag bzw. die bewegte Elektrizitätsmenge kleiner. Man erhält bei genauer Durchrechnung für die Empfindlichkeit die Beziehung:

$$E = \frac{p}{\omega^2}; \qquad p = \frac{p_{os} \cdot p_t}{L_t} \text{ (dimensionslos)} \quad \ldots (8)$$

Dabei bedeutet p_{os} die Empfindlichkeit des Oszillographen (cm Ausschlag je A) und p_t die Konstante der Tauchspule (Volt je cm/s Geschwindigkeit).

Die Empfindlichkeit nimmt also auch umgekehrt mit dem Quadrat der Eigenfrequenz ab, und man hat rein physikalisch gegenüber dem mechanischen Beschleunigungsmesser nichts gewonnen. Apparativ hat das Verfahren gewisse Vorteile. Man hat die schwierige Messung der kleinen Ausschläge beim mechanischen Beschleunigungsmesser umgangen. Dafür muß man aber bei dem Tauchspulverfahren, da es letztlich auf der mechanischen Ausschlagsmessung mit nachfolgender zweimaliger Differentiation beruht, in Kauf nehmen, daß man wegen der endlichen Länge des Luftspaltes nur Vorgänge mit nicht zu großen Ausschlägen messen kann. Außerdem ist nach unten auch eine Mindestfrequenz festgelegt, die höher liegen muß als die Eigenfrequenz des mechanischen Ausschlagmessers, an dessen Masse die Tauchspule befestigt ist.

Es bleibt nur noch zu untersuchen, auf welche Weise man das Gerät möglichst empfindlich, d. h. den Faktor p möglichst groß machen kann. Zur Diskussion dienen die Gleichungen:

$$p = \frac{p_{os} \cdot p_t}{L_t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und

$$D = \frac{R}{2\,L_t\,\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Damit p_{os} möglichst groß ist, empfiehlt es sich, um die Schleife nicht durch zu straffes Spannen unnötig unempfindlich zu machen, der Eigenfrequenz der Schleife etwa dieselbe Größe zu geben wie dem elektrischen Kreis.

Bei der Konstruktion der Tauchspule ist davon auszugehen, daß p_t, d. h. die je cm/s erzeugte Spannung möglichst groß und die Selbstinduktion der Tauchspule möglichst gering sein soll. p_t steigt linear mit der Feldstärke im Luftspalt und linear mit dem Durchmesser D_t und der Windungszahl n der Spule. In die Selbstinduktion L_t geht $D_t \cdot n$ quadratisch ein. Dies wirft die Frage auf nach Mitteln, die Selbstinduktion trotz großem $D_t \cdot n$ möglichst klein zu halten. Auf der Hand liegt, daß man das die Spule umgebende Magnetmaterial aus einem Magnetbaustoff von recht schlechter magnetischer Leitfähigkeit wählt. Weiter dürfte es sehr aussichtsreich erscheinen, die bewegliche Spule durch eine zweite feste Spule zu umgeben, Bild 7, die die gleiche Windungszahl besitzt, und die vom gleichen Strom durchflossen wird wie die bewegte Spule. Die zweite Spule ist dabei aber so geschaltet, daß ihr magnetischer Fluß dem der ersten entgegengesetzt gerichtet ist. Dadurch kann man den die Spulen durchsetzenden Wechselfluß und damit auch die

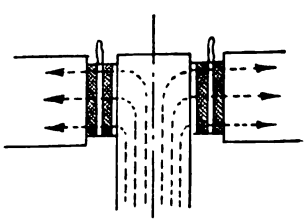


Bild 7. Tauchspule mit darumgelegter Kompensationsspule.

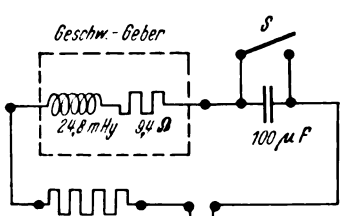


Bild 8. Schaltschema der Versuchsanordnung.

Digitized by Google

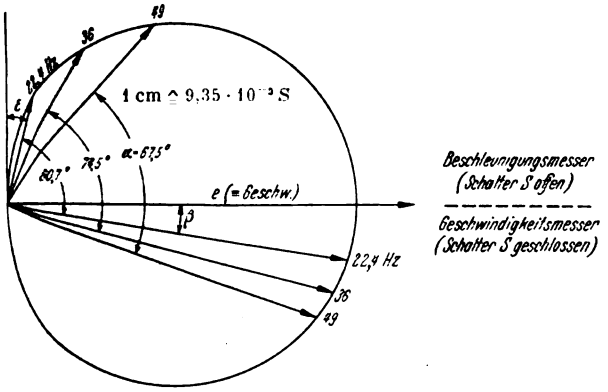
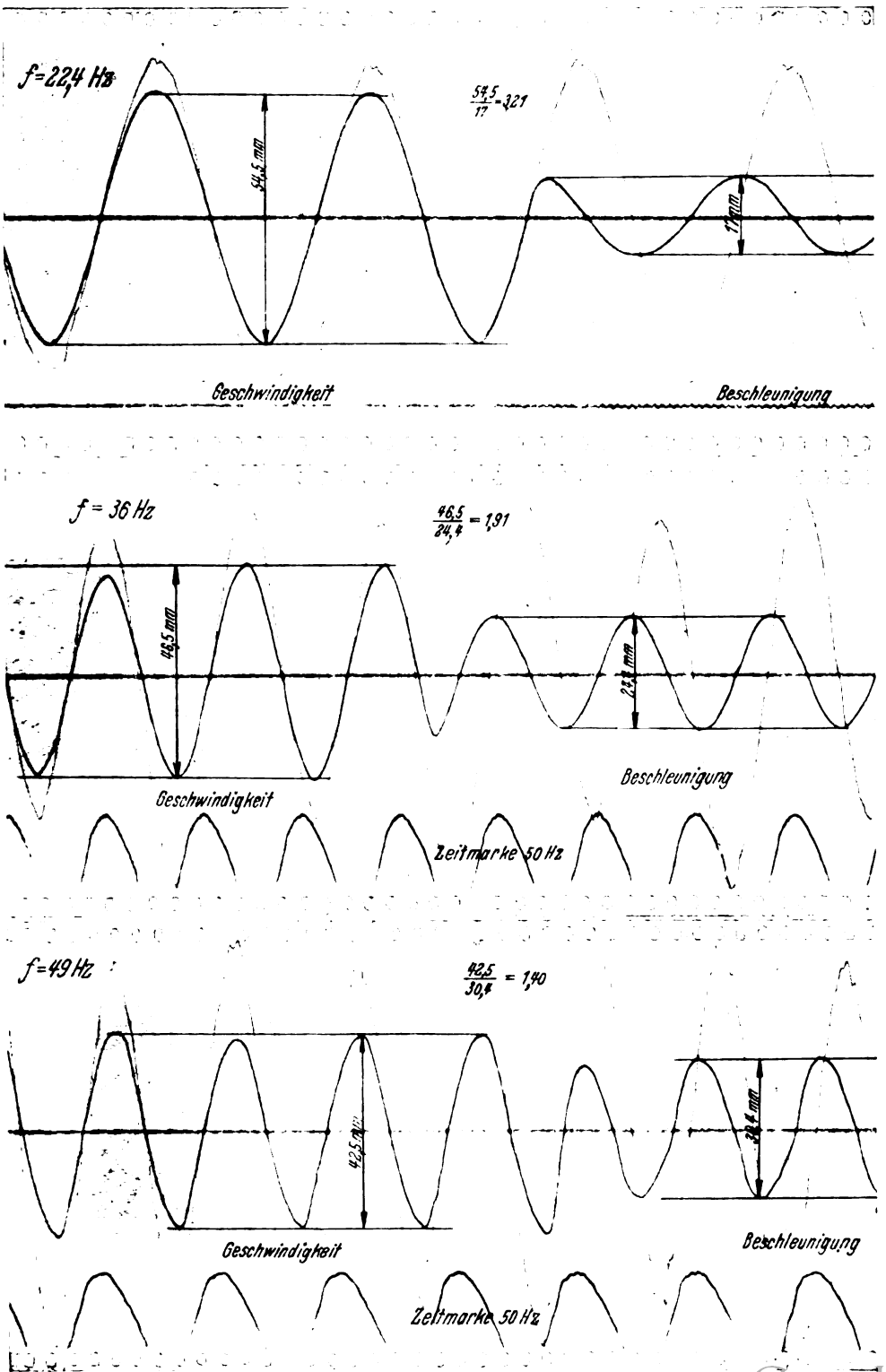


Bild 9. Gesamtleitwert in Abhängigkeit von der Frequenz bei der Geschwindigkeits- und bei der Beschleunigungsmesserschaltung.

Bild 10 (unten). Änderung der Amplitude und Phase beim Umschalten von Geschwindigkeits- zur Beschleunigungsmessung.



Digitized by Google

Selbstinduktion auf einen Bruchteil herabdrücken; oder anders ausgedrückt: man kann bei einem bestimmten geforderten L das für p_t wesentliche Produkt $D \cdot n$ erhöhen. Die Größe der Selbstinduktion muß der Gl. (10) genügen. Dabei hat man zu bedenken, daß in R außer dem noch wählbaren Ohmschen Widerstand der Spule R_t der fest vorgegebene Widerstand der Oszillographenschleife enthalten ist. Demgemäß kann man durch Verkleinern von R_t durch Verwendung dicken Drahtes eine gewisse Grenze für R und damit auch für L nicht unterschreiten. Zusammenfassend läßt sich also zwecks Erreichung einer hohen Empfindlichkeit folgendes sagen: Die Oszillographenschleife soll — richtige Dämpfung vorausgesetzt — nicht unnötig höher abgestimmt sein als der elektrische Kreis. Die Feldstärke im Luftspalt, in dem die Spule schwingt, soll möglichst groß sein. Um ein möglichst großes Produkt $D \cdot n$ der Tauchspule zu erzielen, sind Mittel anzuwenden, die die Selbstinduktion der Spule klein halten. Bei Beachtung dieser Gesichtspunkte dürfte es möglich sein, dieselbe Empfindlichkeit zu erzielen, wie sie der ohne Röhrenverstärker arbeitende Kohledruckbeschleunigungsmesser besitzt, nämlich: $E = 10^4/\omega^2$.

4. Experimentelle Ergebnisse.

Auf einer elektromagnetisch angeregten, gut sinusförmig schwingenden Feder wurde ein auf dem Induktionsprinzip beruhender Geschwindigkeitsgeber der DVL befestigt. Da dieser speziell für Geschwindigkeitsmessung bei niedrigen Frequenzen und großen Amplituden entwickelt worden war, konnten die Versuche auch nur bis etwa 50 Hz durchgeführt werden. Die elektrischen Daten des Gebers sind: $L = 24{,}8$ mHy; $R_t = 9{,}4\ \Omega$. Die verwendete Oszillographenschleife (Siemens-Schleife Type VIII) besaß eine Empfindlichkeit von 1 mm je 0,025 mA und einen Widerstand von 4,5 Ω. Durch Einschalten eines Kondensators von der Größe 100 μF und eines zusätzlichen Widerstandes von 8,4 Ω, Bild 8, wurde dem Kreis eine Dämpfung von $D = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und eine Eigenfrequenz von 101 Hz gegeben. Es konnten somit Beschleunigungen bis etwa 50 Hz noch hinreichend genau gemessen werden. Der Kondensator konnte durch einen Schalter S überbrückt werden, so daß bei geschlossenem Schalter das Gerät als Geschwindigkeitsmesser und bei offenem Schalter als Beschleunigungsmesser arbeitete.

Die zu erwartenden Ergebnisse gehen aus dem für diese speziellen Verhältnisse gezeichneten Leitwertbild hervor, Bild 9. Der konstanten EMKe entspricht eine konstante Geschwindigkeitsamplitude. Der obere Halbkreis gilt für die Beschleunigungsmessung. Die Größe der Vektoren nimmt proportional der Frequenz zu und desgleichen der Winkel ε. Der untere Halbkreis gilt für die Geschwindigkeitsmessung. Die Vektoren bleiben ihrem Betrag nach für veränderliche Frequenz nahezu konstant, was ja auch für eine frequenzunabhängige Geschwindigkeitsanzeige gefordert werden muß. Der Winkel β nimmt etwa proportional der Frequenz zu, wodurch Phasenverzerrungen in der Geschwindigkeitsanzeige vermieden werden.

Die Versuche wurden ausgeführt bei den Frequenzen 22,4, 36 und 49 Hz. Während des Papierablaufes wurde durch Öffnen des Schalters S von der Geschwindigkeitsmessung zur Beschleunigungsmessung umgeschaltet. Auf Grund des Leitwertbildes muß das Verhältnis der Geschwindigkeitsamplitude zur Beschleunigungsamplitude für 22,4 Hz 3,17 : 1, für 36 Hz 1,94 : 1 und für 49 Hz 1,42 : 1 betragen. Die tatsächlich gefundenen Werte, Bild 10, stimmen gut damit überein. Ferner wurde der Winkel α ausgemessen, der zwischen der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsanzeige besteht. Zu diesem Zweck war auf der Schwingfeder noch ein zweiter Geschwindigkeitsgeber der gleichen Bauart befestigt worden, der dauernd als Geschwindigkeitsmesser geschaltet war, so daß nach Umschaltung des ersten Geschwindigkeitsmessers zum Beschleunigungsmesser auf Grund des Geschwindigkeitsschriebes des zweiten Gebers der Winkel zwischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanzeige ausgemessen werden konnte. Die gefundenen Werte stimmen gut mit den zu erwartenden überein.

III. Zusammenfassung.

Die Empfindlichkeit des mechanischen Beschleunigungsmessers ist umgekehrt proportional dem Quadrat seiner Eigenfrequenz, die man bei Anwendung der günstigsten Dämpfung $D = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mindestens doppelt so hoch legen muß wie die höchste zu messende Frequenz. Ein Umgehen dieses Gesetzes durch graphisches Differentiieren eines aufgezeichneten Geschwindigkeitsschriebes ist nicht völlig befriedigend, weil die hohen Frequenzen, denen ja große Beschleunigungen entsprechen, im Geschwindigkeitsbild relativ viel kleiner wiedergegeben werden als im Beschleunigungsbild. Man kann nun auch so vorgehen, daß man die Geschwindigkeit nicht graphisch, sondern rein elektrisch durch Differentiation der der Geschwindigkeit proportionalen Spannung differenziert. Eine genaue Betrachtung zeigt, daß für diese Schaltung auch wieder die für den mechanischen Beschleunigungsmesser geltende Empfindlichkeitsformel $E = \frac{p}{\omega^2}\ V$ gilt. Physikalisch betrachtet hat man also durch Differentiation der Geschwindigkeit gegenüber der eigentlichen Beschleunigungsmessung nichts gewonnen. Apparativ hat man den Vorteil, daß man die beim mechanischen Beschleunigungsmesser mit Schwierigkeiten verbundene Messung kleiner Wege umgeht. Ein grundsätzlicher Nachteil der Methode ist jedoch der, daß man sie nur für Vorgänge mit nicht zu großen Ausschlägen, also vor allem Erschütterungen, verwenden kann.

Ausgeführte Versuche mit einem DVL-Geschwindigkeitsgeber zeigten gute Übereinstimmung mit den zu erwartenden Ergebnissen.

Digitized by Google

East Engin.
Library

MAR 30 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 2 enthält Arbeiten von: O. Lutz S. 59-61, H. Wenger S. 62-73, H. Weinhart S. 74-83, F. Dietze S. 84-96, H. Simon S. 97-103, W. Bader S. 104-111, G. Richter S. 112-120

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 2 SEITE 59 BIS 120 | MÜNCHEN, 20. 2. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Über eine einfache, näherungsweise Bestimmung von Kreisprozeßwirkungsgraden bei Ottomotoren unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen. Von O. Lutz . . . . . Seite 59

Messung der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder eines fremdangetriebenen BMW-VI Flugmotors. Von H. Wenger . . . . . Seite 62

Das Klopfen im Otto-Motor. Von H. Weinhart . . . . . Seite 74

Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem). Von F. Dietze . . . . . Seite 84

Ein Iterationsverfahren zur Analyse von Störbelastungen bei Zylinderschalen. Von H. Simon . . . . . Seite 97

Messungen an einem Tiefdeckermodell im rotierenden Strahl und ihr Vergleich mit Flugmessungen. Von W. Bader . . . . . Seite 104

Schiebe-Rollmomente bei Knickflügeln. Von G. Richter . . . . . Seite 112

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 20. Februar 1939 Lfg. 2

Über eine einfache, näherungsweise Bestimmung von Kreisprozeßwirkungsgraden bei Ottomotoren unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen.

Von O. Lutz, Braunschweig.

Bericht der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig, Institut für Motorenforschung.

Die bei Berücksichtigung der wahren spezifischen Wärmen zeitraubende Durchrechnung von Kreisprozeßwirkungsgraden läßt sich bei Ottomotoren dann umgehen, wenn nur nach dem Wirkungsgrad des Vergleichsprozesses gefragt wird. Pye hat bemerkt, daß eine einfache Formel die seinerzeit bekannten Rechnungsergebnisse bemerkenswert gut annähert. Es wird die Begründung für den Aufbau dieser Formel gegeben und gezeigt, daß die darin auftretende Veränderliche im wesentlichen nur vom Gemischheizwert abhängt, wodurch sich die Ermittlung von Kreisprozeßwirkungsgraden sehr vereinfacht.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Begründung des empirischen Zusammenhangs.
3. Beispiele für die Genauigkeit der Formel (1).
4. Einfluß des Gemischheizwertes.
5. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Die Ermittlung der Kreisprozeßwirkungsgrade von Otto- und Dieselmotoren ist zeitraubend, wenn die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen mit der Temperatur berücksichtigt werden soll. Andererseits muß aber der theoretische Kreisprozeßwirkungsgrad dieser Veränderlichkeit Rechnung tragen — worauf immer wieder hingewiesen worden ist[1]) —, da sonst dem »Gütegrad« des Motors ein Anteil aufgebürdet wird, der nichts mit dem Motor zu tun hat, sondern lediglich aus unseren zu günstigen Annahmen der thermischen Eigenschaften der benutzten Arbeitsmittel stammt.

Für die genaue Ermittlung der Zustandswerte der Kreisprozesse — unter Berücksichtigung der wahren spezifischen Wärmen — sind Berechnungsverfahren bekannt. Begnügt man sich mit dem Schlußergebnis, dem Kreisprozeßwirkungsgrad, so kann man von einem einfachen empirischen Zusammenhang Gebrauch machen, auf den schon hingewiesen worden ist, der aber nicht allgemein bekannt scheint.

Pye hat gefunden[2]), daß die unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen errechneten Kreisprozeßwirkungsgrade von Ottomotoren sich überraschend gut durch die Beziehung

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

darstellen lassen, wobei m nur vom Mischungsverhältnis Brennstoff:Luft abhängt.

Da die Berechtigung zu einem solchen Ansatz nicht ohne weiteres gegeben scheint und bislang noch keine Begründung dafür gefunden wurde, hat der Ansatz als zu »roh« gegolten und wenig Beachtung gefunden.

Es wird nachstehend gezeigt, daß er sehr wohl begründet ist und daß sich damit eine einfache Möglichkeit ergibt, für die Praxis genügend genaue Ergebnisse über den Kreisprozeßwirkungsgrad schnell zu ermitteln.

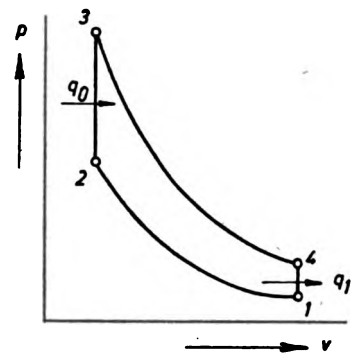


Bild 1. Ottoprozeß; Bezeichnungen.

2. Begründung des empirischen Zusammenhangs.

Der Vergleichsprozeß für den Arbeitsvorgang im Ottomotor verläuft nach Bild 1 zwischen zwei Adiabaten 12 und 34 und zwei Isochoren 23 und 41. Führt man dem Prozeß die Wärmemenge q_0 zu, von der der Anteil q_1 beim Auspuffvorgang wieder entweicht, so ist der Kreisprozeßwirkungsgrad

$$\eta_{th} = 1 - \frac{q_1}{q_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bei konstanter spezifischer Wärme wird daraus

$$\eta_{th} = 1 - \frac{c_v (T_4 - T_1)}{c_v (T_3 - T_2)}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

da aber T_3 und T_2 jeweils im Verhältnis $\varepsilon^{\varkappa-1}$ größer sind als T_4 bzw. T_1 (ε = Verdichtungsverhältnis, $\varkappa$ = Adiabatenziffer), ergibt sich daraus die bekannte Formel

[1]) Vgl. etwa F. Schmidt, Der indizierte Wirkungsgrad der kompressorlosen Dieselmaschine, VDI-Forschungsheft 314, Berlin 1929. — H. Schnell, Der indizierte Wirkungsgrad der Gasmaschine, VDI-Forschungsheft 316, Berlin 1929. — O. Lutz, pV-Tafel, Tabellen und Diagramme zur thermischen Berechnung der Verbrennungskraftmaschinen, Berlin 1932. — W. Pflaum, IS-Diagramm für Verbrennungsgase und ihre Anwendung auf die Verbrennungsmaschine, Berlin 1932. — H. Kühl, Dissoziation von Verbrennungsgasen und ihr Einfluß auf den Wirkungsgrad von Vergasermaschinen, VDI-Forschungsheft 373, Berlin 1935. — E. Schmidt, Die graphische Ermittlung der Vergleichsprozesse von Verbrennungsmotoren unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der spez. Wärmen, Gesammelte Vorträge der Haupttagung 1938 der Liljenthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Berlin 1938.

[2]) D. R. Pye, Die Brennkraftmaschinen, Berlin 1933, S. 156.

Digitized by Google

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

In Wirklichkeit ändern sich die spezifischen Wärmen mit den Temperaturen; deshalb sind in den vier Phasen 12, 23, 34, 41 des Arbeitsprozesses sowohl die spezifischen Wärmen als auch die Adiabatenziffern $\varkappa$ verschieden.

Definiert man mittlere Werte der spezifischen Wärmen, also etwa

$$c_{23} = \frac{\int_{T_2}^{T_3} c_v \, dT}{T_3 - T_2} \quad \ldots\ldots\ldots (4a)$$

und

$$c_{41} = \frac{\int_{T_1}^{T_4} c_v \, dT}{T_4 - T_1} \quad \ldots\ldots\ldots (4b)$$

und Mittelwerte der Adiabatenziffer $\varkappa$ nach

$$\varepsilon^{\varkappa_{12}-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots (5a)$$

und

$$\varepsilon^{\varkappa_{34}-1} = \frac{T_3}{T_4}, \quad \ldots\ldots\ldots (6a)$$

so erhält man an Stelle von (2a):

$$\eta_{th} = 1 - \frac{c_{41}(T_4 - T_1)}{c_{23}(T_3 - T_2)}$$

oder

$$\eta_{th} = 1 - \frac{c_{41}(T_4 - T_1)}{c_{23}(T_4 \varepsilon^{\varkappa_{34}-1} - T_1 \varepsilon^{\varkappa_{12}-1})} \quad \ldots (7)$$

Für einen vorgegebenen Kreisprozeß ist es nun immer möglich, dieser Form durch (1) zu genügen; offenbar muß dafür die Bedingung

$$\frac{c_{41}}{c_{23}} \frac{T_4 - T_1}{T_4 \varepsilon^{\varkappa_{34}-m} - T_1 \varepsilon^{\varkappa_{12}-m}} = 1 \quad \ldots\ldots (8)$$

gelten, woraus m zu bestimmen ist. Fraglich ist aber, ob m sich nicht ändert, wenn ε oder T_4 geändert werden. Da $\varkappa_{34}-m$ und $\varkappa_{12}-m$ gegen 1 klein sind, kann für $\varepsilon^{\varkappa-m}$ gesetzt werden:

$$\varepsilon^{\varkappa-m} \approx 1 + (\varkappa - m)\ln\varepsilon \quad \ldots\ldots (9)$$

Damit folgt aus (8):

$$m = \varkappa_{34} + \frac{1 - \frac{c_{41}}{c_{23}}}{\ln\varepsilon} - \frac{(\varkappa_{12} - \varkappa_{34})\,T_1}{T_4 - T_1} \quad \ldots\ldots (10)$$

Untersucht man die einzelnen Summanden, so ergibt sich, daß die beiden letzten immer ungefähr gleich groß sind, wie die beiden Beispiele:

$\varepsilon = 7$, $T_1 = 300^0\ K$, $T_4 = 1400^0\ K$,

$$\frac{c_{41}}{c_{23}} = 0{,}93, \quad \varkappa_{12} = 1{,}38, \quad \varkappa_{34} = 1{,}27$$

(große Wärmezufuhr, hohes Verdichtungsverhältnis),

$\varepsilon = 5$, $T_1 = 300^0\ K$, $T_4 = 1000^0\ K$,

$$\frac{c_{41}}{c_{23}} = 0{,}95; \quad \varkappa_{12} = 1{,}38, \quad \varkappa_{34} = 1{,}30$$

(kleine Wärmezufuhr, niedriges Verdichtungsverhältnis) zeigen; im ersten Fall ergibt sich

$$\frac{1 - \frac{c_{41}}{c_{23}}}{\ln\varepsilon} - \frac{(\varkappa_{12} - \varkappa_{34})\,T_1}{T_4 - T_1} = 0{,}0059,$$

im zweiten Fall wird dieser Ausdruck

$$= -0{,}0031.$$

Die Aufspaltung nach (10) führt also zu dem Ergebnis, daß bei Ottomotoren

$$\boxed{m \approx \varkappa_{34}} \quad \ldots\ldots\ldots (10a)$$

ist, während die übrigen thermischen Größen sich so entgegenwirken, daß ihr Einfluß auf m in erster Näherung verschwindet.

Dieses Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als es zeigt, daß für den Kreisprozeßwirkungsgrad nicht etwa das Mittel aus den thermischen Eigenschaften des Arbeitsmittels, die es während des Gesamtprozesses durchläuft, bestimmend ist, sondern leider nur der ungünstigste Wert, der bei den höchsten Temperaturen — beim Entspannungsvorgang — auftritt. Daß das Arbeitsmittel während des größeren Teiles des Prozesses günstigere Eigenschaften aufweist, kommt nicht zur Auswirkung; es ist vielmehr so, wie wenn der Prozeß mit einem Arbeitsmittel durchgeführt würde, das schon bei niederen Temperaturen diese schlechten Eigenschaften besitzt. Eigentlich würde ein solches Arbeitsmittel noch besser sein: da die spezifischen Wärmen schon bei kleinen Temperaturen größer wären, würden die Temperaturen des Kreisprozesses kleiner sein, könnten also motorisch besser beherrscht werden.

Auf die Adiabatenziffer $\varkappa_{34}$ sind die Temperaturen während der Entspannung 34 und die Zusammensetzung des Arbeitsmittels von Einfluß. Die Zusammensetzung des Arbeitsmittels ist wesentlich bedingt durch den »Gemischheizwert« q_0 (kcal/kg), aus dem zu erkennen ist, wie das Mischungsverhältnis Brennstoff:Luft gewählt wurde. Die Temperaturlage während der Entspannung hängt hauptsächlich vom Verdichtungsverhältnis und dem Gemischheizwert ab. Die mittlere Temperatur $T_m = \frac{1}{2}(T_3 + T_4)$ während des Entspannungsvorgangs ist nämlich:

$$T_m = \frac{1}{2}\left(T_1 \varepsilon^{\varkappa-1} + \frac{q_0}{c_v}\right)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}\right)$$

oder

$$T_m = \frac{1}{2}\left(T_1 + T_1 \varepsilon^{\varkappa-1} + \frac{q_0}{c_v \varepsilon^{\varkappa-1}} + \frac{q_0}{c_v}\right) \quad \ldots (11)$$

Ändert man das Verdichtungsverhältnis, so folgt für die Änderung von T_m:

$$\left(\frac{\Delta T_m}{T_m}\right)_\varepsilon = \frac{\left((\varkappa-1)(T_1 \varepsilon^{\varkappa-1} - \frac{q_0}{c_v \varepsilon^{\varkappa-1}}\right)}{2\,T_m} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (12)$$

während sich für eine Änderung des Gemischheizwertes ergibt:

$$\left(\frac{\Delta T_m}{T_m}\right)_{q_0} = \frac{\frac{q_0}{c_v \varepsilon^{\varkappa-1}} + \frac{q_0}{c_v}}{2\,T_m} \frac{\Delta q_0}{q_0} \quad \ldots (12a)$$

Setzt man $\varkappa$ überschlägig zu 1,30, q_0 zu 600 kcal/kg, ferner c_v zu 0,2 kcal/kg grd an, so wird das Verhältnis der beiden Änderungen für $T_1 = 300^0\ K$ und $\varepsilon = 6$ (wenn gleiche relative Änderungen $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ und $\frac{\Delta q_0}{q_0}$ vorausgesetzt werden):

$$\left(\frac{\Delta T_m}{T_m}\right)_\varepsilon : \left(\frac{\Delta T_m}{T_m}\right)_{q_0} = (-)\,0{,}078.$$

Der Gemischheizwert wirkt sich also um eine Zehnerquotenz stärker aus als das Verdichtungsverhältnis. Damit ist begründet, daß bei gleichem Gemischheizwert mit einem konstanten Wert m gerechnet werden darf, wobei der Einfluß des Verdichtungsverhältnisses durch (1) gut erfaßt wird.

Für die Änderung von m mit dem Gemischheizwert ist ein empirischer Zusammenhang aufzusuchen.

8. Beispiele für die Genauigkeit der Formel (1).

Kühl[3]) hat Kreisprozeßwirkungsgrade für Ottomotoren bestimmt. Wenn auch die von ihm benutzten Werte für die spezifischen Wärmen heute durch genauere ersetzt werden könnten, so dürften doch seine Ergebnisse den Einfluß von Änderungen des Verdichtungsverhältnisses und Gemischheizwertes richtig wiedergeben.

In Zahlentafel 1 sind die Ergebnisse von Kühl enthalten, und zwar jeweils in der ersten Zeile; in der zweiten Zeile sind sie auf die für den praktischen Gebrauch genügende Genauigkeit gebracht, während die dritte Zeile die mit Formel (1)

[3]) Vgl. Anmerkung 1 auf S. 1.

Digitized by Google

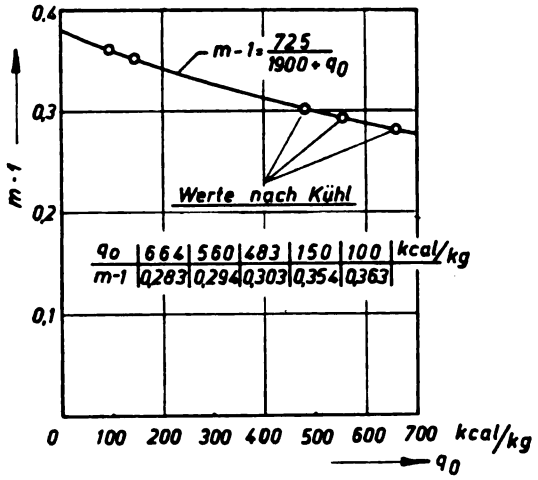


Bild 2. Zur empirischen Ermittlung vom m.

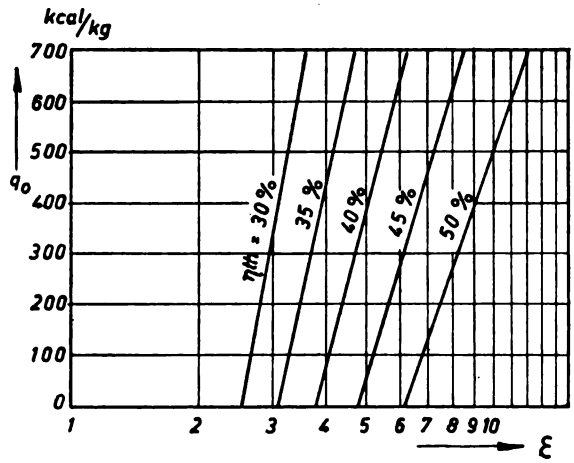


Bild 3. Zusammenhang zwischen Verdichtungsverhältnis ε, Gemischheizwert q_0 und Kreisprozeßwirkungsgrad η_{th}.

Zahlentafel 1. Kreisprozeßwirkungsgrade nach Kühl.

ε		5	6	7	8
$\lambda = 1{,}0$	I	0,3655	0,3977	0,4238	0,4455
	II	0,366	0,398	0,424	0,446
	III	0,366	0,398	0,424	0,445
	IV	0	0	0	—0,0023
$\lambda = 1{,}2$	I	0,3760	0,4089	0,4356	0,4575
	II	0,376	0,409	0,436	0,458
	III	0,377	0,410	0,436	0,458
	IV	+0,0027	+0,0024	0	0
$\lambda = 1{,}4$	I	0,3848	0,4182	0,4450	0,4675
	II	0,385	0,418	0,445	0,468
	III	0,386	0,419	0,445	0.468
	IV	+0,0026	+0,0024	0	0

errechneten Werte enthält; die verhältnismäßige Abweichung ist in der vierten Zeile angegeben. (λ bedeutet die Luftüberschußzahl). Für m sind die in Zahlentafel 2 enthaltenen Werte benutzt; dort sind außerdem noch die Gemischheizwerte q_0 angegeben, die sich aus der Luftüberschußzahl λ und der Brennstoffzusammensetzung ergeben.

Die Übereinstimmung der aus (1) ermittelten Wirkungsgradwerte mit den von Kühl berechneten ist beinahe vollkommen, auf jeden Fall für den praktischen Gebrauch völlig ausreichend. Für gleichen Gemischheizwert wird also der Einfluß des Verdichtungsverhältnisses durch (1) richtig wiedergegeben.

4. Einfluß des Gemischheizwertes.

Für die empirische Ermittlung des Zusammenhangs zwischen m und dem Gemischheizwert q_0 genügen die bis jetzt bekanntgewordenen Rechnungsergebnisse noch nicht. Nach den Berechnungen Kühls und nach eigenen Ermittlungen für kleine Gemischheizwerte scheint die Beziehung

$$m - 1 = \frac{0{,}382}{1 + \frac{q_0}{1900}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

oder

$$m - 1 = \frac{725}{1900 + q_0} \quad \ldots\ldots \quad (13\,a)$$

günstige Werte zu geben, wie Bild 2 zeigt. Es ist durch systematisch angesetzte Berechnungen mit den neuesten Werten der spez. Wärmen zu klären, welcher Zusammenhang die geringsten Abweichungen gegenüber den genauen Werten gibt.

Zahlentafel 2.

λ	1,0	1,2	1,4
q_0 kcal/kg	664	560	483
m	1,286	1,294	1,303

Nach Durchführung dieser Aufgabe wird der Kreisprozeßwirkungsgrad künftig schnell zu ermitteln sein: aus der entsprechend abgewandelten Beziehung (13) wird m in Abhängigkeit vom Gemischheizwert bestimmt; Formel (1) gibt dann den Wirkungsgradverlauf in Abhängigkeit von Verdichtungsverhältnis.

Zum Schluß sei noch auf den beachtlichen Einfluß des Gemischheizwertes hingewiesen. Trägt man nach Bild 3 über ln ε den Gemischheizwert q_0 für gleiche Wirkungsgrade auf, so ergibt sich nach (1) und (13) ein Geradenbüschel, das durch den Punkt $\varepsilon = 1$, $q_0 = -1900$ kcal/kg geht. Man erkennt daraus, daß sich der Gemischheizwert umso ungünstiger bemerkbar macht, je höher der Wirkungsgrad ist. Wollte man etwa bei $\eta_{th} = 50\%$ den Einfluß des Gemischheizwertes kompensieren, so müßte man das Verdichtungsverhältnis von $\varepsilon = 6{,}1$ (für Luft gültig) steigern auf $\varepsilon = 12{,}1$ (für stöchiometrisches Gemisch, $q_0 = 660$ kcal/kg gültig), während bei $\eta_{th} = 30\%$ nur eine Steigerung von $\varepsilon = 2{,}55$ auf $\varepsilon = 3{,}59$ notwendig ist.

5. Zusammenfassung.

Es wird nachgewiesen, daß bei Anwendung der Formel

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

für den Kreisprozeßwirkungsgrad bei Ottomotoren der Einfluß der Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen mit der Temperatur dann in guter Näherung wiedergegeben wird, wenn m gleich der für den Entspannungsvorgang gültigen Adiabatenziffer gewählt wird. Da auf diese Ziffer das Verdichtungsverhältnis von geringem, der Gemischheizwert aber von starkem Einfluß ist, kann Formel (1) als gute Näherung für den Einfluß des Verdichtungsverhältnisses angewendet werden; bei Änderung des Gemischheizwertes ist m nach einer empirischen Beziehung zu ändern.

Die aufgezeigten Zusammenhänge dürften geeignet sein, künftige Berechnungen von Kreisprozeßwirkungsgraden unter Berücksichtigung der spezifischen Wärmen einheitlich zusammenfassen und ihre Ergebnisse in eine für den praktischen Gebrauch einfache Form bringen zu können.

Digitized by Google

Messung der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder eines fremdangetriebenen BMW-VI Flugmotors.

Von Hermann Wenger, München*).

Die Erforschung von Gasströmungen in Zylindern von Kolbenmaschinen spielt im Bau von Verbrennungskraftmaschinen eine wesentliche Rolle. Die Ausführung des Verbrennungsraumes, die Anordnung der Ein- und Auslaßventile haben auf die Verwirbelung des Luft-Brennstoffgemisches einen Einfluß. In Nachbildungen von Zylindern aus Glas wurden zuerst die Luftströmungen mittels eingebrachter Fäden untersucht. Die Messung der Größe der Luftgeschwindigkeit wurde bereits von Hintz [1] und Geiger [2] an fremdangetriebenen Dieselmaschinen durchgeführt. Dabei wurde die Umfangskomponente der um die senkrechte Zylinderachse rotierenden Luftmasse festgestellt. Die örtliche Luftgeschwindigkeit schwankte bei Hintz im Verlauf des Spieles zwischen 0 und 55 m/s; die Drehzahl betrug n = 200 U/min. Geiger fand bei seinen Messungen, die an einer laufenden Dieselmaschine, aber meistens ohne Brennstoffeinspritzung durchgeführt wurden, Geschwindigkeiten von 0 bis rd. 25 m/s. Weiter wurde eine Zunahme der Luftgeschwindigkeit mit steigender Drehzahl festgestellt. Geiger stellte ferner fest, daß für die Güte der Verbrennung hauptsächlich die Luftgeschwindigkeit im Moment der Zündung von maßgebendem Einfluß ist. Eine spätere Beeinflussung derselben durch die Verbrennung spielt keine wesentliche Rolle mehr.

J. Ulsamer [3] hatte bei seinen Versuchen an einem Luftverdichter ebenfalls die Luftgeschwindigkeiten gemessen. Hiezu verwendete er ein Hitzdrahtanemometer, das auch bei vorliegenden Versuchen benützt wurde. Ulsamer untersuchte drei Drehzahlen [63, 128 und 172 U/min]. Er hatte Gasgeschwindigkeiten bis zu 12 m/s, die während des Ansaugtaktes auftreten, festgestellt. Die mittlere Luftgeschwindigkeit nimmt hier ebenfalls mit steigender Drehzahl zu.

Der Zweck vorliegender Untersuchungen ist nun die Gasgeschwindigkeit im BMW-VI Zylinder eines fremdangetriebenen Einzylinderprüfstandes bei hohen Drehzahlen nach der Ulsamerschen Methode mit dem Hitzdraht zu ermitteln.

Gliederung.

I. Die Meßvorrichtung.
  a) Die Methode der Messung mit dem Hitzdraht.
    1. Die Grundlagen der Geschwindigkeitsmessung mit dem Hitzdraht.
    2. Der Einfluß der Luftfeuchtigkeit und der Strömungsrichtung auf den Wärmeübergang an dünnen Drähten.
    3. Aufgaben der Messung.
  b) Der elektrische Meßkreis.
  c) Das Meßinstrument.
    1. Der Aufbau des Meßinstrumentes.
    2. Nachweis der Zulässigkeit der durch den Aufbau bedingten Vereinfachung.
II. Die Versuche.
  1. Die Versuchseinrichtung.
  2. Die Eichung des Meßdrahtes.
  3. Die Ausführung der Versuche.
  4. Die Auswertung der Versuche.
III. Die Versuchsergebnisse.
  1. Der Verlauf der größten Luftgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel.
  2. Die mittleren Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles in Abhängigkeit von der Drehzahl.
  3. Die mittleren Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles in Abhängigkeit von der Vergaserstellung bei konstanten Drehzahlen.
  4. Die Versuchsergebnisse von J. Ulsamer.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

*) Von der Techn. Hochschule München genehmigte Dissertation D 91. Den Auftrag zur Durchführung vorliegender Arbeit erhielt ich von Herrn Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. eh. Wilhelm Nußelt. Für die Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit bin ich ihm zu besonderem Dank verpflichtet.

Die Versuche wurden im Laboratorium für Wärmekraftmaschinen der Technischen Hochschule München ausgeführt. Die notwendigen Versuchseinrichtungen, sowie die Geldmittel wurden von der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, zur Verfügung gestellt. Ihr sei an dieser Stelle bestens gedankt, besonders für die Genehmigung, daß ich vorliegende Arbeit als Dissertation verwenden kann.

I. Die Meßvorrichtung.

a) Die Methode der Messung mit dem Hitzdraht.

Zur Messung der Luftgeschwindigkeit im Zylinder wird ein dünner Metalldraht verwendet. Die Anwendung beruht auf der Tatsache, daß ein elektrisch erwärmter Draht von strömender Luft um so stärker abgekühlt wird, je größer deren Geschwindigkeit ist. Es wird sich je nach der Luftgeschwindigkeit eine entsprechende Drahttemperatur einstellen. Da die Abmessungen des Drahtes in gewissen Grenzen sehr klein gehalten werden können, kann man damit praktisch trägheitslos messen. Je nach Anordnung und Länge des Drahtes lassen sich auch Mittelwerte über beliebige Meßquerschnitte ermitteln.

1. Die Grundlagen der Geschwindigkeitsmessung mit dem Hitzdraht.

J. Ulsamer [3] hat in einer Arbeit, welche im Laboratorium für Wärmekraftmaschinen an der Technischen Hochschule zu München durchgeführt wurde, die Strömungsgeschwindigkeiten im Zylinder eines Luftverdichters gemessen. Von dieser Arbeit werden hier in großen Zügen die theoretischen Grundlagen entnommen.

Ein elektrisch erwärmter Metalldraht befindet sich in einem Luftstrom. An diesen wird Wärme gemäß der zugeführten Energie übertragen. Im Beharrungszustande muß die dem Draht zugeführte elektrische Energie gleich der von der Drahtoberfläche an den Luftstrom abgegebenen Wärme sein. Ändert sich nun der Luftstrom periodisch, so muß sich natürlich auch die von der Drahtoberfläche an den Luftstrom übergehende Wärme und somit auch die dem Draht zugeführte elektrische Energie in der gleichen Weise ändern, vorausgesetzt, daß die Abmessungen des Drahtes klein genug sind, damit dieser den periodischen Änderungen praktisch trägheitslos folgen kann.

Bezeichnet man die der Drahtoberfläche in der Zeiteinheit zugeführte Energie im Wärmemaß mit U und die in der gleichen Zeiteinheit an das vorbeiströmende Medium abgegebene Wärme mit Q, so muß im Beharrungszustande folgende Gleichung erfüllt sein:

$$U = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Die zugeführte Energie ergibt sich zu:

$$U = 0{,}86 \cdot i^2 \cdot r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

wobei i (A) der Strom durch den Meßdraht und

r (Ω) der Widerstand des Meßdrahtes bedeuten.

Nun ist aber der Widerstand des Meßdrahtes von der Temperatur desselben abhängig, und zwar nach folgender Beziehung:

Digitized by Google

$$r = \varphi(T_w), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei T_w (K°) die absolute Drahttemperatur ist.

Folglich geht die Gleichung (2) über in:

$$U = 0{,}86 \cdot \psi(i^2, T_w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Durch die zugeführte Energie U wird der Meßdraht (Hitzdraht) erwärmt. Die veränderliche Gasgeschwindigkeit hat eine Veränderung der Drahttemperatur und somit auch eine Widerstandsänderung des Meßdrahtes zur Folge. Der Meßdrahtwiderstand wird durch Vergleichen mit einem Präzisionswiderstand und der Strom mittels einer Oszillographenschleife gemessen.

Für die Wärmeabgabe an die strömende Luft [4] gilt, wenn man kleine Strömungsgeschwindigkeiten ausschließt, folgende Gleichung:

$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda_m} = f\left[\frac{d \cdot \varrho_m \cdot w}{\eta_m}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Um diese Beziehung auswerten zu können, ist noch die Kenntnis der Temperatur der umgebenden Luft erforderlich. Diese wird ebenfalls mit dem Meßdraht, der hier als Widerstandsthermometer verwendet wird, gemessen.

In Gleichung (5) bedeutet:

d (m) den Durchmesser des Meßdrahtes,
α (kcal/m²h°C) die mittlere für die ganze Drahtoberfläche geltende Wärmeübergangszahl,
λ_m (kcal/mh°C) die Wärmeleitfähigkeit des Mediums,
η_m (kgs/m²) die Zähigkeitszahl des Mediums,
ϱ_m (kgs²/m⁴) die Masse der Raumeinheit des Mediums,
w (m/s) die Geschwindigkeit des Mediums in einiger Entfernung von der Drahtoberfläche.

Wenn T_w (°K) die absolute Temperatur der Drahtoberfläche und T_0 (°K) die absolute Temperatur des umgebenden Mediums in einiger Entfernung von der Drahtoberfläche sind, so sind die Mittelwerte in Gleichung (5) definiert durch:

$$\lambda_m = \frac{1}{T_w - T_0} \cdot \int_{T_0}^{T_w} \lambda \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\eta_m = \frac{1}{T_w - T_0} \cdot \int_{T_0}^{T_w} \eta \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\varrho_m = \frac{1}{g} \frac{1}{T_w - T_0} \cdot \int_{T_0}^{T_w} \gamma \cdot dt$$

$$= \frac{1}{g} \cdot \gamma_0 \cdot \frac{T_0}{T_m}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wobei γ_0 (kg/m³) das spezifische Gewicht des Mediums bei der Temperatur T_0,

$$T_m = \frac{T_w - T_0}{\ln \frac{T_w}{T_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und g (m/s²) die Erdbeschleunigung bedeuten.

Die Funktion f muß durch den Versuch ermittelt werden. Es stehen eine Reihe von Versuchsarbeiten, die sich mit dem Wärmeübergang an dünnen Drähten befassen, zur Verfügung. Auf Grund ihrer Ergebnisse ergibt sich die Funktion f zu:

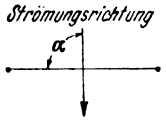
$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda_m} = m \cdot \left[\frac{d \cdot \varrho_m \cdot w}{\eta_m}\right]^n = m\,(Re)^n \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Die Größe des Koeffizienten m und des Exponenten n ist nach J. Ulsamer in folgender Zahlentafel zusammengestellt:

Re	n	m
für $0{,}1 < Re < 4$	0,305	0,875
$4 < Re < 50$	0,41	0,764
$50 < Re$ bis 1000	0,5	0,537

2. Der Einfluß der Luftfeuchtigkeit und der Strömungsrichtung auf den Wärmeübergang an dünnen Drähten.

J. Ulsamer [3] zeigt, daß der Einfluß der Luftfeuchtigkeit auf den Wärmeübergang an dünnen Drähten ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Der Fehler, der dadurch entsteht, beträgt ungefähr $\pm$ 2 vH. Diese Abweichung liegt aber innerhalb der Genauigkeit, welche die aufgestellte Funktion f beanspruchen darf.



Bei der Aufstellung der Funktion f war der Fall des Kreuzstromes zugrunde gelegt; die Drahtachse wurde also bei Kreuzstrom vom Luftstrom senkrecht angeblasen. J. Ulsamer [3] hat festgestellt, daß die Wärmeabgabe mit kleiner werdendem Winkel α beträchtlich sinkt. Sie beträgt bei einem Verhältnis der Länge zum Durchmesser des Drahtes gleich 400, wenn der Draht parallel zur Strömungsrichtung liegt, ungefähr ¾ des Wertes bei Kreuzstrom. Der Kreuzstrom ist somit durch größte Leistungsaufnahme gekennzeichnet. Bei vorliegender Untersuchung wurde ein noch günstigeres Verhältnis $l/d = 1300$ verwendet.

3. Aufgaben der Messung.

Nach dem Newtonschen Gesetz läßt sich die an den Luftstrom übergehende Wärme berechnen:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (T_w - T_0)\,(\text{kcal/h}) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

wobei $F = \pi \cdot d \cdot l$ (m²) und

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{d} \cdot m \cdot Re^n \text{ ist.}$$

Formt man Gleichung (11) mittels der Gleichungen (5), (6), (7) und (8) um, so erhält man:

$$Q = \Phi(T_w, T_0, P_0, w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Weiter ist aber nach Gleichung (4):

$$U = 0{,}86 \cdot \psi(i^2, T_w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wenn nun in jedem Zeitabschnitt Beharrungszustand herrschen soll, so muß die zugeführte elektrische Energie U gleich der übertragenen Wärmemenge Q sein:

$$0{,}86 \cdot \psi(i^2, T_w) = \Phi(T_w, T_0, P_0, w) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Aus der Gleichung (13) kann die Geschwindigkeit w des Luftstromes errechnet werden, wenn folgende Größen bekannt sind:

1. i (A) der Strom durch den Hitzdraht,
2. T_w (°K) die absolute Temperatur des Hitzdrahtes,
3. T_0 (°K) die absolute Temperatur der umgebenden Luft im Zylinder,
4. P_0 (kg/m²) der Druck der Luft im Zylinder.

Diese Betrachtung gilt genau für die Kühlung eines geheizten Drahtes in einem stationären Luftstrom. Sie kann auch auf einen periodisch veränderlichen Luftstrom übertragen werden, da die Stärke der Grenzschicht am Draht sehr klein ist.

b) Der elektrische Meßkreis.

Der Meßdraht wird einmal als Widerstandsthermometer und einmal als Hitzdraht verwendet. Die erste Art der Verwendung dient zur Messung der Gastemperatur, die zweite zur Bestimmung der Geschwindigkeit. Hierzu muß der elektrische Meßkreis eine Widerstandsbestimmung des dünnen Meßdrahtes einwandfrei gestatten. Bei der Verwendung als Widerstandsthermometer muß der Meßdraht sehr schwach belastet werden, um den Widerstandswert nicht durch die in dem Draht erzeugte Joulesche Wärme zu erhöhen und somit eine zu hohe Temperatur zu messen. Zur Messung der Lufttemperatur im Zylinder wird der Meßdraht an den Stromkreis I, der in Bild 1 dargestellt ist, angeschaltet. Der Meßdraht wird in Reihe mit einer emp-

Digitized by Google

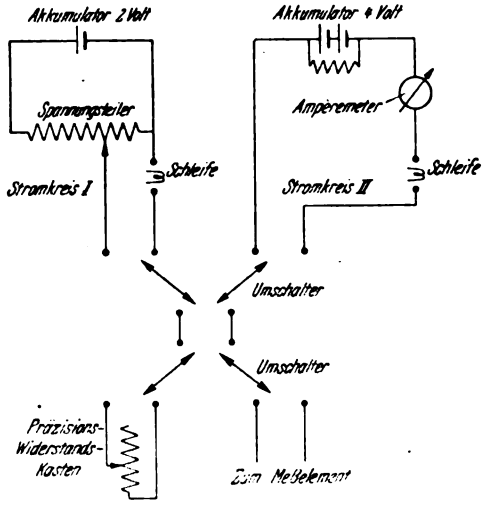


Bild 1. Schaltschema des elektrischen Meßkreises.

findlichen Oszillographenschleife (hier Type V von Siemens & Halske) an einen Spannungsteiler gelegt. Die Größe der notwendigen Spannung läßt sich leicht nach folgender Beziehung ermitteln:

$$E = (r_{\text{Schleife}} + r_{\text{Meßdraht}}) \cdot (\max. I_{\text{Schleife}}), \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

dabei bedeuten:

r_{Schleife} den Widerstand der Meßschleife,
$r_{\text{Meßdraht}}$ den kleinsten vorkommenden Wert des Widerstandes des Meßdrahtes,
$\max. I_{\text{Schleife}}$ den größten zulässigen Strom der Meßschleife.

Die Bestimmung des Widerstandes selbst wird durch Vergleichen mit einem Präzisionswiderstand von der Firma Hartmann & Braun durchgeführt.

Wird der Meßdraht als Hitzdraht verwendet, so wird er an den Stromkreis *II*, Bild 1, angeschlossen. Hier ist der Meßdraht in Reihe mit einer Oszillographenschleife und einem Präzisionsampèremeter an eine Batterie von 4 V gelegt. Um die Spannung der Batterie des Stromkreises *II* möglichst konstant zu halten, ist der Akkumulator durch einen Widerstand während der ganzen Versuchszeit vorbelastet. Die Widerstandsbestimmung geschieht hier ebenfalls durch Vergleichen mit einem Präzisionswiderstand; die Strommessung mit Hilfe des in den Stromkreis eingeschalteten Präzisionsampèremeters.

Die Aufnahme der Oszillogramme geht auf folgende Weise vor sich. Zuerst wird an den Stromkreis *I* der Widerstandskasten angeschaltet. Durch Stecken der notwendigen Widerstandswerte erhält man auf dem Aufnahmepapier Linien konstanten Widerstandes und somit auch Linien konstanter Temperatur. Nun wird durch Umschalten an Stelle des Widerstandskastens das Drahtelement angeschlossen. Der Widerstand des Meßdrahtes verändert sich nun je nach der Temperatur der ihn umgebenden Luft im Zylinder, und zwar nach der Beziehung:

$$r = \varphi(T_w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Durch den Meßstrom wird der Draht noch zusätzlich erwärmt. Es wurde vorher noch untersucht, wie hoch man mit dem Meßstrom gehen darf, damit die Änderung des Meßdrahtwiderstandes praktisch null bleibt. Dies war bei einem Strom von 10 mA noch der Fall. Benutzt wurde nur ein Meßstrom von der halben Größe, also von höchstens 5 mA.

Bei der Aufnahme der Hitzdrahtkurven muß der Draht stark belastet werden, da er ja eine höhere Temperatur zu erhalten hat, als die ihn umgebende Luft im Zylinder. Zu diesem Zweck wird er an den Stromkreis *II* angeschlossen. Durch die Änderungen der Luftgeschwindigkeit im Zylinder wird der Meßdraht verschieden stark angeblasen und somit auch verschieden stark gekühlt. Demzufolge ändert sich die Drahttemperatur bzw. der Meßdrahtwiderstand und auch die aufgenommene Leistung. Die Eichung geschieht hier genau so wie bei Stromkreis *I*. Wir erhalten wieder Eichlinien konstanten Widerstandes, aber auch konstanter Stromstärke, da ja zu gleicher Zeit, der durch den Widerstand fließende Strom mittels des Präzisionsampèremeters gemessen wird. Somit kann auch die Spannung an dem Meßdraht ermittelt werden; sie ist durch das Ohmsche Gesetz gegeben zu:

$$E = i \cdot r \cdot (\text{V}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Leistung, die dem Meßdraht zugeführt wird, ergibt sich zu:

$$U = 0{,}86 \cdot i^2 \cdot r \,(\text{kcal/h}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Spannung am Hitzdraht ändert sich infolge des Spannungsabfalles in den Instrumenten- und Zuleitungswiderständen in gewissen Grenzen. Bei Kreuzstrom ist die Abkühlung des Drahtes am stärksten, der Widerstand also am geringsten und der Strom am größten. Deshalb wird auch obenerwähnter Spannungsabfall am größten sein. Sorgt man aber dafür, daß dieser klein bleibt gegenüber der Spannung am Meßdraht, was sich durch Kleinhalten der Instrumenten- und Zuleitungswiderstände erreichen läßt, so ist auch die an den Luftstrom übergehende Wärme, die gleich der zugeführten elektrischen Energie ist, am größten, wenn der Strom durch den Meßdraht am größten ist. Der Kreuzstrom ist somit nicht nur durch den größten Strom im Meßdraht, sondern auch durch die größte Leistungsaufnahme desselben eindeutig gekennzeichnet. Würde das Verhältnis des Meßdrahtwiderstandes zum Instrumenten- und Zuleitungswiderstand ungefähr gleich 1 oder kleiner werden, so braucht mit zunehmendem Strom die Leistung nicht mehr anwachsen, sondern wird sogar abnehmen. Im vorliegendem Fall war das ungünstigste Verhältnis rd. 8.

Bild 2 zeigt den Verlauf der Temperatur- und Hitzdrahtkurven im Motor. Bei der Aufnahme der Temperaturkurven werden rd. 10 Spiele übereinander photographiert. Bei der Aufnahme der Hitzdrahtkurven muß, um für jede Kolbenstellung die höchsten Geschwindigkeiten zu erhalten, der Meßdraht senkrecht zum Luftstrom (Kreuzstrom) gedreht werden. Wenn man deshalb mit dem Hitzdraht für verschiedene Lagen des Hitzdrahtes im Zylinder die Strom-

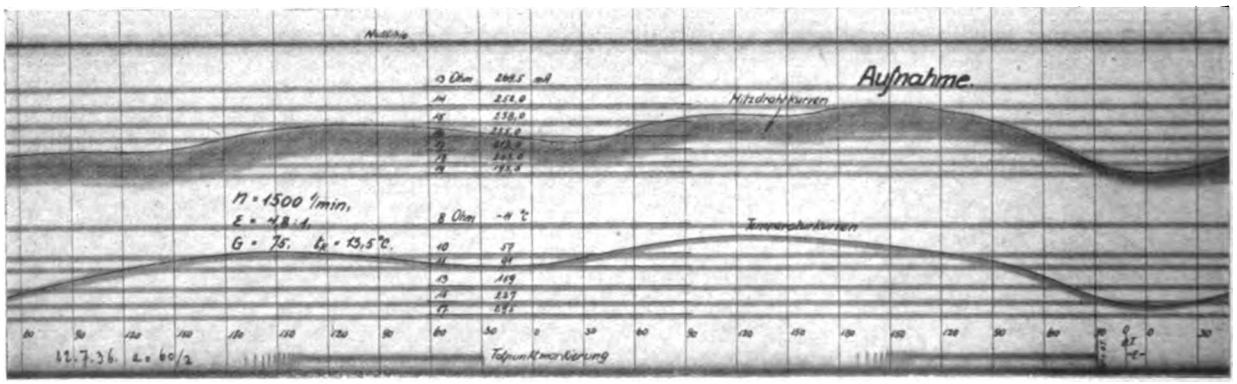


Bild 2. Oszillogramm. Verlauf der Temperatur- und Hitzdrahtkurven.

Digitized by Google

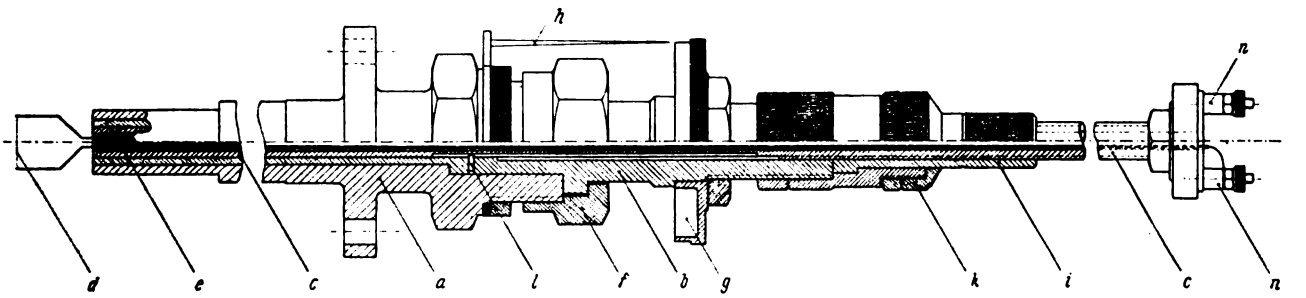


Bild 3. Meßinstrument M 1:3.

a Büchse,	*e* Kittstelle,	*i* Mutter,
b Büchse,	*f* Überwurfmutter,	*k* Ring,
c Spindel,	*g* Scheibe,	*l* Führungsschraube,
d Drahtelement,	*h* Zeiger,	*n* Klemmen.

kurven aufnimmt, ergibt die Einhüllende der Kurvenschar an jeder Stelle die größten Geschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel. Die Hitzdrahtkurven werden für neun Spindelstellungen (von 20° zu 20°) ebenfalls über rd. zehn Spiele aufgenommen; dies ergibt im ganzen rd. neunzig Spiele, Bild 2. Die Hitzdrahtkurven decken sich bei einer bestimmten Spindelstellung nicht, sondern ergeben ein Streuband, das sich mit den Streubändern der anderen acht Spindelstellungen praktisch deckt. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors während der einzelnen Spiele läßt sich wegen der starken Streuung der Hitzdrahtkurven bei einer Spindelstellung nicht bestimmen.

c) Das Meßinstrument.

1. Der Aufbau des Meßinstrumentes.

Das zur Messung dienende Drahtelement ist in Bild 3 dargestellt. Ein dünner Metallfaden aus Wolfram mit einem Durchmesser von 15 μ ist zwischen den gabelartig gebogenen Stützen aus 1 mm Konstantandraht, die gleichzeitig als Stromzuführung dienen, ausgespannt. Die Ausführung des Meßelementes, wie sie J. Ulsamer [3] verwendete, konnte hier leider nicht beibehalten werden. Es mußten die Stützen viel stärker ausgeführt werden, um den erhöhten mechanischen Beanspruchungen beim schnellaufenden Motor standzuhalten. Weiter konnten eigene Potentialleitungen aus dem dünnen Wolframdraht nicht angebracht werden, da es unmöglich war, die dünnen Drähte hart zu löten oder elektrisch zu schweißen. An den Einspannstellen wurde der Draht auf folgende Art befestigt. In die 1 mm starken Konstantandrähte wurde zuerst ein feiner Schlitz eingefeilt und dann mit Silberlot ausgefüllt. Nun wurde die Stütze unterhalb dieses Schlitzes erhitzt, bis das darin befindliche Lot zum Schmelzen kam. Im gleichen Augenblick wurde dann der Haardraht in den Schlitz eingeführt und die Flamme unterhalb entfernt. Der Draht wurde dann von dem sich zusammenziehenden Silberlot eingeklemmt. Diese Art der Befestigung hat sich als sehr gut erwiesen. Vorher wurde diese auf gleiche Weise mit Lötzinn ausgeführt. Durch die dauernde Beanspruchung des Drahtes durch die starken Luftströmungen auf Zug wurde dieser jedoch allmählich aus dem weichen Zinn herausgezogen.

Die Stützen wurden nun isoliert durch die Spindel *c* geführt und im vorderen Teil derselben eingekittet. Der übrige Teil des Meßinstrumentes war der gleiche, wie ihn J. Ulsamer benützte. Nur für die Befestigung im Zylinder wurde die Büchse *a* anders ausgeführt. Bild 3 zeigt das ganze Meßinstrument. Das Drahtelement *d* liegt im Zylinder. Die Kittstelle *e* hält die Stützen in der Spindel *c* fest. Der Draht der Stützen wird dann durch die Spindel *c* weiter nach außen zu den Klemmen *n* geführt. Die Spindel *c* kann mit Hilfe der Mutter *i* achsial in der Büchse *b* verschoben werden. Die Teilung auf der Mutter *i* gibt ein Maß für die Verschiebung; die Nullstellung kann durch eine Marke auf dem Ring *k* festgelegt werden. Die Büchse *b* befindet sich in einer weiteren Büchse *a*, in der sie nach Lösung der Überwurfmutter *f* gedreht werden kann. Die jeweilige Stellung wird an der Gradeinteilung der Scheibe *g* abgelesen. Der Zeiger *h* markiert die Nullstellung, die einer bestimmten Lage des Drahtes zur Senkrechten entspricht. Die Drehbewegung der Büchse *b* wird durch die Führungsschraube *l* zwangläufig auf die Spindel *c* übertragen. Das Meßelement erhält auf diese Weise zwei Freiheitsgrade: es kann um die Instrumentenachse gedreht und in dieser Richtung verschoben werden. Die Büchse *a* wird dann in einer weiteren Büchse *A*, Bild 7, welche im Zylinder eingeschraubt ist, mittels der Flansche befestigt.

2. Nachweis der Zulässigkeit der durch den Aufbau des Meßinstrumentes bedingten Vereinfachungen.

Durch die endliche Drahtstärke wird man mit dem Draht nicht völlig trägheitslos messen können. Es wird die Temperatur der Drahtoberfläche gegenüber der Temperatur der Drahtachse verschieden sein. Weiter wird die Drahttemperatur nicht im vollen Maß den Gastemperaturen im Zylinder folgen können. Im folgenden soll an Hand der Arbeit von H. Pfriem [5] gezeigt werden, wie groß der Fehler der Messungen mittels eines Wolframdrahtes von 15 μ Durchmesser im ungünstigsten Fall zu erwarten ist.

H. Pfriem erhält für das Verhältnis der Schwingungsweiten der harmonisch veränderlichen Gastemperatur zur Drahttemperatur folgende Beziehung:

$$\frac{\vartheta_0}{t_0} = \sqrt{(1+\sigma_0)^2 + (\omega z_0)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

wobei

ϑ_0 (°C) die Schwingungsweite der Gastemperatur,
t_0 (°C) die Schwingungsweite der Drahttemperatur an der Oberfläche,
ω $\left(\frac{1}{h}\right)$ die Kreisfrequenz der Temperaturschwingung,
σ_0 den Strahlungsanteil,
z_0 (h) die Verzugszeit des Meßdrahtes

zu setzen ist:

$$z_0 = \frac{r_0 \cdot c_0 \cdot \gamma_0}{2 \cdot \alpha_0} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Aus Gleichung (17) ersieht man, daß die Verzugszeit z_0 kleiner wird, wenn die Wärmeübergangszahl α_0 größer wird. Für vorliegenden Fall ist:

r_0 (der Drahthalbmesser) $= 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m,
c_0 (die spez. Wärme) $= 0{,}034$ kcal/kg°C,
γ_0 (das spez. Gewicht) $= 19200$ kg/m³,
$\lambda_0 = 138$ kcal/m h° C,
α_0 (die Wärmeübergangszahl).

H. Pfriem verwendete bei seinen Untersuchungen Drähte von 0,1 mm Durchmesser und fand als kleinste Wärmeübergangszahl rd. 800 kcal/m²h°C und als größte rd. 5000 kcal/m²h°C. Rechnet man diese auf einen Drahtdurchmesser von 0,015 mm um, so ergibt sich nach folgender Beziehung:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}\right]^{n-1} \qquad (n = 0{,}5) \text{ (ungünstigster Wert)} \quad \ldots\ldots (18)$$

eine Wärmeübergangszahl zu rd. 2000 kcal/m²h°C bzw. 12500 kcal/m²h°C. Somit wird $z_0 = 1{,}224 \cdot 10^{-6}$ h ($\alpha_0 = 2000$ kcal/m²h°C).

Digitized by Google

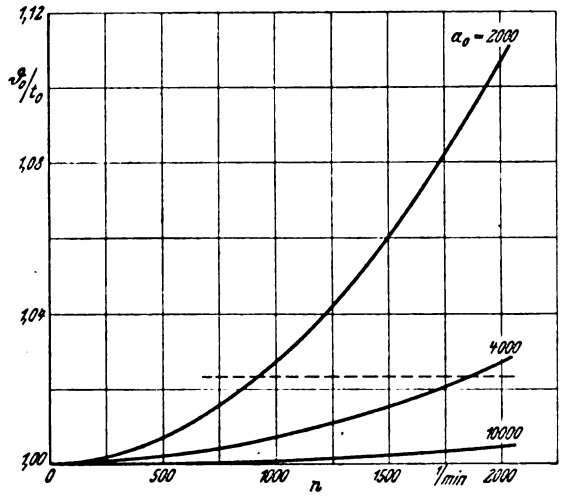


Bild 4. Verhältnis der Schwingungsweiten in Abhängigkeit von der Drehzahl.

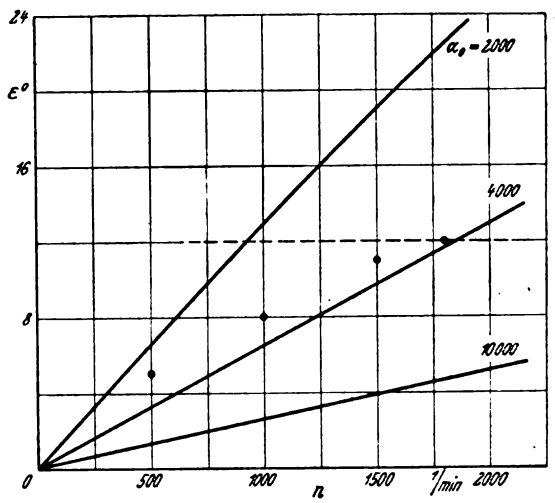


Bild 5. Die Phasenverschiebung der Schwingungsweiten der Drahttemperatur in Abhängigkeit von der Drehzahl.

In Bild 4 ist das Verhältnis der Schwingungsweiten ϑ_0/t_0 bei Vernachlässigung von σ_0 in Abhängigkeit von der Drehzahl mit der Wärmeübergangszahl α_0 als Parameter aufgetragen. Die mittlere Kurve zeigt den Fehler, der bei einem $\alpha_0 = 4000$ auftritt. Hier erhält man bei einer Drehzahl $n = 2000$ U/min nur mehr einen größten Fehler von rd. 2,7 vH.

Für die Phasenverschiebung ε der Schwingungsweiten der Drahttemperatur gegenüber den Schwingungsweiten der harmonisch veränderlichen Gastemperatur erhält man folgenden Ausdruck:

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega \cdot z_0}{1 + \sigma_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Bei Vernachlässigung der Strahlung ($\sigma_0 = 0$) erhält man dann:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \omega \cdot z_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Die Werte von ε sind in Bild 5 in Abhängigkeit von der Drehzahl mit der Wärmeübergangszahl α_0 als Parameter aufgetragen.

Bei den vorliegenden Messungen wurden folgende Phasenverschiebungen ε und folgende dazugehörige Wärmeübergangszahlen festgestellt:

n U/min	α kcal/m²h°C	ε^0
500	2000	5
1000	2800	8
1500	3600	11
1800	3900	12

Die in vorstehender Zahlentafel angegebenen Werte von α sind die niedrigsten, die beim ganzen Spiel auftreten. Zeichnet man in Bild 5 eine Waagrechte durch den Punkt $n = 1800$ und $\alpha_0 = 4000$, so sieht man, wenn die Gerade in Bild 4 übertragen wird, daß der Fehler nie den Wert von 2,3 vH übersteigen kann, da die Werte in vorstehender Zahlentafel alle unterhalb dieser Geraden liegen. Somit muß auch der Fehler entsprechend kleiner werden und kann ohne weiteres aus dem Diagramm entnommen werden.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß die Temperatur der Drahtachse mit weniger als 1 vH Fehler der Temperatur der Drahtoberfläche folgt. Dies ist der Fall, wenn:

$$\frac{\omega \cdot r_0^2}{4 \cdot a_0} \ll 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Für vorliegenden Fall erhält man für den obenstehenden Ausdruck:

$$= 0{,}000025 \ll 1.$$

Somit erwärmt sich der ganze Draht praktisch gleichmäßig.

Weiter muß noch der Fehler nachgerechnet werden, der durch die Wärmeableitung der Einspannstellen des Meßdrahtes bedingt ist. Hier hat H. Pfriem in seiner Arbeit ebenfalls eine Beziehung aufgestellt:

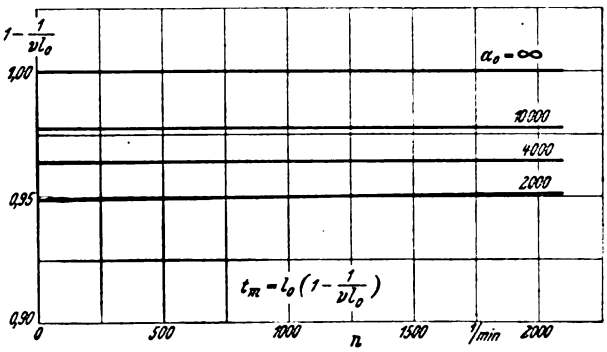


Bild 6. Ausdruck $[1 - 1/\nu\, l_0]$ in Abhängigkeit von der Drehzahl.

$$t_m = 1/l_0 \int_0^{l_0} t_x \cdot dx = t_0 \cdot \left[1 - \frac{\mathfrak{Tg}\,(\nu\, l_0)}{\nu \cdot l_0}\right] e^{j\,\omega\, t} \quad \ldots \quad (22)$$

Für die Werte von $l_0 \sqrt{2\,\alpha_0/r_0 \cdot \lambda_0} \geq 3$ wird mit einem Fehler von weniger als ½ vH $\mathfrak{Tg}\,(\nu\, l_0) = 1$ und somit erhält man:

$$t_m = t_0 \left[1 - \frac{1}{\nu\, l_0}\right] \cdot e^{j\,\omega\, t} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

l_0 (m) bedeutet in obigen Gleichungen die halbe Drahtlänge und

$$\nu = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_0}{r_0 \cdot \lambda_0} \sqrt{1 + (\omega\, z_0)^2}} \ (1/\mathrm{m}) \ldots . \quad (24)$$

In Bild 6 ist der Ausdruck $(1 - 1/\nu\, l_0)$ in Abhängigkeit von der Drehzahl mit der Wärmeübergangszahl α_0 als Parameter aufgetragen. Der Fehler ist hier von der Drehzahl praktisch unabhängig. Der Fehler wird im ungünstigsten Falle rd. 3 vH betragen.

Bei der Ableitung obiger Beziehung wurde als Temperatur der Einspannstelle der Nullpunkt der Temperaturskala angenommen. In Wirklichkeit haben aber die Stützen eine Temperatur, die weit höher liegt. Ferner wurde für das Material der Stützen das gleiche wie für den Meßdraht vorausgesetzt. In vorliegendem Falle jedoch wurde Konstantan, das eine sehr kleine Wärmeleitzahl besitzt, verwendet. Die in Bild 6 aufgetragenen Werte von $(1 - 1/\nu\, l_0)$ sind daher unter allen Umständen die ungünstigsten Werte. In Wirklichkeit liegen die Werte weit besser, so daß man bei einem $\alpha_0 = 4000$ mit einem größten Fehler von rd. 2 vH zu rechnen hat.

Nimmt man den Fehler, der durch die Trägheit des Meßdrahtes noch bedingt ist, hinzu, so hat man eine Fehlanzeige von höchstens 5 vH zu erwarten.

Während die Temperaturen um diesen Betrag zu klein aufgezeichnet werden, wird die zugeführte Leistung zu groß

Digitized by Google

aus dem Diagramm ermittelt. Die zugeführte Leistung errechnet sich nach Gleichung (2):

$$U = 0{,}86\, i^2\, r \text{ (kcal/h)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese geht zum größten Teil an die vorbeiströmende Luft über. Ein kleiner Teil wird von dem dünnen Meßdraht an die Konstantanstützen abgeleitet. Die Größe dieser Wärmemenge ist gegeben durch:

$$Q_a = \lambda_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} 2F \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

wobei

$\frac{\Delta t}{\Delta x}$ (°C/m) das Temperaturgefälle längs des Meßdrahtes an den Einspannstellen,

F (m²) der Querschnitt des Meßdrahtes,

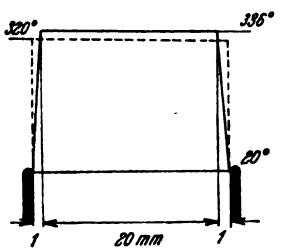
λ_0 (kcal/mh°C) die Wärmeleitfähigkeit des Meßdrahtes bedeuten.

Nimmt man an, daß der Fehler durch diese Wärmeableitung über die Einspannstellen höchstens 1 vH der zugeführten Energie betragen soll, so läßt sich aus den Gleichungen (2) und (25) das hierzu notwendige Temperaturgefälle ermitteln:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{Q_a}{\lambda_0 2F} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}86\, i^2\, r}{\lambda_0 \cdot 2 \cdot F} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Die größte in den Meßdraht zugeführte Leistung beträgt bei den vorliegenden Versuchen 0,8 kcal/h. Damit ergibt sich ein Temperaturgefälle von:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 515000\ °\text{C/m} = 515\ °\text{C/mm}.$$



Die höchste auftretende Übertemperatur beträgt rd. 300°. Die Temperaturverteilung längs des Drahtes sei nach obenstehendem Bild angenommen. Die richtige Temperatur ergibt sich dann, wenn der Fehler von 5 vH berücksichtigt wird, zu $320 \frac{1}{0{,}95} = 336$°C. Die Temperaturdifferenz wird dann 316°. Der Temperaturabfall somit

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 316\ °\text{C/mm}.$$

Man ersieht hieraus, daß der Fehler der Leistungsmessung unter 1 vH liegt.

Bei der Auswertung vorliegender Messungen wurde von der Berücksichtigung der in diesem Abschnitt angeführten Fehler Abstand genommen, da der Fehler des Endresultates (der Größe der Luftgeschwindigkeit) im ungünstigsten Falle auch nicht größer wird, als die Summe der einzelnen Fehler, die rd. 7 vH beträgt. Mit um so mehr Recht konnte davon abgesehen werden, da die Größe der Luftgeschwindigkeit während mehrerer Spiele an ein und derselben Stelle im Zylinder um ein Mehrfaches des Betrages von 7 vH schwankt.

II. Die Versuche.

1. Die Versuchseinrichtung.

Als Versuchseinrichtung wurde ein DVL-Einzylinder-Prüfstand verwendet. Dieser gestattet die Untersuchung von verschiedenen Zylinderbauarten. Untersucht wurde ein BMW-VI-Zylinder mit einem Durchmesser von $D =$ 160 mm und einem Hub von 190 mm. Der Versuchsmotor wurde durch eine elektrische Pendelmaschine fremd angetrieben. Die Drehzahl der Pendelmaschine konnte in den Grenzen von rd. 400 bis 1900 U/min geändert werden. Weiter konnte das Verdichtungsverhältnis durch Heben und Senken des Zylinderträgers durch einen in dem Kurbelgehäuse drehbar gelagerten Schneckenring geändert werden.

Die Messungen wurden im Verdichtungsraum des Zylinders durchgeführt. Die konstruktive Ausbildung des Zylinders und den Einbau des Meßinstrumentes zeigt Bild 7.

Zur Aufnahme der Temperatur- sowie Hitzdrahtkurven diente ein Universal-Oszillograph von Siemens & Halske. Die Aufnahmekassette wurde direkt mit der Königswelle des Prüfstandes gekuppelt. Zu diesem Zweck mußte das Stirnrad auf der Antriebswelle der Kassette aus dem Umschaltgetriebe des Oszillographen herausgenommen werden. Dies hatte noch folgenden Vorteil; die Betrachtungseinrichtung konnte somit unabhängig von der Aufnahmeeinrichtung verwendet werden. Weiter konnte jetzt die Belichtungszeit des Verschlusses geändert werden. Normal öffnet der Verschluß bei der »Momentstellung« nur über eine Umdrehung der Aufnahmekassette. Jetzt aber konnte man die Drehzahl des Elektromotors am Oszillographen und damit die Belichtungszeit so einstellen, daß der Verschluß über eine beliebige Anzahl von Arbeitsspielen des Prüfstandes geöffnet wird. Die Kurven auf der Mattscheibe

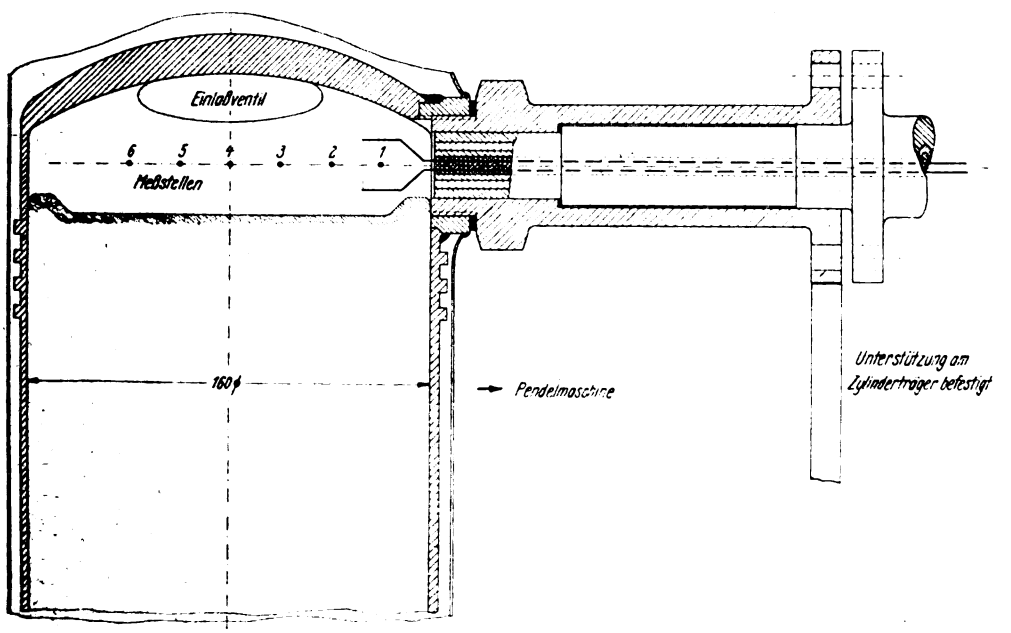


Bild 7. Einbau des Meßgerätes M 1:3.

Digitized by Google

konnte man jetzt, da sie nicht so stark auseinandergezogen erscheinen, besser beobachten.

Zum Indizieren wurde ein DVL-Glimmlampenindikator [6] verwendet. Der Aufnahmebereich des Niederdruckteiles wurde abgeändert. Um die Papierbreite von 9 cm für einen Druckbereich von 0 bis 9 ata voll auszunutzen, wurde der Hebelarm am Ablenkspiegel vergrößert.

Die Drehzahl wurde mittels des DVL-Stichzählers gemessen. Es wurden jeweils zwei Minuten gestoppt. Da der Stichzähler an der Steuerwelle angekuppelt ist, erhält man die jeweilige Drehzahl der Kurbelwelle.

Der Totpunkt wurde mit Hilfe eines Abreißkontaktes auf eine Schleife am Oszillographen übertragen.

2. Die Eichung des Meßdrahtes.

Als erstes wurde vor dem Einlöten des Meßdrahtes der Widerstand der Zuleitungen von dem Umschalter weg ermittelt. Dieser ergab sich zu 0,85 Ω. Nach dem Einspannen des Meßdrahtes wurde dann dessen Temperaturabhängigkeit im Ölthermostaten bestimmt. Zu diesem Zweck wurde zuerst die Länge des Drahtstückes unter einem Mikroskop von siebenfacher Vergrößerung gemessen. Hierauf wurde der Meßdraht solange gealtert, bis bei ein und derselben Temperatur der Widerstand konstant blieb. Nun wurde der Widerstand im Ölthermostaten in dem Temperaturbereich von 20 bis 300° C bestimmt. Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur ergab sich als linear:

$$r = r_0(1 + 0{,}00354\,t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Dieser Wert des Temperaturkoeffizienten konnte, wenn der Meßdraht zu Bruch ging, ohne weiteres für den nächsten Meßdraht übernommen werden, wenn dieser von dem gleichen Vorrat wie der erste entnommen wurde. Nur der Widerstand pro Längeneinheit bei Zimmertemperatur mußte jedesmal neu bestimmt werden. Dieser änderte sich bei verschiedenen Meßdrahtstücken, selbst dann, wenn sie dem gleichen Vorrat entnommen wurden, in geringen Grenzen. Der Widerstand für ein Meter des dünnen Wolframdrahtes von 0,015 mm Durchmesser betrug bei Zimmertemperatur rd. 430 Ω. Die Länge des Meßdrahtes schwankte zwischen 19 und 21 mm.

Aus obigen Angaben konnte somit die Widerstandsabhängigkeit des Meßdrahtes von bestimmter Länge über der Temperatur aufgetragen werden.

3. Die Ausführung der Versuche.

Die Versuche wurden bei folgenden Drehzahlen durchgeführt: n = 500, 1000, 1500, 1800 U/min. Die Vergaserstellung G wurde für jede Drehzahl geändert, und zwar (Stellung am Prüfstand) 25, 50 und 75. Bei G = 75 ist die Drosselklappe am Vergaser ganz geöffnet. Der Querschnitt beträgt rd. 15 cm². Die Stellungen G = 50 und 25 entsprechen einem Querschnitt von 10 und 5 cm². Bei der Vergaserstellung 0 (geschlossener Vergaser, Leerlaufstellung des Motors) konnten keine Messungen durchgeführt werden, da der Meßdraht bereits immer nach ganz kurzer Zeit zu Bruch ging. Die Kühlwassertemperatur t_k = rd. 13° C und das Verdichtungsverhältnis ε = 4,8:1 wurden bei vorstehenden Versuchen konstant gehalten. Bei darauffolgenden Messungen n = 1800 U/min, G = 25, 50 und 75, ε = 4,8:1 wurde die Kühlwassertemperatur auf t_k = 75° C erhöht. Bei weiteren Messungen n = 1800 U/min, G = 25, 50 und 75, t_k = 13° C wurde das Verdichtungsverhältnis auf ε = 5,8:1 erhöht.

Die Meßstellen im Zylinder sind in Bild 7 eingetragen und befanden sich beim Verdichtungsverhältnis ε = 4,8:1 in 20, 40, 60, 80, 100 und 120 mm und bei einem ε = 5,8:1 in 40, 60, 80, 100 und 120 mm Entfernung von der Zylinderwand.

Bei den eigentlichen Messungen wurden zuerst die Eichlinien für die Lufttemperatur im Zylinder aufgenommen. Dieses geschah durch Anschalten des Präzisionswiderstandskastens von Hartmann & Braun. Durch Stecken entsprechender Widerstandswerte in vorliegendem Falle von 8 bis 17 Ω, die nach der Beziehung $r = \varphi(T)$ bestimmten Temperaturen entsprechen, konnten somit Linien konstanter Temperaturen aufgezeichnet werden. Nun wurde durch Umschalten der Meßdraht angeschlossen. Der Meßdraht folgt nun den Temperaturänderungen der ihn umgebenden Luft und ändert somit seinen Widerstand. Demzufolge ändert sich weiter der Strom, der durch diesen fließt. Dieser wird mit Hilfe einer Oszillographenschleife aufgenommen. Um einen Mittelwert über mehrere Spiele zu erhalten, wird über zehn Spiele photographiert. Diese Kurven decken sich im allgemeinen ganz; nur bei den hohen Drehzahlen kommen kleine Streuungen vor, die sich aber nur über den Ausdehnungstakt erstrecken und an einer leichten Verbreiterung der Aufnahmelinie zu erkennen sind. Bei der Aufnahme der Lufttemperaturkurven ist es nicht notwendig, daß Kreuzstrom herrscht. Es wurde der Meßdraht während einer Aufnahme auch gedreht und es war praktisch kein Unterschied festzustellen.

Dagegen muß bei der Aufnahme der Hitzdrahtkurven der Draht gedreht werden, da die Beziehung, nach der die Geschwindigkeit ausgewertet wird, nur für Kreuzstrom gilt. Der Meßdraht wurde deshalb jeweils von 20° zu 20° um seine Querachse gedreht; dies ergibt im Zylinder neun Stellungen. Von jeder Stellung wurden ebenfalls die Kurven über zehn Spiele photographiert. Da nun der Kreuzstrom, wie früher erwähnt, durch größte Leistungsaufnahme gekennzeichnet ist, so muß natürlich zur Auswertung die Einhüllende herangezogen werden. Nach der Aufnahme dieser Hitzdrahtkurven werden mit Hilfe des Widerstandskastens wieder Linien konstanten Widerstandes (bzw. Temperaturen) aufgezeichnet. Zu gleicher Zeit wird der Strom, der durch den Widerstand fließt, gemessen. Er ist notwendig zur Bestimmung der zugeführten elektrischen Energie.

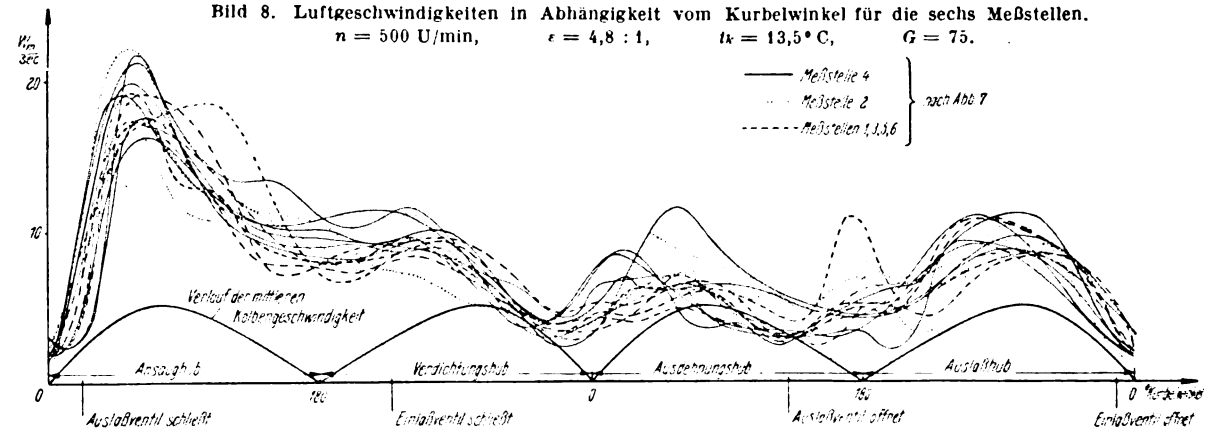
Durch vorstehende Messungen wird also

T_0 (°K) die Temperatur der umgebenden Luft,
T_w (°K) die Drahttemperatur des Hitzdrahtes,
q (kcal/mh) die elektrische Energie, welche der Längeneinheit des Meßdrahtes zugeführt wird,

bestimmt.

Die letzte Größe, die noch zur Auswertung notwendig ist, nämlich der jeweilige Druck im Zylinder wird aus dem

Bild 8. Luftgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel für die sechs Meßstellen.
n = 500 U/min, ε = 4,8 : 1, t_k = 13,5° C, G = 75.



Digitized by Google

Indikatordiagramm des DVL-Glimmlampenindikators entnommen.

Die Messungen wurden an den in Bild 7 eingezeichneten Punkten durchgeführt. In Bild 8 sind die Luftgeschwindigkeiten bei einer Drehzahl $n = 500$ U/min, einer Vergaserstellung $G = 75$, einem Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 4{,}8:1$ und einer Kühlwassertemperatur $t_k = 13{,}5°$ C in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel für die Meßstellen 1 bis 6 aufgetragen. Meßstelle 4 wurde 6mal, Meßstelle 2 4mal und die Meßstellen 1, 3, 5 und 6 je 1mal eingetragen. Die Streuung der Kurven an den einzelnen Meßstellen ist so groß, daß sich für jede Meßstelle ein Streuband ergibt, welches sich praktisch mit den Streubändern an den anderen Meßstellen deckt. Es läßt sich somit keine Abhängigkeit des Verlaufes der Luftgeschwindigkeit von der Entfernung der Meßstelle von der Zylinderwand erkennen.

Bei den darauffolgenden Messungen wurde aus diesem Grunde von einer getrennten Auswertung der Meßstellen, die sehr zeitraubend ist, abgesehen. An den sechs Zylinderstellen wurden jeweils zwei Aufnahmen gemacht. Aus den zwölf so erhaltenen Diagrammen wurden die Werte von T_0, T_w, i und r ausgemessen und dann die Mittelwerte gebildet, die dann die Grundlage der weiteren Auswertung für die Ermittlung der Luftgeschwindigkeiten bildeten. Die so erhaltenen Mittelwerte der Luftgeschwindigkeiten stimmen bis auf die Rechenschiebergenauigkeit mit den Mittelwerten überein, die bei einer getrennten Auswertung der einzelnen Meßstellen erhalten wurden.

4. Die Auswertung der Versuche.

Zur Auswertung werden die in vorigem Abschnitt gemessenen Größen verwendet. Nach der Gleichung (2) ist nun $q = 0{,}86\, i^2 r$ die je Stunde und Längeneinheit vom Draht an die strömende Luft abgegebene Wärme in kcal. Mit Hilfe der Gleichung (11) wird die Größe von Nu:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda_m} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{q}{\lambda_m \cdot \Theta_w} \quad \ldots\ldots (28)$$

Mit Hilfe der Gasgleichung und der Gleichung (8) wird Re:

$$Re = \frac{d \cdot \varrho_m \cdot w}{\eta_m} = \frac{d}{g \cdot R} = \frac{P}{\eta_m \cdot T_m} w$$

oder:

$$\frac{Re}{w} = \frac{d \cdot P}{g \cdot R \cdot \eta_m \cdot T_m} = y \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

Weiter ist Nu nach Gleichung (10):

$$Nu = m\,(Re)^n.$$

Als Endgleichung für die Ermittlung der Geschwindigkeit ergibt sich dann:

$$w = \frac{1}{y}\left[\frac{Nu}{m}\right]^{\frac{1}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

Zur Berechnung der Größen von Nu und Re/w nach Gleichung (28) und (29) ist noch die Kenntnis der mittleren Wärmeleitzahl und Zähigkeit der Luft erforderlich. Die Mittelwerte sind definiert in Gleichung (6) und (7).

Die Wärmeleitzahl ist nach W. Nußelt [4]:

$$\lambda = \frac{0{,}00167\,(1 + 0{,}000194\,T)\sqrt{T}}{1 + \frac{117}{T}} \text{ (kcal/m h° C).}$$

Die Zähigkeit der Luft ist nach Sutherland [7]:

$$\eta = 1{,}69 \cdot 10^{-6}\, \frac{1 + 117/273}{1 + 117/T} \sqrt{\frac{T}{273}} \text{ (kgs/m²).}$$

Für beide Größen hat W. Nußelt [4] die Integrale zwischen 0 und T von $T = 100$ bis 2200° K angegeben.

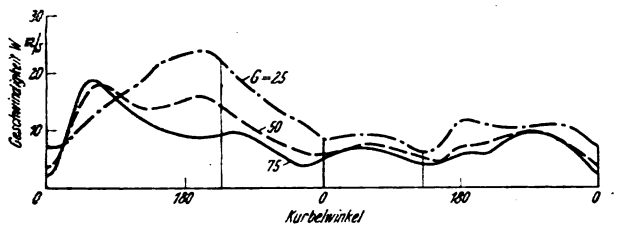


Diagramm 1. Drehzahl $n = 500$ U/min, Verdichtung $\varepsilon = 4{,}8:1$, Kühlwassertemperatur $t_k = 11°$ C, Vergaserstellung $G = 25, 50, 75$.

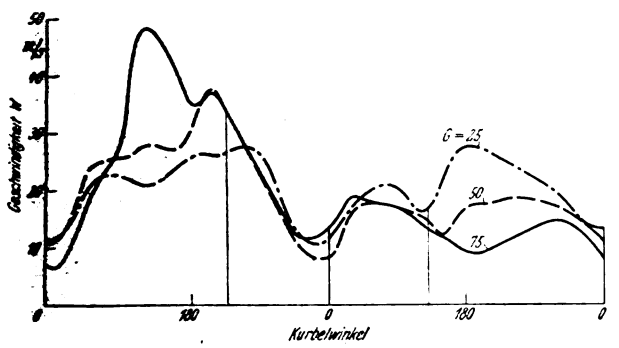


Diagramm 3. $n = 1500$ U/min, $t_k = 13{,}5°$ C, $\varepsilon = 4{,}8:1$, $G = 25, 50, 75$.

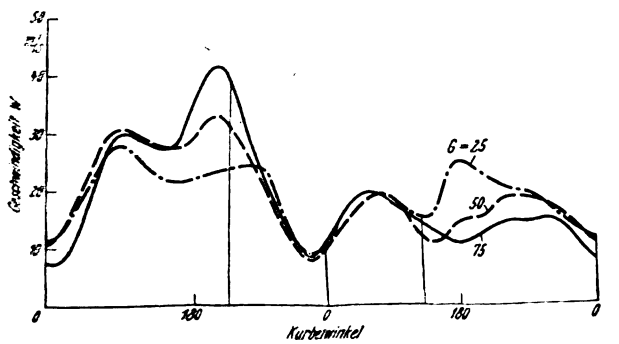


Diagramm 5. $n = 1800$ U/min, $t_k = 75°$ C, $\varepsilon = 4{,}8:1$, $G = 25, 50, 75$.

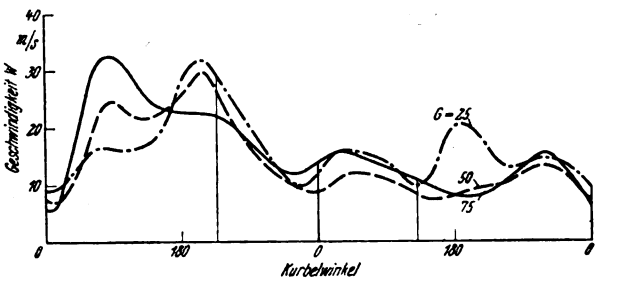


Diagramm 2. $n = 1000$ U/min, $t_k = 13°$ C, $\varepsilon = 4{,}8:1$, $G = 25, 50, 75$.

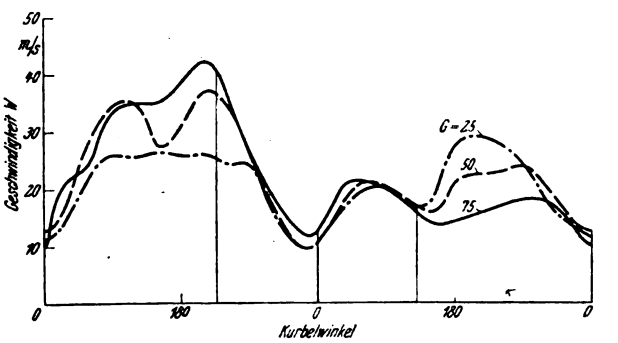


Diagramm 4. $n = 1800$ U/min, $t_k = 14°$ C, $\varepsilon = 4{,}8:1$, $G = 25, 50, 75$.

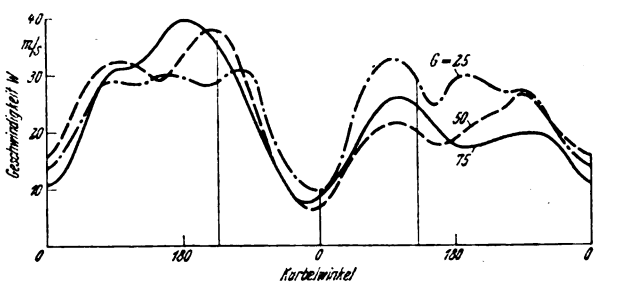


Diagramm 6. $n = 1800$ U/min, $t_k = 13{,}5°$ C, $\varepsilon = 5{,}8:1$, $G = 25, 50, 75$.

Diagramm 1 bis 6. Abhängigkeit der größten Luftgeschwindigkeiten vom Kurbelwinkel.

Digitized by Google

III. Die Versuchsergebnisse.

1. Der Verlauf der größten Luftgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel.

Sämtliche Versuchsergebnisse sind in den Diagrammen 1 bis 4 sowie 5 und 6 aufgetragen. Diagramm 1 zeigt die Abhängigkeit der maximalen Luftgeschwindigkeit vom Kurbelwinkel bei der Drehzahl $n = 500$ U/min, bei den Vergaserstellungen 25, 50 und 75, bei einem Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 4{,}8:1$ und bei einer Kühlwassertemperatur $t_k =$ rd. 11° C. In Diagramm 2 sind die gleichen Kurven bei $n = 1000$ U/min, in Diagramm 3 bei $n = 1500$ U/min und in Diagramm 4 bei $n = 1800$ U/min dargestellt.

In Diagramm 5 ist die größte Luftgeschwindigkeit über dem Kurbelwinkel bei $n = 1800$ U/min, $\varepsilon = 4{,}8:1$, $t_k = 75°$ C und den Vergaserstellungen 25, 50 und 75 aufgetragen. Diagramm 6 zeigt die gleiche Abhängigkeit bei $n = 1800$ U/min, $\varepsilon = 5{,}8:1$, $t_k =$ rd. 13° C und den Vergaserstellungen 25, 50 und 75.

Die größten Geschwindigkeiten treten während der Ansaugeperiode, wie dies auch zu erwarten ist, auf. Mit kleiner werdender Vergaserstellung verschiebt sich das Maximum der Kurven immer mehr gegen den unteren Totpunkt (180° Kurbelwinkel). Die gleiche Erscheinung tritt mit zunehmender Drehzahl auf. Bei den höheren Drehzahlen und kleiner Vergaserstellung erreichen die Geschwindigkeiten während der Ausschiebeperiode die gleiche Größe wie während der Ansaugeperiode.

Ähnliche Messungen wurden von J. Geiger [2] an einem Viertakt-Dieselmotor bei den Drehzahlen $n = 250$ und 300 U/min durchgeführt. Hierbei wurde das Staudruckverfahren, das bereits Hintz [1] und Saß [8] verwendeten, angewendet. Mit dieser Meßanordnung läßt sich nur die Umfangskomponente des um die senkrechte Zylinderachse befindlichen Wirbels feststellen. Geiger untersuchte hauptsächlich den Einfluß der Stellung des Wirbelschirmes am Einlaßventil. Ohne Wirbelschirm wurden ebenfalls Messungen der Luftgeschwindigkeit durchgeführt.

Zeichnet man diese von Geiger gefundenen Aufnahmen in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel auf, so findet man im großen und ganzen einen ähnlichen Verlauf der Luftgeschwindigkeiten, wie er in vorliegender Untersuchung festgestellt wurde. Geiger hat zu diesem Diagramm auch die mittlere Luftgeschwindigkeit für zwei Drehzahlen und zwei Stauscheibenstellungen angegeben. Bei gleichen Drehzahlen und verschiedenen Stauscheibenstellungen im Zylinder ändert sich die mittlere Luftgeschwindigkeit nur ganz wenig; mit der Drehzahl dagegen nimmt diese zu.

Zahlentafel 1.

n	500	500	500	1000	1000	1000
ε	4,8:1	4,8:1	4,8:1	4,8:1	4,8:1	4,8:1
t_k	11,5	11,0	11,0	13,5	13,5	11,0
G	25	50	75	25	50	75
	w_m	w_m	w_m	w_m	w_m	w_m
Ansaugen	16,97	14,27	11,42	19,19	20,83	22,89
Verdichtung	14,71	8,75	6,50	16,42	14,44	15,61
Ausdehnung	8,31	6,46	5,63	13,94	10,62	13,66
Ausschieben	9,97	7,20	6,31	14,61	10,02	10,49
Spiel	12,75	9,50	7,83	16,27	14,35	15,90
n	1500	1500	1500	1800	1800	1800
ε	4,8:1	4,8:1	4,8:1	4,8:1	4,8:1	4,8:1
t_k	13,5	13,5	12,0	14,0	14,0	14,0
G	25	50	75	25	50	75
	w_m	w_m	w_m	w_m	w_m	w_m
Ansaugen	21,36	25,80	30,13	23,26	29,23	31,67
Verdichtung	19,76	18,50	19,13	17,77	20,84	22,29
Ausdehnung	17,82	15,60	16,52	17,82	18,28	19,02
Ausschieben	21,60	16,12	11,53	21,81	19,67	15,44
Spiel	20,50	19,52	19,70	20,80	22,65	22,47
n	1800	1800	1800	1800	1800	1800
ε	4,8:1	4,8:1	4,8:1	5,8:1	5,8:1	5,8:1
t_k	75,0	75,0	75,0	13,5	13,5	13,5
G	25	50	75	25	50	75
	w_m	w_m	w_m	w_m	w_m	w_m
Ansaugen	21,78	26,06	26,22	26,06	29,76	29,44
Verdichtung	17,32	17,05	19,31	21,11	19,31	18,05
Ausdehnung	17,62	16,15	16,80	24,46	16,98	19,75
Ausschieben	18,99	15,39	12,99	24,42	20,92	18,00
Spiel	19,25	19,20	19,02	24,33	22,70	21,93

2. Die mittleren Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles in Abhängigkeit von der Drehzahl.

Um eine bessere Übersicht in der Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Drehzahl zu erhalten, werden über die einzelnen Takte und über das ganze Spiel die Mittelwerte gebildet. Diese seien definiert als die Höhe des Rechteckes, dessen Inhalt gleich der Fläche unter der Geschwindigkeitskurve bei gleicher Basislänge ist. Diese Werte sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Diese Mittelwerte sind dann in den Diagrammen 12 bis 14 in Abhängigkeit von der Drehzahl für die Vergaserstellungen 25, 50 und 75 aufgetragen.

Die mittlere Luftgeschwindigkeit nimmt mit der Drehzahl bzw. mit der mittleren Kolbengeschwindigkeit zu. Die Zunahme bleibt im allgemeinen immer unter der Zunahme der mittleren Kolbengeschwindigkeit. Die größten Geschwindigkeiten treten durchwegs während des Ansaugtaktes auf.

3. Die mittleren Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles in Abhängigkeit von der Vergaserstellung bei konstanten Drehzahlen.

In den Diagrammen 7 bis 11 ist die Abhängigkeit der mittleren Luftgeschwindigkeit der einzelnen Takte sowie des ganzen Spieles über der Vergaserstellung bei konstanten Drehzahlen aufgetragen. Das Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 4{,}8:1$ und die Kühlwassertemperatur $t_k =$ rd. 13° C sind hier konstant gehalten.

Bei den Diagrammen 7 bis 11 sind die Luftgeschwindigkeiten auch für eine Drehzahl $n = 1800$ U/min aufgetragen. Geändert wurde hier einmal die Kühlwassertemperatur t_k von 13° C auf 75° C, ein andermal das Verdichtungsverhältnis ε von 4,8:1 auf 5,8:1.

Bei der Erhöhung der Kühlwassertemperatur werden die Geschwindigkeiten rund um 10 bis 15 vH kleiner. Die Erhöhung des Verdichtungsverhältnisses bedingt im allgemeinen eine Vergrößerung der Geschwindigkeiten um rd. 10 vH. Diese sind durch den größeren Unterdruck während des Ansaugetaktes bedingt. Durch die größere kinetische Energie der in den Zylinder eintretenden Luftmasse werden auch die Geschwindigkeiten während der anderen Takte erhöht. Im großen und ganzen bleibt die Erhöhung bzw. Verkleinerung der mittleren Luftgeschwindigkeiten in engen Grenzen.

4. Die Versuchsergebnisse von J. Ulsamer.

J. Ulsamer [3] hat die Strömungsgeschwindigkeiten im Zylinder eines langsam laufenden Luftverdichters gemessen. Die Drehzahlen betragen 63, 128 und 172 U/min. Der Verlauf der Luftgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel ist in Bild 9 und 10 aufgetragen. Der Geschwindigkeitsverlauf hat im großen und ganzen ähnlichen Charakter wie er in vorliegender Arbeit gefunden wurde. Die Luftbewegung erreicht auch bei J. Ulsamer während des Ansaugens ihren Höchstwert und klingt dann im weiteren Verlauf des Spieles wieder ab.

Um den Einfluß der Drehzahl auf die Größe der Gasgeschwindigkeit besser herausstellen zu können, hat J.

Digitized by Google

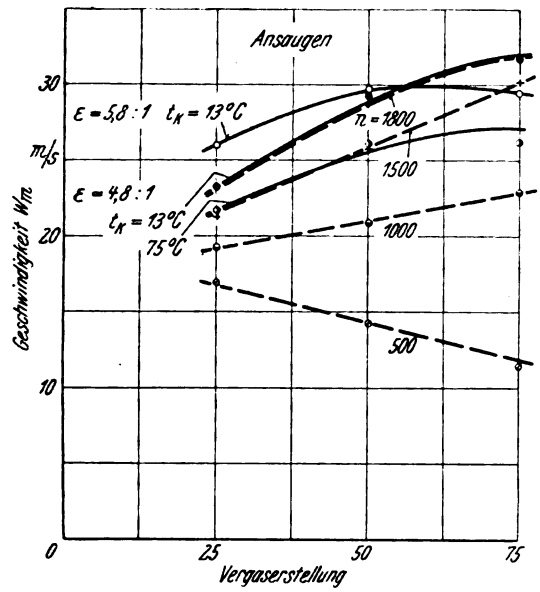


Diagramm 7.

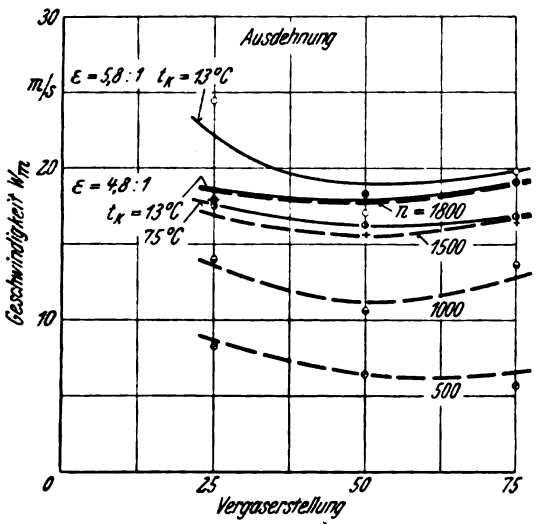


Diagramm 9.

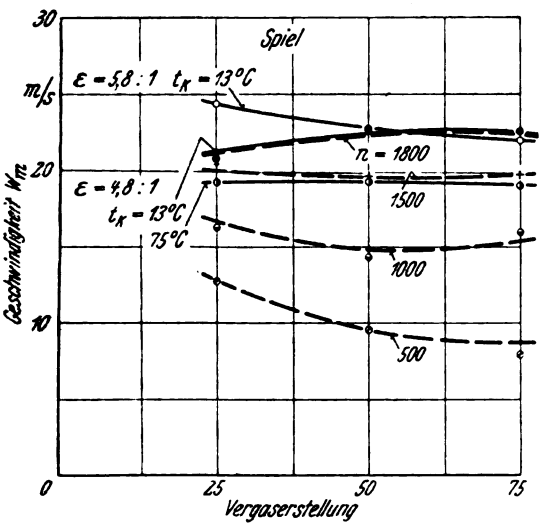


Diagramm 11.

Ulsamer Mittelwerte der Luftgeschwindigkeiten über die einzelnen Takte sowie des ganzen Spieles gebildet. Diese sind in Bild 11 und 12 aufgetragen. Diese mittleren Luftgeschwindigkeiten nehmen mit der Drehzahl zu und betragen rd. das fünf- bis siebenfache der mittleren Kolbengeschwindigkeit.

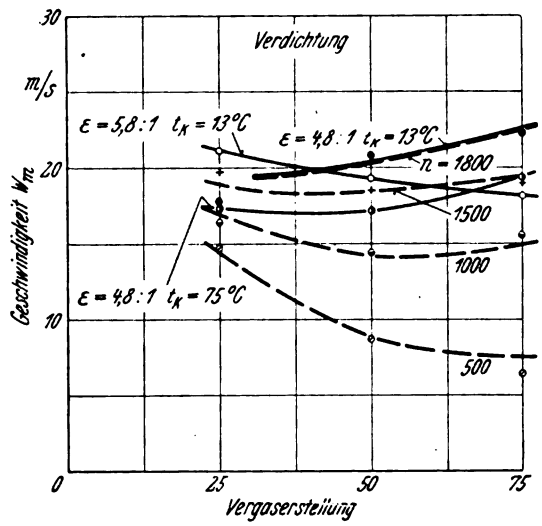


Diagramm 8.

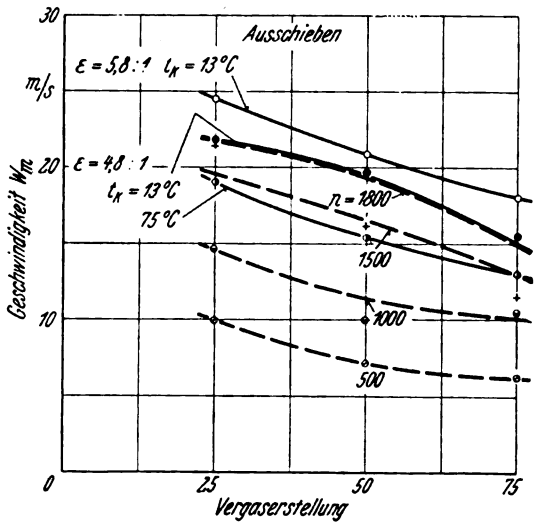


Diagramm 10.

Diagramm 7 bis 11. Abhängigkeit der mittleren Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles von der Vergaserstellung bei konstanten Drehzahlen.

– – – { Verdichtung $\varepsilon = 4{,}8:1$, Kühlwassertemperatur $t_K \sim 13°$ C.
——— Drehzahl $n = 1800$ U/min.

Nimmt man die entsprechenden Werte für die Meßstellen 7,5 und 70 mm von der Zylinderwand entfernt aus Bild 10 und 11 und bildet dann die Mittelwerte über Ansaugen und Verdichtung und trägt sie dann in das Diagramm 13 ein, so lassen sich die in dieser Arbeit gefundenen Kurven für die Mittelwerte der Luftgeschwindigkeiten über Ansaugen und Verdichtung ohne weiteres sehr gut ergänzen. Nur der Verlauf der Kurven ist bei beiden Messungen verschieden. Bei J. Ulsamer nimmt die Geschwindigkeit stärker als linear mit der Drehzahl zu, während bei vorliegender Arbeit das Gegenteil der Fall ist. Die Mittelwerte über das ganze Spiel dagegen können nicht eingetragen werden, da sie zu hohe Werte ergeben. Dies ist in der verschiedenen Arbeitsweise der beiden Maschinen begründet. Bei dem Verdichter, an dem J. Ulsamer gemessen hat, trifft auf jede Umdrehung ein Ansaughub, während hier erst auf jede zweite Umdrehung ein Ansaughub folgt. Da aber der Ansaughub die größten Geschwindigkeitswerte während des ganzen Spiels enthält, muß der Mittelwert über zwei Takte größer werden als der über vier Takte. Somit können die Mittelwerte über das ganze Spiel nicht miteinander verglichen werden.

IV. Zusammenfassung.

Mit einem Hitzdrahtanemometer wurde die Luftgeschwindigkeit im Zylinder eines wassergekühlten BMW-VI-Flug-

Digitized by Google

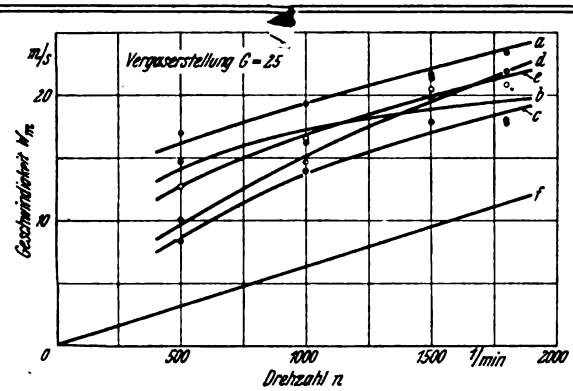


Diagramm 12.

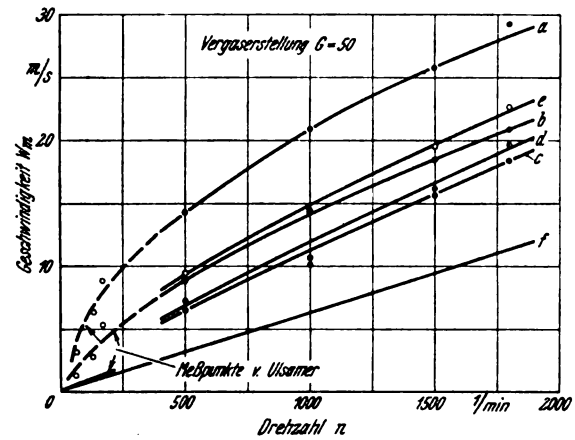


Diagramm 13.

motors gemessen Die Messung ist möglich, auch wenn sich die Luftgeschwindigkeit und Lufttemperatur während eines Spieles rasch und stark ändert. Mit dem Hitzdraht wurde die mittlere Geschwindigkeit, mit der der Draht angeströmt wird, über die Drahtlänge gemessen. Durch eine besondere Einbauvorrichtung konnte an verschiedenen Stellen im Zylinder mit dem Drahtelement gemessen werden. Das zur

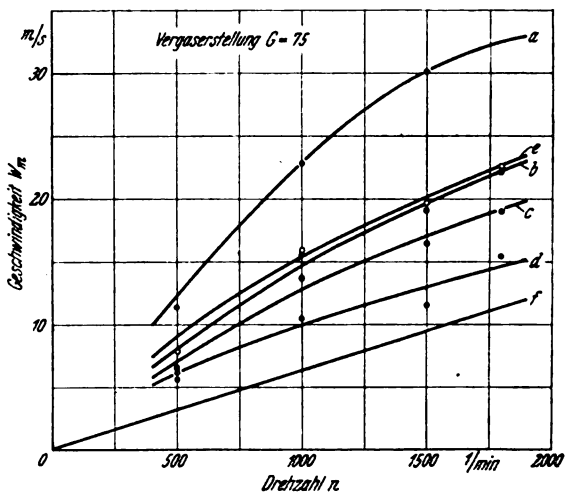


Diagramm 14.

Diagramm 12 bis 14. Mittelwerte der Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles in Abhängigkeit von der Drehzahl.
Verdichtung $\varepsilon = 4{,}8:1$,
Kühlwassertemperatur $t_K \sim 13°$ C.
a Ansaugen, d Ausschieben,
b Verdichten, e Spiel,
c Ausdehnen, f mittlere Kolbengeschwindigkeit.

Messung dienende Element lag in Reihe mit einer Oszillographenschleife an einer Spannungsquelle. An einem fremd angetriebenen Einzylinder-Prüfstand mit aufgebautem BMW-VI-Zylinder wurde der Einfluß der Drehzahl, der Vergaserstellung, der Kühlwassertemperatur und des Verdichtungsverhältnisses auf die Größe der Luftgeschwindigkeiten im Zylinder untersucht. Der Verlauf der Luftgeschwindigkeiten längs des Spieles zeigte bei allen Aufnahmen ähnlichen Charakter. Die Bewegung erreichte den Höchstwert während des Ansaugtaktes, klang während der Verdichtung ab und nahm dann während der Ausdehnung und des Ausschiebens wieder zu. Zur Beurteilung des Einflusses der Drehzahl und der Vergaserstellung wurden die mittleren Luftgeschwindigkeiten der einzelnen Takte und des ganzen Spieles gebildet und in eigenen Diagrammen aufgetragen.

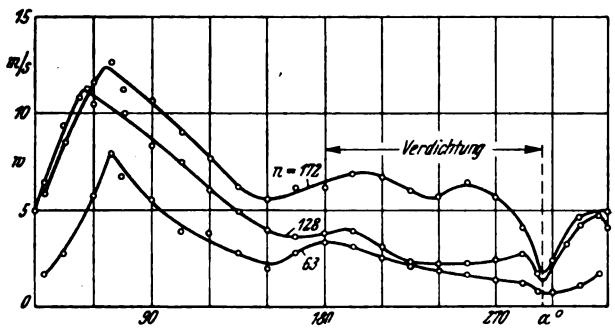


Bild 9. Entfernung von der Deckelwand 7,5 mm.

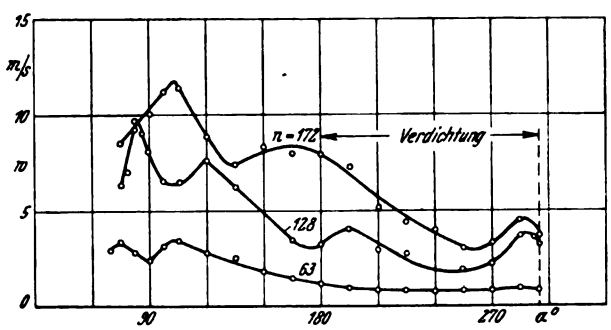


Bild 10. Entfernung von der Deckelwand 70 mm.

Bild 9 und 10. Verlauf der Luftgeschwindigkeit im Zylinder eines langsam laufenden Luftverdichters bei 63, 128 und 172 U/min in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel.

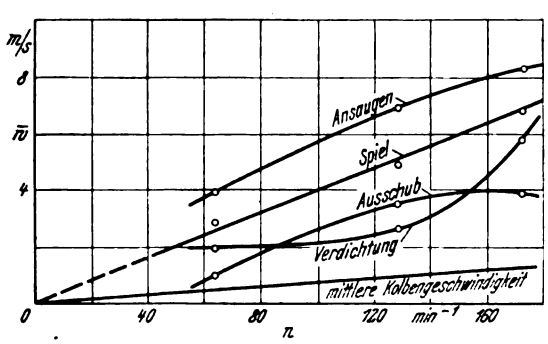


Bild 11. Entfernung von der Deckelwand 7,5 mm.

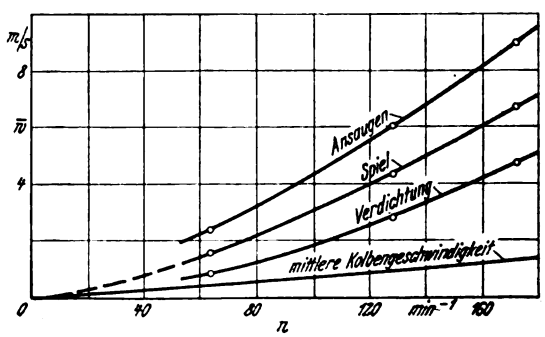


Bild 12. Entfernung von der Deckelwand 70 mm.

Bild 10 und 11. Mittelwerte der Luftgeschwindigkeiten über die einzelnen Takte sowie des ganzen Spieles.

Digitized by Google

V. Schrifttum.

[1] H. Hintz, Mittel und Wege zur Beeinflussung der Verbrennung beim Strahlzerstäubungsverfahren. Z. VDI- (1925), S. 673.

[2] J. Geiger, Messung der Luftbewegung im Zylinderinnern von Dieselmaschinen. Mitt. Forsch. Anst. GHH.-Konzern (1936), Heft 9, S. 213.

[3] J. Ulsamer, Die Messung der Strömungsgeschwindigkeiten im Zylinder eines Luftkompressors. Diss. Techn. Hochschule München 1932.

[4] W. Nußelt, Das Grundgesetz des Wärmeübergangs. Gesundheits-Ingenieur (1915), S. 477.

[5] H. Pfriem, Zur Messung veränderlicher Temperaturen von Gasen und Flüssigkeiten. Forschung (1936), S. 85.

[6] R. Brandt und H. Viehmann, Der DVL-Glimmlampen-Indikator für schnellaufende Motoren. Automobiltechnische Z. Bd. 36 (1933), Nr. 12 S. 309/311.

[7] W. Sutherland, The Viscosity of Gases and Molecular Force. Phil. Mag. (5) Bd. 36 (1893), S. 507.

[8] F. Saß, Kompressorlose Dieselmaschinen. J. Springer, Berlin 1929, S. 81.

Digitized by Google

Das Klopfen im Otto-Motor.

Von H. Weinhart, Mannheim*).

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Bisherige Forschungsarbeiten.
III. Eigene Versuche.
a) Meßverfahren.
b) Versuchseinrichtung.
c) Druckmessung in der Bombe.
d) Druckmessung am Motor.
e) Ionisationsstromverlauf und Flammengeschwindigkeit.
1. Meßkreis.
2. Zeitkreis.
3. Normale Verbrennung in der Bombe und im Motor.
4. Detonation in der Bombe.
5. Klopfen im Motor.
IV. Versuchsergebnis und Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Dem Bestreben, den thermischen Wirkungsgrad der Otto-Motoren durch Erhöhung des Kompressionsverhältnisses zu verbessern, ist durch das Auftreten des Klopfens eine noch unüberwindliche Grenze gesetzt. Während man früher glaubte, daß das Klopfen vom Aneinanderstoßen metallischer Teile herrühre, weiß man heute, daß es eine Verbrennungserscheinung ist. Mit dem Klopfen ist eine Leistungsverminderung verbunden, auch treten örtlich hohe Verbrennungsdrücke auf, die zur Beschädigung der Maschine führen können.

Aus der Forschung heraus entstanden zunächst zwei grundsätzlich verschiedene Theorien über den Verbrennungsverlauf klopfender Motoren. Die eine Theorie glaubt, daß der durch die erste Verbrennung nahezu adiabatisch verdichtete Ladungsrest eine so hohe Temperatur annimmt, daß Selbstzündung eintritt. Diese Entstehungsursache des Klopfens wird als Druckzündung bezeichnet. Eine zweite Theorie nimmt an, daß durch die günstigen Verbrennungsbedingungen im Ladungsrest eine Detonationswelle entstehen kann, die ihn mit ihrer charakteristischen Geschwindigkeit von rd. 2000 m/s durcheilt und beim Auftreffen an der Zylinderwand die Klopfgeräusche verursacht.

II. Besprechung der bisherigen Forschungsarbeiten am klopfenden Motor[1]).

Die ältesten experimentellen Arbeiten am klopfenden Motor beschränkten sich darauf, die Stärke des Klopfstoßes zu messen. So benutzten Midgley und Boyd [1][2]) einen sog. »Bouncing-Pin«-Apparat, um als Maß für die Stärke des Klopfstoßes die Zeit zu messen, während der ein bestimmter Höchstdruck im Zylinder überschritten wird. Es ist auch das besondere Verdienst von Midgley, jene Antiklopfmittel entdeckt zu haben, die heute noch bei Hochleistungsmotoren ein unentbehrliches Hilfsmittel sind.

Umfangreichere Messungen führte Ricardo [2] an seinem Motor mit veränderlichem Verdichtungsverhältnis aus. Er stellte damit fest, bei welchem Verdichtungsverhältnis mit den verschiedensten Brennstoffen gerade noch klopffreier Betrieb möglich war. Ferner ergaben systematische Untersuchungen über die Form des Verbrennungsraumes, daß langgestreckte und verzweigte Verbrennungsräume besonders zum Klopfen neigen und die dachförmige Bauart, wie sie heute allgemein bei Flugmotoren angewendet wird, sich als die günstigste erwies.

Daß die Ergebnisse, welche an einem klopfenden Motor gewonnen wurden, nicht ohne weiteres verallgemeinert werden können, zeigen die Untersuchungen von Dumanois [3], der in seinem Versuchsmotor das Verdichtungsverhältnis von 4,6 auf 6,7 steigern konnte, bevor Klopfen eintrat, wenn er statt dem normalen Kolben einen treppenförmig abgestuften einbaute. Als Erklärung gibt Dumanois an, daß die Explosionswelle, die er als Ursache des Klopfstoßes ansieht, entweder durch den plötzlichen Druckabfall verhindert oder bei ihrem Vorhandensein zerstört wird.

Wheeler, Lovell, Coleman und Boyd [4] entnahmen während der Verbrennung durch ein gesteuertes Gasventil aus dem Verbrennungsraum bei verschiedenen Kurbelgraden Proben der Ladung und analysierten diese nach ihrem Gehalt an Wasserdampf, Kohlendioxyd, Kohlenmonoxyd, Wasserstoff und Sauerstoff. Sie bekamen einen über 40° Kurbelwinkel stetig ansteigenden Gehalt der Verbrennungsgase in den analysierten Proben. Diese Ergebnisse stehen im Widerspruch mit der Annahme einer Flamme, welche vom Zündpunkt ausgehend den Verbrennungsraum durchläuft.

Viele Untersuchungen befaßten sich mit der Art der Verbrennung in Bomben. Die ältesten Versuche wurden von Mallard und Le Chatelier [5] durchgeführt und später durch die klassischen Messungen von Dixon [6] mit einer verbesserten Versuchseinrichtung ergänzt. Sie haben erstmalig die Explosionswelle durch ihre direkte photographische Aufnahme mit allen sie charakterisierenden Eigenschaften nachgewiesen. In diesem Zusammenhang sind auch noch die Arbeit von Nägel [7] über die Zündgeschwindigkeit explosibler Gasgemische, die Versuche von Klüsener [8] über den Einfluß der Wirbelung auf die Verbrennungsgeschwindigkeit und die Arbeit von Dumanois und Lafitte [9] über die Einwirkung des Druckes auf die Anlaufstrecke von Explosionswellen besonders hervorzuheben.

Einen weiteren Beitrag zur Klärung der Klopferscheinungen gab Endres [10] in seiner theoretischen Untersuchung über den Verbrennungsvorgang im Motor; er fand einen Zusammenhang zwischen der Form des Verbrennungsraumes und seiner Neigung, den Klopfstoß hervorzurufen.

Callendar [11] vertritt die Ansicht, daß durch die Verdichtung und die damit verbundene Erwärmung eine chemische Veränderung und ein plötzlicher Zerfall der Ladung eintreten kann, wodurch der Klopfstoß verursacht wird.

Besonders wertvolle Ergebnisse hatten die Versuche von Auer [12], zu welchen derselbe Motor verwendet wurde, der auch für die Messungen zur vorliegenden Arbeit benützt wurde. Auer untersuchte die Stärke und den Zeitpunkt des Klopfstoßes und nimmt als Maß für die Intensität die Be-

*) Diese Messungen wurden im Laboratorium für Wärmekraftmaschinen an der Technischen Hochschule München unter der Leitung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. eh. W. Nußelt durchgeführt D 91.

Der Verfasser möchte auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Nußelt für die Anregungen und für das ihm geschenkte Vertrauen seinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

Die Mittel zu diesen Versuchen wurden aus der Linde-Stiftung an der Technischen Hochschule München zur Verfügung gestellt, wofür bestens gedankt sei.

[1]) Bei der großen Zahl der Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet konnte mit Rücksicht auf den Umfang der vorliegenden Arbeit nur ein Teil herausgegriffen werden.

[2]) Die Zahlen in den Klammern beziehen sich auf das angefügte Schrifttumverzeichnis.

Digitized by Google

schleunigungskräfte, welche einem federbelasteten Kolben im Zylinderkopf durch den Gasdruck erteilt werden. Es wird die Abhängigkeit der gemessenen Größen von der Drehzahl, dem Verdichtungsverhältnis, der Temperatur der angesaugten Luft, dem Zeitpunkt der Zündungseinleitung und dem Mischungsverhältnis gezeigt. Der Höchstwert der Klopfstärke liegt bei demselben Mischungsverhältnis wie das Minimum an Zeit, die zwischen Zündung und Stoß verfließt. Je näher also der Stoß am Totpunkt erfolgt, desto stärker ist er. Den größten Einfluß auf die Stärke des Stoßes hat eine Veränderung des Verdichtungsverhältnisses.

Es sei noch auf eine zusammenfassende Arbeit von Richter [13] hingewiesen, in der die ziemlich verstreuten Unterlagen über das Klopfen in Vergasermotoren übersichtlich gesammelt sind. Ein umfangreiches Schrifttumverzeichnis über die Entzündung und Verbrennung von Gasgemischen sowie eine kurze Besprechung der wichtigsten Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet findet man in dem Buch von Lindner [14] in vorzüglicher Weise zusammengestellt.

So aufschlußreich auch all diese Ergebnisse waren, so konnte doch daraus nicht auf das Wesen des Klopfens geschlossen werden; keine der Arbeiten konnte entscheiden, ob die Explosionswelle oder die Druckzündung das Klopfen verursacht.

Tiefere Einblicke konnten erst durch das Studium der Flammenausbreitung im klopfenden Motor gewonnen werden. Es ist das besondere Verdienst von Schnauffer [15], mittels neuer Meßmethoden die Verbrennung im Vergasermotor untersucht und damit einen wesentlichen Beitrag zur Klärung des Klopfens geliefert zu haben. Gemessen wurde der Augenblick der Ankunft der Flammenfront an drei über den Verbrennungsraum verteilten Meßstellen mittels der Ionisationsmethode, welche darauf beruht, daß die durch die Flamme ionisierten Verbrennungsgase den elektrischen Strom zu leiten vermögen. Diese Messungen wurden noch ergänzt durch die Aufnahme des zeitlichen Druckverlaufes. Kurz zusammengefaßt wurden aus diesen Messungen folgende Ergebnisse erhalten:

Bei nicht klopfendem Motor durchläuft die Flamme den Verbrennungsraum mit etwa gleichbleibender Geschwindigkeit [siehe auch 16]. Bei klopfendem Betrieb wird der letzte Teil des Gemisches gleichzeitig entflammt; dadurch entstehen örtlich hohe Temperatur- und Drucksteigerungen, während bei der normalen Verbrennung infolge der geringen Verbrennungsgeschwindigkeit stets Druckausgleich herrscht. Die Heftigkeit des Klopfens hängt von der Menge des gleichzeitig entflammten Ladungsrestes ab. Mit dem Klopfen ist eine Erhöhung der Ionisationsströme und eine Verringerung der Nachbrennzeit verbunden. Ist die gleichzeitig zur Entflammung kommende Gemischmenge sehr groß, so tritt infolge der Wärmedehnung des brennenden Gemischrestes eine negative Flammengeschwindigkeit auf. Hat der Motor längere Zeit geklopft, so können ebenfalls negative Flammengeschwindigkeiten beobachtet werden, die von der Entflammung der zündreifen Ladung an den heißen Motorteilen herruhren. Es gibt vier Arten des Klopfens, die sich durch den Druckverlauf unterscheiden.

In einer späteren Arbeit hat Schnauffer [17] die Anzahl der Meßsonden auf 24 Stück erhöht und den Ionisationsstrom durch das Aufleuchten ebensovieler Glimmlampen mit einem besonders dazu entwickelten Kurzzeitmeßgerät aufgezeichnet. Damit wurde beim normalen Betrieb des Motors die Richtung und die Geschwindigkeit der Flammenausbreitung unter den verschiedensten Versuchsbedingungen ermittelt. Besonders deutlich zu erkennen ist aus diesen Messungen der Einfluß des heißen Auslaßventils, der Anordnung der Zündkerzen und der Änderung der Last auf die Form und Geschwindigkeit der Flammenausbreitung. Während nun beim normalen Betrieb die Geschwindigkeit der Flammenfront über den gesamten Verbrennungsraum nahezu gleichblieb, stellte sich bei klopfendem Betrieb im Ladungsrest eine Geschwindigkeit von 265 bis 300 m/s ein. Die Größenordnung dieser Geschwindigkeit ließ erkennen, daß keine Detonationswelle als Verbrennungsform vorlag.

Auch die Amerikaner haben seit Jahren umfangreiche Versuche über das Klopfen angestellt, welche nun in einer Arbeit von Withrow und Rassweiler [18] bis zu einem gewissen Abschluß gekommen sind. Diese Forscher haben den gesamten Verbrennungsraum eines Otto-Motors durch ein Quarzfenster abgeschlossen und durch dieses hindurch einen Zeitlupenfilm mit 5000 Bildern in 1 s aufgenommen. Die früheren Ergebnisse über die Form und Geschwindigkeit der Flamme konnten damit bestätigt werden, dagegen zeigen sie im klopfenden Ladungsrest unabhängig von der alten Flammenfront neuentstandene Zündzentren. Von diesen ausgehend breitet sich die Enflammung unregelmäßig und in Form und Größe stark wechselnd über den unverbrannten Teil der Ladung aus.

Zur selben Zeit wurde von Sokolik und Voinov [19] ebenfalls mittels der direkten Photographie die Explosionswelle im klopfenden Motor nachgewiesen. Bei diesen Messungen verwendeten die Forscher die Methode von Mallard und Chatelier. Sie haben also im Zylinderkopf von der Zündkerze ausgehend ein schmales Quarzfenster über den gesamten Verbrennungsraum eingebaut und die aus diesem Fenster austretende Leuchterscheinung der Flamme direkt auf einen stetig bewegten Film aufgenommen. Die Verbrennungsgeschwindigkeit im Ladungsrest wurde zu 2000 m/s gemessen und stimmt daher mit der Detonationsgeschwindigkeit eines Kraftstoff-Luft-Gemisches überein, wie man sie theoretisch mit Jouguet [20] berechnen kann.

Zahlreiche Untersuchungen befassen sich mit der Druckmessung im Verbrennungsraum. Da die Verbrennungsgeschwindigkeit im Ladungsrest auf jeden Fall außerordentlich hoch ist und ein Druckausgleich in dieser kurzen Zeit nur teilweise erfolgen kann, entsteht dort ein Gebiet hohen Druckes, auf das Schnauffer [15] erstmalig hinwies. Dieses strömt dann in Form einer Stoßwelle ab und wird mit immer kleiner werdenden Amplituden mehrfach an den Wandungen reflektiert. Es bilden sich dadurch stehende Wellen im Verbrennungsraum aus, die von Boerlage, Broeze, van Driel and Peletier [21] piezometrisch nachgewiesen wurden. In sehr langgestreckten Versuchsbomben treten auch bei der normalen Verbrennung Gasschwingungen auf, deren Geräusch nicht mit dem Klopfgeräusch gleichzusetzen ist und das sich auch deutlich von dem harten, hellen Klang klopfender Motore oder detonierender Gasgemische unterscheidet.

Der Leistungsabfall und die Erhöhung der Kühlwassertemperatur sind dann die Folge der Erhöhung des Wärmeüberganges an die Wand, da die heißen Schwaden durch die Schwingungen relativ zur Wand hohe Strömungsgeschwindigkeiten und an den Schwingungsbäuchen erhöhten Druck annehmen.

Aus dem angezogenen Schrifttum kann man ersehen, daß tatsächlich keine einheitliche Ansicht über das Wesen des Klopfens besteht. Allein die besprochenen Forschungsarbeiten, in denen die Verbrennungsgeschwindigkeit im klopfenden Ladungsrest ermittelt wurden, zeigten die verschiedensten Ergebnisse. Da die sichere Erkenntnis der Art der Verbrennung für den gesamten Motorenbau von außerordentlicher Wichtigkeit ist, wurde deshalb mit der modernsten Druckmeßeinrichtung und nach einer von den bisher angewandten Meßmethoden verschiedenen Art versucht, einen neuen Beitrag zur Klärung dieser Frage zu liefern. Die benutzten Meßmethoden sind das während der letzten Jahre zu großer Vollkommenheit entwickelte piezoelektrische Druckmeßverfahren sowie eine neuartige Anwendung der Ionisationsmethode zur Messung des Verbrennungsverlaufes im klopfenden Gasteil. Auf die Verwendungsmöglichkeit der Ionisationsmethode zur Messung von Temperaturen im Verbrennungsraum wurde bereits von Schnauffer [16] hingewiesen.

Die aus der vorliegenden Arbeit gezogenen Schlußfolgerungen haben eine strenge Gültigkeit nur für den untersuchten Motor; es ist denkbar, daß an sehr verschiedenen Motorbaumustern andere Ergebnisse erhalten werden könnten.

Digitized by Google

III. Eigene Versuche.

a) Meßverfahren.

Um bei der Verbrennung im klopfenden Motor zwischen Druckzündung und Detonationswelle unterscheiden zu können, muß man die Größen messen, die für diese beiden Verbrennungsarten besonders bezeichnend sind. Zunächst sollen daher die für die Druckzündung und die Detonation charakteristischen Merkmale hervorgehoben werden.

Für eine Detonationswelle (= Unstetigkeitwelle, in deren Front die Verbrennung stattfindet) ist bezeichnend, daß die Verbrennung in einer äußerst schmalen Flammenfront erfolgt, deren Dicke etwa der freien Weglänge der Moleküle entspricht [20, 22]. Die Geschwindigkeit dieser Flammenfront ist eine von den Versuchsbedingungen nahezu unabhängige, jedem Gasgemisch eigene Größe. Die Entflammung wird von der Druckwelle eingeleitet. Die Temperatur in der Flammenfront ist etwas höher als bei der verlustlosen isochoren Verbrennung. Wenn die Detonationswelle ein Volumteilchen erreicht hat, wird in diesem in fast unendlich kurzer Zeit die Verbrennung beendet sein, d. h. die Temperatur wird sich sprunghaft ändern. Bei der Reflexion einer Druckwelle an einer starren Wand verwandelt sich deren kinetische Energie vorübergehend in Druck, der zahlenmäßig gleich dem doppelten Impuls der Welle ist [23]. — Für das stöchiometrische Benzol-Sauerstoff-Gemisch wurde die Detonationsgeschwindigkeit zu 2440 m/s, der Drucksprung in der Welle gleich 43 mal dem Anfangsdruck, die Temperatur in der Flammenfront zu 6295° C und der Druck bei der Reflexion gleich 160 mal dem Anfangsdruck berechnet. Für die Rechnung gelten die im angezogenen Schrifttum gemachten Einschränkungen.

Bei einer Druckzündung muß das Gemisch durch eine Verdichtung ohne wesentliche Wärmeabfuhr auf eine Temperatur gebracht werden, die höher liegt als die Selbstzündungstemperatur, so daß nach geraumer Zeit eine selbständige Entflammung eintritt. Als Selbstzündungstemperatur ist dabei jene Temperaturgrenze zu verstehen, bei der unter den vorliegenden Versuchsbedingungen die freiwerdende Wärmemenge der bereits bei diesen niedrigen Temperaturen stattfindenden chemischen Reaktion gerade so groß ist, wie die Wärmeverluste. Mathematisch ist die Selbstzündungstemperatur die Temperaturgrenze für unendlich große Zündverzüge; denn nach erfolgter Verdichtung verstreicht eine endliche Zeitspanne (Zündverzug), bis Entflammung eintritt. Der Zündverzug ist abhängig von der Temperaturerhöhung über der Selbstzündungstemperatur. In einem Volumelement wird die Temperatur stetig bis zu ihrem Höchstwert ansteigen, da die Reaktionsgeschwindigkeit mit wachsender Temperatur stetig zunimmt und die bei der chemischen Reaktion freiwerdenden Wärmemengen zunächst klein sind.

Es wurden nun in der vorliegenden Arbeit drei für die Gegenüberstellung und für die Messung besonders geeignete Merkmale zum Vergleich herangezogen. Die normale Verbrennung in der Bombe wird mit dem normalen Betrieb im Motor verglichen und die Detonation in der Bombe mit dem Klopfen im Motor. Dabei soll:

1. die Druckmessung zeigen, daß nur bei der Detonation eine gerichtete Druckwelle auftritt;
2. die Messung mittels der Ionisationsmethode, daß nur bei der Detonation der elektrische Strom in der Meßkerze (als Funktion des Reaktionsverlaufes) sprunghaft seinen maximalen Wert annimmt;
3. die Messung der Flammengeschwindigkeit, daß sie sich bei der Detonation um Größenordnungen von der normalen Verbrennung unterscheidet und bei der Druckzündung undefinierbar ist.

b) Versuchseinrichtung.

Die Versuchsbombe bestand aus einem nahtlos gezogenen Stahlrohr (Bild 1), 1 m lang, 2″ l. W., und war mit zwei Blindflanschen verschlossen, welche Gewinde zur Aufnahme der Quarzkammern bzw. der Ionisationsmeßkerze trugen.

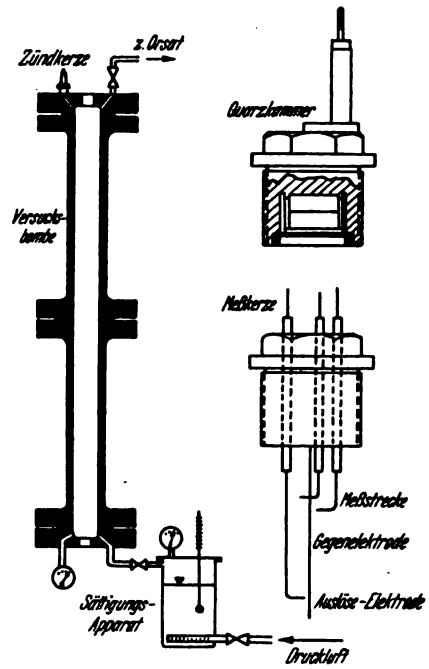


Bild 1. Versuchseinrichtung.

Zur Herstellung homogener Brennstoff-Luft-Gemische wurde die Verbrennungsluft in einem Sättigungsapparat (Bild 1) bei höherem Druck und konstanter Temperatur mit Kraftstoff gesättigt und anschließend gedrosselt. Dieses Verfahren bewährte sich sehr gut und ergab durch Veränderung von Druck und Temperatur im Sättigungsapparat jederzeit wiedergewinnbare und sehr gleichmäßige Mischungsverhältnisse. Die Gemischzusammensetzung ließ sich durch die Abgasanalyse prüfen.

Für die Druckmessung am Motor stand ein BMW-VI-Flugmotorenzylinder auf einem Einzylinder-Prüfstand zur Verfügung (n = 1800 U/min, N = 50 PS_e, ε = 1:3 bis 1:8). Zum Aufzeichnen der Drücke diente ein piezo-elektrischer Motorindikator mit einem Zweistrahl-Oszillographen und zwei eingebauten Verstärkern[3]). Die Zeitkonstante des Eingangskreises betrug bei dem verwendeten Meßbereich mehr als 1 min. Die Aufzeichnung erfolgte auf einer Trommelkamera mit einer Optik 1:2. Die eine Quarzkammer war eine Sonderausführung mit besonders hoher Eigenfrequenz; die Membrane war aus Leichtmetall hergestellt und hatte einen freien Durchmesser von 25 mm. Sie war bis auf 4 mm an den Verbrennungsraum herangeführt. Sie lag nach vorne völlig frei (Bild 1). Die zwei Piezo-Quarze hatten 20 mm Dmr. und waren möglichst flach gehalten. Die Eigenfrequenz dieser Kammer lag so hoch, daß sie nicht mehr durch einfaches Anschlagen mit dem Hammer zu periodischen Schwingungen angeregt werden konnte, da der Hammer mit der Membrane aperiodisch in die Nullage zurückkehrte.

c) Druckmessung in der Bombe.

Nachdem das einwandfreie Arbeiten der Druckmeßeinrichtung geprüft war, wurden zunächst mit Wasserstoff-, Azetylen- und Treibstoff-Luft-Gemischen bei normaler Verbrennung an den beiden Enden der Bombe Druckzeitdiagramme aufgenommen und dabei die Gemischzusammensetzung und der Ladungsdruck geändert. Die Zündung erfolgte oben; der Zündzeitpunkt ist in den Diagrammen mit z bezeichnet. In Bild 2 ist das Druckzeitdiagramm eines normal verbrennenden Wasserstoff-Luft-Gemisches, wie es an den beiden Meßstellen gleichzeitig aufgenommen wurde, wiedergegeben. Im Druckverlauf an der oberen Meßstelle (neben der Zündkerze) sieht man kurz nach erfolgter Zündung einen stetigen und langsamen Druckanstieg. Noch

[3]) Hersteller: Dr.-Ing. Nier, Dresden.

Digitized by Google

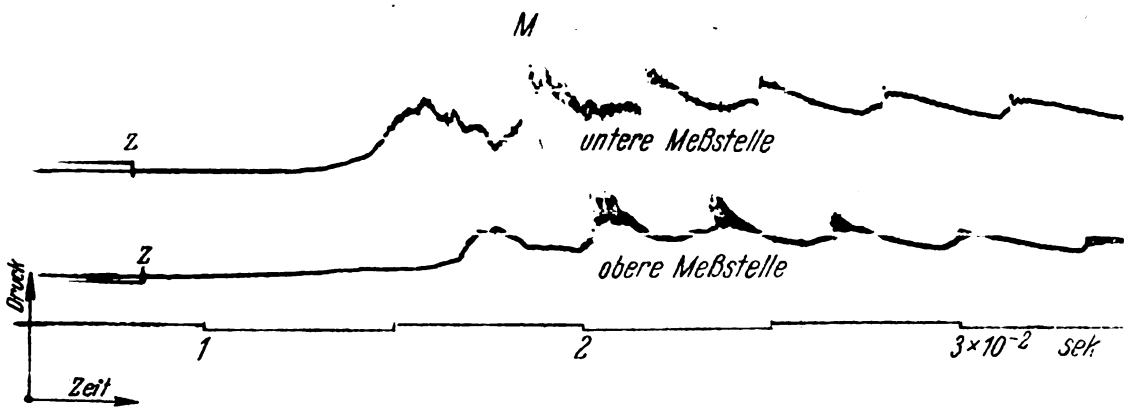


Bild 2. Druck-Zeit-Schaubild eines normal verbrennenden Wasserstoff-Luft-Gemisches in der Bombe. $p^{ind} = 1$ atü.

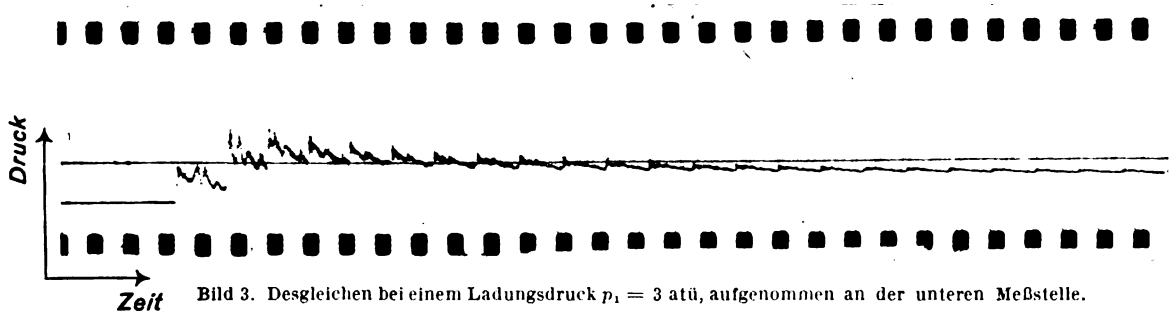


Bild 3. Desgleichen bei einem Ladungsdruck $p_1 = 3$ atü, aufgenommen an der unteren Meßstelle.

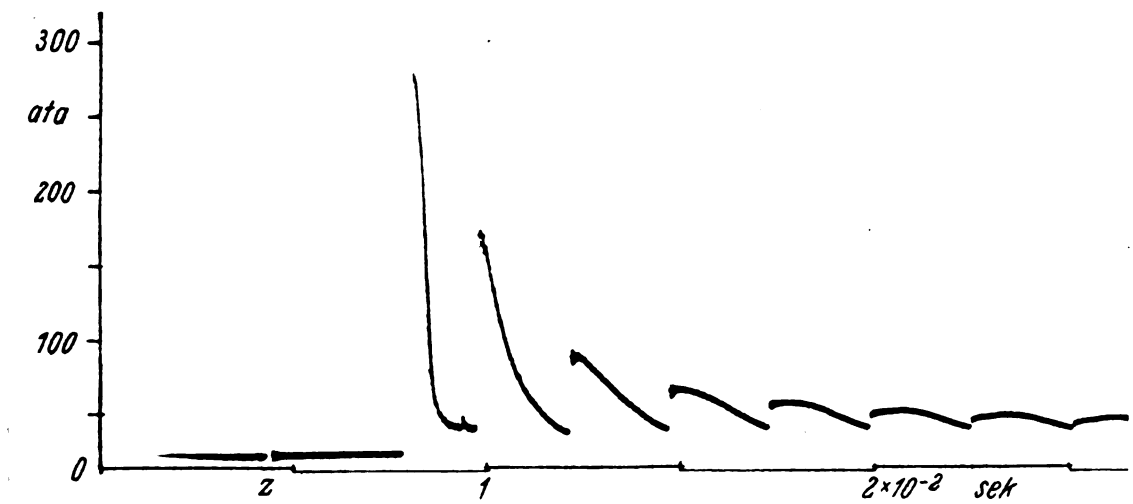


Bild 4. Druck-Zeit-Schaubild eines detonierenden Wasserstoff-Luft-Gemisches in der Bombe bei 8 atü Ladungsdruck an der unteren Meßstelle.

während dieser Zeit erreicht bereits eine sehr kräftige Druckwelle die untere Meßstelle, wird dort zurückgeworfen und läuft der Flamme entgegen durch das Rohr. Bei sehr fetten Gemischen und bei kleinen Ladungsdrücken besitzt diese Druckstörung noch keine steile Front und durchläuft deshalb das Rohr mit einer Geschwindigkeit, die ungefähr der Schallgeschwindigkeit dieses Zustandes entspricht. Sie eilte der wesentlich langsameren Flammenfront voraus. Mit der Flamme baut sich dort erneut eine Druckwelle auf, die bereits erheblich steiler ist und zusammen mit der Flamme das Rohrende erreicht (im Diagramm 2 mit *M* bezeichnet). Eine Ionisationsstrommessung am Rohrende bestätigte diese Gleichzeitigkeit. Die zweite Druckänderung ist schon so steil, daß die obere piezo-elektrische Meßkammer (normale Motorkammer) zur Eigenschwingung angeschlagen wird (etwa 20000 Hertz). Bei höheren Ladungsdrücken oder bei Gemischen mit geringerem Brennstoffüberschuß prägen sich diese Unstetigkeitswellen immer mehr und mehr aus, und die Druckzeitdiagramme gehen in eine Form über, wie sie Bild 3 zeigt. Da sich Unstetigkeiten mit großem Drucksprung wesentlich rascher als mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen [23], so wird jene mit der Flamme bald alle vorhergehenden kleineren Störungen eingeholt haben. Der Drucksprung ist dann so groß geworden, daß die Bedingungen zur Auslösung einer Detonationswelle gegeben sind. Das Diagramm eines detonierenden Wasserstoff-Luft-Gemisches zeigt dann Bild 4, bei der man an der unteren Meßstelle vor dem Eintreffen der Detonationswelle nicht mehr die geringste Druckstörung wahrnehmen kann. Aus der mittleren Verbrennungsdauer kann man im Vergleich mit Bild 2 ersehen, daß die Detonationswelle schon auf halbem Wege entstanden sein muß. Auch sieht man, daß bis zur ersten Wieder-

Digitized by Google

kehr an der unteren Meßstelle entsprechend der größeren Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine kürzere Zeit verstreicht. Der gemessene Drucksprung beträgt 270 at bei einem Anfangsdruck der Ladung von 8 atü. Wenngleich auch dieses Ergebnis quantitativ zu klein ist, da wohl bei derart raschen Druckänderungen selbst der piezo-elektrische Indikator in seiner geringen Trägheit versagt, so sind dennoch die erhaltenen Diagramme qualitativ wertvoll. Vielleicht tritt der theoretisch berechnete Druck tatsächlich nicht auf, da bei diesen großen Druckänderungen die Quarzkammer nicht mehr starr genug ist, um den gemachten Voraussetzungen für die Berechnung des Druckes zu genügen. Während man bei der normalen Verbrennung ein dumpfes Brummen hören konnte, äußerte sich die Detonation durch einen hellen, harten Schlag, so daß die Vermutung naheliegt, daß diese Geräusche mit dem Klopfen der Motoren identisch sind. Bemerkenswert ist ferner, daß bei diesen Bombenversuchen, die am unteren Ende des Rohres zum vorübergehenden Verschluß einer zweiten Bohrung eingeschraubte normale Zündkerze der Beanspruchung nicht standhielt und der Isolierkörper immer aus der Fassung gesprengt wurde. Da aber andererseits der Ladungsdruck bei den Bombenversuchen mit dem Kompressionsenddruck im Motor vergleichbar ist, könnten allein wegen der Zerstörung der Zündkerzen berechtigte Bedenken entstehen, ob die Detonation mit dem Klopfen gleichzusetzen ist. Um den Einfluß der Form des Verbrennungsraumes auf die Entstehung der Detonationswelle zu studieren, wurden bei zentraler Zündung in der von Wentzel [24] verwendeten kugeligen Bombe Wasserstoff-Luft-Gemische bei verschiedenen Ladungsdrücken verbrannt. Selbst bei höheren Drücken als im Versuchsrohr konnte keine Detonation erreicht werden. Dies steht in Einklang mit den theoretischen Untersuchungen von Jouguet [20], in welchen nachgewiesen wird, daß die Detonationswelle an eine ebene Flammenfront gebunden ist. So leicht es auch mit sämtlichen Sauerstoff-Gemischen war, im Versuchsrohr Detonation zu erhalten, so schwer war dies für Gas-Luft-Gemische. Bei Wasserstoff gelang dies erst bei Ladungsdrücken über 5 at oder bei kleineren Drücken, wenn in halber Rohrlänge ein Sieb eingebaut wurde. Es war ursprünglich gedacht, daß dadurch die Schwingungen im Rohr wirksam gedämpft werden könnten und dadurch, wenn man mit Nielsen [25] einig geht, die Verbrennungsgeschwindigkeit wesentlich kleiner würde. Warum aber durch diese Dämpfung das Auslösen der Detonationswelle gefördert wurde, entbehrt zunächst jeglicher Vorstellungsmöglichkeit. Das Sieb wurde zuerst aus Drahtgeflecht hergestellt und später aus einem Stahlblech mit Löchern von 4 mm Dmr. Es war nur für einen einzigen Versuch verwendbar, da es entgegen der Flammenfortschreitungsrichtung durchstoßen wurde; nur Siebe über 2,5 mm Stärke wurden nicht zerstört, aber erheblich ausgebeult. Die Richtung der Zerstörung läßt den Schluß zu, daß die Detonationswelle erst unterhalb des Siebes entstanden ist und erst nach erfolgter Reflexion am unteren Rohrende die Zerstörung verursachte. Die Detonationsdiagramme fielen für alle verwendeten Gemische qualitativ vollständig gleich aus. Dabei wurden Versuche mit Knallgas, Azetylen-, Benzol-Sauerstoff-Gemischen und mit Wasserstoff-Luft-Gemischen durchgeführt.

d) Druckmessung am Motor.

Mit derselben Quarzkammer und demselben Oszillographen wurden nun Druckmessungen am BMW-VI-Flugmotor vorgenommen und dabei Drehzahl, Last, Brennstoff und Verdichtungsverhältnis weitgehend geändert. Die Diagramme, welche bei heftigem Klopfen aufgenommen wurden, zeigen als Höchstdruck etwa nur den doppelten Druck der normalen Verbrennung, Bild 5.

Obgleich bei diesen Versuchen die Membrane der Quarzkammer ganz bis an den Verbrennungsraum herangeführt war und somit fast in der Fortsetzung der Zylinderwand lag, so kann zu diesen Messungen immer noch der Einwand gebracht werden, daß die Membrane nie parallel zu der

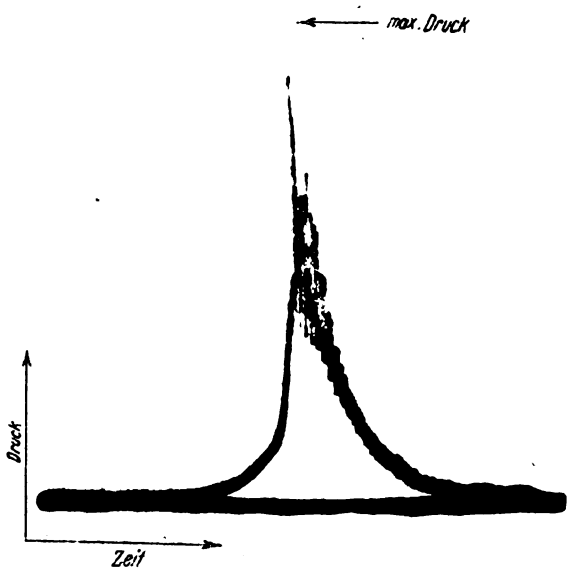


Bild 5. Druck-Zeitschaubild am klopfenden Motor. $\varepsilon = 7{,}5:1$; $n = 1070$; 70 vH Last.

Flammenfront einer vielleicht entstandenen Detonationswelle gerichtet war und dadurch der auftretende Höchstdruck nicht gemessen werden konnte, der entsprechend den Bombenversuchen und der Theorie wesentlich den gemessenen doppelten Wert übersteigen müßte. Auch die Veränderung der Lage der Zündkerze im besonderen, als auch der Drehzahl, der Gemischzusammensetzung, des Verdichtungsverhältnisses usw. brachten keine anderen Ergebnisse, obwohl es wahrscheinlich gewesen wäre, daß bei einer dieser Maßnahmen die Wellenfront in die richtige Lage zur Quarzkammer kommt. Die Unsicherheit, die aber trotzdem diesem Meßverfahren anhaftet, war Veranlassung, daß zur Klärung der gestellten Aufgabe weitere Messungen herangezogen wurden.

e) Ionisationsstromverlauf und Flammengeschwindigkeit.

Diese Motorversuche wurden an einem Einzylinder-Baumann-Motor (Bild 6 — $n = 300$ U/min, $N = 8$ PS$_e$, $\varepsilon = 1:6$, Zylinder = 165 mm Dmr., Hub = 180 mm) durchgeführt, der sich wegen der günstigen Anbringungsmöglichkeit der Meßkerze dazu besonders eignete. Es ist dies derselbe Motor, den Auer [12] zu seinen Messungen des Klopfstoßes benutzte.

1. Der Meßkreis.

Die Ankunft der Flamme an der Meßstelle wurde mit der von Kuchtner und von Schnauffer angegebenen [26, 15] Ionisationsmethode aufgenommen. Die Aufzeichnung des Ionisationsstromes geschah mittels Kathodenstrahl-Oszillograph und photographischer Aufzeichnung. Die Meßkerze selbst (Bild 1 und 6) besteht aus drei Elektroden, welche mit ihren Isolierkörpern (Sinterkorundrohr von 3 mm Dmr.)

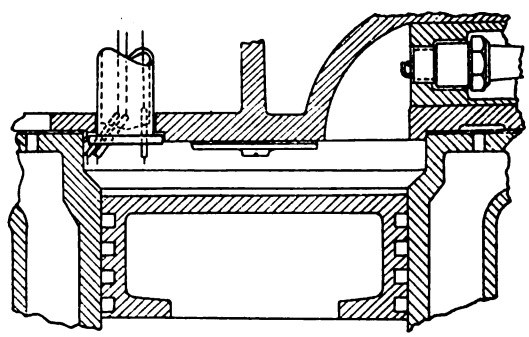


Bild 6. Verbrennungsraum des Versuchsmotors.

Digitized by Google

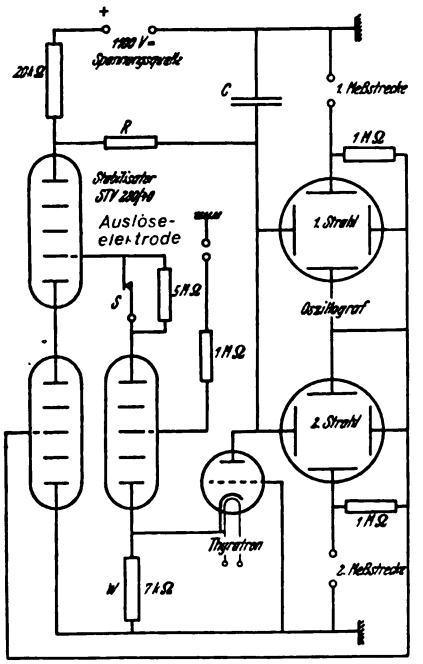


Bild 7. Schaltplan der Meßanordnung.

7 bis 8 mm in den Verbrennungsraum hereinragen; die Meßstrecke betrug 5 mm. Der Wärmewert dieser Elektroden war so groß, daß der Ruß am Isolierkörper gerade noch abbrannte. Um den Einfluß der heißen Meßkerze auf den Meßvorgang zu prüfen, wurde eine Elektrode bei gleichen äußeren Abmessungen mit einem Konstantandraht versehen und die benachbarte mit einem Kupferdraht. Die Drähte wurden dann zusammengebogen und hart verlötet. Mit diesem Thermoelement wurde die höchste Temperatur der Elektrode gemessen und den Glühzündungswerten, die Schnauffer [27] an einer besonderen Kerze im Flugmotor aufgenommen hat, gegenübergestellt. Es zeigte sich, daß beim normalen Betrieb die Temperatur, abhängig von der Last und der Luftüberschußzahl, zwischen 330 und 420° C lag und erst bei einem Klopfbetrieb von mehr als einer Minute auf über 1000° C anstieg. Trotzdem wurde bei dem letzten Versuch am Gang des Motors nichts Auffälliges bemerkt. Es ist somit genügend Sicherheit vorhanden, daß beim normalen Betrieb des Motors die Gefahr einer Beeinflussung der Verbrennung durch die Meßkerze ausgeschlossen ist, da die Temperatur derselben weit unter den Glühzündungswerten (800° C) blieb. Dieser Temperaturunterschied ist in Wirklichkeit noch größer, da das benutzte Millivoltmeter nur den Mittelwert über eine Periode anzeigt und die Meßkerze etwa zum Zeitpunkt der Zündung ihr Temperaturminimum hat.

Die an der Meßstrecke liegende Spannung betrug 140 V, der Widerstand in der Spannungszufuhr 1 MΩ (0,1 MΩ bei den Detonationsversuchen in der Bombe), Bild 7. Die am Oszillograph entstehenden Ausschläge sind also dem Ionisationsstrom verhältnisgleich. Der maximale Wert des Stromes ist also 140 (1400) μA. Bei einer Ablenkempfindlichkeit des Braunschen Rohres (AEG-Zweistrahlrohr mit Nachbeschleunigung) von 0,17 mm/V ergibt sich daraus eine Empfindlichkeit des Meßkreises von 0,17 mm/μA Ionisationsstrom. In einer gleichzeitig hier am Lehrstuhl laufenden Forschungsarbeit [28] an einem Zweitakt-Dieselmotor konnte selbst bei Anwendung einer 200fachen Spannungsverstärkung kein Einfluß der Kompressionsendtemperatur (ungefähr 600° C) wahrgenommen werden. Die Empfindlichkeit dieser Meßanordnung war 30 mm Ausschlag/μA. Diese Versuche lassen den Schluß zu, daß nur die stark ionisierende Wirkung der Flamme oder die freien Ionen während eines chemischen Prozesses in der Lage sind, bei einem solchen Meßkreis wahrnehmbare Ströme zu leiten und somit einen sichtbaren Ausschlag zu verursachen.

2. Der Zeitkreis.

Die mit Rücksicht auf die photographische Registrierung höchstzulässige Filmgeschwindigkeit ist etwa 8 m/s, wenn derselben noch ein rasch veränderlicher Vorgang überlagert wird. Diese Filmgeschwindigkeit reichte nicht mehr für die Ionisationsstrommessung aus, und es war deshalb notwendig, zu stehenden Bildern des Meßvorganges überzugehen. An Stelle des bewegten photographischen Filmes trat eine ruhende photographische Platte, und dafür wurden die Punkte auf dem Leuchtschirm senkrecht zum Meßausschlag zeitabhängig abgelenkt. Dies wurde dadurch erreicht, daß die Ablenkplatten für die Zeitablenkung am Oszillographen an einen Kondensator angeschlossen wurden, der über einen Widerstand von einer Stromquelle konstanter Spannung aufgeladen wurde. Die Spannung an diesem Kondensator steigt mit der Zeit nach einer Exponentialfunktion an und lenkt somit die Punkte am Leuchtschirm entsprechend ab. Der Vorteil gegenüber einer hohen Filmgeschwindigkeit liegt darin begründet, daß jetzt eine photographische Registrierung von 500 m/s möglich ist (die AEG gibt bei einer Optik 1:1 10 km/s an), da der Leuchtstoff der Fluoreszenzschirme etwa $^1/_5$ s lang nachleuchtet; also noch nach Beendigung des eigentlichen Meßvorganges photographisch wirkt. Die Ablenkplatten des Zeitkreises (Bild 7), sind an einen Kondensator C angeschlossen, der über einen Widerstand R von einer Zugspannung aufgeladen wird. Die Geschwindigkeit des Punktes nimmt linear mit dem Weg ab, der Zeitmaßstab wird somit logarithmisch. Die zwischen zwei Stellungen des Punktes am Schirm (oder auf der Photographie) verstrichene Zeitspanne ist RC (ln u_1—ln u_2) in Sekunden, wenn darin u_1 und u_2 die den Stellungen zuzuordnenden Ablenkspannungen sind und RC die Zeitkonstante des Zeitkreises. Der Kondensator wird durch ein Thyratron (gittergesteuertes Entladungsgefäß) entladen gehalten, wenn dessen Gitter mit der Kathode das gleiche Potential hat. Der vorgeschaltete Stabilisator ist zunächst nicht gezündet. An diesem Stabilisator liegt über einen Widerstand W eine Spannung nahe der Zündspannung. Wenn auch durch den Stabilisator noch kein meßbarer Strom fließt, so nehmen doch die Glimmflächen bereits ihre Teilspannungen an. Veranlaßt man nun eine Störung dieser Potentialaufteilung, so wird an einer dieser Flächen die Zündspannung überschritten und die Durchzündung des gesamten Stabilisators eingeleitet. Diese Störung ist beispielsweise die Erdung einer solchen Glimmfläche (über einen Schutzwiderstand) oder bei kapazitiver Ankopplung eine Spannungsänderung am Kopplungskondensator. Bei den vorliegenden Versuchen wurde eine dieser Flächen galvanisch mit der ersten Elektrode der Meßkerze (Auslöseelektrode) verbunden. Trifft nun die fortschreitende Flamme diese Elektrode, so wird durch die Erdung über die Flamme der Stabilisator gezündet und durch den Spannungsabfall des Stromes am Widerstand W in der Kathodenleitung das Thyratron gesperrt, so daß die Aufladung des Kondensators C beginnen kann. Bei entsprechender Größe von R und C können damit Schreibgeschwindigkeiten von einigen cm/s bis zu einigen km/s erreicht werden. Der Vorgang des Zündens und somit die Ablenkung kann sich erst wiederholen, wenn kurzzeitig der Schalter S geöffnet wurde. Der Überbrückungswiderstand über diesen Schalter hat den Zweck, daß vor dem Schließen die Glimmflächen ihre zugehörigen Spannungen angenommen haben; der Widerstand ist aber so groß gewählt, daß der Stabilisator erlischt. Diese Schaltung hat nicht nur den Vorteil, daß die Zeitablenkung einmalig wird, sondern gestattet auch eine Auslösung des Zeitkreises mit Spannungen von wenigen Volt und mit Strömen der Größenordnung von 1 μA; ein Leistungsaufwand, der bedeutend kleiner ist, als bei der unmittelbaren Beeinflussung des Gitters am Thyratron. Eine sehr genaue Zeitauslösung war nötig, da die zur Messung zur Verfügung stehende Zeit bei einer Punktgeschwindigkeit von 200 m/s und einem Leuchtschirm-Durchmesser von 5 cm nur $^1/_{4000}$ s beträgt. Deswegen mußte auch die Auslösung von der Flamme selbst gesteuert werden, da sich die Ankunft der-

Digitized by Google

selben an der Meßstrecke weder im Motor noch in der Bombe mit dieser Genauigkeit vorherbestimmen ließ und auch nicht von Versuch zu Versuch konstant blieb.

3. Normale Verbrennung in der Bombe und im Motor.

Mit der soeben beschriebenen Anordnung wurde zunächst der Ionisationsstromverlauf bei der Verbrennung in der Bombe von Wasserstoff-, Azetylen-, Benzin- und Benzol-Luft-Gemischen aufgenommen, Bild 8. Die beiden Ausschläge in Bild 8, zeigen den Stromverlauf der beiden Meßkerzen. Die Diagramme fielen für alle verwendeten Gasgemische ähnlich aus und gestatten, da die Meßstrecke bekannt ist, die Ermittlung der Flammengeschwindigkeit. Gleichzeitig ist die Änderung des Ionisationsstromes ersichtlich und dessen maximaler Wert. Die gleichen Kraftstoffe ergaben im Motorbetrieb bei normaler Verbrennung einen Stromverlauf wie ihn Bild 9 zeigt. Diese Versuchsreihe ist mit dem gleichen Zeitmaßstab wie die entsprechenden Bombenversuche aufgenommen worden. Die daraus ermittelten Flammengeschwindigkeiten betrugen im Motor bei großer Streuung 3 bis 20 m/s und waren von der Last und Luftüberschußzahl abhängig. Die große Streuung (von mehr als 100 vH) war bei der Kürze der Meßstrecke (5 mm) zu erwarten, da jegliche Mittelwertsbildung fehlt und auch eine Richtungsänderung der Flammenfront eine scheinbare Vergrößerung der Geschwindigkeit zur Folge hat. Bei kleinerer Last oder bei großem Luftüberschuß wurden die Streuungen noch größer, da die Wirbelung im Motor in Verbindung mit der kleineren Flammengeschwindigkeit eine teilweise Auflösung der Flammenfront verursacht.

Im Ionisationsstromverlauf zeigte sich dagegen kein Unterschied. Der langsame Stromanstieg, der einem langsamen Temperaturanstieg zuzuordnen ist, stimmt mit der Vorstellung überein, daß bei der Verbrennung die Aktivierungsenergie von Schicht zu Schicht im wesentlichen durch Wärmeleitung übertragen wird und beim Erreichen der Selbstentzündungstemperatur in dieser Schicht eine immer rascher werdende chemische Reaktion einsetzt. Diese Vorstellung des Verbrennungsvorganges wurde aus der Arbeit von Nußelt, Die Zündgeschwindigkeit brennbarer Gasgemische [29], übernommen und findet durch diese Messung erneut eine Bestätigung.

4. Detonation in der Bombe.

Der Versuch, in der Bombe mit Benzin- oder Benzol-Luft-Gemischen Detonation zu erhalten, war erfolglos. Diese Versuchsreihe mußte deshalb mit Kraftstoff-Sauerstoff-Gemischen durchgeführt werden, nachdem festgestellt wurde, daß die erhaltenen Diagramme für Wasserstoff bei Luft- und Sauerstoff-Gemischen sowohl bei der Druck- als auch bei Ionisationsstrommessung sowie der detonierenden Gasgemische untereinander völlig übereinstimmten. Auch durch das Gehör konnte kein Unterschied in der Art der Geräusche bemerkt werden. Ein solches Ionisationsstromdiagramm zeigt Bild 10 für ein detonierendes Benzol-Sauerstoff-Gemisch. Obwohl die Schreibgeschwindigkeit um ein Vielfaches erhöht worden ist, zeigt der Stromverlauf immer einen scharfen Abriß. Veröffentlicht wurde mit Rücksicht auf die Güte der Bilder ein Diagramm mit etwa 50 m/s anfänglicher Schreibgeschwindigkeit, da auch bei 400 m/s Anfangsgeschwindigkeit kein anderer Stromverlauf erhalten wurde. Im Bild 10 tritt am oberen Strahl der Einsatz des Stromes nach 25,7 mm (im Originaldiagramm) auf. Aus dem Eichdiagramm 14 entnimmt man die dazugehörige Spannung von 245 V. Für den unteren Strahl erhält man entsprechend eine Spannung von 231 V. In Bild 14 wurden die Ablenkspannungen von der Endspannung des Ladekondensators aus gezählt, damit die abgelesene Spannung sofort in die Rechnung eingesetzt werden kann. Der Ladewiderstand $R = 1{,}83\ \mathrm{M}\Omega$ und der Kondensator $C = 908$ pF; die Zeitspanne wird somit $t = RC(\ln u_1 - \ln u_2) = 98 \cdot 10^{-6}$ s. Eine Kontrolle der Ablesung bietet die Störung des oberen Strahls auf den unteren Strahl, welche als kurzer Zacken ersichtlich ist. Die Meßstrecke betrug bei diesem Versuch

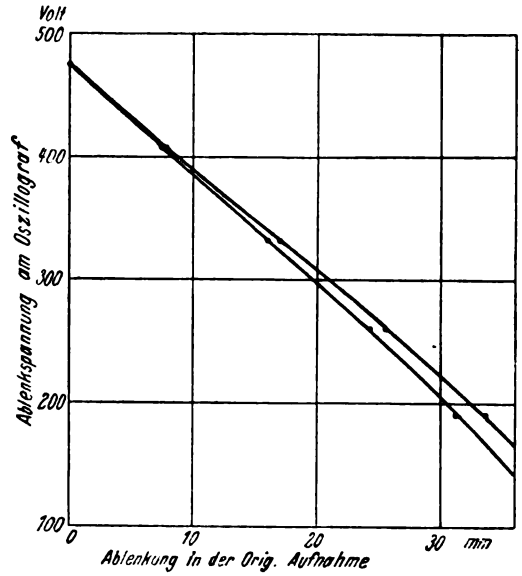


Bild 14. Eichdiagramme des Oszillographen. (Die obere Linie entspricht dem unteren Strahl der Aufnahme 7 bis 12.)

220 mm. Es ergibt sich somit eine Detonationsgeschwindigkeit von 2250 m/s, welche somit bis auf 8 vH mit dem berechneten Wert übereinstimmt. Der plötzliche Stromeinsatz entspricht auch der Theorie, da bei einer Flammenfrontstärke in der Größenordnung von 10^{-5} mm und einer Flammengeschwindigkeit von 2400 m/s eine Zeitspanne von $4 \cdot 10^{-12}$ s vom Beginn der Entflammung bis zum Temtemperaturmaximum verstreicht. Besonders auffällig ist auch die Größe des Ionisationsstromes; es scheint also die tatsächliche Temperatur der Flamme der theoretisch berechneten nahezukommen.

5. Klopfen im Motor.

Nun wurden mit derselben Meßanordnung und in gleicher Weise Ionisationsstromdiagramme am klopfenden Motor aufgenommen. Um bei diesen Versuchen den Einfluß glühender Elektroden auszuschalten, wurde der Motor im normalen Betrieb warmgefahren und erst einige Takte vor der Aufnahme durch Veränderung der Zündungseinstellung zum Klopfen gebracht. Diese Diagramme, Bild 11, zeigen einen ganz anderen Verlauf des Stromes wie die entsprechenden Bombenversuche. Dieser langsame Stromanstieg ist die Folge einer langsam einsetzenden Reaktion an der Meßstelle. Es liegt also eine Verbrennungsform vor, die sich damit grundlegend von der der Detonationswelle unterscheidet. Aus der Theorie ergibt sich, und durch den Versuch konnte gezeigt werden, daß bei der Detonation der Ionisationsstrom unstetig ansteigt. Es kann dabei offengelassen werden, ob die elektrische Leitfähigkeit der Flamme auf Thermo-Ionisation zurückzuführen ist oder ob bei der chemischen Reaktion freie Ionen entstehen. Die Art des gemessenen Stromeinsatzes schließt also völlig das Vorhandensein einer Detonationswelle im Motor aus.

Die aus Bild 11 ermittelte Zeit für den Stromanstieg an einer Meßstelle ist rund $3 \cdot 10^{-5}$ s. Auch zeigt Bild 10 für die Detonation in der Bombe praktisch einen Kurzschluß der Meßstrecke durch die Flamme an, da der Maximalwert des Stromes auftrat, dagegen wird bei klopfendem Motor nur $^2/_3$ des Höchstwertes erreicht; die Flamme hat eine kleinere Leitfähigkeit, also eine niedrigere Temperatur. Die beiden letzten Ergebnisse sprechen ebenfalls gegen das Auftreten einer Explosionswelle im Motor.

Derselbe Stromverlauf wurde sowohl an der Meßelektrode festgestellt, welche 1 mm von der Zylinderwand entfernt war, als auch bei heftigem Klopfen an den Elektroden mit größerem Abstand. Die Meßkerze selbst war in jener Zone im Motor angebracht, die als Klopfzone bekannt ist und sich auch als solche am Versuchsmotor durch Zeichnungen am

Digitized by Google

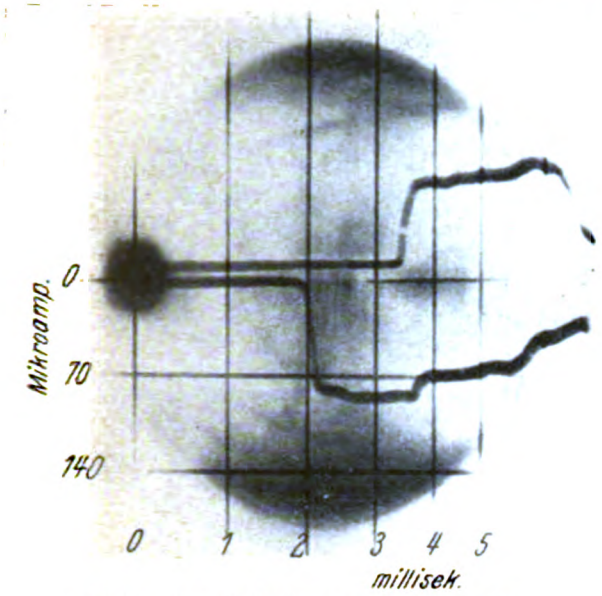


Bild 8. Normale Verbrennung in der Bombe.

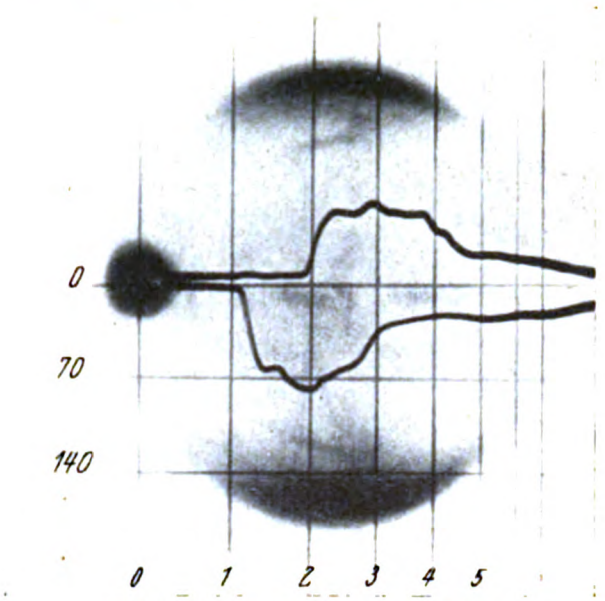


Bild 9. Normale Verbrennung im Motor.

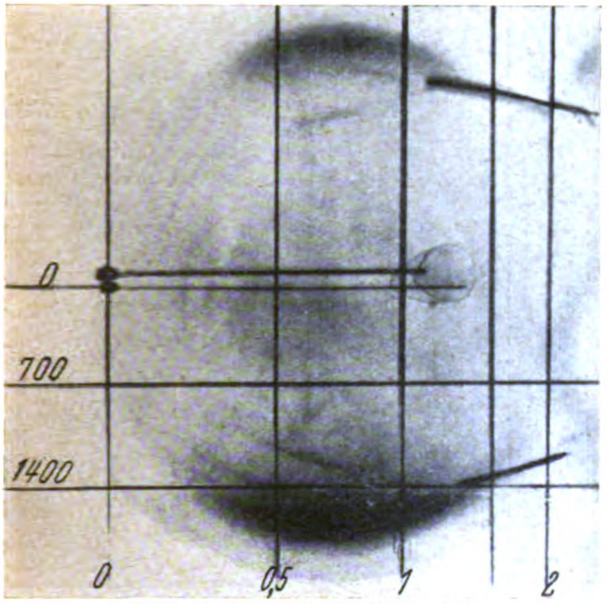


Bild 10. Detonation in der Bombe.

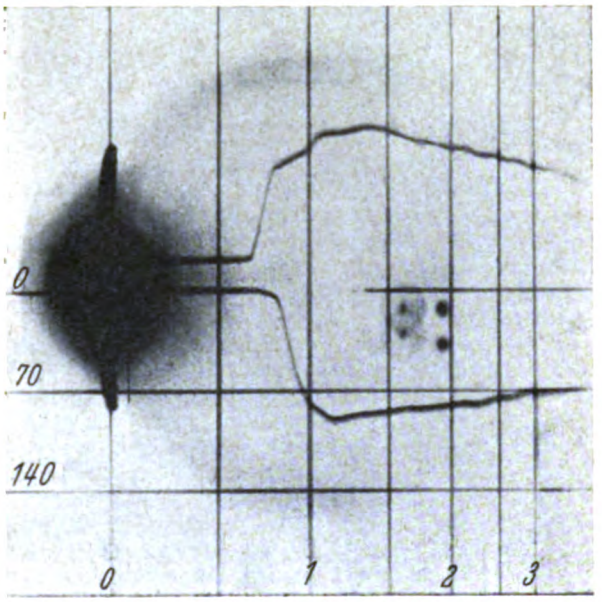


Bild 11. Klopfen im Motor.

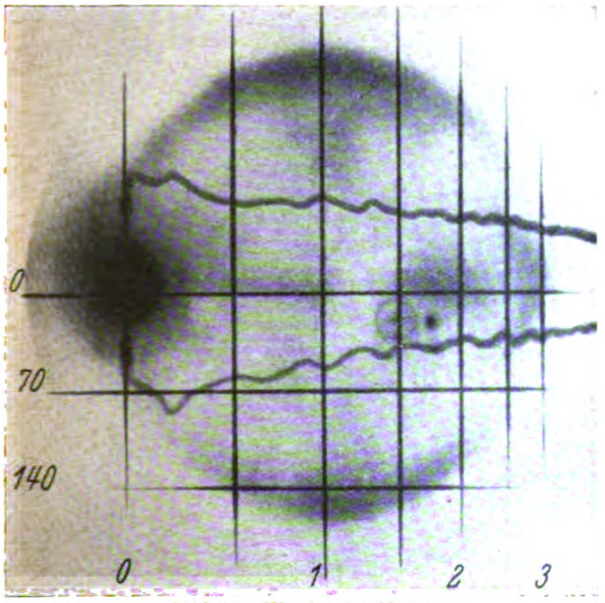


Bild 12. Klopfen im Motor.

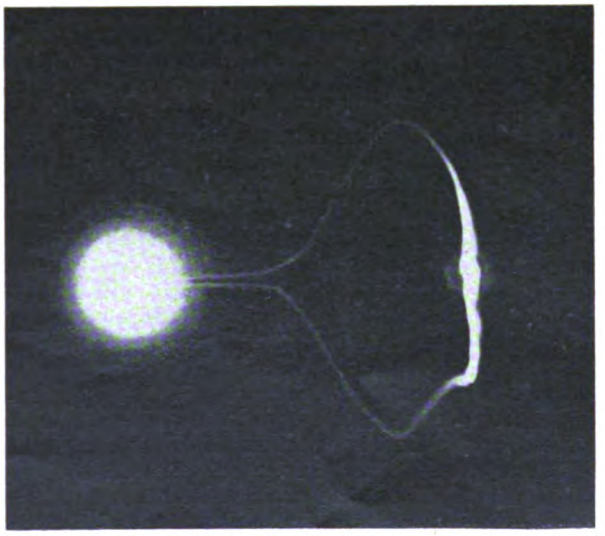


Bild 13. Klopfen im Motor.

Digitized by Google

Kolben und am Zylinderkopf abhob. Eine Auswertung dieser Diagramme nach der Flammengeschwindigkeit ist wegen des allmählichen Einsatzes und der großen Streuung nahezu unmöglich. Oft wurden Diagramme wie Bild 12 aufgenommen, bei der die Auslösung der Zeitablenkung erst nach dem Ansprechen der Meßelektroden erfolgte. Im weiteren Stromverlauf sieht man in diesem Diagramm Schwankungen, die den Gasschwingungen im Zylinder zuzuordnen sind. Bild 13 zeigt bei nochmals gesteigerter Schreibgeschwindigkeit und bei verkleinerter Zugspannung den vollständigen Verlauf des Ionisationsstromes bei klopfendem Motor. Aus einigen Diagrammen läßt sich noch mit Annäherung eine Entflammungsgeschwindigkeit ermitteln. Die gefundenen Werte liegen zwischen plus 20 m/s, unendlich (= gleichzeitige Entflammung) und minus 20 m/s. Die Größenordnung und die Streuung der Geschwindigkeit lassen auf Druckzündung schließen, denn bei einer Verbrennung in Form einer Flammenfront müßten die Meßelektroden der Reihe nach ansprechen. Die negativen Werte lassen neuentstandene Zündzentren vermuten.

Ob nun die Verdichtung des Ladungsrestes und die damit verbundene Erwärmung die einzige Ursache der Entzündung ist oder ob noch andere Erscheinungen mitwirken läßt sich durch diese Messung allein nicht entscheiden.

IV. Versuchsergebnisse und Zusammenfassung.

Dem Klopfen im Motor geht bekanntlich eine normale Verbrennung des ersten Teils der Ladung voran, und nur der Teil der Ladung klopft, der zuletzt verbrennt. Dieser Teil der Ladung wird kurz mit Ladungsrest bezeichnet.

Das Ziel der vorliegenden Messungen war zunächst, nochmals die Verbrennungsform in diesem Ladungsrest zu untersuchen, da das außerordentlich umfangreiche Schrifttum auf diesem Gebiet keine einheitlichen, oft sogar gegensätzlichen Ergebnisse zeigt. Darüber hinaus sollte versucht werden, ob durch die Verwendung der in den letzten Jahren zu großer Vollkommenheit entwickelten elektrischen Meßgeräte tiefere Einblicke in den Mechanismus des Verbrennungsvorgangs möglich sind.

Im Schrifttum findet man oft die Auffassung vertreten, daß der Ladungsrest explosionsartig, also in seiner Gesamtheit gleichzeitig entflammt, dagegen zeigen andere Forscher, daß nur eine sehr große Verbrennungsgeschwindigkeit vorliegt. Da sich das Klopfen durch einen hart klingenden Schlag äußert, lag die Vermutung nahe, diese Geräusche einer Detonationswelle zuzuschreiben, welche unter den günstigen Verbrennungsbedingungen im Motor entstünde, obwohl die kurze, zur Verfügung stehende Anlaufstrecke dagegenspricht. Es wurden auch Aufnahmen am Motor veröffentlicht, die die Detonationswelle zeigen, sogar in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 2 km/s. Frühere Messungen mit der Ionisationsmethode ergaben, daß diese hohen Werte der Flammengeschwindigkeiten niemals erreicht werden, sondern nur 300 m/s. Ein neuerer Zeitlupenfilm zeigte, daß man im klopfenden Ladungsrest überhaupt nicht mehr von einer Flammenfront sprechen kann, sondern daß im Ladungsrest Zündzentren entstehen, von denen aus sich die Entflammung rasch nach allen Richtungen hin ausbreitet.

Da sich die Detonationswelle bisher mit Sicherheit nur in langgestreckten Räumen nachweisen ließ, wurden bei den vorliegenden Messungen die Versuche zunächst an einer zylindrischen Bombe (Rohr) durchgeführt und dann mit derselben Meßeinrichtung am Motor. Es wurden drei verschiedene Messungen ausgeführt. Dabei konnten aus der Druckmessung allein keine zwingenden Schlüsse gezogen werden. Außerdem erwies sich das piezo-elektrische Druckmeßverfahren trotz weitgehender Verbesserungen für die Messung des Druckanstieges bei der Detonation als zu träge. Die Messung der Verbrennungsgeschwindigkeit sollte lediglich als Bestätigung dienen, da solche Messungen bereits mehrfach durchgeführt wurden. Es mußte also ein anderes Meßverfahren Anwendung finden. Zu diesem Zweck wurde die Ionisationsmethode mit Kathodenstrahloszillograph verwendet, aber diesmal nicht, um den Zeitpunkt der Ankunft der Flammenfront zu ermitteln, sondern um aus dem zeitlichen Verlauf des Ionisationsstromes auf chemische und thermische Veränderungen in der Ladung zu schließen. Dazu war natürlich eine wesentlich höhere Filmgeschwindigkeit nötig, als bisher angewendet worden war. Ferner mußte man mit Rücksicht auf die photographische Registrierung zu stehenden Bildern des Vorganges übergehen. Aber gleichzeitig entstand damit die Schwierigkeit, den Kathodenstrahl nur ein einziges Mal und im richtigen Augenblick über den Leuchtschirm zu bewegen. Dies wurde durch Erweiterung einer bekannten Schaltung erreicht.

Die Messungen zeigen zunächst im klopfenden Motor einen grundsätzlich verschiedenen Verlauf des Ionisationsstromes gegenüber demjenigen detonisierender Gasgemische, so daß mit Sicherheit daraus folgt, daß im klopfenden Motor keine Detonationswelle auftritt.

Darüber hinaus deutet die Art des Stromeinsatzes auf einen langsam einsetzenden chemischen und wahrscheinlich oxothermen Vorgang hin, der nach erfolgter Verdichtung im gesamten Ladungsrest beginnt und stetig seinem Höchstwert zustrebt. Daß der langsame Anstieg der Leitfähigkeit der Ladung von keiner Kompressionswärme herrühren kann, ist bewiesen worden.

Da die Temperatur und die Gemischbildung zeitlich und örtlich im Verbrennungsraum verschieden sind, ist der Zeitpunkt und der Ort der ersten Entflammung Zufälligkeiten unterworfen. Es entstehen somit Zündzentren, von wo aus die Entflammung fortschreitet.

Durch diese Zündzentren lassen sich zwanglos die beobachteten negativen Flammengeschwindigkeiten und deren große Streuung erklären. Eine nahezu geschlossene Flammenfront, wie sie bei der normalen Verbrennung vorhanden ist, gibt es demnach im klopfenden Ladungsrest nicht.

Es liegt also im klopfenden Motor, soweit diese Messungen allein den Schluß zulassen, Selbstzündung des Ladungsrestes vor, da die Entflammung desselben nur in mittelbarem Zusammenhang mit der Zündungseinleitung von der Zündkerze her bzw. der vorangehenden Flammenfront steht. Da die Drucksteigerung und die damit verbundene Erwärmung letzten Endes die Ursache für die Entflammung ist, ist also die Druckzündung als besondere Form der Selbstzündung die Ursache des Klopfens. Es ist allerdings denkbar, daß außer dem Druck elektrische Vorgänge, Wärmeeinstrahlung und noch unbekannte Erscheinungen auf die Geschwindigkeit des chemischen Umsatzes einwirken. Insbesondere könnte man die Wirkung der Antiklopfmittel dahingehend erklären, daß diese den ersten Einsatz verzögern oder anfänglich die Geschwindigkeit der chemischen Reaktion herabsetzen und somit der Flammenfront noch Gelegenheit geben, auch den Ladungsrest zu durcheilen, ehe dieser durch Druckzündung entflammt.

Da zum Zeitpunkt des Auftretens der ersten Zündzentren bereits der gesamte Ladungsrest zündreif ist, breitet sich die Entflammung außerordentlich rasch aus und es entsteht dort ein Gebiet hohen Druckes, welches dann zur Zündkerze abströmt und auch dorthin, wo durch Abkühlung die Verbrennung verzögert wurde. Da sich eine solche Druckstörung während ihrer Fortbewegung in ihrer Front versteift, kann man sich vorstellen, daß diese beim Auftreffen an einer starren Wand die Klopfgeräusche verursacht, ähnlich wie die vorliegenden Messungen es für die Detonationswelle zeigen. Auch diese Welle verklingt unter mehrfacher Reflexion an den Wänden des Verbrennungsraumes. Der Leistungsabfall ist dann die Folge des erhöhten Wärmeübergangs an die Wand, verursacht durch die Bewegung der Gasmasse, durch den zeitweilig erhöhten Druck bei der Reflexion der Gasschwingungen und der damit verbundenen Verwirbelung.

Um in dieser Zusammenfassung ein abgerundetes Bild des Klopfvorganges wiederzugeben, wurden neben den eigenen Messungen und Ansichten auch Ergebnisse des angezogenen Schrifttums verwendet.

Digitized by Google

V. Schrifttum.

[1] Midgley und Boyd, Detonation Characteristics of Blends of Aromatic and Paraffin Hydrocarbons. J. Industr. Engng. Chem. Bd. 14 (1922), S. 589.

[2] Ricardo, Schnellaufende Verbrennungsmaschinen. Übersetzt und bearbeitet von Werner und Friedmann. Berlin, J. Springer (1926).

[3] Dumanois, La possibilité de réaliser des hautes compressions sans antidétonants. Génie Civ. Bd. 88 (1926), S. 570.

[4] Wheeler, Lovell, Coleman und Boyd, Studies of Combustion in the Gasoline Engine. J. Industr. Engng. Chem. Bd. 19 (1927), S. 373 u. 376.

[5] Mallard et Le Chatelier, Recherches experimentales et theoretiques sur le combustion des mélanges gaseux explosifs. Annales des Mines. Série 8 Bd. 4 (1883).

[6] Dixon, Phil. Trans. Bd. 184 (1893), S. 103; siehe auch Bone and Townend, Flame and Combustion in Gases. Longmans 1927, dort sehr umfangreiches Schrifttumverzeichnis.

[7] Nägel, Versuche über die Zündgeschwindigkeit explosibler Gasgemische. Z. VDI Bd. 52 (1908), S. 244.

[8] Klüsener, Untersuchung zur Dynamik des Zündvorgangs. Forsch. Ing.-Wes. (1928), Heft 309.

[9] Dumanois et Lafitte, Comptes rendues de l'Académie des Sciences de France Bd. 182 (1926).

[10] Endres, Der Verbrennungsvorgang im Gas- und Vergasermotor. Berlin, J. Springer 1928.

[11] Callendar, Dopes and Detonation. Engng. Bd. 121 (1928), S. 475.

[12] Auer, Untersuchungen über das Klopfen von Vergasermotoren. Forsch. Ing.-Wes. 340; VDI-Verlag.

[13] Richter, Über das Klopfen der Zündermotoren. Der Motorwagen Bd. 28 (1925), S. 682; Bd. 29 (1926), S. 28, 281, 374.

[14] Lindner, Entzündung und Verbrennung von Gas- u. Brennstoffdampf-Gemischen. VDI-Verlag 1931, dort Schrifttumverzeichnis.

[15] Schnauffer, Das Klopfen von Zündermotoren. DVL-Jahrbuch 1931, S. 375, auch gekürzt Z. VDI Bd. 75 (1931), S. 455.

[16] Schnauffer, Verbrennungsgeschwindigkeit von Benzin- und Benzol-Luft-Gemischen in rasch laufenden Zündermotoren. VDI-Sonderheft 5 (1931), S. 127, u. Diss. TH Berlin 1931.

[17] Schnauffer, Engine-Cylinder Flame-Propagation studied by New Methods S.A.E.J. (1934), S. 17.

[18] Withrow and Rassweiler, Slow Motion Shows Knocking and Non-Knocking Explosions. S.A.E.J. (1936), S. 297, dort Schrifttum amerik. Motoruntersuchungen.

[19] Sokolik et Voinov, Le Cognement dans un moteur à essence et l'onde explosive. Technical Physics of the USSR Bd. 3 (1936), Nr. 9, S. 803.

[20] Jouguet, Mécanique des Explosifs. Encyclopédie Scientifique, Paris.

[21] Boerlage, Broeze, van Driel and Peletier, Detonation and stationary gas waves in petrol engines. Engng. Bd. 143 (1937), S. 254; Auszug in Forschung Bd. 9 (1938), S. 105.

[22] Becker, Theorie der Verdichtungsstöße. Z. Phys. Bd. 8 (1922), S. 336.

[23] Rüdenberg, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Impulsstärke von Verdichtungsstößen. Artill. Monatshefte Nr. 114 (1916), S. 285.

[24] Wentzel, Der Zünd- und Verbrennungsvorgang im kompressorlosen Dieselmotor. Forsch. Ing.-Wes. 366 (1934), VDI-Verlag.

[25] Nielsen, Einfluß der Eigenschwingung brennender Gasgemische auf ihre Brenngeschwindigkeit. Forschung Bd. 4 (1933), S. 300.

[26] Kuchtner, Elektrische Messung der Zündgeschwindigkeit in einer Verbrennungskraftmaschine. Forschung Bd. 2 (1931), S. 197.

[27] Schnauffer, Messung der Glühzündungstemperatur in raschlaufenden Zündermotoren. Z. VDI (1933), S. 927.

[28] Herele, Zündverzug und Verbrennung im Dieselmotor. Diss. TH München, erscheint demnächst.

[29] Nußelt, Die Zündgeschwindigkeit brennbarer Gasgemische. Z. VDI (1915), S. 872.

Digitized by Google

Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem).

U. a. Zur Berechnung des Flügels mit Ruder und Hilfsruder.

Von F. Dietze.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Festigkeit.

Die bisher bekannten Luftkraftgesetze für die in ebener Strömung harmonisch schwingende, einmal knickbare dünne Platte (Flügel mit Ruder) werden erweitert, um harmonisch zeitabhängige, sonst aber beliebige Verformungsmöglichkeiten der Platte zu erfassen. Näher behandelt werden die Luftkräfte und Luftmomente für den Fall, daß die Verformungen des Plattenquerschnitts nach linearen Überlagerungen von Geradenzügen und gewissen ganzen rationalen Funktionen erfolgen; dabei entspricht der dreigliedrige Geradenzug einem Flügel mit Ruder und Hilfsruder.

Gliederung.

I. Vorbemerkungen.
II. Platte beliebiger Formänderungsfähigkeit.
III. Platte beschränkter Formänderungsfähigkeit.
IV. Bemerkungen zur Ableitung der Formeln.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

I. Vorbemerkungen.

Die insbesondere für Flatter-Untersuchungen benötigten Luftkraftgesetze des schwingenden Flügels wurden bisher nur für die in sich starre und für die in sich einmal knickbare dünne Platte (Flügel mit und ohne Ruder) veröffentlicht [1, 2...7]. Über die Schwingung der Platte und über das instationäre Strömungsbild wurden dabei die bekannten Voraussetzungen des sog. ebenen Problems getroffen. Betrachtet wurden nur kleine Schwingungen senkrecht zur ungestörten Strömungsrichtung, so daß zwischen den Bewegungen der Platte und den Luftkräften und Luftmomenten lineare Beziehungen bestehen. Die Arbeiten beschränkten sich auf die Angabe der Luftkraft und des Luftmoments der gesamten Platte sowie des Ruderabschnitts.

Unter den gleichen Voraussetzungen werden im folgenden allgemeinere harmonische Bewegungen der dünnen Platte behandelt; unter »Bewegung« wird dabei die Bewegung der in sich starren Platte sowie die Verformung der Platte in sich — sei es nach stetig gekrümmten Linien oder nach Geradenzügen — verstanden. Im Gegensatz zu den obengenannten Arbeiten werden hier neben den örtlichen (laufenden) Luftkräften die Luftkräfte und Luftmomente irgendwelcher Abschnitte des betrachteten Plattenstreifens behandelt, die jeweils durch zwei beliebige Achsen parallel zur Breitenrichtung begrenzt sind. Diese Luftkräfte und Luftmomente werden z. B. benötigt, wenn die Luftkräfte und Luftmomente einer mehrfach knickbaren Platte aus den Luftkräften und Luftmomenten von einmal knickbaren Platten zusammengesetzt werden sollen.

Die Luftkräfte und Luftmomente der schwingenden Platte werden in bekannter Weise als Reaktionskräfte und -momente eines die Platte ersetzenden Wirbelbandes mit zeitabhängiger Wirbelstärke $\gamma(x, t)$ angesehen (x = Koordinate in Plattentiefe, zugleich in Richtung der ungestörten Strömung; t = Zeit). Es bedeuten (s. Bild 1):

b die Breite eines senkrecht zur Breitenrichtung herausgeschnittenen Streifens der Platte,

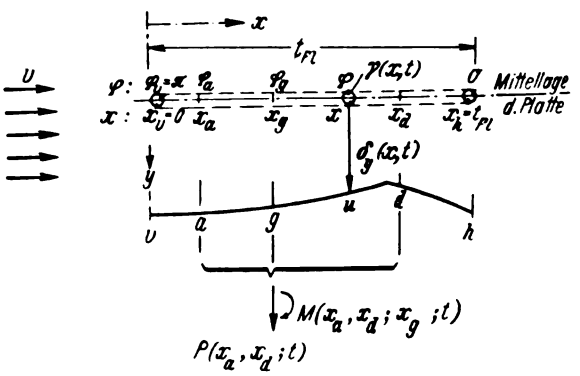


Bild 1. Bezeichnungen und Koordinaten.

x_a, x_d die Abszissen von zwei parallel zur Breitenrichtung liegenden Achsen a und d, die einen Abschnitt a, d des Plattenstreifens begrenzen,

v die ungestörte Strömungsgeschwindigkeit (unendlich weit vor der Platte),

ϱ die Luftdichte.

Die auf die Längeneinheit bezogene Luftkraft ist an der Stelle x des Plattenstreifens (Luftkraftverteilung über die Plattentiefe):

$$p(x, t) = -\varrho\, v\, b\, \gamma(x, t). \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Auf den Abschnitt a, d des Plattenstreifens (s. Bild 1) entfällt die Luftkraft:

$$P(x_a, x_d; t) = \int_{x_a}^{x_d} p(x, t)\, dx, \quad \ldots\ldots \quad (1a)$$

das Luftmoment, bezogen auf eine beliebige Achse g (s. Bild 1):

$$M(x_a, x_d; x_g; t) = \int_{x_a}^{x_d} (x - x_g)\, p(x, t)\, dx. \quad \ldots \quad (1b)$$

Für jede beliebige Bewegung der Platte im Sinne des ebenen Problems, senkrecht zur ungestörten Strömungsrichtung, ist die Wirbelverteilung $\gamma(x, t)$ durch folgende Randbedingung der Strömung festgelegt:

Die zur ungestörten Strömungsrichtung senkrechte Geschwindigkeitskomponente $w_y(x, t)$ der Strömung entlang der Platte ist gleich der augenblicklichen örtlichen Geschwindigkeit $\frac{\partial}{\partial t}\delta_y(x, t)$ der Platte, vermehrt um das Produkt aus ungestörter Strömungsgeschwindigkeit und augenblicklicher örtlicher Schrägstellung der Platte $v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\delta_y(x, t)$ [$\delta_y(x, t)$ = Weg einer beliebigen Plattenachse u mit der Abszisse x, gemessen von der Plattenmittellage ab], d. h.:

$$w_y(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\delta_y(x, t) + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\delta_y(x, t). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Digitized by Google

Liegt eine harmonisch zeitabhängige Bewegung mit der Kreisfrequenz ω vor, so gilt nach Küssner[1] [1] für die genannte Wirbelverteilung:

$$\gamma(x,t) \mathrel{\overline{\wedge}} v\left[a_0 \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi\right] e^{i\omega t}. \quad . \quad . \quad (3)$$

Darin ist:

$\varphi = \arccos\left(2\frac{x}{t_{Fl}} - 1\right)$ mit t_{Fl} = Platten-(Flügel-)tiefe,
($\varphi = \pi$ und $\varphi = o$ kennzeichnen Vorderkante v und Hinterkante h der Platte; s. Bild 1),

$$\left.\begin{aligned} a_0 = {} & \mathfrak{C}_0 \cdot 2i\omega_r\left[1+\mathfrak{T}(\omega_r)\right] + \mathfrak{C}_1 \cdot i\omega_r\left[1+\mathfrak{T}(\omega_r)-2\right] \\ & + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{C}_\lambda \cdot \lambda\left[1+\mathfrak{T}(\omega_r)-1-(-1)^\lambda\right], \\ a_1 = {} & -\mathfrak{C}_0 \cdot 4\omega_r^2 + \mathfrak{C}_1 \cdot 8i\omega_r + \mathfrak{C}_2 \cdot 2\omega_r^2 \\ & + 4\sum_{\lambda=2}^{\infty}\mathfrak{C}_\lambda \cdot \lambda\left[1-(-1)^{\lambda+1}\right] \\ & \text{und für } n = 2,\ 3,\ \ldots. \\ a_n = {} & -\mathfrak{C}_{n-1} \cdot 2\frac{\omega_r^2}{n} + \mathfrak{C}_n \cdot 8i\omega_r + \mathfrak{C}_{n+1} \cdot 2\frac{\omega_r^2}{n} \\ & + 4\sum_{\lambda=n+1}^{\infty}\mathfrak{C}_\lambda \cdot \lambda\left[1-(-1)^{\lambda+n}\right], \end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

wobei:

$$\omega_r = \frac{1}{2}\frac{\omega}{v}t_{Fl} \text{ (bezogene Frequenz)},$$

$$\mathfrak{T}(\omega_r) = -\frac{H_0^{(2)}(\omega_r) + iH_1^{(2)}(\omega_r)}{H_0^{(2)}(\omega_r) - iH_1^{(2)}(\omega_r)} \text{ (s. auch Tafel 7)},$$

$H_0^{(2)}(\omega_r)$, $H_1^{(2)}(\omega_r)$ = Hankelsche Zylinderfunktionen (tabuliert z. B. in [9]),

$\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n, \ldots$ = Koeffizienten der Fourier-Entwicklung für den Weg $\delta_y(x,t)$[3] nach der Koordinate φ, also definiert durch:

$$\delta_y(x,t) \mathrel{\overline{\wedge}} t_{Fl}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n \cos n\varphi\right] e^{i\omega t}, \quad (4)$$

$$\varphi = \arccos\left(2\frac{x}{t_{Fl}} - 1\right).$$

Um für eine gegebene Bewegung der Platte die Luftkräfte und Luftmomente berechnen zu können, ist es nach letzterem notwendig, die gegebene Bewegung durch eine Fourier-Reihe zu beschreiben.

II. Platte beliebiger Formänderungsfähigkeit.

Der Weg einer beliebigen Plattenachse u (s. Bild 1) aus der Mittellage bei einer zur ungestörten Strömungsrichtung senkrechten Bewegung der Platte wird im allgemeinsten Fall harmonischer Zeitabhängigkeit beschrieben durch den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} \delta_y(x,t) &= t_{Fl}\left[F'(x)\cdot\cos\omega t - F''(x)\cdot\sin\omega t\right] \\ &\mathrel{\overline{\wedge}} t_{Fl}\,\mathfrak{F}(x)\cdot e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

wobei:

x = Abszisse der Plattenachse u,
$F'(x)$, $F''(x)$ = Verteilungsfunktionen der Amplituden der beiden Bestandteile des Weges $\delta_y(x,t)$,
$\mathfrak{F}(x) = F'(x) + iF''(x)$ = komplexe Verteilungsfunktion der Amplituden des Weges $\delta_y(x,t)$.

Zur Berechnung der Luftkräfte und Luftmomente der Platte ist nach Abschn. I die Bewegung als Fourier-Reihe [s. (4)] zu schreiben, d. h. es wird gesetzt:

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n \cos n\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

wobei (Eulersche Formeln):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{F}(x)\,d\varphi \\ &\text{und für } n = 1, 2, \ldots \\ \mathfrak{C}_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{F}(x)\cos n\varphi\,d\varphi \\ \varphi &= \arccos\left(2\frac{x}{t_{Fl}} - 1\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5b)$$

Nach (1, 1a, 1b, 3 und 4) ergeben sich bei irgendeiner Bewegung der Platte die Luftkräfte und Luftmomente.

Die auf die Längeneinheit bezogene Luftkraft ist an der Stelle x des Plattenstreifens (Luftkraftverteilung über die Plattentiefe):

$$\left.\begin{aligned} p(x,t) &\mathrel{\overline{\wedge}} \varrho b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\cdot\mathfrak{p}_n(x)\right]e^{i\omega t} \\ &\mathrel{\overline{\wedge}} \varrho b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\left\{\omega^2 t_{Fl}^2\cdot\mathfrak{p}_n^{(0)}(x) + v\omega t_{Fl}\cdot\mathfrak{p}_n^{(1)}(x) + v^2\cdot\mathfrak{p}_n^{(2)}(x)\right\}\right]e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Auf den Abschnitt a, d des Plattenstreifens (s. Bild 1) entfällt die Luftkraft:

$$\left.\begin{aligned} P(x_a, x_d; t) &\mathrel{\overline{\wedge}} \varrho t_{Fl} b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\cdot\mathfrak{P}_n(x_a,x_d)\right]e^{i\omega t} \\ &\mathrel{\overline{\wedge}} \varrho t_{Fl} b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\left\{\omega^2 t_{Fl}^2\cdot\mathfrak{P}_n^{(0)}(x_a,x_d) + v\omega t_{Fl}\cdot\mathfrak{P}_n^{(1)}(x_a,x_d) + v^2\cdot\mathfrak{P}_n^{(2)}(x_a,x_d)\right\}\right]e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

das Luftmoment, bezogen auf die Plattenachse g (s. Bild 1):

$$\left.\begin{aligned} M(x_a, x_d; x_g; t) &\mathrel{\overline{\wedge}} \varrho t_{Fl}^2 b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\cdot\mathfrak{M}_n(x_a,x_d;x_g)\right]e^{i\omega t} \\ &\mathrel{\overline{\wedge}} \varrho t_{Fl}^2 b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\left\{\omega^2 t_{Fl}^2\cdot\mathfrak{M}_n^{(0)}(x_a,x_d;x_g) + v\omega t_{Fl}\cdot\mathfrak{M}_n^{(1)}(x_a,x_d;x_g) + v^2\cdot\mathfrak{M}_n^{(2)}(x_a,x_d;x_g)\right\}\right]e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (6b)$$

Die Beiwerte $\mathfrak{p}_n^{(r)}$, $\mathfrak{P}_n^{(r)}$ und $\mathfrak{M}_n^{(r)}$ sind in Tafel 1 formelmäßig zusammengestellt. Zum praktischen Gebrauch müssen die voranstehenden unendlichen Summen für die jeweils gegebene Bewegung ausgerechnet werden, wenn möglich, mit Hilfe geschlossener Summenformeln (vgl. z. B. Abschn. IV), sonst näherungsweise durch Abbrechen hinter einer bestimmten Gliederzahl (Konvergenz vorausgesetzt).

---

[1]) Um von der Bezeichnungsweise von Küssner zu der hier benutzten zu gelangen, ist u. a. ein Austausch der Formelzeichen nach folgender Übersicht vorzunehmen:

Küssner:	$2l$	ν	$-i\omega$	$lx+l$	$\pi-\Theta$
in vorliegender Arbeit:	t_{Fl}	ω	ω_r	x	φ

[2]) Das Zeichen $\mathrel{\overline{\wedge}}$ besagt, daß nur der Realteil (oder nur der Imaginärteil) des dahinter folgenden komplexen Ausdrucks den wirklichen Schwingungsvorgang beschreibt.

[3]) Küssner schreibt die Größen a_0, a_1, ..., a_n, ... in Abhängigkeit von Fourier-Koeffizienten P_j der rechten Seite der Randbedingung (2). Um von der Küssnerschen Darstellungsweise zur vorliegenden zu kommen, sind folgende Schritte notwendig: Die rechte Seite der Randbedingung wird einerseits als Fourier-Reihe mit Fourier-Koeffizienten P_j angeschrieben, anderseits wird die Fourier-Entwicklung (4) der Bewegung in die rechte Seite der Randbedingung eingesetzt. Nach Anwendung der Identitäten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin(2\nu+1)\varphi}{\sin\varphi} &\equiv 1 + 2\sum_{\lambda=1}^{\nu}\cos 2\lambda\varphi, \\ \frac{\sin 2\nu\varphi}{\sin\varphi} &\equiv 2\sum_{\lambda=1}^{\nu}\cos(2\lambda-1)\varphi \end{aligned}\right\} \nu \geqq 0$$

ergibt ein Koeffizientenvergleich beider Darstellungsweisen die Koeffizienten P_j und damit die Größen a_j in Abhängigkeit von den Koeffizienten $\mathfrak{C}_j$.

Digitized by Google

Tafel 1. Platte beliebiger Formänderungsfähigkeit. Luftkraftverteilung, Luftkraft und Luftmoment für einen durch λ gekennzeichneten Bewegungsanteil der Platte.

		Luftkraftverteilung über die Plattentiefe			**Luftkraft**			**Luftmoment**, bezogen auf die Plattenachse g		
		$p_\lambda(x,t)=\frac{}{k}$			$P_\lambda(x_a,x_d;t)=\frac{}{k}$			$M_\lambda(x_a,x_d;x_g;t)=\frac{}{k}$		
		$\varrho b\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_{n\lambda}\left[\omega^2 t_{Fl}^2\cdot\mathfrak{p}_n^{(0)}(x)+v\omega t_{Fl}\cdot\mathfrak{p}_n^{(1)}(x)+v^2\cdot\mathfrak{p}_n^{(2)}(x)\right]\right\}e^{i\omega t}$			$\varrho\, t_{Fl}\, b\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_{n\lambda}\left[\omega^2\mathfrak{P}_n^{(0)}+v\omega t_{Fl}\cdot\mathfrak{P}_n^{(1)'}+v^2\cdot\mathfrak{P}_n^{(2)}\right]\right\}e^{i\omega t}$			$\varrho\, t_{Fl}^2\, b\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_{n\lambda}\left[\omega^2 t_{Fl}\cdot\mathfrak{M}_n^{(0)}+v\omega t_{Fl}\cdot\mathfrak{M}_n^{(1)}+v^2\cdot\mathfrak{M}_n^{(2)}\right]\right\}e^{i\omega t}$		
		$\mathfrak{p}_n^{(\nu)}(x)=p_n^{(\nu)'}(x)+i\cdot p_n^{(\nu)''}(x)$, $\nu=0,1,2$			$\mathfrak{P}_n^{(\nu)}=\mathfrak{P}_n^{(\nu)}(x_a,x_d)=P_n^{(\nu)'}(x_a,x_d)+i\cdot P_n^{(\nu)''}(x_a,x_d)$, $\nu=0,1,2$			$\mathfrak{M}_n^{(\nu)}=\mathfrak{M}_n^{(\nu)}(x_a,x_d;x_g)=M_n^{(\nu)'}(x_a,x_d;x_g)+i\cdot M_n^{(\nu)''}(x_a,x_d;x_g)$, $\nu=0,1,2$		
n	′ ″	$\mathfrak{p}_n^{(0)}(x)$	$\mathfrak{p}_n^{(1)}(x)$	$\mathfrak{p}_n^{(2)}(x)$	$\mathfrak{P}_n^{(0)}(x_a,x_d)$	$\mathfrak{P}_n^{(1)}(x_a,x_d)$	$\mathfrak{P}_n^{(2)}(x_a,x_d)$	$\mathfrak{M}_n^{(0)}(x_a,x_d;x_g)$	$\mathfrak{M}_n^{(1)}(x_a,x_d;x_g)$	$\mathfrak{M}_n^{(2)}(x_a,x_d;x_g)$
0	′	$\sin\varphi$	$T''(\omega_r)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	0	c_1	$T''(\omega_r)\cdot c_0$	0	d_1	$T''(\omega_r)\cdot d_0$	0
	″	0	$-[1+T'(\omega_r)]\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	0	0	$-[1+T'(\omega_r)]\cdot c_0$	0	0	$-[1+T'(\omega_r)]\cdot d_0$	0
1	′	$\frac{1}{4}\sin 2\varphi$	$\frac{1}{2}T''(\omega_r)\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	$-2[1+T'(\omega_r)]\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	$\frac{1}{4}c_2$	$\frac{1}{2}T''(\omega_r)\cdot c_0$	$-2[1+T'(\omega_r)]\cdot c_0$	$\frac{1}{4}d_2$	$\frac{1}{2}T''(\omega_r)\cdot d_0$	$-2[1+T'(\omega_r)]\cdot d_0$
	″	0	$-\frac{1}{2}\{[1+T'(\omega_r)-2]\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}+8\sin\varphi\}$	$-2T''(\omega_r)\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\{[1+T'(\omega_r)-2]\times c_0+8\cdot c_1\}$	$-2T''(\omega_r)\cdot c_0$	0	$-\frac{1}{2}\{[1+T'(\omega_r)-2]\times d_0+8\cdot d_1\}$	$-2T''(\omega_r)\cdot d_0$
$n=2,3,\ldots$	′	$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1}-\frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1}\right\}$	0	$-2n\{[1+T'(\omega_r)-1-(-1)^n]\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}+2\sum_{\lambda=1}^{n}[1-(-1)^{\lambda+n}]\times\sin\lambda\varphi\}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{c_{n+1}}{n+1}-\frac{c_{n-1}}{n-1}\right)$	0	$-2n\{[1+T'(\omega_r)-1-(-1)^n]\cdot c_0+2\sum_{\lambda=1}^{n}[1-(-1)^{\lambda+n}]\times c_\lambda\}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{d_{n+1}}{n+1}-\frac{d_{n-1}}{n-1}\right)$	0	$-2n\{[1+T'(\omega_r)-1-(-1)^n]\cdot d_0+2\sum_{\lambda=1}^{n}[1-(-1)^{\lambda+n}]\times d_\lambda\}$
	″	0	$-4\sin n\varphi$	$-2nT''(\omega_r)\times\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	0	$-4\cdot c_n$	$-2nT''(\omega_r)\cdot c_0$	0	$-4d_n$	$-2nT''(\omega_r)\cdot d_0$

mit: $1+T'(\omega_r)$ und $T''(\omega_r)$ nach Tafel 7,

$\varphi=\varphi(x)=\arccos\left(2\frac{x}{t_{Fl}}-1\right)$, $\varphi_j=\varphi(x_j)=\arccos\left(2\frac{x_j}{t_{Fl}}-1\right)$ $(j=a,d,g)$

$c_0=c_0(x_a,x_d)=-\frac{1}{2}[\varphi_d-\varphi_a-(\sin\varphi_d-\sin\varphi_a)]$,

$c_1=c_1(x_a,x_d)=-\frac{1}{4}\left[\varphi_d-\varphi_a-\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_d-\sin 2\varphi_a)\right]$

und für $n=2,3,\ldots$

$c_n=c_n(x_a,x_d)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n+1}\{\sin(n+1)\varphi_d-\sin(n+1)\varphi_a\}-\frac{1}{n-1}\{\sin(n-1)\varphi_d-\sin(n-1)\varphi_a\}\right]$.

$d_0=d_0(x_a,x_d;x_g)=\frac{1}{4}\{\cos\varphi_g[\varphi_d-\varphi_a-(\sin\varphi_d-\sin\varphi_a)]+\frac{1}{2}(\varphi_d-\varphi_a)-(\sin\varphi_d-\sin\varphi_a)+\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_d-\sin 2\varphi_a)\}$.

$d_1=d_1(x_a,x_d;x_g)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\cos\varphi_g\left[\varphi_d-\varphi_a-\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_d-\sin 2\varphi_a)-\frac{1}{4}\left[\sin\varphi_d-\sin\varphi_a-\frac{1}{3}(\sin 3\varphi_d-\sin 3\varphi_a)\right]\right\}\right.$,

$d_2=d_2(x_a,x_d;x_g)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\cos\varphi_g\left[\sin\varphi_d-\sin\varphi_a-\frac{1}{3}(\sin 3\varphi_d-\sin 3\varphi_a)\right]\right.$

$\left.-\frac{1}{4}\left[\varphi_d-\varphi_a-\frac{1}{4}(\sin 4\varphi_d-\sin 4\varphi_a)\right]\right\}$

und für $n=3,4,\ldots$.

$d_n=d_n(x_a,x_d;x_g)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\cos\varphi_g\left[\frac{1}{n-1}(\sin(n-1)\varphi_d-\sin(n-1)\varphi_a)-\frac{1}{n+1}(\sin(n+1)\varphi_d-\sin(n+1)\varphi_a)\right]\right.$

$\left.-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n-2}(\sin(n-2)\varphi_d-\sin(n-2)\varphi_a)-\frac{1}{n+2}(\sin(n+2)\varphi_d-\sin(n+2)\varphi_a)\right]\right\}$.

Digitized by Google

In voranstehender Schreibweise sind die Ausdrücke $\mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{M}_n$ in je drei Teilglieder aufgespalten:

Die Teilglieder mit $\omega^2 t^2_{Fl}$ sind unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit v und geben die Luftwirkung bei $v = 0$ an. Sie kennzeichnen Luftkraft- und Luftmomentenanteile, die mit der Bewegung in Phase sind; wegen dieser Eigenschaft und wegen des Faktors ω^2 gehen diese Luftkraft- und Luftmomentenanteile wie Trägheitskräfte und deren Momente in Schwingungsrechnungen ein. [Der mit $\omega^2 t_{Fl}$ behaftete Anteil der Gesamtluftkraft $P(x_v, x_h; t)$ und bei Schlagbewegung der entsprechende Anteil des Gesamtluftmomentes $M(x_v, x_h; x_g; t)$, bezogen auf eine beliebige Achse g, wird oft als Trägheitskraft eines den Flügel umschriebenen starren Luft-Kreiszylinders bzw. als deren Moment gedeutet. Diese Deutung trifft nicht zu für Luftkräfte $P(x_a, x_d; t)$ und Luftmomente $M(x_a, x_d; x_g; t)$ irgendwelcher Teilabschnitte a, d der Platte; sie gilt auch nicht für das Gesamtluftmoment, sofern die Bewegung Drehanteile von Rudern oder vom übrigen Flügel enthält.]

Die Teilglieder mit $v\omega\, t_{Fl}$ kennzeichnen Luftkraft- und Luftmomentenanteile, die der Bewegung um annähernd $\pi/2$ nacheilen; sie können daher als dämpfende Glieder angesprochen werden; sie verschwinden sowohl für $v = 0$ als auch für $\omega = 0$.

Die Teilglieder mit v^2 kennzeichnen Luftkraft- und Luftmomentenanteile, die um annähernd π gegen die Bewegung phasenverschoben sind und die daher im wesentlichen wie Federungskräfte und -momente in Schwingungsrechnungen eingehen. Im Grenzfall $\omega = 0$ gehen diese Anteile in die Luftkräfte und Luftmomente der stationären Strömung über.

III. Platte beschränkter Formänderungsfähigkeit.

Die Bewegung der Platte setze sich zusammen aus einer endlichen Anzahl harmonischer Bewegungsanteile, von denen jeder eine Bewegung der Platte nach nur einem Freiheitsgrad darstellt. Aus Zweckmäßigkeitsgründen werden hierbei Bewegungsanteile betrachtet, die als Sonderfälle wichtig sind und für die deshalb weiter unten die Luftkräfte und Luftmomente — unmittelbar gebrauchsfertig — bereitgestellt werden.

Der Weg einer beliebigen Plattenachse u aus der Mittellage bei einem durch λ gekennzeichneten Bewegungsanteil sei beschrieben durch den Ausdruck:

$$\delta_{y\lambda}(x,t) = t_{Fl} f_\lambda(x)\,[A_\lambda' \cos\omega t - A_\lambda'' \sin\omega t] \mathrel{\overline{\overline{R}}} t_{Fl} f_\lambda(x)\,\mathfrak{A}_\lambda e^{i\omega t},$$

wobei:

x = Abszisse der Plattenachse u,
$f_\lambda(x)$ = Verteilungsfunktion der Amplituden längs der Plattentiefe,
A_λ', A_λ'' = Maßstabamplituden der beiden Bestandteile, aus denen sich der betrachtete Bewegungsanteil λ zusammensetzt,
$\mathfrak{A}_\lambda = A_\lambda' + i A_\lambda''$ = »komplexe Maßstabamplitude« des Bewegungsanteils λ.

Der Weg der Plattenachse u aus der Mittellage bei einer Bewegung, die sich aus $s+1$ verschiedenen Bewegungsanteilen zusammensetzt, ist:

$$\delta_y(x,t) \mathrel{\overline{\overline{R}}} t_{Fl}\left[\sum_{\lambda=0}^{s} \mathfrak{A}_\lambda f_\lambda(x)\right] e^{i\omega t}.$$

Für eine gegebene, harmonisch zeitabhängige Bewegung $\delta_y(x,t)^{\text{gegeb.}} \mathrel{\overline{\overline{R}}} t_{Fl}\,\mathfrak{F}(x)^{\text{gegeb.}}\, e^{i\omega t}$ können die komplexen Maßstabamplituden $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ z. B. aus der Näherungsforderung

$$\int_0^{t_{Fl}} \left[\mathfrak{F}(x)^{\text{gegeb.}} - \sum_{\lambda=0}^{s} \mathfrak{A}_\lambda f_\lambda(x)\right]^2 dx = \mathfrak{Min}.$$

berechnet werden.

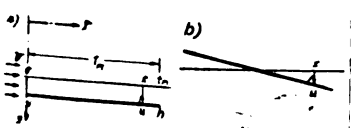
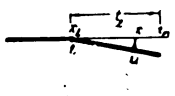
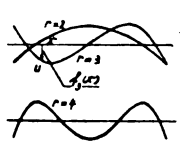
Diese Bedingung liefert für $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ das Gleichungssystem:

$$\mathfrak{A}_0 \cdot \int_0^{t_{Fl}} f_0(x)\cdot f_\mu(x)\,dx + \mathfrak{A}_1 \cdot \int_0^{t_{Fl}} f_1(x)\cdot f_\mu(x)\,dx + \ldots + \mathfrak{A}_s \cdot \int_0^{t_{Fl}} f_s(x)\cdot f_\mu(x)\,dx - \int_0^{t_{Fl}} \mathfrak{F}(x)^{\text{gegeb.}} f_\mu(x)\,dx = 0 \quad (7)$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, s).$$

Die auf die Längeneinheit bezogene Luftkraft ist an der Stelle x (Luftkraftverteilung über die Plattentiefe):

$$p(x,t) \mathrel{\overline{\overline{R}}} \varrho\, b\left[\sum_{\lambda=0}^{s} \mathfrak{A}_\lambda \cdot \mathfrak{p}_\lambda^*(x)\right] e^{i\omega t}.$$

Tafel 2. Bewegungsanteile der Platte.

A. Platte als in sich starrer Körper:	B. Platte in sich verformbar:	
a) Parallelbewegung, b) Drehbewegung.	a) nach zweigliedrigen Geradenzügen,	b) nach ganzen rationalen Funktionen vom Grade r.
Bezeichnungen.		
		
a) $f_0(x) = 1$, b) $f_1(x) = 2\dfrac{x}{t_{Fl}} - 1$.	$f_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq x_l, \\ \dfrac{x - x_l}{t_{Fl}} & \text{» } x \geqq x_l. \end{cases}$	$f_r(x) = d_{r0} + d_{r1}\left(\dfrac{x}{t_{Fl}}\right) + \ldots + d_{rr}\left(\dfrac{x}{t_{Fl}}\right)^r$ ($d_{r\lambda}$ siehe in Tafel 3).
Fourier-Koeffizienten der Bewegungsanteile.		
a) $\mathfrak{C}_{n0} = \begin{cases} \mathfrak{A}_0 \text{ für } n = 0 \\ 0 \text{ » } n \neq 0, \end{cases}$	$\mathfrak{C}_{0l} = \mathfrak{A}_l \dfrac{1}{2\pi}[-\varphi_l \cos\varphi_l + \sin\varphi_l]$, $\mathfrak{C}_{1l} = \mathfrak{A}_l \dfrac{1}{2\pi}\left[\varphi_l - \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi_l\right]$ und für $n = 2; 3; \ldots$ $\mathfrak{C}_{nl} = \mathfrak{A}_l \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\sin(n-1)\varphi_l}{n(n-1)} - \dfrac{\sin(n+1)\varphi_l}{n(n+1)}\right]$ mit: $\varphi_l = \arccos\left(1 - 2\dfrac{t_l}{t_{Fl}}\right) = \arccos\left(2\dfrac{x_l}{t_{Fl}} - 1\right)$.	$\mathfrak{C}_{nr} = \begin{cases} \mathfrak{A}_r \text{ für } n = r \\ 0 \text{ » } n \neq r. \end{cases}$
b) $\mathfrak{C}_{n1} = \begin{cases} \mathfrak{A}_1 \text{ für } n = 1 \\ 0 \text{ » } n \neq 1. \end{cases}$		

Digitized by Google

Tafel 8. Koeffizienten $d_{r\lambda}$ des Jacobischen Polynoms:

$$f_r(x) = \cos r\varphi(x) = d_{r0} + d_{r1}\frac{x}{t_{Fl}} + \ldots + d_{rr}\left(\frac{x}{t_{Fl}}\right)^r;$$

$$\varphi(x) = \arccos\left(2\frac{x}{t_{Fl}} - 1\right)$$

r	d_{r0}	d_{r1}	d_{r2}	d_{r3}	d_{r4}	d_{r5}	d_{r6}
0	1						
1	−1	2					
2	1	−8	8				
3	−1	18	−48	32			
4	1	−32	160	−256	128		
5	−1	50	−400	1120	−1280	512	
6	1	−72	840	−3584	6912	−6144	2048

Auf den Abschnitt a, d des Plattenstreifens (s. Bild 1) entfällt die Luftkraft:

$$P(x_a, x_d, t) \mathrel{\overline{\wedge}} \varrho\, t_{Fl}\, b \left[\sum_{\lambda=0}^{s} \mathfrak{A}_\lambda \cdot \mathfrak{P}^*_\lambda(x_a, x_d)\right] e^{i\omega t},$$

das Luftmoment, bezogen auf die Plattenachse g (s. Bild 1):

$$M(x_a, x_d; x_g; t) \mathrel{\overline{\wedge}} \varrho\, t_{Fl}^2\, b \left[\sum_{\lambda=0}^{s} \mathfrak{A}_\lambda \cdot \mathfrak{M}^*_\lambda(x_a, x_d; x_g)\right] e^{i\omega t}.$$

Hierbei sind $\varrho\, b \cdot \mathfrak{p}^*_\lambda(x)\, e^{i\omega t}$, $\varrho\, t_{Fl}\, b \cdot \mathfrak{P}^*_\lambda(x_a, x_d)\, e^{i\omega t}$ und $\varrho\, t_{Fl}^2\, b \cdot \mathfrak{M}^*_\lambda(x_a, x_d; x_g)\, e^{i\omega t}$ die Luftkraft- und Luftmomentenanteile bei dem Bewegungsanteil λ mit $\mathfrak{A}_\lambda = 1$.

Im einzelnen werden folgende Bewegungsanteile in Betracht gezogen (s. Tafel 2):

A. Platte als in sich starrer Körper.

a) Parallelbewegung senkrecht zur Strömungs- und Breitenrichtung:

$$f_0(x) = 1.$$

b) Drehbewegung, Drehvektor parallel zur Breitenrichtung:

$$f_1(x) = 2\frac{x}{t_{Fl}} - 1.$$

B. Platte in sich verformbar.

a) Verformung nach zweigliedrigen Geradenzügen mit jeweils einem Knick in irgendeiner Plattenachse l (s. Bild 2):

$$f_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq x_l \\ \dfrac{x - x_l}{t_{Fl}} & \text{» } x \geqq x_l. \end{cases}$$

b) Verformung nach ganzen rationalen Funktionen vom Grade r ($r = 2, 3, \ldots$ m), die bei der Transformation $x = \frac{t_{Fl}}{2}(1 + \cos\varphi)$ übergehen in $\cos r\varphi$ (Sonderfall Jacobischer Polynome):

$$f_r(x) = d_{r0} + d_{r1}\frac{x}{t_{Fl}} + d_{r2}\left(\frac{x}{t_{Fl}}\right)^2 + \ldots + d_{rr}\left(\frac{x}{t_{Fl}}\right)^r$$

(Koeffizienten $d_{r\lambda}$ siehe in Tafel 3).

Die Fälle $r = 0$ und $r = 1$ kennzeichnen die Bewegungen der in sich starren Platte und sind bereits unter A.a) und A.b) aufgeführt; die Verformung nach ganzen rationalen Funktionen beginnt daher bei $r = 2$.

Die aus $f_r(x)$ durch Multiplikation mit

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{t_{Fl}\, x/t_{Fl}\,(1 - x/t_{Fl})}}$$

gebildeten Funktionen $F_r(x) = q(x)\, f_r(x)$ stellen im Bereich $0 \leqq x \leqq t_{Fl}$ ein Orthogonalsystem dar. Statt die gegebene Funktion $\mathfrak{F}(x)^{\text{ggb.}}$ unmittelbar durch die Jacobischen Polynome $f_r(x)$ anzunähern, wird also zweckmäßig $q(x)\,\mathfrak{F}(x)^{\text{ggb.}}$ durch die Funktionen $F_r(x)$ angenähert; dann gilt im Gleichungssystem (7):

$$\int_0^{t_{Fl}} F_\nu(x) \cdot F_\mu(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu, \\ \pi & \\ 2 & \text{» } \nu \quad \mu. \end{cases}$$

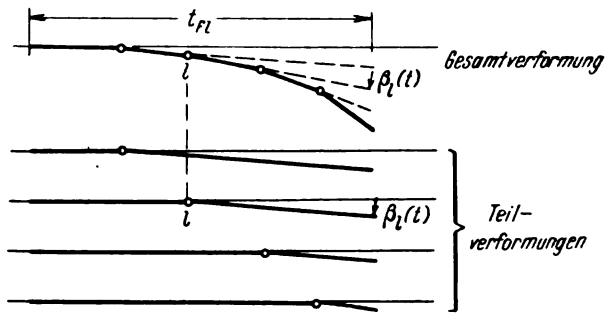


Bild 2. Verformung nach Geradenzügen.

[Die sich bei der Annäherung von $q(x)\,\mathfrak{F}(x)^{\text{ggb.}}$ durch $F_r(x)$ ergebenden Maßstabamplituden $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s$ weichen etwas ab von denen, die bei der Annäherung von $\mathfrak{F}(x)^{\text{ggb.}}$ durch $f_r(x)$ herauskommen. Die Abweichung ist aber um so kleiner, je größer s gewählt wird.]

Wegen dieser Orthogonalitätseigenschaft der Jacobischen Polynome ist es bei gegebener Verformung in Gestalt eines stückweise stetig gekrümmten Linienzuges mit Knikken u. U. zweckmäßiger, die Annäherung an die gegebene Verformung nicht durch Polynome und Geradenzüge vorzunehmen, sondern nur durch Polynome.

Bei Annäherung der gegebenen Verformung durch Geradenzüge ist zu beachten, daß die Funktion $f_l(x)$ rechts und links von der Knickstelle l verschieden definiert ist.

Zur Ermittlung der Luftkräfte und Luftmomente muß nach Abschn. I die Bewegung der Platte durch die Fourier-Reihe (4) beschrieben werden. Die Fourier-Koeffizienten $\mathfrak{C}_{0\lambda}, \mathfrak{C}_{1\lambda}, \ldots, \mathfrak{C}_{n\lambda}, \ldots$ für die voranstehenden Teilbewegungen der Platte (gekennzeichnet durch Zeiger λ) sind in Tafel 2 zusammengestellt.

Nach (6, 6a, 6b) ergeben sich für eine solche Teilbewegung die Luftkräfte und Luftmomente.

Die auf die Längeneinheit bezogene Luftkraft ist an der Stelle x des Plattenstreifens (Luftkraftverteilung über die Plattentiefe):

$$p_\lambda(x, t) \mathrel{\overline{\wedge}} \varrho\, b\, \mathfrak{A}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \mathfrak{p}^{*(0)}_\lambda(x) + v\omega\, t_{Fl} \cdot \mathfrak{p}^{*(1)}_\lambda(x) + v^2 \cdot \mathfrak{p}^{*(2)}_\lambda(x)\right] e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Auf den Abschnitt a, d des Plattenstreifens (s. Bild 1) entfällt die Luftkraft:

$$P_\lambda(x_a, x_d; t) \mathrel{\overline{\wedge}} \varrho\, t_{Fl}\, b\, \mathfrak{A}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \mathfrak{P}^{*(0)}_\lambda x_a, x_d) + v\omega\, t_{Fl} \cdot \mathfrak{P}^{*(1)}_\lambda(x_a, x_d) + v^2 \cdot \mathfrak{P}^{*(2)}_\lambda(x_a, x_d)\right] e^{i\omega t}, \quad (8a)$$

das Luftmoment, bezogen auf die Plattenachse g (s. Bild 1):

$$M(x_a, x_d; x_g; t) \mathrel{\overline{\wedge}} \varrho\, t_{Fl}^2\, b\, \mathfrak{A}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \mathfrak{M}^{*(0)}_\lambda(x_a, x_d; x_g) + v\omega\, t_{Fl} \cdot \mathfrak{M}^{*(1)}_\lambda(x_a, x_d; x_g) + v^2 \cdot \mathfrak{M}^{*(2)}_\lambda(x_a, x_d; x_g)\right] e^{i\omega t}. \quad (8b)$$

Sonderfall der zweimal knickbaren Platte: Flügel mit Ruder und Hilfsruder,

In diesem Fall wird die Bewegung dargestellt durch Schlag und Drehung der in sich starren Platte (nach Tafel 2 Aa u. b) und durch Verformungen nach zweigliedrigen Geradenzügen mit verschieden liegenden Knickpunkten (nach Tafel 2 Ba). Die außerdem zur Kennzeichnung des Bewegungszustandes erforderlichen Maßstabamplituden $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ haben dann folgende Bedeutung:

$\mathfrak{A}_0$ = Schlagamplitude des vorderen Plattenabschnitts, gemessen in $t_{Fl}/2$ hinter der Plattenvorderkante,

$\mathfrak{A}_1$ = halbe Drehamplitude des vorderen Plattenabschnitts,

$\mathfrak{A}_2$ = Drehamplitude des Ruders, gemessen gegen den vorderen Plattenabschnitt,

$\mathfrak{A}_3$ = Drehamplitude des Hilfsruders, gemessen gegen das Ruder.

Im vorliegenden Fall ist es jedoch anschaulicher, die Bewegung durch Amplituden $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ entsprechend Bild 3 zu beschreiben.

Digitized by Google

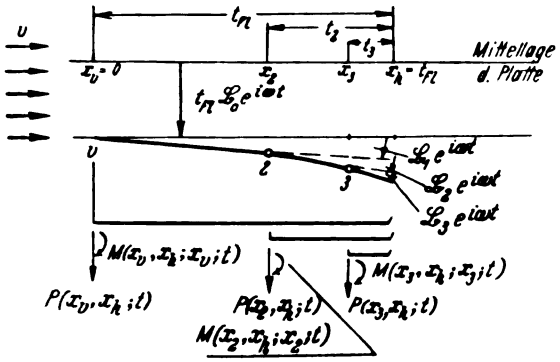


Bild 3. Flügel mit Ruder und Hilfsruder.

Dann gilt:

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2,\quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3.$$

Damit ergibt sich eine Darstellung der Luftkraftgesetze in den Amplituden $\mathfrak{B}_\lambda$ statt in den Amplituden $\mathfrak{A}_\lambda$. Die zur Darstellung in $\mathfrak{B}_\lambda$ gehörigen Luftkraft- und Luftmomentenbeiwerte sind zur besseren Unterscheidung von den Beiwerten der Darstellung in den Amplituden $\mathfrak{A}_\lambda$ mit einem Querstrich versehen; sie sind in den Tafeln 4, 5, 6 zusammengestellt und zwar für einen Abschnitt a, h, der sich von der beliebigen Achse a bis zur Plattenhinterkante h erstreckt. Das Luftmoment $M(x_a, x_h; x_a; t)$ dieses Plattenabschnitts bezieht sich hierbei auf die Achse a; bezogen auf eine beliebige Achse g ist also:

$$M(x_a, x_h; x_g; t) = M(x_a, x_h; x_a; t) + (x_a - x_g)\cdot P(x_a, x_h; t),$$

wobei:

$P(x_a, x_h; t)$ = Luftkraft des Plattenabschnitts a, h.

Tafel 4. Flügel mit Ruder und Hilfsruder (zweimal knickbare Platte, s. Bild 3).

Luftkraftverteilung über die Plattentiefe

$$p(x,t) \mathrel{\overline{\wedge}} \varrho\, b \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3} \mathfrak{B}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(0)}(x) + v\,\omega\, t_{Fl} \cdot \bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(1)}(x) + v^2 \cdot \bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(2)}(x) \right] \right\} e^{i\omega t}$$

$$\bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(\nu)}(x) = \bar{p}_\lambda^{(\nu)\prime}(x) + i \cdot \bar{p}_\lambda^{(\nu)\prime\prime}(x), \qquad \nu = 0, 1, 2$$

λ	′ / ″	$\bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(0)}(x)$	$\bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(1)}(x)$	$\bar{\mathfrak{p}}_\lambda^{(2)}(x)$
0	′	$\sin\varphi$	$T''(\omega_r)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	0
	″	0	$-\left[1+T'(\omega_r)\right]\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	0
1	′	$\frac{1}{2}\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)$	$\frac{3}{4}\,T''(\omega_r)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	$-\left[1+T'(\omega_r)\right]\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$
	″	0	$-\frac{1}{2}\left(\left[\left\{1+T'(\omega_r)\right\}\frac{3}{2}-1\right]\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2} \quad 4\sin\varphi\right)$	$-T''(\omega_r)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$
2	′	$e(2)\cdot\sin\varphi + \frac{1}{8\pi}\varphi_2\cdot\sin 2\varphi + \frac{1}{8\pi}(\cos\varphi_2-\cos\varphi)^2 \ln\frac{1-\cos(\varphi_2+\varphi)}{1-\cos(\varphi_2-\varphi)}$	$\frac{1}{2}\,T''(\omega_r)\,g_2(2)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	$\left\{-\left[1+T'(\omega_r)\right]g_4(2)+\frac{2}{\pi}\sin\varphi_2\right\} \times \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-\cos(\varphi_2+\varphi)}{1-\cos(\varphi_2-\varphi)}$
	″	0	$\frac{1}{2}\left[\left\{-\left[1+T'(\omega_r)\right]g_2(2)+g_3(2)\right\} \times \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2} - \frac{4}{\pi}\varphi_2\cdot\sin\varphi + \frac{2}{\pi}(\cos\varphi_2-\cos\varphi)\ln\frac{1-\cos(\varphi_2+\varphi)}{1-\cos(\varphi_2-\varphi)}\right]$	$-T''(\omega_r)\,g_4(2)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$
3	′	$e(3)\cdot\sin\varphi + \frac{1}{8\pi}\varphi_3\cdot\sin 2\varphi + \frac{1}{8\pi}(\cos\varphi_3-\cos\varphi)^2 \ln\frac{1-\cos(\varphi_3+\varphi)}{1-\cos(\varphi_3-\varphi)}$	$\frac{1}{2}\,T''(\omega_r)\,g_2(3)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$	$\left\{-\left[1+T'(\omega_r)\right]g_4(3)+\frac{2}{\pi}\sin\varphi_3\right\} \times \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-\cos(\varphi_3+\varphi)}{1-\cos(\varphi_3-\varphi)}$
	″	0	$\frac{1}{2}\left[\left\{-\left[1+T'(\omega_r)\right]g_2(3)+g_3(3)\right\} \times \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2} - \frac{4}{\pi}\varphi_3\cdot\sin\varphi + \frac{2}{\pi}(\cos\varphi_3-\cos\varphi)\ln\frac{1-\cos(\varphi_3+\varphi)}{1-\cos(\varphi_3-\varphi)}\right]$	$-T''(\omega_r)\,g_4(3)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi}{2}$

mit:

$$\varphi = \varphi(x) = \arccos\left(2\,\frac{x}{t_{Fl}} - 1\right)$$

$$e(j) = e(x_j) = -\frac{1}{2\pi}\left(\varphi_j\,\cos\varphi_j - \frac{1}{2}\sin\varphi_j\right),\quad (j = 2, 3)$$

$1 + T'(\omega_r)$ und $T''(\omega_r)$ . . . . . nach Tafel 7

$g_2(j) = g_2(t_j/t_{Fl})$, $g_3(j) = g_3(t_j/t_{Fl})$, $g_4(j) = g_4(t_j/t_{Fl})$ nach Tafel 8 $(j = 2, 3)$

Digitized by Google

Tafel 5. Flügel mit Ruder und Hilfsruder (zweimal knickbare Platte; s. Bild 3).

Luftkräfte der Abschnitte v, h; 2, h; 3, h

$$P(x_a, x_h; t) \mp \varrho\, t_{Fl}\, b \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3} \mathfrak{B}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(0)}(x_a, x_h) + v\,\omega\, t_{Fl} \cdot \overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(1)}(x_a, x_h) + v^2 \cdot \overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(2)}(x_a, x_h) \right] \right\} e^{i\omega t};\quad a = \mathrm{v}, 2, 3$$

$$\overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(\nu)}(x_a, x_h) = \overline{P}_\lambda^{(\nu)\prime}(x_a, x_h) + i \cdot \overline{P}_\lambda^{(\nu)\prime\prime}(x_a, x_h);\quad \nu = 0, 1, 2$$

λ	′ / ″	$\overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(0)}(x_a, x_h)$	$\overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(1)}(x_a, x_h)$	$\overline{\mathfrak{P}}_\lambda^{(2)}(x_a, x_h)$
A. Abschn.: v, h.			Gesamtluftkraft $P(x_v, x_h; t)$	
0	′	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r)$	0
	″	0	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right]$	0
1	′	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{3}{8}\pi \cdot T''(\omega_r)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right]$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\frac{3}{2}\left[1 + T'(\omega_r)\right] + 1\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r)$
2	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot g_1(2)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_2(2)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_4(2)$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_2(2) + g_3(2)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_4(2)$
3	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot g_1(3)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_2(3)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_4(3)$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_2(3) + g_3(3)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_4(3)$
B. Abschn.: 2. h.			Luftkraft des Ruders einschl. des Hilfsruders $P(x_2, x_h; t)$	
0	′	$\frac{1}{4}\pi \cdot g_3(2)$	$\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(2)$	0
	″	0	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(2)$	0
1	′	$\frac{1}{4}\pi \cdot g_6(2)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot \frac{3}{2} g_5(2)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(2)$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot \frac{3}{2} g_5(2) + g_7(2)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(2)$
2	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot g_8(2)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(2) \cdot g_2(2)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(2) \cdot g_4(2) + g_{10}(2)\right\}$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(2) \cdot g_2(2) + g_9(2)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(2) \cdot g_4(2)$
3	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot \bar{g}_8(2, 3)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(2) \cdot g_2(3)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(2) \cdot g_4(3) + \bar{g}_{10}(2, 3)\right\}$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(2) \cdot g_2(3) + \bar{g}_9(2, 3)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(2) \cdot g_4(3)$
C. Abschn.: 3, h.			Luftkraft des Hilfsruders $P(x_3, x_h; t)$	
0	′	$\frac{1}{4}\pi \cdot g_3(3)$	$\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(3)$	0
	″	0	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(3)$	0
1	′	$\frac{1}{4}\pi \cdot g_6(3)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot \frac{3}{2} g_5(3)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(3)$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot \frac{3}{2} g_5(3) + g_7(3)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(3)$
2	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot \bar{g}_5(3, 2)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(3) \cdot g_2(2)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(3) \cdot g_4(2) + \bar{g}_{10}(3, 2)\right\}$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(3) \cdot g_2(2) + \bar{g}_9(3, 2)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(3) \cdot g_4(2)$
3	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot g_8(3)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(3) \cdot g_2(3)$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(3) \cdot g_4(3) + g_{10}(3)\right\}$
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \left\{\left[1 + T'(\omega_r)\right] \cdot g_5(3) \cdot g_2(3) + g_9(3)\right\}$	$-\frac{1}{2}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_5(3) \cdot g_4(3)$

mit: $g_j(\mu) = g_j(t_\mu/t_{Fl})$ und $\bar{g}_j(\mu, \nu) = \bar{g}_j(t_\mu/t_{Fl}, t_\nu/t_{Fl})$ nach Tafel 8 und 9; $1 + T'(\omega_r)$ und $T''(\omega_r)$ nach Tafel 7.

Sonderfälle:	zu streichen sind:
Flügel ohne Ruder und ohne Hilfsruder	A., Zeile $\lambda = 2$ und 3, B. und C. ganz
Flügel mit Ruder und ohne Hilfsruder	A. und B., Zeile $\lambda = 3$, C. ganz

Digitized by Google

Tafel 6. Flügel mit Ruder und Hilfsruder (zweimal knickbare Platte; s. Bild 3).

Luftmomente der Abschnitte v, h; 2, h; 3, h; bezogen auf die Achse a

$$M(x_a, x_h; x_a; t) = \varrho\, t_{Fl}^2\, b \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3} \mathfrak{B}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(0)}(x_a, x_h; x_a) + v\,\omega\, t_{Fl} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(1)}(x_a, x_h; x_a) + v^2 \cdot \overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(2)}(x_a, x_h; x_a) \right] \right\} e^{i\omega t};\quad a = \text{v, 2, 3.}$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(\nu)}(x_a, x_h; x_a) = \overline{M}_\lambda^{(\nu)\prime}(x_a, x_h; x_a) + i \cdot \overline{M}_\lambda^{(\nu)\prime\prime}(x_a, x_h; x_a);\qquad \nu = 0, 1, 2$$

λ		$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(0)}(x_a, x_h; x_a)$	$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(1)}(x_a, x_h; x_a)$	$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(2)}(x_a, x_h; x_a)$
	A. Abschn.: v, h.		Gesamtluftmoment $M(x_v, x_h; x_v; t)$	
0	′	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r)$	0
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r)]$	0
1	′	$\frac{9}{128}\pi$	$\frac{3}{32}\pi \cdot T''(\omega_r)$	$-\frac{1}{8}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r)]$
	″	0	$-\frac{3}{32}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r) + 2]$	$-\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r)$
2	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot g_{11}(2)$	$\frac{1}{16}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_2(2)$	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_4(2) + g_{13}(2)\}$
	″	0	$-\frac{1}{16}\pi \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_2(2) + g_{12}(2)\}$	$-\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_4(2)$
3	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot g_{11}(3)$	$\frac{1}{16}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_2(3)$	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_4(3) + g_{13}(3)\}$
	″	0	$-\frac{1}{16}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_2(3) + g_{12}(3)\}$	$-\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_4(3)$
	B. Abschn.: 2, h.		Luftmoment des Ruders einschl. des Hilfsruders $M(x_2, x_h; x_2; t)$	
0	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot g_1(2)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(2)$	0
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2)$	0
1	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot g_{11}(2)$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot \frac{3}{2} g_{14}(2)$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2)$
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \frac{3}{2} g_{14}(2) + g_{15}(2)\}$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(2)$
2	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot g_{16}(2)$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(2) \cdot g_2(2)$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2) \cdot g_4(2) + g_{18}(2)\}$
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2) \cdot g_2(2) + g_{17}(2)\}$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(2) \cdot g_4(2)$
3	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot \bar{g}_{16}(2,3)$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(2) \cdot g_2(3)$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2) \cdot g_4(3) + \bar{g}_{18}(2,3)\}$
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2) \cdot g_2(3) + \bar{g}_{17}(2,3)\}$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{13}(2) \cdot g_4(3)$
	C. Abschn.: 3, h.		Luftmoment des Hilfsruders $M(x_3, x_h; x_3; t)$	
0	′	$\frac{1}{8}\pi \cdot g_1(3)$	$\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(3)$	0
	″	0	$-\frac{1}{4}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(3)$	0
1	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot g_{11}(3)$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \frac{3}{2} \cdot g_{14}(3)$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot [1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(3)$
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \left\{[1 + T'(\omega_r)] \cdot \frac{3}{2} g_{14}(3) + g_{15}(3)\right\}$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(3)$
2	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot \bar{g}_{16}(3,2)$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(3) \cdot g_2(2)$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(3) \cdot g_4(2) + \bar{g}_{18}(3,2)\}$
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(3) \cdot g_2(2) + \bar{g}_{17}(3,2)\}$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(3) \cdot g_4(2)$
3	′	$\frac{1}{16}\pi \cdot g_{16}(3)$	$\frac{1}{8}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(3) \cdot g_2(3)$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(3) \cdot g_4(3) + g_{18}(3)\}$
	″	0	$-\frac{1}{8}\pi \cdot \{[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(3) \cdot g_2(3) + g_{17}(3)\}$	$-\frac{1}{4}\pi \cdot T''(\omega_r) \cdot g_{14}(3) \cdot g_4(3)$

mit: $g_j(\mu) = g_j(t_\mu/t_{Fl})$ und $\bar{g}_j(\mu, \nu) = \bar{g}_j(t_\mu/t_{Fl}, t_\nu/t_{Fl})$ nach Tafel 8 und 9; $1 + T'(\omega_r)$ und $T''(\omega_r)$ nach Tafel 7.

Sonderfälle:	zu streichen sind:
Flügel ohne Ruder und ohne Hilfsruder	A., Zeile $\lambda = 2$ und 3, B. und C. ganz
Flügel mit Ruder und ohne Hilfsruder	A. und B., Zeile $\lambda = 3$, C. ganz

Digitized by Google

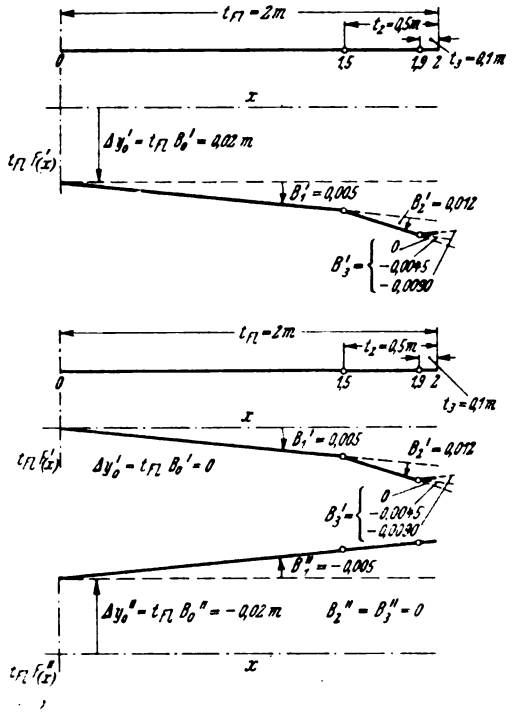


Bild 4. Daten der Beispiele 1 und 2.

Beispiele.

Beispiel 1.

Aufgabe. Gegeben ist ein Flügel mit Ruder und Hilfsruder mit den Abmessungen $t_{Fl} = 2$ m, $t_2 = 0{,}5$ m, $t_3 = 0{,}1$ m (s. Bild 4) und eine nachfolgend näher beschriebene harmonische Bewegung des Flügels.

Gesucht ist das dabei auftretende Luftmoment $M(x_2, x_h; x_2; t)$ des Ruders einschl. des Hilfsruders, bezogen auf die Ruderdrehachse, für einen Flügelstreifen von der Breite $b = 1$ m.

Bewegung des Flügels:

$$\delta_y(x, t) = t_{Fl} F'(x) \cdot \cos \omega t$$

mit:

ω veränderlich von 0 bis 160 s^{-1},

$t_{Fl} F'(x)$ nach Bild 4, gegeben durch:

$\Delta y_0' = t_{Fl} B_0' = 0{,}02$ m, $B_1' = 0{,}005$, $B_2' = 0{,}012$,

B_3' nacheinander $= 0$; $-0{,}0045$; $-0{,}009$.

(Bei diesen Ausschlägen bewirkt das Hilfsruder im stationären Fall [$\omega = 0$] Abminderungen des vom Ruderausschlag abhängigen Rudermomentenanteiles um $\eta = 0$; 50; 100 v. H. des Betrages, der sich ohne Hilfsruderausschlag ergibt.)

Anblasegeschwindigkeit: $v = 80\ ms^{-1}$,

Luftdichte: $\varrho = 0{,}125\ kg\ m^{-4}\ s^2$.

Rechnungsgang. Für das gesuchte Luftmoment gilt allgemein:

$$M(x_2, x_h; x_2; t) = \mathfrak{M}(x_2, x_h; x_2) \cdot e^{i\omega t}$$
$$= M'(x_2, x_h; x_2) \cdot \cos \omega t - M''(x_2, x_h; x_2) \cdot \sin \omega t.$$

Darin ist (nach Tafel 6):

$$\mathfrak{M}(x_2, x_h; x_2) = \varrho\, t_{Fl}^2\, b \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3} \mathfrak{B}_\lambda \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot \overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(0)}(x_2, x_h; x_2) - v\,\omega\, t_{Fl} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(1)}(x_2, x_h; x_2) + v^2 \cdot \overline{\mathfrak{M}}_\lambda^{(2)}(x_2, x_h; x_2) \right] \right\},$$

d. h. — unter Fortlassung der Argumente x_2, x_h; x_2 —:

$$M' = \varrho\, t_{Fl}^2\, b \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot (B_\lambda' \overline{M}_\lambda^{(0)\prime} - B_\lambda'' \overline{M}_\lambda^{(0)\prime\prime}) + v\,\omega\, t_{Fl} \cdot (B_\lambda' \overline{M}_\lambda^{(1)\prime} - B_\lambda'' \overline{M}_\lambda^{(1)\prime\prime}) + v^2 \cdot (B_\lambda' \overline{M}_\lambda^{(2)\prime} - B_\lambda'' \overline{M}_\lambda^{(2)\prime\prime}) \right] \right\},$$

$$M'' = \varrho\, t_{Fl}^2\, b \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot (B_\lambda' \overline{M}_\lambda^{(0)\prime\prime} + B_\lambda'' \overline{M}_\lambda^{(0)\prime}) + v\,\omega\, t_{Fl} \cdot (B_\lambda' \overline{M}_\lambda^{(1)\prime\prime} + B_\lambda'' \overline{M}_\lambda^{(1)\prime}) + v^2 \cdot (B_\lambda' \overline{M}_\lambda^{(2)\prime\prime} + B_\lambda'' \overline{M}_\lambda^{(2)\prime}) \right] \right\}.$$

Für die hier vorliegende Bewegung des Flügels ist:

$$B_0' = \frac{\Delta y_0'}{t_{Fl}} = 0{,}01,\ B_1' = 0{,}005,\ B_2' = 0{,}012,$$

$$B_3' = 0;\ -0{,}0045;\ -0{,}009.$$

Die Größen B_λ'' sind hier null; die Schwingungsform des Flügelprofils ist nur durch $F'(x)$, d. h. nur durch die Größen B_λ' gekennzeichnet.

$\overline{M}_\lambda^{(\nu)\prime}$ und $\overline{M}_\lambda^{(\nu)\prime\prime}$ ergeben sich aus Tafel 6 (Abschn.: 2, h) unter Benutzung der Tafeln 7, 8 und 9:

$$\overline{M}_0^{(0)\prime} = -\frac{1}{8}\pi \cdot g_1(2),\quad \overline{M}_0^{(1)\prime} = \frac{1}{4}\pi\, T''(\omega_r) \cdot g_{14}(2),\quad \overline{M}_0^{(2)\prime} = 0,$$

$$\overline{M}_0^{(0)\prime\prime} = 0,\qquad \overline{M}_0^{(1)\prime\prime} = -\frac{1}{4}\pi\,[1 + T'(\omega_r)] \cdot g_{14}(2),\qquad \overline{M}_0^{(2)\prime\prime} = 0$$

usw.

Für das hier gegebene Tiefenverhältnis $t_2/t_{Fl} = 0{,}25$ folgt aus Tafel 8 nach Interpolation zwischen $t_2/t_{Fl} = 0{,}2$ und $t_2/t_{Fl} = 0{,}3$:

$$g_1(2) = g_1(t_2/t_{Fl}) = 0{,}04008,\ g_{14}(2) = g_{14}(t_2/t_{Fl}) = 0{,}01125$$

usw.

Insgesamt ergeben sich für die Größen $\overline{M}_\lambda^{(\nu)\prime}$ und $\overline{M}_\lambda^{(\nu)\prime\prime}$ folgende Werte:

λ		$\overline{M}_\lambda^{(0)\prime}$	$\overline{M}_\lambda^{(1)\prime}$	$\overline{M}_\lambda^{(2)\prime}$
		$\overline{M}_\lambda^{(0)\prime\prime}$	$\overline{M}_\lambda^{(1)\prime\prime}$	$\overline{M}_\lambda^{(2)\prime\prime}$
0	$'$	0,015 74	$T''(\omega_r) \cdot 0{,}008\,836$	0
	$''$	0	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}008\,836$	0
1	$'$	0,010 98	$T''(\omega_r) \cdot 0{,}006\,627$	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}008\,836$
	$''$	0	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}006\,627 - 0{,}027\,07$	$-T''(\omega_r) \cdot 0{,}008\,836$
2	$'$	0,001 059	$T''(\omega_r) \cdot 0{,}000\,913\,2$	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}005\,381 - 0{,}018\,73$
	$''$	0	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}000\,913\,2 - 0{,}015\,87$	$-T''(\omega_r) \cdot 0{,}005\,381$
3	$'$	0,000 028 18	$T''(\omega_r) \cdot 0{,}000\,083\,41$	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}002\,494 - 0{,}034\,56$
	$''$	0	$-[1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}000\,083\,41 - 0{,}002\,623$	$-T''(\omega_r) \cdot 0{,}002\,494$

Digitized by Google

Tafel 7. Zahlenwerte für $1 + T'(\omega_\tau)$ und $T''(\omega_\tau)$.

ω_τ	$1+T'$	T''	ω_τ	$1+T'$	T''	ω_τ	$1+T'$	T''
0	2	0	0,65	1,142	—0,2638	1,9	1,028	—0,1206
0,02	1,927	—0,1504	0,70	1,130	—0,2528	2,0	1,026	—0,1154
0,04	1,853	—0,2320	0,75	1,118	—0,2426	2,1	1,024	—0,1106
0,06	1,784	—0,2852	0,80	1,108	—0,2330	2,2	1,022	—0,1062
0,08	1,721	—0,3208	0,85	1,100	—0,2244	2,3	1,020	—0,1020
0,10	1,664	—0,3446	0,90	1,092	—0,2157	2,4	1,019	—0,09816
0,15	1,546	—0,3729	0,95	1,085	—0,2078	2,5	1,017	—0,09460
0,20	1,455	—0,3772	1,00	1,079	—0,2005	2,6	1,016	—0,09126
0,25	1,385	—0,3704	1,1	1,068	—0,1872	2,4	1,015	—0,08816
0,30	1,330	—0,3586	1,2	1,060	—0,1754	2,8	1,014	—0,08530
0,35	1,286	—0,3446	1,3	1,053	—0,1649	2,9	1,013	—0,08258
0,40	1,250	—0,3300	1,4	1,047	—0,1556	3,0	1,013	—0,08001
0,45	1,220	—0,3154	1,5	1,042	—0,1471	5	1,005	—0,04920
0,50	1,196	—0,3014	1,6	1,038	—0,1395	10	1,001	—0,02489
0,55	1,175	—0,2881	1,7	1,034	—0,1326	20	1,000	—0,01249
0,60	1,158	—0,2756	1,8	1,031	—0,1264	∞	1	0

Tafel 8. Anteilfunktionen $g_j(\mu) = g_j(t_\mu/t_{Fl})$. Zahlenwerte.

t_μ/t_{Fl}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
g_1	0,004 201	0,023 22	0,062 45	0,124 9	0,212 2
g_2	0,053 14	0,148 7	0,270 3	0,411 5	0,568 3
g_3	0,052 04	0,142 4	0,252 3	0,373 5	0,500 0
g_4	0,395 8	0,549 8	0,660 7	0,747 8	0,818 3
g_5	0,013 85	0,040 52	0,077 27	0,124 0	0,181 7
g_6	0,037 48	0,098 35	0,167 0	0,236 65	0,303 05
g_7	0,090 24	0,244 20	0,427 4	0,623 0	0,818 3
g_8	0,001 411	0,011 04	0,036 37	0,083 93	0,159 2
g_9	0,030 96	0,117 8	0,250 8	0,419 5	0,611 8
g_{10}	0,072 95	0,129 7	0,170 2	0,194 5	0,202 6
g_{11}	0,006 124	0,032 87	0,085 82	0,166 6	0,274 7
g_{12}	0,247 8	0,644 4	1,083 7	1,519 7	1,924 4
g_{13}	0,687 6	0,814 8	0,816 8	0,748 6	0,636 6
g_{14}	0,001 098	0,006 358	0,017 97	0,037 93	0,068 31
g_{15}	0,007 305	0,040 09	0,106 9	0,211 9	0,356 1
g_{16}	0,000 1417	0,002 228	0,011 07	0,034 29	0,081 91
g_{17}	0,002 766	0,021 18	0,068 20	0,153 7	0,284 2
g_{18}	0,004 760	0,016 51	0,031 56	0,046 42	0,057 83

$g_j(t_\mu/t_{Fl}) = 0$ für $t_\mu/t_{Fl} = 0$.

Tafel 9. Anteilfunktionen $\bar{g}_j(\mu, \nu) = \bar{g}_j(t_\mu/t_{Fl}, t_\nu/t_{Fl})$, Zahlenwerte.

t_ν/t_{Fl} \ t_μ/t_{Fl}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
			$\bar{g}_8(t_\mu/t_{Fl},\ t_\nu/t_{Fl})$		
0,01	$0{,}529 \cdot 10^{-5}$	$0{,}741 \cdot 10^{-5}$	$0{,}891 \cdot 10^{-5}$	$1{,}008 \cdot 10^{-5}$	$1{,}074 \cdot 10^{-5}$
0,02	$2{,}946 \cdot 10^{-5}$	$4{,}165 \cdot 10^{-5}$	$5{,}058 \cdot 10^{-5}$	$5{,}706 \cdot 10^{-5}$	$6{,}232 \cdot 10^{-5}$
0,03	$7{,}960 \cdot 10^{-5}$	$11{,}176 \cdot 10^{-5}$	$13{,}831 \cdot 10^{-5}$	$15{,}766 \cdot 10^{-5}$	$17{,}225 \cdot 10^{-5}$
0,04	$16{,}149 \cdot 10^{-5}$	$23{,}167 \cdot 10^{-5}$	$28{,}127 \cdot 10^{-5}$	$31{,}980 \cdot 10^{-5}$	$35{,}097 \cdot 10^{-5}$
0,05	$27{,}714 \cdot 10^{-5}$	$40{,}137 \cdot 10^{-5}$	$48{,}852 \cdot 10^{-5}$	$55{,}660 \cdot 10^{-5}$	$61{,}130 \cdot 10^{-5}$
0,07	$61{,}893 \cdot 10^{-5}$	$91{,}554 \cdot 10^{-5}$	$112{,}080 \cdot 10^{-5}$	$127{,}969 \cdot 10^{-5}$	$140{,}760 \cdot 10^{-5}$
0,10	$141{,}100 \cdot 10^{-5}$	$217{,}421 \cdot 10^{-5}$	$268{,}712 \cdot 10^{-5}$	$308{,}103 \cdot 10^{-5}$	$339{,}700 \cdot 10^{-5}$
			$\bar{g}_9(t_\nu/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl})$		
0,01	$0{,}835 \cdot 10^{-4}$	$2{,}429 \cdot 10^{-4}$	$4{,}471 \cdot 10^{-4}$	$6{,}846 \cdot 10^{-4}$	$9{,}492 \cdot 10^{-4}$
0,02	$2{,}252\ 10^{-4}$	$6{,}711 \cdot 10^{-4}$	$12{,}448 \cdot 10^{-4}$	$19{,}140 \cdot 10^{-4}$	$26{,}605 \cdot 10^{-4}$
0,03	$3{,}878 \cdot 10^{-4}$	$11{,}961 \cdot 10^{-4}$	$22{,}385 \cdot 10^{-4}$	$34{,}595 \cdot 10^{-4}$	$48{,}225 \cdot 10^{-4}$
0,04	$5{,}572 \cdot 10^{-4}$	$17{,}797 \cdot 10^{-4}$	$33{,}728 \cdot 10^{-4}$	$52{,}424 \cdot 10^{-4}$	$73{,}282 \cdot 10^{-4}$
0,05	$7{,}262 \cdot 10^{-4}$	$24{,}061 \cdot 10^{-4}$	$46{,}122 \cdot 10^{-4}$	$72{,}065 \cdot 10^{-4}$	$101{,}072 \cdot 10^{-4}$
0,07	$10{,}391 \cdot 10^{-4}$	$37{,}249 \cdot 10^{-4}$	$73{,}092 \cdot 10^{-4}$	$115{,}486 \cdot 10^{-4}$	$163{,}033 \cdot 10^{-4}$
0,10	$14{,}110 \cdot 10^{-4}$	$57{,}226 \cdot 10^{-4}$	$116{,}563 \cdot 10^{-4}$	$187{,}380 \cdot 10^{-4}$	$267{,}270 \cdot 10^{-4}$
			$\bar{g}_9(t_\mu/t_{Fl},\ t_\nu/t_{Fl})$		
0,01	$1{,}308 \cdot 10^{-3}$	$1{,}778 \cdot 10^{-3}$	$2{,}097 \cdot 10^{-3}$	$2{,}315 \cdot 10^{-3}$	$2{,}458 \cdot 10^{-3}$
0,02	$3{,}576 \cdot 10^{-3}$	$4{,}975 \cdot 10^{-3}$	$5{,}886 \cdot 10^{-3}$	$6{,}510 \cdot 10^{-3}$	$6{,}922 \cdot 10^{-3}$
0,03	$6{,}436 \cdot 10^{-3}$	$9{,}036 \cdot 10^{-3}$	$10{,}728 \cdot 10^{-3}$	$11{,}881 \cdot 10^{-3}$	$12{,}648 \cdot 10^{-3}$
0,04	$9{,}632 \cdot 10^{-3}$	$13{,}751 \cdot 10^{-3}$	$16{,}392 \cdot 10^{-3}$	$18{,}196 \cdot 10^{-3}$	$19{,}381 \cdot 10^{-3}$
0,05	$13{,}103 \cdot 10^{-3}$	$18{,}983 \cdot 10^{-3}$	$22{,}723 \cdot 10^{-3}$	$25{,}271 \cdot 10^{-3}$	$26{,}945 \cdot 10^{-3}$
0,07	$20{,}433 \cdot 10^{-3}$	$30{,}662 \cdot 10^{-3}$	$37{,}026 \cdot 10^{-3}$	$41{,}344 \cdot 10^{-3}$	$44{,}188 \cdot 10^{-3}$
0,10	$30{,}960 \cdot 10^{-3}$	$50{,}242 \cdot 10^{-3}$	$61{,}600 \cdot 10^{-3}$	$69{,}240 \cdot 10^{-3}$	$74{,}274 \cdot 10^{-3}$
			$\bar{g}_9(t_\nu/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl})$		
0,01	$1{,}294 \cdot 10^{-3}$	$1{,}786 \cdot 10^{-3}$	$2{,}120 \cdot 10^{-3}$	$2{,}366 \cdot 10^{-3}$	$2{,}554 \cdot 10^{-3}$
0,02	$3{,}579 \cdot 10^{-3}$	$4{,}997 \cdot 10^{-3}$	$5{,}950 \cdot 10^{-3}$	$6{,}653 \cdot 10^{-3}$	$7{,}186 \cdot 10^{-3}$
0,03	$6{,}442 \cdot 10^{-3}$	$9{,}075 \cdot 10^{-3}$	$10{,}843 \cdot 10^{-3}$	$12{,}136 \cdot 10^{-3}$	$13{,}123 \cdot 10^{-3}$
0,04	$9{,}639 \cdot 10^{-3}$	$13{,}806 \cdot 10^{-3}$	$16{,}560 \cdot 10^{-3}$	$18{,}576 \cdot 10^{-3}$	$20{,}100 \cdot 10^{-3}$
0,05	$13{,}111 \cdot 10^{-3}$	$19{,}057 \cdot 10^{-3}$	$22{,}952 \cdot 10^{-3}$	$25{,}792 \cdot 10^{-3}$	$27{,}936 \cdot 10^{-3}$
0,07	$20{,}441 \cdot 10^{-3}$	$30{,}768 \cdot 10^{-3}$	$37{,}375 \cdot 10^{-3}$	$42{,}160 \cdot 10^{-3}$	$45{,}764 \cdot 10^{-3}$
0,10	$30{,}960 \cdot 10^{-3}$	$50{,}384 \cdot 10^{-3}$	$62{,}126 \cdot 10^{-3}$	$70{,}524 \cdot 10^{-3}$	$76{,}810 \cdot 10^{-3}$
			$\bar{g}_{10}(t_\mu/t_{Fl},\ t_\nu/t_{Fl})$		
0,01	$4{,}689 \cdot 10^{-2}$	$6{,}364 \cdot 10^{-2}$	$7{,}333 \cdot 10^{-2}$	$7{,}862 \cdot 10^{-2}$	$8{,}037 \cdot 10^{-2}$
0,02	$6{,}376 \cdot 10^{-2}$	$8{,}828 \cdot 10^{-2}$	$10{,}234 \cdot 10^{-2}$	$11{,}005 \cdot 10^{-2}$	$11{,}271 \cdot 10^{-2}$
0,03	$7{,}463 \cdot 10^{-2}$	$10{,}594 \cdot 10^{-2}$	$12{,}364 \cdot 10^{-2}$	$13{,}338 \cdot 10^{-2}$	$13{,}685 \cdot 10^{-2}$
0,04	$8{,}232 \cdot 10^{-2}$	$11{,}976 \cdot 10^{-2}$	$14{,}077 \cdot 10^{-2}$	$15{,}235 \cdot 10^{-2}$	$15{,}662 \cdot 10^{-2}$
0,05	$8{,}723 \cdot 10^{-2}$	$13{,}095 \cdot 10^{-2}$	$15{,}511 \cdot 10^{-2}$	$16{,}846 \cdot 10^{-2}$	$17{,}353 \cdot 10^{-2}$
0,07	$9{,}040 \cdot 10^{-2}$	$14{,}769 \cdot 10^{-2}$	$17{,}803 \cdot 10^{-2}$	$19{,}483 \cdot 10^{-2}$	$20{,}154 \cdot 10^{-2}$
0,10	$7{,}295 \cdot 10^{-2}$	$16{,}249 \cdot 10^{-2}$	$20{,}248 \cdot 10^{-2}$	$22{,}454 \cdot 10^{-2}$	$23{,}395 \cdot 10^{-2}$
			$\bar{g}_{10}(t_\nu/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl})$		
0,01	$1{,}494 \cdot 10^{-3}$	$0{,}876 \cdot 10^{-3}$	$0{,}584 \cdot 10^{-3}$	$0{,}400 \cdot 10^{-3}$	$0{,}273 \cdot 10^{-3}$
0,02	$4{,}335 \cdot 10^{-3}$	$2{,}512 \cdot 10^{-3}$	$1{,}667 \cdot 10^{-3}$	$1{,}142 \cdot 10^{-3}$	$0{,}778\ 10^{-3}$
0,03	$8{,}336 \cdot 10^{-3}$	$4{,}682 \cdot 10^{-3}$	$3{,}095 \cdot 10^{-3}$	$2{,}107 \cdot 10^{-3}$	$1{,}435 \cdot 10^{-3}$
0,04	$12{,}989 \cdot 10^{-3}$	$7{,}314 \cdot 10^{-3}$	$4{,}814 \cdot 10^{-3}$	$3{,}286 \cdot 10^{-3}$	$2{,}224 \cdot 10^{-3}$
0,05	$18{,}769 \cdot 10^{-3}$	$10{,}378 \cdot 10^{-3}$	$6{,}801 \cdot 10^{-3}$	$4{,}631 \cdot 10^{-3}$	$3{,}131 \cdot 10^{-3}$
0,07	$33{,}685 \cdot 10^{-3}$	$17{,}760 \cdot 10^{-3}$	$11{,}519 \cdot 10^{-3}$	$7{,}808 \cdot 10^{-3}$	$5{,}270 \cdot 10^{-3}$
0,10	$72{,}950 \cdot 10^{-3}$	$32{,}042 \cdot 10^{-3}$	$20{,}391 \cdot 10^{-3}$	$13{,}715 \cdot 10^{-3}$	$9{,}216 \cdot 10^{-3}$

Digitized by Google

Tafel 9 (Fortsetzung).

t_v/t_{Fl} \ t_μ/t_{Fl}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
		$\bar{g}_{16}(t_\mu/t_{Fl},\ t_v/t_{Fl}) = \bar{g}_{16}(t_v/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl})$			
0,01	$0{,}067 \cdot 10^{-5}$	$0{,}191 \cdot 10^{-5}$	$0{,}350 \cdot 10^{-5}$	$0{,}529 \cdot 10^{-5}$	$0{,}726 \cdot 10^{-5}$
0,02	$0{,}374 \cdot 10^{-5}$	$1{,}118 \cdot 10^{-5}$	$2{,}016 \cdot 10^{-5}$	$3{,}092 \cdot 10^{-5}$	$4{,}285 \cdot 10^{-5}$
0,03	$0{,}965 \cdot 10^{-5}$	$2{,}964 \cdot 10^{-5}$	$5{,}505 \cdot 10^{-5}$	$8{,}513 \cdot 10^{-5}$	$11{,}860 \cdot 10^{-5}$
0,04	$1{,}925 \cdot 10^{-5}$	$5{,}911 \cdot 10^{-5}$	$11{,}063 \cdot 10^{-5}$	$17{,}085 \cdot 10^{-5}$	$23{,}825 \cdot 10^{-5}$
0,05	$3{,}211 \cdot 10^{-5}$	$10{,}096 \cdot 10^{-5}$	$19{,}033 \cdot 10^{-5}$	$29{,}496 \cdot 10^{-5}$	$41{,}231 \cdot 10^{-5}$
0,07	$6{,}608 \cdot 10^{-5}$	$22{,}341 \cdot 10^{-5}$	$42{,}810 \cdot 10^{-5}$	$66{,}855 \cdot 10^{-5}$	$93{,}837 \cdot 10^{-5}$
0,10	$14{,}170 \cdot 10^{-5}$	$45{,}627 \cdot 10^{-5}$	$90{,}155 \cdot 10^{-5}$	$150{,}551 \cdot 10^{-5}$	$222{,}368 \cdot 10^{-5}$
		$\bar{g}_{17}(t_\mu/t_{Fl},\ t_v/t_{Fl})$			
0,01	$1{,}652 \cdot 10^{-4}$	$4{,}751 \cdot 10^{-4}$	$8{,}636 \cdot 10^{-4}$	$13{,}051 \cdot 10^{-4}$	$17{,}827 \cdot 10^{-4}$
0,02	$4{,}451 \cdot 10^{-4}$	$13{,}119 \cdot 10^{-4}$	$24{,}037 \cdot 10^{-4}$	$36{,}473 \cdot 10^{-4}$	$49{,}950 \cdot 10^{-4}$
0,03	$7{,}660 \cdot 10^{-4}$	$23{,}367 \cdot 10^{-4}$	$43{,}197 \cdot 10^{-4}$	$65{,}877 \cdot 10^{-4}$	$90{,}482 \cdot 10^{-4}$
0,04	$10{,}997 \cdot 10^{-4}$	$34{,}741 \cdot 10^{-4}$	$65{,}046 \cdot 10^{-4}$	$99{,}760 \cdot 10^{-4}$	$137{,}424 \cdot 10^{-4}$
0,05	$14{,}322 \cdot 10^{-4}$	$46{,}935 \cdot 10^{-4}$	$88{,}880 \cdot 10^{-4}$	$137{,}045 \cdot 10^{-4}$	$189{,}379 \cdot 10^{-4}$
0,07	$20{,}445 \cdot 10^{-4}$	$72{,}545 \cdot 10^{-4}$	$140{,}646 \cdot 10^{-4}$	$219{,}314 \cdot 10^{-4}$	$305{,}050 \cdot 10^{-4}$
0,10	$27{,}660 \cdot 10^{-4}$	$111{,}147 \cdot 10^{-4}$	$223{,}759 \cdot 10^{-4}$	$355{,}123 \cdot 10^{-4}$	$498{,}995 \cdot 10^{-4}$
		$\bar{g}_{17}(t_v/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl})$			
0,01	$0{,}124 \cdot 10^{-4}$	$0{,}163 \cdot 10^{-4}$	$0{,}185 \cdot 10^{-4}$	$0{,}199 \cdot 10^{-4}$	$0{,}212 \cdot 10^{-4}$
0,02	$0{,}580 \cdot 10^{-4}$	$0{,}804 \cdot 10^{-4}$	$0{,}963 \cdot 10^{-4}$	$1{,}069 \cdot 10^{-4}$	$1{,}150 \cdot 10^{-4}$
0,03	$1{,}564 \cdot 10^{-4}$	$2{,}207 \cdot 10^{-4}$	$2{,}629 \cdot 10^{-4}$	$2{,}951 \cdot 10^{-4}$	$3{,}174 \cdot 10^{-4}$
0,04	$3{,}174 \cdot 10^{-4}$	$4{,}475 \cdot 10^{-4}$	$5{,}347 \cdot 10^{-4}$	$5{,}982 \cdot 10^{-4}$	$6{,}466 \cdot 10^{-4}$
0,05	$5{,}443 \cdot 10^{-4}$	$7{,}754 \cdot 10^{-4}$	$9{,}286 \cdot 10^{-4}$	$10{,}426 \cdot 10^{-4}$	$11{,}266 \cdot 10^{-4}$
0,07	$12{,}146 \cdot 10^{-4}$	$17{,}674 \cdot 10^{-4}$	$21{,}288 \cdot 10^{-4}$	$23{,}924 \cdot 10^{-4}$	$25{,}917 \cdot 10^{-4}$
0,10	$27{,}660 \cdot 10^{-4}$	$41{,}922 \cdot 10^{-4}$	$50{,}975 \cdot 10^{-4}$	$57{,}522 \cdot 10^{-4}$	$62{,}460 \cdot 10^{-4}$
		$\bar{g}_{18}(t_\mu/t_{Fl},\ t_v/t_{Fl})$			
0,01	$0{,}595 \cdot 10^{-2}$	$1{,}717 \cdot 10^{-2}$	$3{,}105 \cdot 10^{-2}$	$4{,}621 \cdot 10^{-2}$	$6{,}216 \cdot 10^{-2}$
0,02	$0{,}752 \cdot 10^{-2}$	$2{,}297 \cdot 10^{-2}$	$4{,}216 \cdot 10^{-2}$	$6{,}348 \cdot 10^{-2}$	$8{,}584 \cdot 10^{-2}$
0,03	$0{,}814 \cdot 10^{-2}$	$2{,}655 \cdot 10^{-2}$	$4{,}967 \cdot 10^{-2}$	$7{,}548 \cdot 10^{-2}$	$10{,}260 \cdot 10^{-2}$
0,04	$0{,}825 \cdot 10^{-2}$	$2{,}886 \cdot 10^{-2}$	$5{,}510 \cdot 10^{-2}$	$8{,}454 \cdot 10^{-2}$	$11{,}557 \cdot 10^{-2}$
0,05	$0{,}800 \cdot 10^{-2}$	$3{,}032 \cdot 10^{-2}$	$5{,}914 \cdot 10^{-2}$	$9{,}164 \cdot 10^{-2}$	$12{,}597 \cdot 10^{-2}$
0,07	$0{,}689 \cdot 10^{-2}$	$3{,}145 \cdot 10^{-2}$	$6{,}429 \cdot 10^{-2}$	$10{,}174 \cdot 10^{-2}$	$14{,}155 \cdot 10^{-2}$
0,10	$0{,}476 \cdot 10^{-2}$	$3{,}019 \cdot 10^{-2}$	$6{,}708 \cdot 10^{-2}$	$11{,}000 \cdot 10^{-2}$	$15{,}606 \cdot 10^{-2}$
		$\bar{g}_{18}(t_v/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl})$			
0,01	$0{,}159 \cdot 10^{-4}$	$0{,}110 \cdot 10^{-4}$	$0{,}089 \cdot 10^{-4}$	$0{,}079 \cdot 10^{-4}$	$0{,}073 \cdot 10^{-4}$
0,02	$0{,}686 \cdot 10^{-4}$	$0{,}402 \cdot 10^{-4}$	$0{,}269 \cdot 10^{-4}$	$0{,}186 \cdot 10^{-4}$	$0{,}127 \cdot 10^{-4}$
0,03	$1{,}943 \cdot 10^{-4}$	$1{,}059 \cdot 10^{-4}$	$0{,}684 \cdot 10^{-4}$	$0{,}478 \cdot 10^{-4}$	$0{,}343 \cdot 10^{-4}$
0,04	$4{,}105 \cdot 10^{-4}$	$2{,}310 \cdot 10^{-4}$	$1{,}546 \cdot 10^{-4}$	$1{,}026 \cdot 10^{-4}$	$0{,}689 \cdot 10^{-4}$
0,05	$7{,}238 \cdot 10^{-4}$	$4{,}047 \cdot 10^{-4}$	$2{,}676 \cdot 10^{-4}$	$1{,}869 \cdot 10^{-4}$	$1{,}278 \cdot 10^{-4}$
0,07	$17{,}599 \cdot 10^{-4}$	$9{,}484 \cdot 10^{-4}$	$6{,}337 \cdot 10^{-4}$	$4{,}454 \cdot 10^{-4}$	$2{,}976 \cdot 10^{-4}$
0,10	$47{,}600 \cdot 10^{-4}$	$24{,}224 \cdot 10^{-4}$	$15{,}630 \cdot 10^{-4}$	$10{,}692 \cdot 10^{-4}$	$7{,}104 \cdot 10^{-4}$

$\bar{g}_j(t_\mu/t_{Fl},\ t_v/t_{Fl}) = \bar{g}_j(t_v/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl}) = 0$ für $t_\mu/t_{Fl} = t_v/t_{Fl} = 0$,
$\bar{g}_j(t_\mu/t_{Fl},\ t_\mu/t_{Fl}) = g_j(t_\mu/t_{Fl})$.

Einsetzen der Zahlenwerte für B_λ', $\overline{M}_\lambda^{(v)\prime}$ und $\overline{M}_\lambda^{(v)\prime\prime}$ in die Formeln für M' und M'' und Ausmultiplikation ergibt:

1. für $B_3' = 0$ $(\eta = 0)$:

$$M' = -0{,}7193 + \omega^2 \cdot 0{,}000450 - [1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}348 + T''(\omega_r) \cdot \omega \cdot 0{,}0106,$$

$$M'' = -\omega \cdot 0{,}0261 - [1 + T'(\omega_r)] \cdot \omega \cdot 0{,}0106 - T''(\omega_r) \cdot 0{,}348,$$

2. für $B_3' = -0{,}0045$ $(\eta = 50$ vH):

$$M' = -0{,}2217 + \omega^2 \cdot 0{,}000450 - [1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}312 + T''(\omega_r) \cdot \omega \cdot 0{,}0106,$$

$$M'' = -\omega \cdot 0{,}0252 - [1 + T'(\omega_r)] \cdot \omega \cdot 0{,}0106 - T''(\omega_r) \cdot 0{,}312,$$

3. für $B_3' = -0{,}0090$ $(\eta = 100$ vH):

$$M' = +0{,}2760 + \omega^2 \cdot 0{,}000450 - [1 + T'(\omega_r)] \cdot 0{,}266 + T''(\omega_r) \cdot \omega \cdot 0{,}0106,$$

$$M'' = -\omega \cdot 0{,}0242 - [1 + T'(\omega_r)] \cdot \omega \cdot 0{,}0106 - T''(\omega_r) \cdot 0{,}266.$$

Zu den vorgegebenen Kreisfrequenzen $\omega = 0$ bis $160\ s^{-1}$ gehören die bezogenen Frequenzen $\omega_r = \omega \cdot \frac{t_{Fl}}{2v} = \omega \cdot 0{,}0125 = 0$ bis 2. Die zugehörigen Zahlenwerte für die Funktionen $1 + T'(\omega_r)$ und $T''(\omega_r)$ sind der Tafel 7 zu entnehmen.

Ergebnis. Die nach Einsetzen von ω und ω_r in obige Formeln für M' und M'' sich ergebenden Zahlenwerte sind in Bild 5 als Realteil und Imaginärteil der komplexen Größe $\mathfrak{M} = M' + i\,M''$ aufgetragen; sie beschreiben in Abhängigkeit von ω und η ein Kurvennetz mit den Kurven $\mathfrak{M}(\omega, \eta = \text{const})$ und $\mathfrak{M}(\omega = \text{const}, \eta)$. Dabei zeigt sich u.a., daß der Einfluß des Hilfsruders auf das Luftmoment des

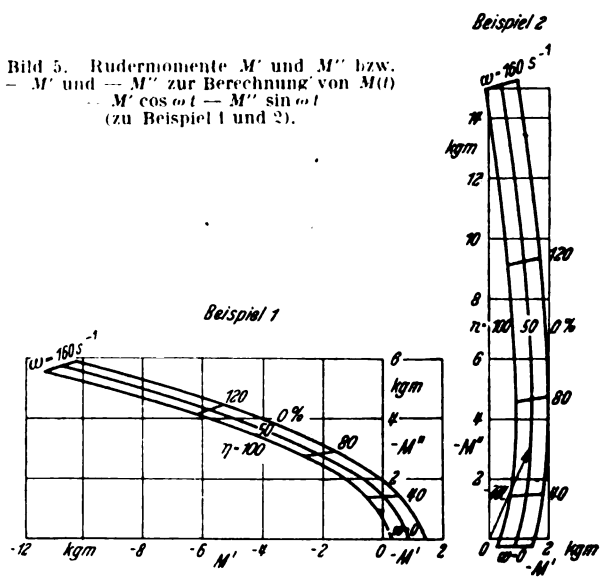


Bild 5. Rudermomente M' und M'' bzw. $-M'$ und $-M''$ zur Berechnung von $M(t) = M' \cos \omega t - M'' \sin \omega t$ (zu Beispiel 1 und 2).

Digitized by Google

Ruders, der im Abstand der Kurven $\mathfrak{M}(\omega, \eta = \text{const})$ zum Ausdruck kommt, von der Kreisfrequenz ω nahezu unabhängig ist.

Beispiel 2.

Aufgabe. Gegeben ist ein Flügel mit Ruder und Hilfsruder wie im Beispiel 1 (s. Bild 4) und eine nachfolgend näher beschriebene harmonische Bewegung des Flügels.

Gesucht ist wieder das dabei auftretende Luftmoment $M(x_2, x_h; x_2; t)$ des Ruders einschl. des Hilfsruders, bezogen auf die Ruderdrehachse, für einen Flügelstreifen von der Breite $b = 1$ m.

Bewegung des Flügels:

$\delta_y(x,t) = t_{Fl}[F'(x) \cdot \cos\omega t - F''(x) \cdot \sin\omega t]$ $(\overline{=}\, t_{Fl}\, \mathfrak{F}(x) \cdot e^{i\omega t})$

mit:

ω veränderlich von 0 bis 160 s^{-1},

$t_{Fl}\, F'_{(x)}$ und $t_{Fl}\, F''_{(x)}$ nach Bild 4, gegeben durch:

$1\, y_0' = t_{Fl}\, B_0' = 0$, $B_1' = 0{,}005$, $B_2' = 0{,}012$,
B_3' nacheinander $= 0$; $-0{,}0045$; $-0{,}009$,

$1\, y_0'' = t_{Fl}\, B_0'' = -0{,}02$ m, $B_1'' = -0{,}005$, $B_2'' = 0$,
$B_3'' = 0$.

(Der Einfluß des Hilfsruders auf den vom Ruderausschlag abhängigen Rudermomentenanteil ist hier der gleiche wie im Beispiel 1.)

Anblasegeschwindigkeit: $v = 80$ ms^{-1},
Luftdichte: $\varrho = 0{,}125$ $kgm^{-4}s^2$.

Rechnungsgang. Für das gesuchte Luftmoment gilt allgemein:

$$M(x_2, x_h; x_2; t) \overline{=} \mathfrak{M}(x_2, x_h; x_2; t)\, e^{i\omega t}$$
$$= M'(x_2, x_h; x_2) \cdot \cos\omega t - M''(x_2, x_h; x_2) \cdot \sin\omega t.$$

$\mathfrak{M}(x_2, x_h; x_2)$, $M'(x_2, x_h; x_2)$, $M''(x_2, x_h; x_2)$ ergeben sich nach Tafel 6 wie im Beispiel 1.

Für die hier vorliegende Bewegung des Flügels ist:

$B_0' = \dfrac{1\, y_0'}{t_{Fl}} = 0$, $B_1' = 0{,}005$, $B_2' = 0{,}012$, $B_3' = 0$; $-0{,}0045$; $-0{,}009$,

$B_0'' = \dfrac{1\, y_0''}{t_{Fl}} = -0{,}01$, $B_1'' = -0{,}005$, $B_2'' = 0$, $B_3'' = 0$.

Für die formel- und zahlenmäßige Darstellung von $\overline{M}_\lambda^{(r)'}$ und $\overline{M}_\lambda^{(r)''}$ gilt gleiches wie im Beispiel 1.

Einsetzen der Zahlenwerte für B_λ', B_λ'', $\overline{M}_\lambda^{(r)'}$ und $\overline{M}_\lambda^{(r)''}$ in die Formeln für M' und M'' und Ausmultiplikation ergibt:

1. für $B_3' = 0$ $(\eta = 0)$:

$M' = -0{,}7193 - \omega \cdot 0{,}0108 + \omega^2 \cdot 0{,}000135 - [1 + T'(\omega_r)]$
$\times (0{,}348 + \omega \cdot 0{,}0097) + T''(\omega_r) \cdot (-0{,}141 + \omega \cdot 0{,}00350)$,

$M'' = -\omega \cdot 0{,}0261 - \omega^2 \cdot 0{,}00042 + [1 + T'(\omega_r)]$
$\times (0{,}141 - \omega \cdot 0{,}00350) - T''(\omega_r) \cdot (0{,}348 + \omega \cdot 0{,}0097)$,

2. für $B_3' = -0{,}0045$ $(\eta = 50$ vH):

$M' = -0{,}2217 - \omega \cdot 0{,}0108 + \omega^2 \cdot 0{,}000135 - [1 + T'(\omega_r)]$
$\times (0{,}312 + \omega \cdot 0{,}0097) + T''(\omega_r) \cdot (-0{,}141 + \omega \cdot 0{,}00350)$,

$M'' = -\omega \cdot 0{,}0252 - \omega^2 \cdot 0{,}00042 + [1 + T'(\omega_r)]$
$\times (0{,}141 - \omega \cdot 0{,}00350) - T''(\omega_r) \cdot (0{,}312 + \omega \cdot 0{,}0097)$,

3. für $B_3' = -0{,}0090$ $(\eta = 100$ vH):

$M' = +0{,}2760 - \omega \cdot 0{,}0108 + \omega^2 \cdot 0{,}000135 - [1 + T'(\omega_r)]$
$\times (0{,}266 + \omega \cdot 0{,}0097) + T''(\omega_r) \cdot (-0{,}141 + \omega \cdot 0{,}00350)$,

$M'' = -\omega \cdot 0{,}0242 - \omega^2 \cdot 0{,}00042 + [1 + T'(\omega_r)]$
$\times (0{,}141 - \omega \cdot 0{,}00350) - T''(\omega_r) \cdot (0{,}266 + \omega \cdot 0{,}0097)$

Der weitere Rechnungsgang und die Darstellung des Ergebnisses erfolgt wie im Beispiel 1 (s. Bild 5).

IV. Bemerkungen zur Ableitung der Formeln.

Die allgemeineren Formeln (6), (6a), (6b) für die Luftkräfte und Luftmomente enthalten unendliche Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{C}_{n\lambda} \cdot \mathfrak{p}_n^{(r)}(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{C}_{n\lambda} \cdot \mathfrak{P}_n^{(r)}(x_a, x_d), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{C}_{n\lambda} \cdot \mathfrak{M}_n^{(r)}(x_a, x_d; x_g).$$

Für die Bewegungsanteile der unter A. a und b, B. b behandelten Art (s. Abschnitt III) werden die Größen $\mathfrak{C}_{n\lambda}$ zu Null für $n \neq \lambda$ (s. Tafel 2). Daher werden die vorstehenden Reihen in den genannten Fällen von vornherein zu Summen endlicher Gliederzahl.

Für Verformungen der Platte nach zweigliedrigen Geradenzügen ergibt die Einführung der Ausdrücke für die Größen $\mathfrak{C}_{nl}$ (s. Tafel 2 B.a) zunächst unendliche trigonometrische Reihen; diese lassen sich unter Verwendung von Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen in Summenausdrücke endlicher Gliederzahl umformen.

Nach Durchführung der Summation für einen der obigen Reihenausdrücke könnte die Summation der anderen obengenannten Reihenausdrücke durch Differenzieren oder Integrieren entsprechend (1), (1a), (1b) durchgeführt werden. Zur Vermeidung umständlicher Operationen ist es jedoch zweckmäßiger, die Summation der Reihen je für sich vorzunehmen. Die wesentlichsten Schritte zur Durchführung dieser Summationen werden beispielsweise am Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{C}_{nl} \cdot \mathfrak{P}_n^{(r)}(x_a, x_d)$ für $r = 0$ und $x_d = x_h$ kurz besprochen.

Das Einsetzen der Größen $\mathfrak{C}_{nl}$ nach Tafel 2 und $\mathfrak{P}_n^{(0)}(x_a, x_h)$ nach Tafel 1 führt zu einem Ausdruck, der neben einem Teilausdruck endlicher Gliederzahl additiv noch die Reihe

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sin(n-1)\varphi_l}{n(n-1)} - \frac{\sin(n+1)\varphi_l}{n(n+1)} \right]$$
$$\times \left[\frac{\sin(n-2)\varphi_a}{(n-1)(n-2)} - 2\frac{\sin n\varphi_a}{(n-1)(n+1)} + \frac{\sin(n+2)\varphi_a}{(n+1)(n+2)} \right]$$

enthält.

Die Multiplikation der beiden Klammerausdrücke liefert sechs Teilreihen; die einzelnen Glieder der Teilreihen haben Zähler der Gestalt:

$$\sin n\alpha \cdot \sin(n+1)\beta \text{ und } \sin n\alpha \cdot \sin(n+3)\beta.$$

Für solche Ausdrücke gelten die Additionstheoreme:

$$\sin n\alpha \cdot \sin(n+1)\beta = \frac{1}{2}[\cos\beta \cdot \cos n(\alpha - \beta)$$
$$+ \sin\beta \cdot \sin n(\alpha - \beta) - \cos\beta \cdot \cos n(\alpha + \beta)$$
$$+ \sin\beta \cdot \sin n(\alpha + \beta)],$$

$$\sin n\alpha \cdot \sin(n+3)\beta = \frac{1}{2}[\cos 3\beta \cdot \cos n(\alpha - \beta)$$
$$+ \sin 3\beta \cdot \sin n(\alpha - \beta) - \cos 3\beta \cdot \cos n(\alpha + \beta)$$
$$+ \sin 3\beta \cdot \sin n(\alpha + \beta)].$$

Damit treten an die Stelle von Produkten, die die Summationsziffer n in jedem Faktor enthalten, solche, bei denen die Summationsziffer n nur noch in je einem Faktor vorkommt. Nach Anwendung dieser Additionstheoreme auf die genannten sechs Teilreihen verbleiben neben Ausdrücken endlicher Gliederzahl nur noch unendliche Teilreihen der Form

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n \cdot \cos n(\varphi_a \pm \varphi_l), \quad \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cdot \sin n(\varphi_a \pm \varphi_l),$$

wobei:

$$A_n = \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

Die Partialbruchzerlegung von A_n ergibt:

$$A_n = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n} + \frac{3}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right].$$

Damit sind obige Teilreihen nach einigen Umformungen (u. a. Ersatz der Summationsziffer $n - 1$, $n + 1$, $n + 2$ durch n) auf Teilreihen der Gestalt

Digitized by Google

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\,(\varphi_a \pm \varphi_l)}{n}$$

zurückzuführen. An die Stelle der ursprünglichen Reihe S. sind somit Ausdrücke von der Form $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\,\alpha}{n}$ getreten.

Für solche Ausdrücke gilt:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\alpha}{n} &= \Re^{4})\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\alpha})^n}{n}\right\}\\ &= \Re\left\{-\ln\left(1-e^{i\alpha}\right)\right\}^{5})\\ &= \Re\left\{-\frac{1}{2}\ln 2(1-\cos\alpha) + i\,\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right\}\\ &= -\frac{1}{2}\ln 2(1-\cos\alpha)^{6})\end{aligned}\right\} 0 < |\alpha| \leq \pi.$$

Die Darstellung der betrachteten Reihe durch einen Ausdruck endlicher Gliederzahl ist dadurch herbeigeführt.

V. Zusammenfassung.

Anlaß zur vorliegenden Arbeit gab die Tatsache, daß eine Übertragung der bekannten Ansätze zur Flatterberechnung auf Flügel mit Ruder und Hilfsruder eine Erweiterung der bisher veröffentlichten aerodynamischen Unterlagen erforderlich macht. Diese Unterlagen wurden in vorliegender Arbeit zunächst allgemein für die dünne Platte gegeben, die sich nach Geradenzügen sowie nach stetig gekrümmten Linien verformen kann; in diesem Rahmen stellen die Bewegungen des Flügels mit Ruder und Hilfsruder einen Sonderfall dar.

Im einzelnen wurden behandelt: Die Luftkraftverteilung über die Plattentiefe sowie die Luftkräfte und Luftmomente von Plattenabschnitten, die von beliebigen, zur Breitenrichtung parallelen Geraden begrenzt werden. Zum unmittelbaren Gebrauch bei Flatterberechnungen wurden zum Sonderfall des Flügels mit Ruder und Hilfsruder alle Hilfsfunktionen für die gebräuchlichen Zahlenbereiche der Veränderlichen tabuliert.

Die Anwendung der aufgestellten Formeln wurde in zwei Zahlenbeispielen gezeigt.

VI. Schrifttum.

Die Luftkraftgesetze der Platte bei beliebig zeitabhängiger Bewegung sind behandelt in:

[1] H. G. Küssner, Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 410/424.

[2] G. Ellenberger, Luftkräfte bei beliebiger instationärer Bewegung eines Tragflügels mit Querruder und bei Vorhandensein von Böen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 173/176.

Die Luftkraftgesetze der Platte bei harmonisch zeitabhängiger Bewegung sind außer in [1] noch behandelt in:

[3] H. G. Küssner, Schwingungen von Flugzeugflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929), S. 41/62.

[4] Th. Theodorsen, General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanic of Flutter. NACA-Report Nr. 496 (1935), S. 1/23.

[5] G. Ellenberger, Bestimmung der Luftkräfte auf einem ebenen Tragflügel. Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 199/226.

[6] P. Cicala, Le azioni aerodynamiche sul profilo oscillante. Aerotecnica Bd. 16 (1936), S. 652/663.

[7] F. Dietze, Zur Berechnung der Auftriebskräfte am schwingenden Ruder. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 361/362.

Die in vorliegender Arbeit ausführlich tabulierten Anteilfunktionen $\mathfrak{T}$ und g_j sind in anderer Darstellungsweise z. T. in [1, 3 bis 6] behandelt, außerdem noch in:

[8] K. Borkmann, Arbeitsblätter zur Ermittlung der Anteilfunktionen f_j und T. Bericht aus dem Institut für Festigkeit der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Anlage DVL C 4/150 zu FB 740 (1937).

Die in der Anteilfunktion $\mathfrak{T}(\omega_r)$ enthaltenen Hankelschen Zylinderfunktionen $H_n^{(2)}(\omega_r)$ sind tabuliert in:

[9] E. Jahnke und F. Emde, Funktionstafeln mit Formeln und Kurven. 2. Aufl., Verlag von B. G. Teubner; Leipzig, Berlin 1933.

---

4) $\Re\{\ldots\}$ bedeutet Realteil, $\Im\{\ldots\}$ bedeutet Imaginärteil des in der geschweiften Klammer stehenden Ausdrucks.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ für $-1 \leq x < +1$ (s. z. B. Hütte, Bd. I, 26. Aufl., S. 70).

6) Entsprechend ist: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\alpha}{n} = \Im\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\alpha})^n}{n}\right\} = \frac{1}{2}(\pi-\alpha)$.

Digitized by Google

Ein Iterationsverfahren zur Analyse von Störbelastungen bei Zylinderschalen*).

Von H. Simon, Berlin.

Bericht aus dem Flugtechnischen Institut der Technischen Hochschule Berlin, Prof. Dr.-Ing. H. Wagner.

Es wird ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe man bei einer Zylinderschale für gegebene Belastung den ersten oder die ersten beiden einfachen Störbelastungsanteile gleichzeitig berechnen kann (s. Abschn. IV und Tafel 1).

Weiter werden die nach diesem Verfahren berechneten niedrigsten einfachen Störbelastungen für elliptische Schalen angegeben (s. Bilder 4 und 5).

Gliederung.

I. Bezeichnungen.
II. Einleitung.
III. Die Vergleichsschale.
IV. Die Vergleichsschale unter einer einfachen Störbelastung.
V. Das Iterationsverfahren.
VI. Konvergenzbeweis.
VII. Berechnungsbeispiel.

I. Bezeichnungen[1]).

x	cm	Koordinate in Längsrichtung der Schale.
u	cm	Umfangskoordinate der Schale.
s	cm	Wanddicke des Schalenblechs, einschließlich etwa vorhandener Längsstäbe.
E	kg/cm²	Elastizitätsmodul.
B	kg cm	Biegesteifigkeit der Schalenringe (je cm Länge in x-Richtung).
B_1	kg cm²	Biegesteifigkeit der Endringe der Vergleichsschale.
b	kg cm²	Störbelastung, d. h. eine Belastung, deren Resultierende Null ist.
p	kg/cm²	Einfache Störbelastung.
$\bar{p}$	cm^{-1}	Normierte einfache Störbelastung.
ω	cm^{-1}	Abklinggeschwindigkeit.
q	kg/cm	Schubfluß im Schalenblech.
M	kg cm	Biegemomente im Endring der Vergleichsschale.
m_0	kg	Biegemomente am Ende der Schale.
v	cm	Umfangskomponente der Verschiebung am Endring der Vergleichsschale.
δ^*	cm	Verwölbung der Vergleichsschale.
ξ, η	cm	Abstand eines Schalenpunktes von den Querschnittshauptachsen.

Bedeutung der Indizes:
e bezieht sich auf einfache Spannungszustände,
* » » » die Vergleichsschale.

II. Einleitung.

In der Abhandlung »Über die Krafteinleitung in dünnwandige Zylinderschalen« von H. Wagner und H. Simon[2]) ist gezeigt, daß zu jeder Zylinderschale je nach ihrer Form eine Reihe von kennzeichnenden »einfachen Störbelastungen« gehört; jede von diesen ruft einen Spannungszustand hervor, der über die Schalenlänge nach einem Exponentialgesetz abklingt, und zwar mit einer bestimmten, der betreffenden einfachen Störbelastung eigentümlichen Abklinggeschwindigkeit.

Diese einfachen Störbelastungen sind wichtig, weil sich mit ihrer Hilfe der Spannungszustand unter einer beliebigen Störbelastung darstellen läßt. Man kann nämlich bei jeder Schale eine beliebige Störbelastung in einfache Störbelastungen zerlegen — analog der bekannten harmonischen Analyse — und erhält den Spannungszustand durch Überlagerung der zu den einfachen Störbelastungen gehörigen Spannungszustände. Um diese Zerlegung praktisch ausführen zu können, muß man die einfachen Störbelastungen kennen; sie sind jedoch bis jetzt nur für einige wenige Schalenformen bekannt, und auch nur für den Sonderfall, daß die Biegesteifigkeit der Spantringe und die Wanddicke des Schalenblechs sich über den Umfang nicht ändern. Für andere Schalen war in der angeführten Arbeit nur eine Schätzungsmethode angegeben, nach der man mit Hilfe einer Vergleichsschale die mittlere Beanspruchung der Spantringe abschätzen kann.

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß man mit Hilfe derselben Vergleichsschale für jede Zylinderschale und jede Störbelastung die beiden am langsamsten abklingenden einfachen Störbelastungen gleichzeitig berechnen kann, die in der gegebenen Störbelastung enthalten sind.

Die Voraussetzungen in der vorliegenden Arbeit sind dieselben wie in der obenerwähnten Arbeit.

Es sei noch bemerkt, daß sich die erste einfache Störbelastung auch ohne Hilfe der Vergleichsschale rein mathematisch ermitteln läßt, da die einfachen Störbelastungen mathematisch als Eigenfunktionen einer Integralgleichung definiert sind (siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik Bd. 1, Kapitel III, § 10,5 S. 132).

III. Die Vergleichsschale.

In Bild 1 ist eine Schale und die zugehörige Vergleichsschale angedeutet (die Schale ist der Einfachheit halber als Kreisschale gezeichnet; sie kann jedoch eine beliebige Querschnittsform haben). Die Vergleichsschale hat genau dieselbe Querschnittsform wie die eigentliche Schale und stimmt in der Wanddicke des Schalenbleches sowie in der Anordnung und den Abmessungen etwa vorhandener Längsprofile

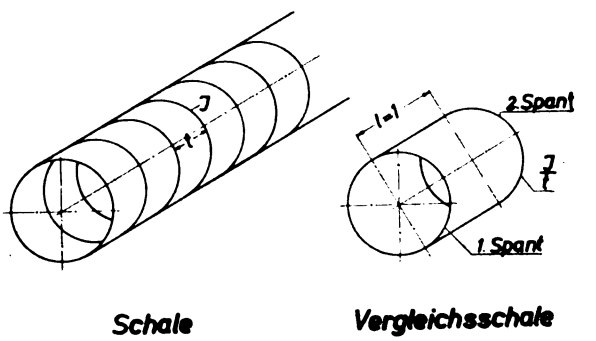


Bild 1. Die Vergleichsschale.

*) Von der Technischen Hochschule Berlin als Dissertation angenommen D 83.

[1]) Die Bedeutung der Bezeichnungen ist im allgemeinen dieselbe wie in der obengenannten Arbeit.

[2]) Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) Nr. 9, im folgenden als »Lufo« zitiert.

Digitized by Google

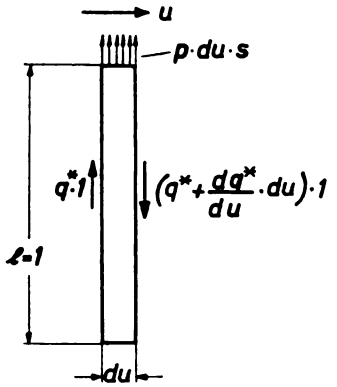


Bild 2. Kräfte am Element der Vergleichsschale.

mit der Schale überein. Sie unterscheidet sich dadurch, daß sie die Länge $l = 1$ besitzt und daß sich bei ihr nur an jedem Ende ein biegesteifer Ring befindet; die Biegesteifigkeit B_1 dieser Ringe stimmt längs des Umfanges mit der Biegesteifigkeit B der Schalenringe überein; sie hat die Größe $B_1 = B \cdot 1$.

Für die Verformung der Vergleichsschale wird nur der Einfluß der Ringverbiegung berücksichtigt. Die Schubverformung des Schalenblechs sowie die Nachgiebigkeit der Längsprofile und des Schalenblechs gegenüber Längskräften werden also vernachlässigt.

IV. Die Vergleichsschale unter einer einfachen Störbelastung.

Wir nehmen an, die Schale und die Vergleichsschale seien beide durch dieselbe einfache Störbelastung p_e belastet, und berechnen die Spannungen und Verformungen.

Durch die Belastung p_e entsteht im Stegblech der Vergleichsschale ein Schubfluß q^*. Wir rechnen $q^* > 0$, wenn die auf den ersten Ring wirkende Schubkraft in positiver u-Richtung läuft; $p > 0$ bedeutet eine Zugspannung. Es gilt dann die Beziehung (Bild 2):

$$-p_e \cdot s + \frac{d\,q^*}{d\,u} \cdot l = 0.$$

Durch Integration folgt:

$$q^* \cdot l = \int_{u_1}^{u} s \cdot p_e \cdot du \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die untere Grenze u_1 des Integrals ist aus Gleichgewichtsgründen so zu wählen, daß in einem Querschnitt der Vergleichsschale das resultierende Moment des Schubflusses verschwindet[3]).

Durch dieselbe einfache Belastung p_e wird in der eigentlichen Schale ein Schubfluß q hervorgerufen, für den die Gleichung gilt:

$$s \cdot \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,x} + \frac{\partial\,q}{\partial\,u} = 0 \quad \text{(siehe Lufo Gl. (I))}.$$

Die Längsspannungen σ haben dabei die Größe

$$\sigma = p_e \cdot e^{-\omega_e x}\,(\cos\omega_e x + \sin\omega_e x) \quad \text{(siehe Lufo Tafel I)}.$$

Für die Zunahme des Schubflusses $\left(\frac{\partial\,q}{\partial\,x}\right)_0$ am Ende der Schale ($x = 0$) ergibt sich daraus

$$\left(\frac{\partial\,q}{\partial\,x}\right)_0 = -\int_0^u s \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\,x^2}\right)_{x=0} \cdot du$$

$$\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\,x^2}\right)_{x=0} = -2\,\omega_e^2\,p_e\left[e^{-\omega_e x}\,(\cos\omega_e x - \sin\omega_e x)\right]_{x=0} = -2\,\omega_e^2\,p_e$$

$$\left(\frac{\partial\,q}{\partial\,x}\right)_0 = +2\,\omega_e^2 \int_0^u s \cdot p_e \cdot du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Da die untere Grenze des Integrals genau so zu wählen ist wie in (1), hat das Integral in (1) und (1a) denselben Wert, und es ist

$$\left(\frac{\partial\,q}{\partial\,x}\right)_0 = 2\,\omega_e^2 \cdot q^* \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wir betrachten nun weiter die Biegemomente in den Ringen der Schale und der Vergleichsschale. Die Momente M^* im Endring der Vergleichsschale werden durch die Belastung q^*, die Momente m_0 am Schalenende (an einem Ring von der Breite $dx = 1$) durch die Belastung $\left(\frac{\partial\,q}{\partial\,x}\right)_0 \cdot 1$ hervorgerufen. Da für q^* und $\left(\frac{\partial\,q}{\partial\,x}\right)_0$ die Gleichung (2) gilt und beide Ringe gleiche Biegesteifigkeit besitzen, so muß eine entsprechende Gleichung auch für die Momente gelten:

$$m_0 = 2\,\omega_e^2\,l \cdot M^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Auch für die Biegungsverformung der Ringe muß eine entsprechende Gleichung gelten. Es ist jedoch zu beachten, daß man sich die Vergleichsschale bei der Verbiegung an sich in beliebiger Weise festgehalten denken kann, und daß die Verschiebungen je nach der Art des Festhaltens verschieden sind. Damit sie mit den Verschiebungen des Schalenringes übereinstimmen, müssen beide Ringe in gleicher Weise festgehalten sein. Die in Umfangsrichtung fallenden Verschiebungskomponenten v^* am Endring der Vergleichsschale müssen also, genau wie die Verschiebungskomponenten v_0 der Schale, die drei Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \int_0^U \xi \cdot s \cdot du \int v^* \cdot du = 0 \\ &\text{b)}\ \int_0^U \eta \cdot s \cdot du \int v^* \cdot du = 0 \\ &\text{c)}\ \int_0^U v^* \cdot du = 0 \qquad [4]) \end{aligned}\right\} \text{(siehe Lufo Gl. (IV))} \quad (4)$$

Das läßt sich durch entsprechende Lagerung des ganzen Ringes stets erreichen[4a]).

Nach dieser Festlegung gilt

$$v_0 = 2\,\omega_e^2\,l\,\frac{B_1}{B}\,v^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Bei der Schale besteht zwischen Verschiebungen v und Längsspannungen σ die Beziehung

$$\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,u} = -E\,\frac{\partial^2 v}{\partial\,x^2} \quad \text{(siehe Lufo Gl. (II))}.$$

Da die Verschiebungen nach der Gleichung

$$v = v_0\,e^{-\omega_e x}\,(\cos\omega_e x - \sin\omega_e x) \quad \text{(siehe Lufo Tafel 1)}$$

verlaufen, so ergibt sich am Endspant ($x = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\,x^2}\right)_0 &= 2\,\omega_e^2 \cdot v_0 \\ \sigma_0 = p_e &= -2\,\omega_e^2\,E \int_0^u v_0\,du \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

wobei die untere Grenze des Integrals sich aus der Forderung ergibt, daß die resultierende Druckkraft $\int_0^U \sigma_0 \cdot s \cdot du$ verschwinden muß

$$\int_0^U \left(s \cdot \int v_0 \cdot du\right) du = 0.$$

Bei der Vergleichsschale tritt infolge der Verschiebung v^* eine Querschnittsverwölbung, d. h. eine Verschiebung der

[3]) Diese Festlegung gilt für geschlossene Schalen. Bei offenen Schalen ist die untere Grenze Null, wenn als Anfangspunkt $u = 0$ der freie Rand der Schale gewählt wird.

[4]) Bei offenen Schalen tritt an Stelle der Bedingung c) die folgende

$$\int_0^U r_m \cdot du \int_0^u s \cdot du \int v^* \cdot du = 0 \text{ (siehe Lufo Fußnote 15)},$$

worin die untere Grenze des inneren Integrals so festzulegen ist, daß

$$\int_0^U s \cdot du \int v^* \cdot du = 0.$$

[4a]) Die Bedeutung dieser Bedingungen ist, daß Schubbelastungen, die normaler Biegung um die Querschnittshauptachsen bzw. normaler Torsion entsprechen, bei der Verschiebung v^* insgesamt keine Arbeit leisten sollen.

Digitized by Google

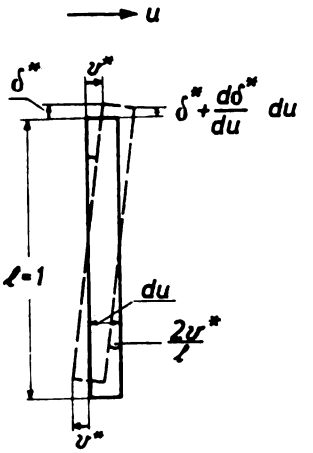


Bild 3. Verschiebung eines Elementes der Vergleichsschale.

Schalenpunkte in Längsrichtung auf, die wir mit δ^* bezeichnen. Nach Bild 3 gilt für ihre Größe

$$\frac{d\,\delta^*}{d\,u} = -\frac{2\,v^*}{l}$$

$$\delta^* = -\frac{2}{l}\int_0^u v^*\,d\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\,a)$$

Damit das Integral dieser Gleichung mit dem Integral der Gl. (6) vollkommen übereinstimmt, bestimmen wir die noch freie untere Grenze genau wie dort aus der Bedingung[4b]):

$$\int_0^U \left(s \cdot \int v^* \cdot d\,u\right) d\,u = 0.$$

Es folgt dann in Verbindung mit Gl. (6) und (5):

$$\delta^* = \frac{1}{2\,E\,\omega_e^4} \cdot \frac{B}{B_1\,l^2} \cdot p_e$$

und für $l = 1$ und $B_1 = B \cdot 1$

$$\delta^* = \frac{1}{2\,E\,\omega_e^4} \cdot p_e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Jede einfache Störbelastung ruft also an der Vergleichsschale eine Verwölbung hervor, deren Verteilung der Belastung ähnlich ist; die Größe ist der 4. Potenz der zugehörigen Abklinggeschwindigkeit umgekehrt proportional.

Wirkt auf eine Vergleichsschale gleichzeitig eine Reihe von einfachen Störbelastungen Σp_e, so hat die Verwölbung die Größe

$$\delta^* = \sum \frac{1}{2\,E\,\omega_e^4}\,p_e.$$

Wegen des Faktors $\frac{1}{\omega_e^4}$ treten bei der Verwölbung die Glieder p_e mit kleiner Abklinggeschwindigkeit ω_e stets stärker hervor als bei der Belastung. Diese Eigenschaft der Vergleichsschale benutzen wir für ein Iterationsverfahren, mit dem sich die ersten, d. h. die am langsamsten abklingenden p_e bestimmen lassen.

V. Das Iterationsverfahren.

In Tafel 1 ist angegeben, wie das Iterationsverfahren vor sich geht.

Man geht von der gegebenen Störbelastung b_0 aus, berechnet die zugehörige Verwölbung der Vergleichsschale δ_0^*[5]) und eine durch die angegebene Gleichung definierte »mittlere« Abklinggeschwindigkeit ω_{01}; sodann bildet man nach den angegebenen Formeln zwei erste Näherungen b_{11} und b_{12} für p_1 und p_2, berechnet wieder die zugehörigen Verwölbungen δ_{11}^* und δ_{12}^* sowie die Näherungen ω_{11} und ω_{12} für die Abklinggeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 usw. fort.

Es konvergieren dann die Größen b_{n1} und b_{n2} gegen die ersten beiden in b_0 enthaltenen einfachen Störbelastungen, und ω_{n1} und ω_{n2} gegen die zugehörigen Abklinggeschwindigkeiten ω_1 und ω_2.

Aus Tafel 1 geht hervor, daß man das Verfahren auch benutzen kann, um allein den ersten einfachen Störbelastungsanteil p_1 zu berechnen.

VI. Konvergenzbeweis.

Ehe wir den Beweis für die Konvergenz führen können, müssen wir die Reihen für b_0 und δ_0^* näher betrachten.

Es ist bekannt, daß man für jede beliebige quadratisch integrable Störbelastung b_0 (d. h. $\int_0^l b_0^2\,s\,du$ existiere) die einfachen Störbelastungsanteile bestimmen, d. h. eine Reihe Σp_e aufstellen kann[6]). In der Reihe sind die Glieder p_e nach der Größe der zugehörigen Abklinggeschwindigkeit ω_e angeordnet:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \ldots.$$

Die Reihe besitzt dann im allgemeinen nur eine mittlere Konvergenz und braucht nicht überall mit der Belastung b_0 übereinstimmen[7]). Trotzdem ist sie hinsichtlich der Schalenbeanspruchung (unter unseren Voraussetzungen) mit der Belastung b_0 gleichwertig, was folgendermaßen ausgedrückt werden soll:

$$b_0 \sim \Sigma\,p_e = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots. \quad \ldots. \quad (8)$$

Nun läßt sich leicht zeigen, daß für die Verwölbung δ_0^* der Vergleichsschale unter einer beliebigen Störbelastung b_0 die Gleichung gilt[8]):

$$\delta_0^*(u) \cdot \sqrt{s\,(u)} = 2\int_0^U b_0\,(n) \cdot \sqrt{s\,(n)}\;K\,(u, n) \cdot d\,n, \qquad (9)$$

wobei

$$K\,(u, n) = \sqrt{s\,(u)\;s\,(n)} \int_n^u \bar{v}_n\,(u)\,du\,dn \quad \ldots \quad (10)$$

der bekannte, zu den einfachen Störbelastungen gehörige Kern ist (siehe Lufo Gl. VIII). Die Größe $\delta_0^*(u) \cdot \sqrt{s\,(u)}$ ist also mit Hilfe des Kerns quellenmäßig darstellbar, und infolgedessen läßt sich die Verwölbung δ_0^* in einer gleichmäßig und absolut konvergenten Reihe nach den einfachen Störbelastungen p_e entwickeln[9]) (der Satz gilt zunächst für $\delta_0^* \sqrt{s}$ bezüglich der $p_e \cdot \sqrt{s}$, aber da die Wanddicke s nirgends verschwindet und mindestens stückweise stetig ist, läßt er sich sofort auf δ_0^* erweitern). Daraus folgt weiter, daß die Reihe, die sich aus der obigen Äquivalenz nach Gl. (7) für die Verwölbung ergibt:

$$\delta_0^*(u) = \sum \frac{1}{2\,E\,\omega_e^4}\,p_e(u) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

die Verwölbung darstellt und gleichmäßig und absolut konvergent ist.

Da sich nach diesen Ausführungen jede Verwölbung der Vergleichsschale durch einfache Störbelastungen p_e darstellen läßt, und da nach Tafel 1 die Näherungen b_{n1} und b_{n2} stets aus Verwölbungen gebildet werden, so müssen sich b_{n1} und b_{n2} ebenso durch die p_e darstellen lassen. Wir untersuchen, in welcher Weise sich b_{n1} und b_{n2} aus einfachen Störbelastungen p_e zusammensetzen, wenn man, ausgehend von der Belastung b_0 der Gl. (8) und der Verwölbung δ_0^* der Gl. (11), nach den Vorschriften der Tafel 1 verfährt. Man erhält:

$$b_{11} = \omega_{01}^4 \cdot 2\,E\,\delta_0^* = \Sigma\,\frac{\omega_{01}^4}{\omega_e^4}\,p_e,$$

[4b]) Der Sinn dieser Bedingung ist, daß eine gleichmäßig über den Umfang verteilte Druckkraft bei der Verwölbung δ^* insgesamt keine Arbeit leistet.

[5]) Die Berechnung der Verwölbung geschieht nach den bekannten Methoden der Festigkeitslehre; der Gang der Rechnung sei hier nur ganz kurz angegeben: Aus der Belastung b_0 berechnet man den zugehörigen Schubfluß entsprechend Gl. (1), indem man dort b_0 statt p_e einsetzt. Dann lassen sich die Ringmomente M und Ringverschiebungen v in bekannter Weise ermitteln (bei den Verschiebungen ist Gl. (4) zu beachten!), und nach Gl. (6a) erhält man schließlich die Verwölbung δ_0^*.

[6]) Bei der Reihe ist $p_e = c_e \cdot \bar{p}_e$, und c_e bestimmt sich aus

$$c_e = \int_0^l b\,(u)\,\bar{p}_e(u)\,s\,(u)\,du.$$

[7]) Bei Schalen mit ebenen Wänden können Differenzen zwischen b und Σp_e auftreten, siehe Lufo Abschnitt VI b und VII.

[8]) Die Ableitung dieser Gleichung entspricht genau der Ableitung der Integralgleichung in Lufo Abschn. VII.

[9]) Siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathem. Physik Bd. I.

Digitized by Google

Tafel I. Ablauf des Iterationsverfahrens.

b_0

δ_0^*

$$\omega_{01}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_0^2\, s\, du}{\int \delta_0^{*2}\, s\, du}\right.$$

$b_{11} = \omega_{01}^4 \cdot 2E\,\delta_0^*$

δ_{11}^*

$$\omega_{11}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{11}^2\, s\, du}{\int \delta_{11}^{*2}\, s\, du}\right.$$

$b_{12} = b_0 - b_{11}$

δ_{12}^*

$$\omega_{12}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{12}^2\, s\, du}{\int \delta_{12}^{*2}\, s\, du}\right.$$

$b_{21} = \omega_{11}^4 \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{01}^4} 2E\,\delta_{11}^*$

$b_{22} = \omega_{12}^4 \dfrac{2E\,\delta_{12}^* - \frac{1}{\omega_{11}^4}\left[1 - \frac{\omega_{01}^4}{\omega_{11}^4}\right] b_{21}}{1 - \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{12}^4}}$

δ_{21}^*

$$\omega_{21}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{21}^2\, s\, du}{\int \delta_{21}^{*2}\, s\, du}\right.$$

δ_{22}^*

$$\omega_{22}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{22}^2\, s\, du}{\int \delta_{22}^{*2}\, s\, du}\right.$$

$b_{31} = \omega_{21}^4 \left(\frac{\omega_{21}^4}{\omega_{11}^4}\right)^2 2E\,\delta_{21}^*$

$b_{32} = \omega_{22}^4 \frac{\omega_{22}^4}{\omega_{12}^4}\left[1 - \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{12}^4}\right] 2E\,\delta_{22}^* - \dfrac{\frac{1}{\omega_{21}^4}\frac{\omega_{11}^4}{\omega_{21}^4}\left[1 - \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{20}^4}\right] b_{31}}{1 - \frac{\omega_{21}^4}{\omega_{22}^4}}$

δ_{31}^*

$$\omega_{31}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{31}^2\, s\, du}{\int \delta_{31}^{*2}\, s\, du}\right.$$

δ_{32}^*

$$\omega_{32}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{32}^2\, s\, du}{\int \delta_{32}^{*2}\, s\, du}\right.$$

$b_{n1} = \omega_{n-1.1}^4 \left(\frac{\omega_{n-1.1}^4}{\omega_{n-2.1}^4}\right)^{n-1} 2E\,\delta_{n-1}^*$

$b_{n2} = \omega_{n-1.2}^4 \left(\frac{\omega_{n-1.2}^4}{\omega_{n-2.2}^4}\right)^{n-2} \cdot \dfrac{\left[1 - \frac{\omega_{n-2.1}^4}{\omega_{n-2.2}^4}\right] 2E\,\delta_{n-1.2}^* - \frac{1}{\omega_{n-1.1}^4}\left(\frac{\omega_{n-2.2}^4}{\omega_{n-1.1}^4}\right)^{n-2}\left[1 - \frac{\omega_{n-2.1}^4}{\omega_{n-1.1}^4}\right] b_{n1}}{1 - \frac{\omega_{n-1.1}^4}{\omega_{n-1.2}^4}}$

δ_{n1}^*

$$\omega_{n1}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{n1}^2\, s\, du}{\int \delta_{n1}^{*2}\, s\, du}\right.$$

δ_{n2}^*

$$\omega_{n2}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{n2}^2\, s\, du}{\int \delta_{n2}^{*2}\, s\, du}\right.$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert, während die Reihe

$$b_{12} = b_0 - b_{11} \sim \Sigma\left(1 - \frac{\omega_{01}^4}{\omega_e^4}\right) p_e$$

noch nicht gleichmäßig konvergent zu sein braucht. Die zugehörigen Verwölbungen δ_{11}^* und δ_{12}^*, die sich analog den Gleichungen (8) und (11) als

$$\delta_{11}^* = \Sigma \frac{1}{2E\omega_e^4}\frac{\omega_{01}^4}{\omega_e^4} p_e \qquad \delta_{12}^* = \Sigma \frac{1}{2E\omega_e^4}\left(1 - \frac{\omega_{01}^4}{\omega_e^4}\right) p_e$$

ergeben, sind jedoch beide gleichmäßig und absolut konvergent. Infolgedessen sind von der nächsten Stufe ab beide Reihen b_{21} und b_{22} absolut und gleichmäßig konvergent:

$$b_{21} = \omega_{11}^4 \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{01}^4} 2E\,\delta_{11}^* = \Sigma\left(\frac{\omega_{11}^4}{\omega_e^4}\right)^2 p_e$$

$$b_{22} = \omega_{12} \dfrac{2E\,\delta_{12}^* - \frac{1}{\omega_{11}^4}\left(1 - \frac{\omega_{01}^4}{\omega_{11}^4}\right) b_{21}}{1 - \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{12}^4}} - \Sigma \frac{\omega_{12}^4}{\omega_e^4} \frac{1 - \frac{\omega_{11}^4}{\omega_e^4}}{1 - \frac{\omega_{11}^4}{\omega_{12}^4}} p_e.$$

Für b_{n1} ergibt sich allgemein:

$$b_{n1} = \Sigma\left(\frac{\omega_{n-1.1}^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e \quad \ldots \quad (12a)$$

gleichmäßig und absolut konvergent.

Daß diese Gleichung für $n = 2$ richtig ist, sieht man durch Vergleich mit b_{21}. Die allgemeine Gültigkeit beweist man durch Schluß von n auf $n + 1$: Setzt man die zugehörige Verwölbung δ_{n1}^*, die sich analog zu Gleichung (8) und (11) ergibt:

$$\delta_{n1}^* = \Sigma \frac{1}{2E\omega_e^4}\left(\frac{\omega_{n-1.1}^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e,$$

in die nach den Vorschriften der Tafel 1 gebildete Formel

$$b_{n+1.1} = \omega_{n1}^4 \left(\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_{n-1.1}^4}\right)^{n+1} 2E\,\delta_n^*$$

ein, so erhält man

$$b_{n+1.1} = \Sigma\left(\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_e^4}\right)^{n+1} p_e,$$

und diese Gleichung entspricht formal der Gl. (12a).

In entsprechender Weise läßt sich für b_{n2} beweisen:

$$b_{n2} = \Sigma\left(\frac{\omega_{n-1.2}^4}{\omega_e^4}\right)^{n-1} \frac{1 - \frac{\omega_{n-1.1}^4}{\omega_e^4}}{1 - \frac{\omega_{n-1.1}^4}{\omega_{n-1.2}^4}} p_e \quad \ldots \quad (12b)$$

gleichmäßig und absolut konvergent.

Digitized by Google

Wir beweisen nun zunächst, daß ω_{n1} gegen ω_1 geht. Es ist[10])

$$\omega_{n1}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{n1}^2 s\,du}{\int \delta_{n1}^{*2} s\,du}\right|.$$

Durch Einsetzen der Reihen erhält man nach Kürzung mit $\frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}$

$$\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_1^4} = \sqrt{\frac{\int\left[\sum_e \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e\right]^2 s\,du}{\int\left[\sum_e \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^{n+1} p_e\right]^2 s\,du}}.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz beider Reihen darf man gliedweise integrieren und erhält, wenn man berücksichtigt, daß für $\nu \neq \mu$ $\int p_\nu p_\mu \cdot s\,du = 0$:

$$\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_1^4} = \sqrt{\frac{\int p_1^2 s\,du + \sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^{2n}\int p_e^2 s\,du}{\int p_1^2 s\,du + \sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^{2(n+1)}\int p_e^2 s\,du}}.$$

Da für $e = 2, 3, 4 \ldots$ stets $\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4} < 1$ gilt, so ist der Nenner kleiner als der Zähler; die untere Grenze für ω_{n1}^4/ω_1^4 ist also Eins, und wir brauchen nur zu zeigen, daß die obere Grenze ebenfalls Eins ist. Wir zeigen, daß sogar $\left(\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_1^4}\right)^n$ gegen Eins konvergiert:

$$\left(\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_1^4}\right)^n < \left[\frac{\int p_1^2 s\,du + \sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^{2n}\int p_e^2 s\,du}{\int p_1^2 s\,du}\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$< \left[1 + \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{2n}\frac{\sum_{e=2}\int p_e^2 s\,du}{\int p_1^2 s\,du}\right]^{\frac{n}{2}} \quad \ldots \quad (13)$$

Da b_0 quadratisch integrabel ist, so ist $\sum_{e=2}\int p_e^2 s\,du$ beschränkt[11]); die rechte Seite hat also die Form $[1 + \alpha^{2n}\cdot C]^{n/2}$, wo C eine beliebige Konstante und α ein echter Bruch ist: $0 < \alpha < 1$, und der Grenzwert dieses Ausdrucks für $n \to \infty$ ist tatsächlich Eins. Also ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_1^4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{n1}^4}{\omega_1^4} = 1 \quad \ldots \quad (14)$$

Es läßt sich nun weiter beweisen, daß $b_{n1} \to p_1$ geht. Aus Gleichung (11) folgt

$$b_{n1} = \left(\frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right)^n \sum_e \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{n1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right)^n\left[p_1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e\right].$$

Wir betrachten das zweite Glied der Klammer:

$$\sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e < \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1}\omega_1^4\sum_{e=2}\frac{|p_e|}{\omega_e^4}.$$

Aus der absoluten Konvergenz von δ_0^* folgt, daß $\sum\frac{|p_e|}{\omega_e^4}$ beschränkt ist (siehe Gl. (11)):

$$\sum_{e=2}\frac{|p_e|}{\omega_e^4} < M.$$

Also gilt:

$$\left|\sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^n p_e\right| < \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1}\cdot\omega_1^4\cdot M$$

und da $\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)$ ein echter Bruch ist, so folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{e=2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_e^4}\right)^n p_e = 0.$$

Es ergibt sich also nach Gl. (13):

$$\lim_{n\to\infty} b_{n1} = p_1 \quad \ldots \quad (15)$$

Der Konvergenzbeweis $\omega_{n2} \to \omega_2$ und $b_{n2} \to b_2$ verläuft analog. Es ist:

$$\omega_{n2}^4 = \frac{1}{2E}\left|\frac{\int b_{n2}^2 s\,du}{\int \delta_{n2}^* s\,du}\right|.$$

$$\frac{\omega_{n2}^4}{\omega_2^4} = \sqrt{\frac{\sum_e\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right]^2\int p_e^2 s\,du}{\sum_e\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{2n}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right]^2\int p_e^2 s\,du}} \quad (16)$$

Wir betrachten zunächst den Zähler für sich:

$$\sum_e\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right]^2\int p_e^2 s\,du$$

$$= \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right]^2\int p_1^2 s\,du$$

$$+ \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_2^4}\right]^2\int p_2^2 s\,du$$

$$+ \sum_{e=3}\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right]^2\int p_e^2 s\,du \quad (16a)$$

und untersuchen das erste Glied

$$\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right]^2\int p_1^2 s\,du.$$

Nach Gl. (12) gilt:

$$\frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4} < \left[1 + \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{2(n-1)}\frac{\sum_{e=2}\int p_e^2 s\,du}{\int p_1^2 s\,du}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Da $\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} < 1$ ist, wird das zweite Glied von einem genügend großen n an so klein, daß man die binomische Entwicklung ansetzen kann: es ergibt sich dann ein Ausdruck von der Form:

$$\frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4} < 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{2(n-1)}\cdot c + (\ )_h.$$

Dabei enthält $(\ )_h$ Glieder, die in $\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)$ von höherer Ordnung sind und gegen das vorhergehende Glied mit steigendem n verschwinden. Es ergibt sich also

$$\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right]^2 < \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1}\cdot c + (\ )_h\right]^2 \quad (17)$$

und man erkennt, daß der Ausdruck von der Ordnung $\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1}$ gegen Null geht.

Für das dritte Glied der Gl. (16a) ergibt sich

$$\sum_{e=3}\left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{2(n-1)}\left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right]^2\int p_e^2 s\,du$$

$$< \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_3^4}\right)^{2(n-1)}\sum_{e=3}\int p_e^2 s\,du.$$

Da $0 < \frac{\omega_2}{\omega_3} < 1$ und $\sum_{e=3}\int p_e^2 s\,du$ beschränkt ist, geht auch dieses Glied mit $n \to \infty$ gegen Null. Der Grenzwert des Zählers der Gl. (16) beträgt also

[10]) Die Grenzen der Integrale sind in folgendem immer 0 und l; der Einfachheit halber sind sie beim Druck weggelassen.

[11]) Es gilt die Besselsche Ungleichheit $\int b_0^2 s\,du \geq \sum\int p_e^2 s\,du$, siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathem. Physik Bd. 1.

Digitized by Google

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{e} \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{2(n-1)} \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right]^2 \int p_e^2 \, s \, du = \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_2^4}\right]^2 \int p_2^2 \, s \, du.$$

Führt man dieselbe Betrachtung für den Nenner der Gl. (16) durch, so erhält man für ihn den gleichen Grenzwert wie für den Zähler, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{n2}^4}{\omega_2^4} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Man kann den Konvergenzbeweis noch erweitern und zeigen, daß sogar gilt[12]):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\omega_{n2}^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (18a)$$

Nun ergibt sich leicht die Konvergenz von b_{n2}.

$$b_{n2} = \frac{\left(\frac{\omega_{n-1,2}^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_{n-1,2}^4}} \sum_{e} \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right] p_e$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{n2} = \lim \frac{\left(\frac{\omega_{n-1,2}^4}{\omega_2^4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_{n-1,2}^4}} \left\{ \lim \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right] p_1 + \lim \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_2^4}\right] p_2 + \lim \sum_{e=3} \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_2^4}\right] p_e \right\}.$$

[12]) Dies beruht darauf, daß Nenner und Zähler der Gl. (16) sich in Ausdrücken von der Form $c + a^n \cdot C$ darstellen lassen, wo $a < 1$ ist, und daß $\lim_{n\to\infty} [c + a^n \cdot C] = \lim_{n\to\infty} [c + a^n C]^n = c$ ist.

Nach Gl. (17) ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_1^4}\right] p_1 = 0.$$

Für das dritte Klammerglied ergibt sich:

$$\sum_{e=3} \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_e^4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{\omega_{n-1,1}^4}{\omega_e^4}\right] p_e \leq \left(\frac{\omega_2^4}{\omega_3^4}\right)^{n-2} \sum \frac{p_e}{\omega_e^4}$$

und da $\Sigma \frac{p_e}{\omega_e^4}$ beschränkt (wegen der absoluten Konvergenz von δ_0*) und $\frac{\omega_2}{\omega_3} < 1$ ist, so verschwindet auch dieses Glied im Grenzfall. Es folgt also, wenn man Gl. (18a) berücksichtigt:

$$\lim_{n\to\infty} b_{n2} = p_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Damit ist die Konvergenz des Iterationsverfahrens bewiesen.

VII. Berechnungsbeispiel.

Das Iterationsverfahren wurde benutzt, um die niedrigsten einfachen Störbelastungen für verschiedene elliptische Schalen zu berechnen (bei über den Umfang konstanter Wandstärke und Biegesteifigkeit). Die Ergebnisse sind in Bild 4 und 5 dargestellt; Bild 4 zeigt die normierten einfachen Störbelastungen, Bild 5 die zugehörigen Abklinggeschwindigkeiten. Bemerkenswert ist, daß sich bei den Abklinggeschwindigkeiten der Faktor k mit der Ellipsenform verhältnismäßig wenig ändert; erst bei sehr schmalen Ellipsen beginnt er merklich zu wachsen (im Grenzfall der flachgedrückten Ellipse wird k unendlich groß).

Bei der Berechnung wurden die symmetrischen und antisymmetrischen 1. Störbelastungen nicht gleichzeitig, sondern jede für sich ermittelt (es wurde also jeweils nur das einfache Iterationsverfahren, linke Hälfte der

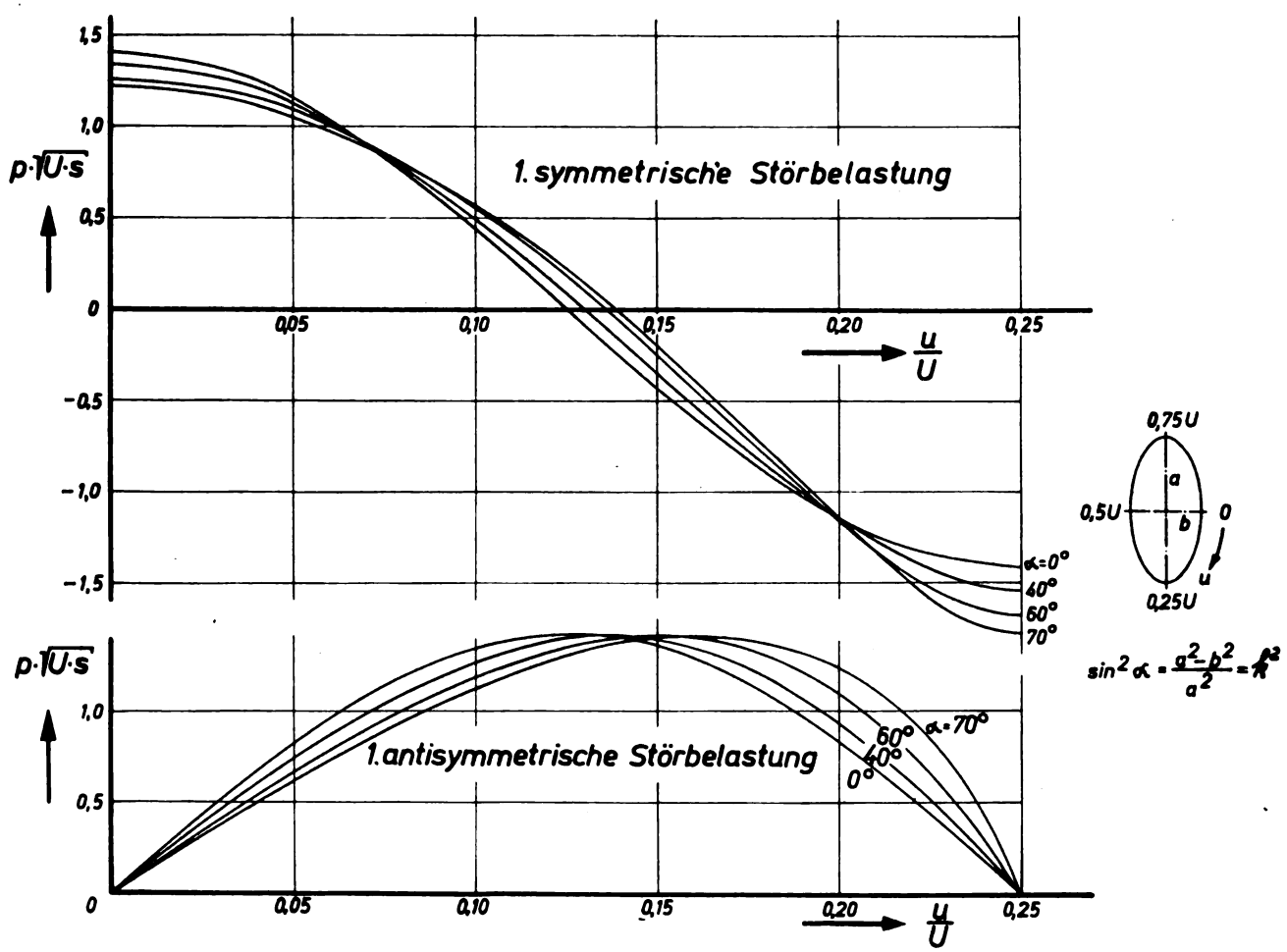


Bild 4. Einfache Störbelastung für elliptische Schalen.

Digitized by Google

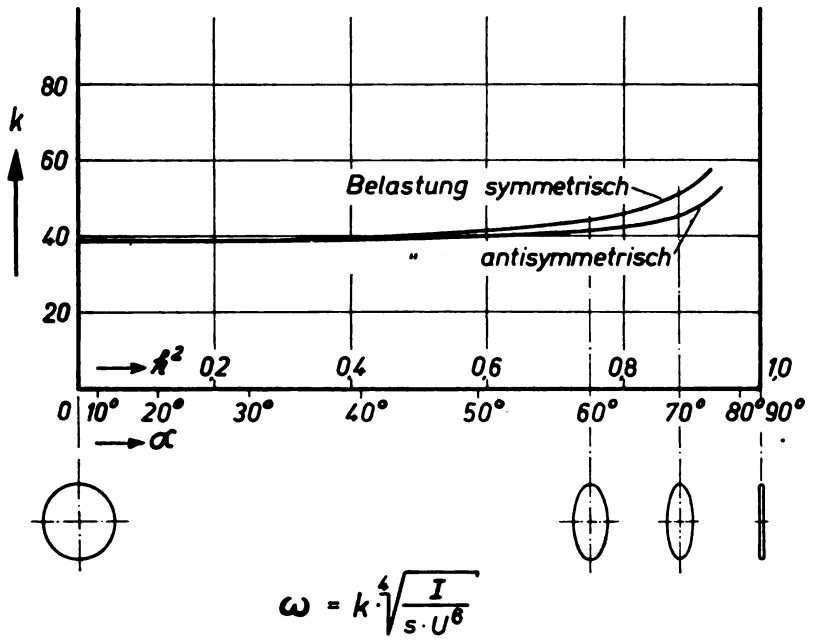


Bild 5. Kleinste Abklinggeschwindigkeit für elliptische Schalen.

$$\omega = k \cdot \sqrt[4]{\frac{I}{s \cdot U^6}}$$

Tafel 1, verwendet). Als Ausgangsbelastung b_0 wurde jedesmal eine reine Sinus- bzw. Kosinusbelastung angenommen. Es ergab sich sehr gute Konvergenz. Die zweite Näherung für die einfache Störbelastung stimmte schon so gut mit der ersten überein, daß beide Kurven zusammenfielen. In Bild 6 sind als Beispiel für eine Ellipse mit dem Parameter $\alpha = 70° \left(\sin^2 \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$ im symmetrischen Fall die Ausgangsbelastung und die Näherungen sowie die Differenzen zwischen den Näherungen aufgezeichnet. Letztere wurde in 50facher Vergrößerung aufgetragen.

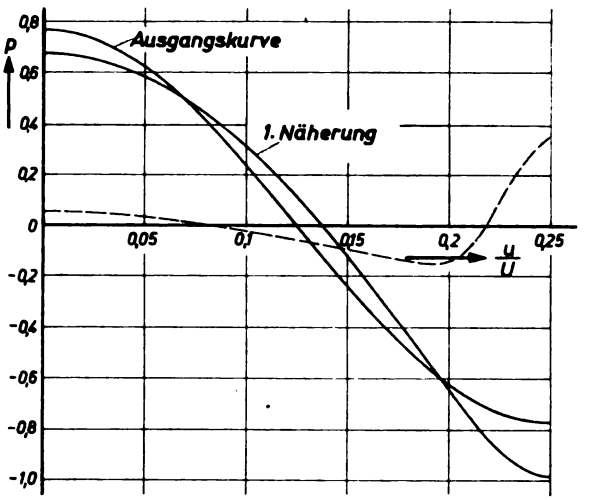


Bild 6. Rechnungsbeispiel zum Iterationsverfahren.
— — — Differenz zwischen 1. und 2. Näherung, 50fach vergrößert.

Digitized by Google

Messungen an einem Tiefdeckermodell im rotierenden Strahl und ihr Vergleich mit Flugmessungen.

Von W. Bader*).

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Flugmechanik.

An einem Modell des Flugzeugmusters BFW-M 27 b_1 sind im umlaufenden Strahl Sechskomponentenmessungen bis zu höheren Anstellwinkeln durchgeführt worden. Der Bericht behandelt diese Messungen und vergleicht sie mit gleichzeitig durchgeführten Trudelflügen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Allgemeines über die Modellmessungen.
III. Durchführung der Versuche.
IV. Formelzeichen.
V. Versuchsergebnisse
a) Die Luftkräfte.
b) Die Luftkraftmomente.
VI. Flugversuche.
VII. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

In den letzten Jahren ist der Verlauf der Luftkräfte und Luftkraftmomente bei hohen Anstellwinkeln, deren Kenntnis für das Verständnis des Trudelvorgangs unerläßlich ist, von den verschiedensten Seiten — insbesondere von englischen und amerikanischen Versuchsanstalten — untersucht worden. Da bei diesen Fragen vor allem der Einfluß der Drehung um die Flugwindachse bei verschiedenen Anstell- und Schiebewinkeln interessiert, bietet die Durchführung der Messungen, welche im allgemeinen an den sogenannten Trudelwaagen ausgeführt werden, teilweise erhebliche Schwierigkeiten. Der grundsätzliche Vorteil der Meßmethode ist dieser: In der freien Strömung ist der statische Druck konstant und die Grenzschicht kann gegebenenfalls in gleicher Weise wie beim trudelnden Flugzeug der Fliehkraft folgen.

Trotz der zahlreich gewonnenen systematischen Erkenntnisse ist man im gegebenen Einzelfall noch weit davon entfernt, ohne Messungen den Verlauf der aerodynamischen Größen auch nur annähernd genau voraussagen zu können. Als anläßlich von Versuchsflügen mit einem Tiefdecker des Baumusters BFW-M 27 b_1 der Wunsch nach einer genaueren Kenntnis des aerodynamischen Verhaltens des Flugzeuges bestand, wurden nach der neuen von M. Kramer und K. Krüger[1]) entwickelten Trudelmeßeinrichtung Modellversuche durchgeführt. Über diese Messungen wird im folgenden berichtet: Es wird beabsichtigt, zunächst festzustellen, inwieweit die im Schrifttum vertretene Ansicht der Unabhängigkeit der Kräfte von der Drehung, die bei der mathematischen Behandlung des Trudelproblems von Wichtigkeit ist, im vorliegenden Fall zutrifft. Insbesondere sollte auch der Verlauf der Querkraft in Abhängigkeit vom Anstellwinkel, Schiebewinkel und Drehung ermittelt werden, um genauere Aussagen über den Flugwindhängewinkel machen zu können. Wegen der bekannten Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Luftkraftmomente sollten die Versuche die für die Brauchbarkeit der Methode entscheidende Frage klären, ob die Wirkung der verschiedenen Einflußgrößen in ihrem Sinn beim Modellversuch richtig wiedergegeben wird.

II. Allgemeines über die Messungen.

Bei der neuen Trudelmeßeinrichtung hängt das Modell an einer üblichen Sechskomponentenwaage im Kanalstrahl, welcher mittels eines rotierenden Siebes eine zusätzliche Drehung erhält. Diese Versuchsdurchführung hat meßtechnisch prinzipielle Vorteile gegenüber dem Arbeiten an der Trudelwaage; aber wie bereits Kramer und Krüger darauf hingewiesen haben, hat diese Meßart den grundsätzlichen Mangel, daß der statische Druck der freien Strömung nicht konstant ist: Infolge der auf den Strahl wirkenden Fliehkraft nimmt der statische Druck von außen nach der Strahlmitte hin nach einem parabolischen Gesetz etwas ab. Messungen zeigten eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch.

Die durch den veränderlichen statischen Druck hervorgerufenen Momente dürfen auch bei größeren Anstellwinkeln, bei denen das Leitwerk merkbar von der Strahlmitte entfernt ist, zu vernachlässigen sein gegenüber den sonst vorhandenen Meßungenauigkeiten. Eine andere Frage ist es, ob infolge des Druckgefälles ein Wandern der Grenzschicht einsetzen kann, wodurch die Profileigenschaften wesentlich geändert werden könnten. Diese Änderung würde im entgegengesetzten Sinn als beim Flugversuch erfolgen. Da andererseits die Strahldrehgeschwindigkeit bei den Versuchen recht gering war und weiterhin in der Strahlmitte der Abfall des statischen Druckes klein blieb, war zu erwarten, daß keine erhebliche Beeinflussung der Profileigenschaften durch Grenzschichtwanderung stattfinden würde. Daraufhin deuten auch von anderer Seite in der DVL durchgeführte Vergleichsmessungen zwischen rotierendem Strahl und rotierendem Flügel.

III. Durchführung der Versuche.

Da ursprünglich beabsichtigt war, auch Messungen mit Einführung eines Trudelradius vorzunehmen, wurde das Modell verhältnismäßig klein hergestellt. Die damit verbundene Verringerung der Meßgenauigkeit konnte bis zu einem gewissen Grade durch Verwendung genügend empfindlicher Meßdosen vermindert werden; am schwierigsten war dies bei der Messung der Widerstandskomponenten zu erreichen, weil wegen der Kleinheit der rückführenden Kräfte eine genaue Ablesung der Null-Ausgangswerte nur schwer zu erreichen war.

Die geringe Modellgröße hatte den weiteren Nachteil, daß bei den Versuchen der Wert der Kennzahl $\lambda = \frac{\Omega s}{v}$ nicht allzu hoch gesteigert werden konnte. Der beste Weg zur Erreichung hoher Drehzahlwerte wäre gewesen, bei genügend hohen Kanalgeschwindigkeiten auch große Winkelgeschwindigkeiten zu nehmen, um bei möglichst hohen Reynoldsschen Zahlen die Messungen auszuführen.

*) Für wertvolle Mitarbeit bei der Durchführung der Versuche bin ich den Herren Dipl.-Ing. Paul Höhler und Flugbaufuhrer Martin Zeuner † zu besonderem Dank verpflichtet.

[1]) M. Kramer und K. B. Krüger, Eine neue Trudelmeßeinrichtung. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 475 bis 479.

Digitized by Google

Infolge der sehr starken Geschwindigkeitsminderung, welche durch das Drehsieb hervorgerufen wird, war es nicht möglich, den Staudruck über 30 kg/m² zu steigern; dieser Staudruck entspricht den maximalen bei den Versuchen an Trudelwaagen verwendeten Kanalgeschwindigkeiten, bei welchen die Festigkeit des Modells und das Auftreten von Schwingungen den Staudruck nach oben begrenzen.

Bei dieser erstmaligen Erprobung der neuen Trudelmeßeinrichtung konnte trotz verschiedener Verbesserungen der Höchststaudruck noch nicht ausgenutzt werden, da wegen des auf dem Drehsieb lastenden Druckes die Lagerung und der Antrieb des Drehsiebes noch einige Schwierigkeiten bereiteten, welche in der kurzen zur Verfügung stehenden Zeit nicht behoben werden konnten. Messungen, welche zur Beurteilung des Auftriebsmaximums bei verschiedenen Staudrücken (15, 20 und 25 kg/m²) ausgeführt wurden, zeigten in Übereinstimmung mit anderen Untersuchungen keinen erheblichen Einfluß des Kennwertes in diesem Bereich; deshalb wurden die Versuche im allgemeinen bei dem niedrigen Staudruck von 15 kg/m² durchgeführt. Die Wahl der niedrigen Kanalgeschwindigkeiten gestattete es, einigermaßen befriedigende Werte der Drehschnelle zu erhalten und damit den Einfluß der Drehung auf die Luftkräfte und Luftkraftmomente übersehen zu können.

Da wegen der geschilderten Schwierigkeiten, welche bei weiteren Versuchen mit dem rotierenden Strahl unschwer behoben werden könnten, die Reynoldssche Zahl unverhältnismäßig klein war, wurde versucht, durch Vorschaltung eines Turbulenzgitters die effektive Reynoldssche Zahl zu erhöhen. Hierdurch wurde ein aus parallelliegenden Rundstäben bestehendes Gitter benutzt; eine Anbringung dieses Gitters hinter dem Drehsieb (in Richtung gegen den Windstrom gesehen) konnte nicht vorgenommen werden, weil ein Teil der erzeugten Turbulenz durch das Drehsieb wieder vernichtet worden wäre. Eine Anbringung eines aus radialen Gitterstäben bestehenden Turbulenzgitters, welches fest auf dem Drehsieb angebracht sein müßte, würde diese Schwierigkeiten vermeiden.

Die Turbulenzmessungen wurden in Ermangelung eines Hitzdrahtanemometers mittels einer Eichkugel (140 mm Dmr.) durchgeführt. Sie ergaben für den nicht rotierenden Strahl einen Turbulenzfaktor von 2,7. Bei Strahldrehung verringerte sich dieser Wert nicht unbedeutend[2]). Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, daß die immerhin etwas grobe Meßmethode für den rotierenden Strahl ungeeignet ist. Die effektive Reynoldssche Zahl der Messungen beim Staudruck von 15 kg/m² war $7{,}3 \cdot 10^4$ (Bezugslänge: mittlere Flügeltiefe).

Der Verlauf des Staudrucks wurde in dem durch Auftriebs- und Querkraftachse gehenden Kanalquerschnitt untersucht; er konnte nach Vornahme einiger Verbesserungen recht gleichmäßig gehalten werden. Obwohl der Abstand der erwähnten Kanalebene vom Turbulenzgitter etwa das 70fache der Stärke eines Gitterstabes betrug, erwies sich der Staudruck noch stark von dem Turbulenzgitter beeinflußt und zeigte längs eines Kanaldurchmessers einen wellenförmigen Verlauf. Dieser bedingte eine sorgfältige Anbringung des Staudruckmeßgerätes; hierzu wurden drei parallel geschaltete Prandtlrohre verwendet, deren Lage im Freistrahl durch Vorversuche so bestimmt wurde, daß ihre Anzeige mit befriedigender Genauigkeit den mittleren Staudruck ergab.

Infolge der großen Massenträgheit des Drehsiebes war es versuchsmäßig leichter, bei festgehaltener Siebdrehzahl und fest eingestelltem Schiebewinkel eine Polare durchzuführen, als bei konstanten Anströmwinkeln die Drehgeschwindigkeit des Strahles zu ändern. Bei der gewählten Versuchsdurchführung beanspruchte eine vollständige Sechskomponentenmessung nur etwa 10 min. Diese Zeitspanne durfte nicht überschritten werden, ohne daß die Erwärmung der Lagerrollen des Siebes zu deren Zerstörung führte, die mit starken Erschütterungen der Kanaldüse verbunden war. Ein gewisser Nachteil dieser Meßmethode besteht darin, daß die Abhängigkeit der Momente von der Strahldrehung zunächst in Parameterdarstellung erhalten wird und jeder Schnitt, der durch experimentell erhaltene Kurvenscharen gelegt wird, eine gewisse Unsicherheit in sich trägt.

[2]) Bei einer Strahldrehzahl $n = 2{,}5\ s^{-1}$ fiel der Turbulenzfaktor auf etwa 2.

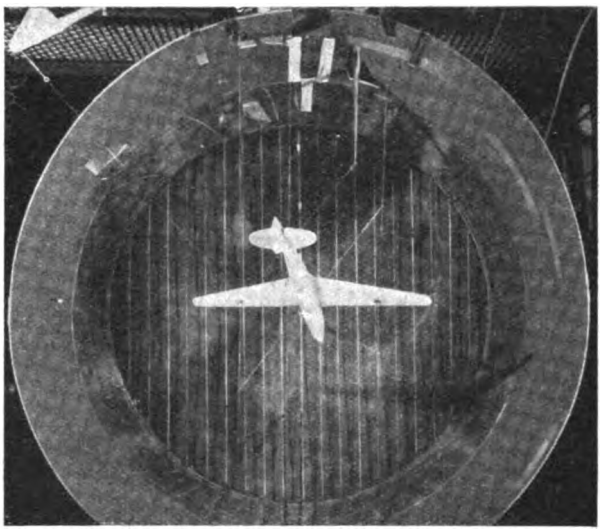


Bild 1. Die Versuchsanlage mit dem Modell im Kanal.

Bild 1 zeigt die Versuchseinrichtung mit dem im Kanal hängenden Modell. Das Drehsieb und das Turbulenzgitter sowie das zur Bestimmung der Drehgeschwindigkeit des Kanalstrahls verwendete Anemometer sind im Hintergrund zu erkennen.

Bei dem im Maßstab 1 : 20 aus Holz hergestellten Modell wurde auf Grund von Vergleichsmessungen mit dem Versuchsflugzeug auf möglichst genaue geometrische Ähnlichkeit geachtet. Es war mit verstellbaren Seiten- und Höhenrudern ausgestattet. Bei dem Modell wurde jedoch davon abgesehen, Querruder anzubringen; in Übereinstimmung hiermit wurde im allgemeinen bei den Flugversuchen das Querruder auf Null gehalten. Des weiteren wurde bei dem Modell darauf verzichtet, es mit einer Luftschraube zu versehen, zumal die Flugversuche bei solchen Motordrehzahlen durchgeführt wurden, bei denen die Schraube weder nennenswerten Zug noch Widerstand lieferte.

Der stark trapezförmige Flügel hat das Verjüngungsverhältnis $l_a : l_i = 0{,}33$; die Flügelstreckung beträgt $\Lambda = 9{,}5$; der Verwindungswinkel ist rd. 4°, der Winkel der V-Stellung etwa 5°. Ungefähr im ersten Drittel der Halbspannweite (von der Symmetrieebene aus gerechnet) hat der Flügel die Form des Göttinger Profils Gö 681, während die übrigen Profile über der Skelettlinie verdickt bzw. verflacht sind. Zum Vergleich mit NACA-Messungen seien einige Profildaten angegeben: maximale Wölbung etwa 4,5 vH, Rücklage der maximalen Wölbung ungefähr 40 vH der Flügeltiefe, Profildicke rd. 7 vH. In der NACA-Systematik liegt somit das Profil etwa bei den Profilnummern 4417 und 5417.

IV. Formelzeichen.

Die Bedeutung der verschiedenen Achsen und der einzelnen Winkel ist aus Bild 2 zu ersehen, die dem augenblicklichen Stand der FALU-Normen[3]) entspricht und die insbesondere von den früher in Deutschland für flugmechanische Rechnungen benutzten Begriffsbestimmungen des Anstell- und Schiebewinkels abweicht. Hinsichtlich der Vorzeichen der Winkel ist zu sagen, daß in Bild 2 sämtliche Winkel positiv eingetragen sind; die Pfeilrichtung gibt an, von wo aus die Winkel zu rechnen sind. Insbesondere bedeutet ein positiver Schiebewinkel ein Vorauseilen des Backbordflügels. Beim Rechtstrudeln besagt mithin ein positiver Wert des Seitenwinkels, daß das Flugzeug nach außen schiebt.

[3]) Die Normenblätter sind durch den Beuth-Verlag zu beziehen.

Digitized by Google

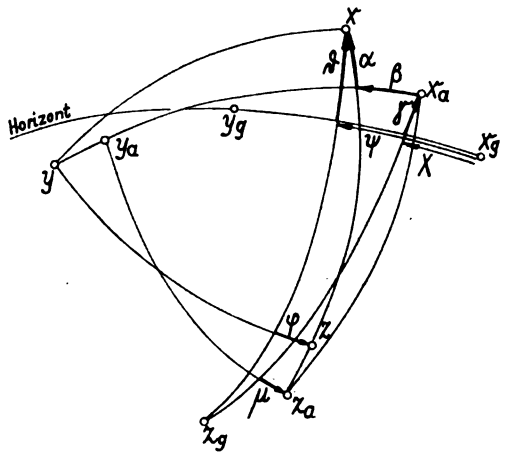


Bild 2. Koordinatensysteme.

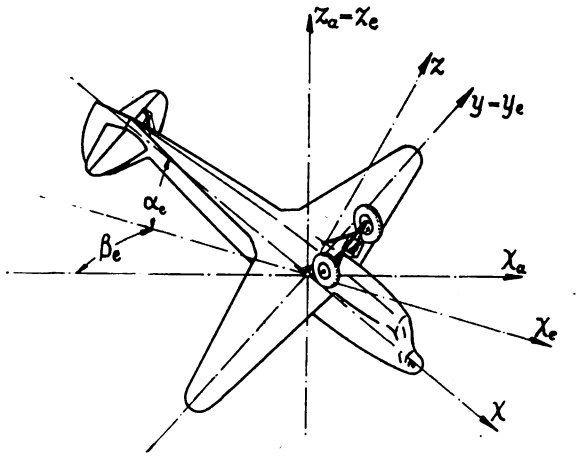


Bild 3. Achsenkreuze im Windkanal.

Während wie üblich Widerstands- und Auftriebsbeiwert positiv gerechnet werden, wenn der Widerstand bzw. Auftrieb in Richtung der negativen x_a bzw. der negativen z_a-Achse wirken, wird die Querkraft $Q = c_q \cdot Fq$ positiv gerechnet, wenn sie in Richtung der positiven y_a-Achse wirkt.

Die Luftkraftmomente L, M und N werden positiv gerechnet, wenn sie in positivem Drehsinn um die jeweiligen Achsen wirken.

Die Momentenbeiwerte sind definiert durch

$$c_L = \frac{L}{qFs} \quad \text{Rollmomentenbeiwert,}$$

$$c_M = \frac{M}{qFl} \quad \text{Längsmomentenbeiwert,}$$

$$c_N = \frac{N}{qFs} \quad \text{Giermomentenbeiwert.}$$

Hierbei bedeutet s die Flügelhalbspannweite, l die mittlere Flügeltiefe.

Die Vorzeichen der Ruderausschläge sind nach den neuen FALU-Normen derart festgelegt, daß einem positiven Ruderausschlag eine negative Flugzeugdrehung entspricht; demnach bedeutet also

η { negativ ..... Höhenruder »gezogen«
positiv ..... Höhenruder »gedrückt«

ζ { negativ ..... Seitenruder nach Steuerbord ausgeschlagen
positiv ..... Seitenruder nach Backbord ausgeschlagen

Es bedeutet also beim Rechtstrudeln: $\eta < 0$, $\zeta < 0$, daß Höhen- und Seitenruder in trudelförderndem Sinn ausgeschlagen sind.

Einige weitere Formelzeichen werden im Text erläutert.

Hinsichtlich der Bezeichnung der Luftkraftmomente ist noch folgendes zu sagen: Das Rollmoment $L_e = c_{Le} Fsq$ bezieht sich auf die im Kanal waagerecht verlaufende x_e-Achse, die mit der Kanalachse den Schiebewinkel β_e einschließt (in Bild 3 ist der eingetragene Schiebewinkel negativ); die x_e-Achse ist die Spur der Modell-Symmetrieebene in der horizontalen Ebene des Kanals[4]). Das Längsmoment $M = c_M Flq$ ist auf die durch den Schwerpunkt gehende y-Querachse bezogen; der Umrechnung ist eine Schwerpunktsrücklage von 16 vH der mittleren Flügeltiefe — also im Abstande $\frac{2b}{3\pi}$ von der Symmetrieebene — zugrunde gelegt; denn bei dieser Schwerpunktlage wurden die Flugversuche ausgeführt. Das Giermoment $N_e = c_{Ne} Fsq$ ist das Luftkraftmoment um die z_a-Achse (Auftriebsachse).

[4]) Bei sämtlichen in Frage kommenden Bildern sowie im Text ist für den Anstellwinkel bzw. Schiebewinkel die Bezeichnung α_e bzw. β_e verwendet worden, wobei der Index e das Wort »experimentell« oder auch »englisch« bedeutet. Wie ein Vergleich des Bildes 2 mit Bild 3 zeigt, ist α mit α_e und β mit β_e identisch. Die verschiedene Bezeichnung — hervorgerufen durch die Entwicklung der flugmechanischen Normen — wurde jedoch beibehalten, um in der augenblicklichen Übergangszeit, in der noch frühere Achsenkreuze Verwendung finden, einer Verwechselung vorzubeugen.

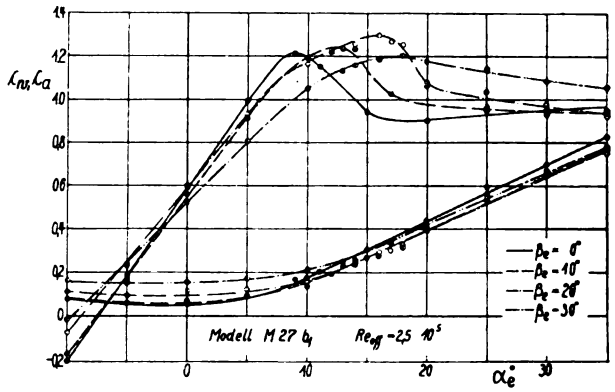


Bild 4. Einfluß des Schiebens auf Auftrieb und Widerstand.

Zwecks Vergleich mit den Ergebnissen der Flugmessungen ist auch (s. Bild 13) das Giermoment $N = c_N Fsq$ um die Hochachse berechnet worden[5]).

V. Versuchsergebnisse.

a) Die Luftkräfte.

Bevor auf die Beeinflussung des Auftriebes und des Widerstandes durch Schieben und Rollen näher eingegangen wird, soll zunächst festgestellt werden, daß die Höhe des gemessenen Größtauftriebes in Anbetracht der niedrigen Kennwerte recht zufriedenstellend ist; dies ist für die vorliegenden Messungen infolge der Abhängigkeit der trudelwichtigen Rollmomente vom Auftriebsverlauf von Bedeutung. Amerikanische Profiluntersuchungen, die im Hochdruckwindkanal bei hohen Reynoldsschen Zahlen vorgenommen wurden, geben für das Profil 4418 als maximalen Auftriebsbeiwert 1,47 an. Dieser Wert ist wegen der bekannten starken Turbulenz des erwähnten Kanals als zu hoch anzusehen.

In Bild 4 wiedergegebene — bei erhöhtem Staudruck ausgeführte — Polarenmessungen, bei denen in einem großen Schiebewinkelbereich (bis $\beta_e = 30°$) der Einfluß seitlich einfallenden Windes untersucht wurde, zeigen folgendes Ergebnis:

1. Unterhalb des Höchstauftriebes nimmt der Gradient $\frac{\partial c_a}{\partial \beta_e}$ mit wachsendem Seitenwinkel β_e ab; dieser Abfall ist stärker als es dem Produkt $\frac{\partial c_a}{\partial \beta_e}\Big|_{\beta_e = 0} \cdot \cos \beta_e$ entspricht;
2. mit zunehmendem Schiebewinkel wandert der Höchstauftrieb zu höheren Anstellwinkeln, wobei der Betrag von $c_{a\,max}$ sich kaum ändert (Slippen!);
3. der starke Abfall des Auftriebes nach Erreichen des Größtauftriebes wird mit zunehmendem Schiebewinkel gemildert.

[5]) $N = N_e \cos \alpha_e + L_e \sin \alpha_e$; man beachte die Vorzeichen-Druckfehler bei L. Hopf, Aerodynamik, Bd. 1, S. 270.

Digitized by Google

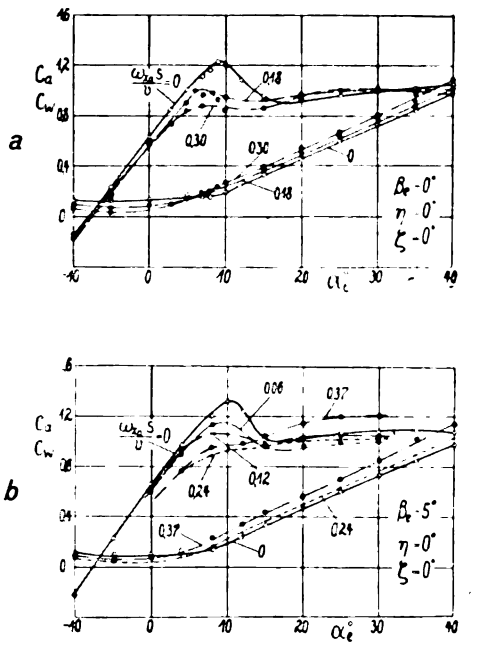


Bild 5a und b. Beiwert des Auftriebs und des Widerstands in Abhängigkeit von der Rollgeschwindigkeit.

Der Einfluß des Rollens auf den Verlauf von Auftrieb und Widerstand ist in Bild 5 bei zwei verschiedenen Schiebewinkeln (kein Schieben bzw. 5° Schieben nach außen) wiedergegeben:

Die ursprünglich vorhandene Auftriebskuppe flacht mit zunehmender Rollgeschwindigkeit ab; im weit überzogenen Anstellwinkelbereich erweist sich demgegenüber der Auftrieb als nahezu unabhängig vom Rollen. Von Interesse ist die Verringerung des Widerstandes bei kleinen Anstellwinkeln infolge der Drehung; diese beruht darauf, daß die von unten angeströmte Flügelhälfte einen größeren Auftrieb — bezogen auf die jeweilige örtliche Anströmrichtung — erfährt als die von oben angeblasene Flügelhälfte. Da der größere Auftrieb schwach nach vorn zur Flügelnase hin geneigt ist, so ergibt die Summe der Projektionen auf die mittlere Strömungsrichtung eine gegen die Strömung gerichtete Kraft und damit eine Verringerung des Widerstandes. Diese Erscheinung wird verstärkt, sobald bei der mit verringerten Anstellwinkeln angeströmten Flügelhälfte die örtliche Auftriebskraft nach unten gerichtet ist; denn in diesem Fall addieren sich in äquivalenten Flügelschnitten (im Abstande $\pm y$ von der Symmetrieebene) die gegen die mittlere Strömungsrichtung wirkenden Auftriebsprojektionen.

Da andererseits die Versuche im weit überzogenen Gebiet eine eindeutige Zunahme des Widerstandes mit wachsender Rollgeschwindigkeit zeigen, soll im folgenden der Einfluß der verschiedenen geometrischen Orientierung der einzelnen Flügelschnitte wenigstens größenordnungsmäßig untersucht werden.

Wie aus Bild 6 zu ersehen ist, hat ein Flügelstreifen der Breite 1 in der Entfernung y von der Drehachse den Widerstand[6])

$$W(y) = \{\overline{c_w}(\alpha_0 + \alpha_\omega)\cos\alpha_\omega - \overline{c_a}(\alpha_0 + \alpha_\omega)\sin\alpha_\omega\}\, l(y)\cdot 1\cdot q_{res}.$$

In Hinsicht auf den beabsichtigten Vergleich mit den Versuchswerten darf es als ausreichend angesehen werden, den induzierten Anstellwinkel zu vernachlässigen und weiterhin für die Größen $\overline{c}_w$ und $\overline{c}_a$ die bekannten Beiwerte c_{w0} bzw. c_{a0} zu nehmen, welche für den vorliegenden Flügel durch die Polarenmessungen bei $\lambda = 0$ gefunden sind.

Diese Vernachlässigungen ergeben für c_w nach einigen Umformungen den einfachen Ausdruck

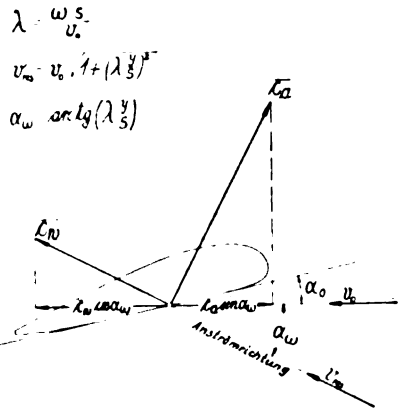


Bild 6. Zur Änderung des Widerstandes beim Rollen.

$$c_w \approx \frac{A}{4}\int_{-1}^{+1} \frac{c_{w_0}(\alpha_0+\alpha_\omega)\cos\alpha_\omega - c_{a_0}(\alpha_0+\alpha_\omega)\sin\alpha_\omega}{\cos^2\alpha_\omega}\,\frac{l(y)}{s}\,d\left(\frac{y}{s}\right).$$

Aus dieser Darstellung ist zu ersehen, daß lediglich aus kinematischen Gründen (Anstellwinkel- und Staudruckänderung) bei kleinen Anströmwinkeln und mittleren Drehzahlwerten der zweite Summand unter dem Integral eine bedeutende Erniedrigung des Gesamtwiderstandes bewirkt; denn auf der von unten angeblasenen Flügelhälfte ist c_a wesentlich größer als c_w, und daher ist das mit dem $\sin\alpha_\omega$ behaftete Glied gegenüber dem $\cos\alpha_\omega$-Glied nicht zu vernachlässigen. Auf der anderen Flügelhälfte kann zwar der Auftrieb von geringerer Größenordnung als der Widerstand sein, aber wegen des eintretenden Vorzeichenwechsels des Auftriebes bleibt das Produkt $c_a \sin\alpha_\omega$ positiv. Zahlenmäßig durchgeführte Rechnungen ergaben für $\alpha_0 = -4°$ und einer Drehzahl $\lambda = 0{,}37$ eine Verkleinerung des Widerstandsbeiwertes um 66 vH; die Kanalmessungen ergeben (Bild 5) die gleiche Abnahme.

Beim überzogenen Flügel geht die widerstandsverringernde Wirkung des zweiten Summanden verloren, da die in Frage kommenden Auftriebskomponenten in äquivalenten Flügelstreifen sich annähernd aufheben; um so stärker wirkt der Einfluß des widerstandserhöhenden ersten Summanden sich aus. Die Verhältnisse lassen sich besonders einfach übersehen, wenn für den Verlauf der c_w-Kurve die Annahme getroffen wird, daß sie bis zu dem Winkel α_{max} des Höchstauftriebes aus einer Parabel und anschließend im überzogenen Gebiet aus einer Geraden besteht. Bei einem Vergleich entsprechender Flügelstreifen gehört bei positiver Drehung zu einer Widerstandszunahme Steuerbord eine genau gleich große Widerstandsabnahme Backbord, sofern beiden Streifen effektive Anstellwinkel zugeordnet sind, die zu dem geraden Ast der c_w-Kurve gehören. Wenn bei diesem Beispiel aber der Backbord-Flügelstreifen einen Anstellwinkel erhält, der zu dem gekrümmten Teil der Widerstandskurve gehört, so tritt hier eine geringere Widerstandsabnahme ein; damit ist eine Erhöhung des Gesamtwiderstandes verbunden. — Eine Zahlenrechnung ergab für $\alpha_0 = 25°$ bei einer Drehzahl $\lambda = 0{,}37$ eine Widerstandserhöhung von 10 vH; diese stimmt mit den Versuchsergebnissen recht gut überein.

Somit haben diese Überlegungen folgendes gezeigt:

1. Bei kleinen Anstellwinkeln wird durch das Rollen der Widerstand verkleinert;
2. im überzogenen Gebiet tritt eine Erhöhung des Widerstandes infolge des Rollens ein; diese Zunahme ist durch die Differenz $\alpha_0 - \alpha_{max}$, durch die Größe der Drehzahl und die Form des Flügels bedingt (bei einem rechteckigen Flügel dürfte die Wirkung stärker sein als bei einem Dreieckflügel, da bei jenem die äußeren Teile größere Beiträge zum Gesamtwiderstand liefern).

Der absolute Betrag der dritten Luftkraft, der Querkraft, bleibt bei den meisten Flugzuständen klein gegenüber der Größe des Auftriebes. Bei einer Untersuchung des

[6]) Die Größe $\alpha_0 + \alpha_\omega$ ist hier wie weiter unten als Argument aufzufassen.

Digitized by Google

Trudelfluges kann jedoch eine genauere Kenntnis des Verlaufs von c_q notwendig werden, da bei der mathematischen Behandlung des Trudelns der Querkraftbeiwert öfter mit kleinen Größen additiv gekoppelt auftritt.

Bei niedrigen Anstellwinkeln zeigen die Messungen bis nahe an den Winkel des Höchstauftriebes heran einen von α_e nahezu unabhängigen Wert des Querkraftanstieges $\frac{\partial c_q}{\partial \beta_e} = 0{,}4$ (man vgl. Bild 7, in der jedoch der Übersichtlichkeit wegen der Verlauf von c_q nur für einen Schiebewinkel eingezeichnet ist).

Im überzogenen Bereich ist der auftretende Vorzeichenwechsel der Querkraft beachtenswert; dieser kommt dadurch zustande, daß bei höheren Anströmwinkeln der Flügel als Bremsscheibe wirkt, was das Auftreten einer Luftkraft in Richtung der vorgestellten Flügelhälfte nach sich zieht.

Der Einfluß des Rollens auf die Größe der Querkraft erweist sich als recht erheblich. Die absolute Größe der Querkraft im Gebiet des stationären Steiltrudelns (bei normaler Belastung etwa zwischen 25° bis 35° Anstellwinkel) bleibt jedoch so klein, daß sich z. B. für den Strömungshängewinkel etwa ein Betrag von 80° bis 90° ergibt[7]).

b) Luftkraftmomente.

Die Messung des Längsmomentes (Bild 8) zeigt in Übereinstimmung mit der im Schrifttum vertretenen Auffassung hinsichtlich des Einflusses des Schiebens und Rollens keine allzu starke Abhängigkeit von den beiden Parametern. Immerhin wird das Längsmoment durch seitlich einfallenden Wind etwas stärker beeinflußt als durch Drehung um die Strömungsachse. In Bild 8 ist für ein Außenschieben von $\beta_e = 10°$ bei einigen Rollgeschwindigkeiten der auf den Flugzeugschwerpunkt bezogene Momentenbeiwert c_M bei drei bestimmten Ruderausschlägen aufgetragen. Die Kurvenscharen verlaufen im wesentlichen parallel, da die Normalkraftbeiwerte eines Höhenleitwerkes bei verschiedenen Ruderausschlägen sich im allgemeinen lediglich durch eine additive Konstante unterscheiden.

Der zahlenmäßige Vergleich der Ruderwirksamkeit mit der Theorie ist recht befriedigend: im normalen Flugbereich ergibt die Messung für einen Höhenruderausschlag $\eta = \pm 30°$ einen Normalkraftbeiwert[8])

[7]) Dieser Wert ergibt sich auf Grund einer für den stationären Trudelflug leicht ableitbaren Beziehung für den Strömungshängewinkel.

[8]) Zur Vereinfachung ist hierbei $q_H = q$ angenommen worden.

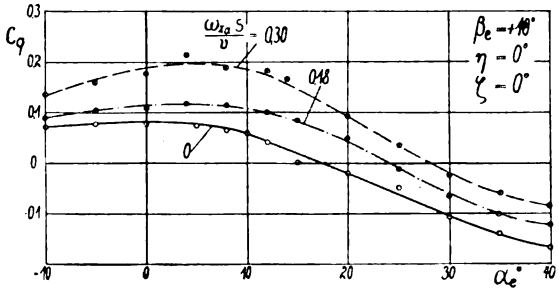


Bild 7. Beiwert der Querkraft bei 10° Schiebewinkel.

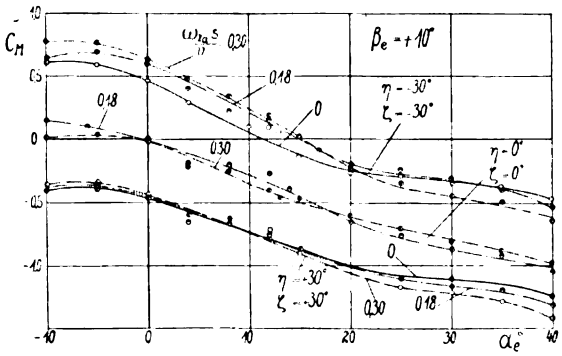


Bild 8. Beiwert des Längsmomentes bei verschiedenen Ruderausschlägen.

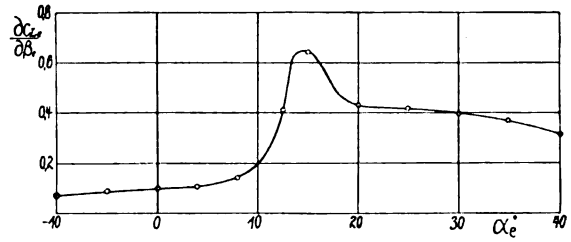


Bild 9. Zum Verlauf des Schieberollmomentes in Abhängigkeit von dem Anstellwinkel.

$$c_{n\,H} = \frac{c_{M_0} \cdot F\, l}{F_H\, l_H} = \frac{0{,}45 \cdot 14{,}78 \cdot 1{,}34}{2{,}77 \cdot 4{,}00} = 0{,}80;$$

hierbei ist der Wert von c_{M_0} Bild 8 entnommen, während die anderen Größen den Flugzeugabmessungen entnommen sind.

Die Theorie führt annähernd zu dem gleichen Werte der Normalkraft: das Höhenleitwerk der M 27 b_1 hat eine Leitwerksstreckung $\Lambda = 3{,}7$, so daß $\frac{\partial c_{n\,H}}{\partial \alpha_H}$ zu 0,06 angenommen werden kann; da die Ruderfläche rd. 38 vH der Leitwerksfläche beträgt, so kann bei vollem Höhenruderausschlag für $\frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta}$ etwa der Wert $0{,}7\sqrt{0{,}38} = 0{,}43$ eingesetzt werden; der Faktor 0,7 entspricht dabei einer bei vollem Ruderausschlag üblichen Annahme hinsichtlich des eintretenden Verlustes an Ruderwirksamkeit. Damit wird für den Normalkraftbeiwert gefunden:

$$\Delta c_{n\,H} = \frac{\partial c_{n\,H}}{\partial \alpha_H} \cdot \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta} \cdot \Delta \eta = 0{,}06 \cdot 0{,}43 \cdot 30 = 0{,}78.$$

Bild 9 zeigt für $\lambda = 0$ den Verlauf des Schieberollmomentes in Abhängigkeit vom Anstellwinkel: unterhalb des Höchstauftriebes hat das Schieberollmoment nur einen kleinen Betrag, der insbesondere von der Gestaltung der Flügelspitze und dem V-Winkel stark abhängig ist. Bei Annäherung an den Winkel des Größtauftriebes steigt das Schieberollmoment kräftig an, wobei sein maximaler Anstieg mit der Lage des Auftriebsmaximums zusammenfällt. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß auch im weit überzogenen Gebiet das Schieberollmoment einen sehr großen Betrag aufweist; da eine hohe Querstabilität den stationären Trudelflug sehr stabil gegenüber kleinen Störungen macht, ist das durch die Messungen gefundene Ergebnis für Trudeluntersuchungen von Bedeutung. Der hier gefundene Wert von $\frac{\partial c_{l_r}}{\partial \beta_e} \approx 0{,}4$ stimmt mit anderen im Schrifttum angegebenen Werten recht gut überein; denn das Schieberollmoment im abgerissenen Gebiet scheint von der Gestaltung des Flügels und auch dem Winkel der V-Stellung nur wenig abhängig zu sein, weil sein hoher Betrag vor allem dadurch hervorgerufen wird, daß Grenzschichtmaterial in Richtung nach dem zurückgeschobenen Flügelende transportiert wird.

Bei der Ermittlung des Schieberollmomentes zeigt es sich, daß bei kleinen Anstellwinkeln $\frac{\partial c_{l_r}}{\partial \beta_e}$ vom Schiebewinkel abhängig ist, während im überzogenen Bereich das Schieberollmoment in einem großen Seitenwinkelbereich konstant ist. Betreffs des praktisch wichtigen Parametereinflusses des Rollens auf die Querstabilität erlauben die Messungen noch kein endgültiges Urteil.

Der Einfluß der Rotation um die Anströmachse auf das Rollmoment ist in Bild 10 und 11 für $\beta_e = 0°$ und $\beta_e = 10°$ (Schieben nach außen) wiedergegeben. Für den nicht überzogenen Flugbereich ergeben die Messungen einen Rolldämpfungswert $\frac{\partial c_{l_r}}{\partial \frac{\omega_x\, s}{v}} \approx -1{,}0$. Die Rechnung

Digitized by Google

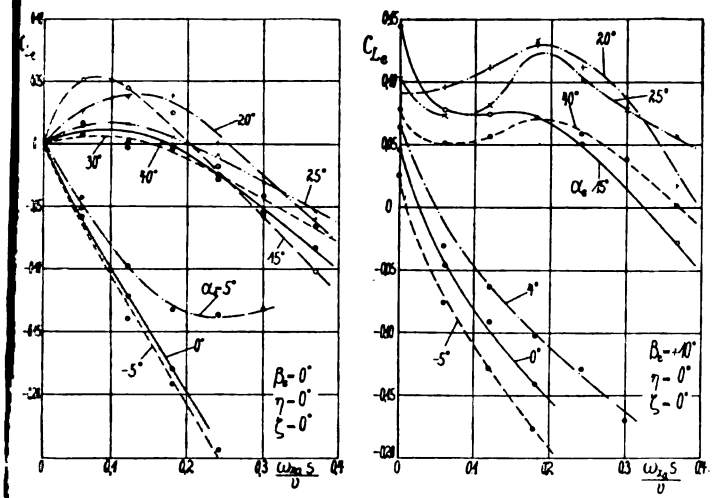


Bild 10 (links). Beiwert des Rollmomentes in Abhängigkeit von $\frac{\omega_{xa}s}{v}$ Schiebewinkel $\beta_e = 0°$.

Bild 11 (rechts). Beiwert des Rollmomentes in Abhängigkeit von $\frac{\omega_{xa}s}{v}$ Schiebewinkel $\beta_e = +10°$.

liefert für den vorliegenden Trapezflügel nach der Multhoppschen Theorie den gleichen Betrag.

Die Rollinstabilität beim Überziehen und das Wiederauftreten einer Rolldämpfung bei größeren Anstellwinkeln und höheren Werten der Rollgeschwindigkeit wird von den Messungen gut wiedergegeben. Diese beim Trudeln auftretende Rolldämpfung ist annähernd halb so groß wie die bei kleinen Anstellwinkeln und kleiner Drehzahl.

Ein Vergleich von Bild 10 und 11 zeigt die bekannte für das Verständnis des Trudelvorganges wichtige Erhöhung der Autorotationsgeschwindigkeit beim Schieben nach außen. Hier nicht wiedergegebene Messungen bei 5° Schieben nach innen lassen die trudelhemmende Wirkung des Schiebens nach innen und damit die Bedeutung der Giermomente gut erkennen.

Das Anwachsen der Autorotationsgeschwindigkeit beim Außenschieben beruht vor allem auf einem Wandern der Grenzschichtmassen in Richtung auf die zurückgestellte Flügelspitze. Dieser Grenzschichttransport erfolgt im rotierenden Luftstrahl auf der zurückgestellten Flügelhälfte gegen den Anstieg des statischen Druckes; es darf deshalb aus den Messungen geschlossen werden, daß zumindest bis zu den verwendeten Drehzahlwerten $\lambda = 0{,}37$ der Einfluß des statischen Druckgradienten sich noch nicht allzu stark störend auf das durch ein Schieben bedingte Grenzschichtwandern auswirkt.

Die Rolldämpfung wird, wie die Versuche zeigten, durch Ausschlagen des Höhen- oder Seitenruders nicht beeinflußt; denn der Hebelarm vom Seitenruder bis zur Windachse ist auch bei höheren Anstellwinkeln noch nicht allzu groß. Hier interessierende Versuche mit Querruderausschlägen konnten an dem Modell nicht ausgeführt werden.

Während das Rollmoment vor allem durch den Flügel bedingt ist, bringen zum Giermoment sowohl Flügel als auch Rumpf und Seitenleitwerk Anteile annähernd gleicher

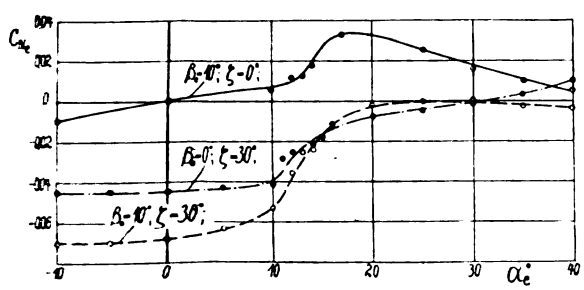


Bild 12. Beiwert des Giermomentes bei verschiedenen Ruderausschlägen.

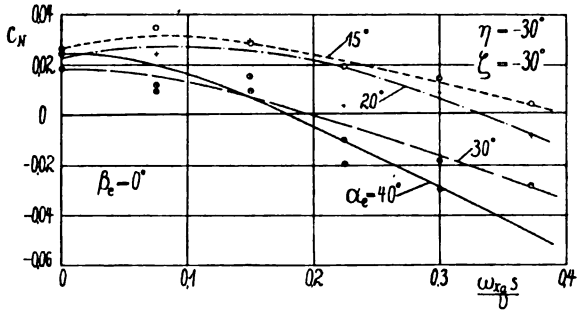


Bild 13. Beiwert des Giermomentes in Abhängigkeit von $\frac{\omega_{xa}s}{v}$ bei $\beta_e = 0°$.

Größenordnung, die zudem noch verschiedene Vorzeichen haben können. Bei der Bestimmung der Giermomente, insbesondere des im allgemeinen kleinen Rollgiermomentes, war deshalb von vornherein nur eine beschränkte Meßgenauigkeit erwartet.

Bild 12 gibt den Verlauf der Giermomente ohne Drehung wieder; hier tritt vor allem bei den beiden Kurven mit Seitenruderausschlag die kräftige Abschirmung des Seitenruders durch das Höhenleitwerk im überzogenen Anstellwinkelbereich hervor. Diese Abschirmung wird bei gleichzeitig gedrücktem Höhenruder (in dem Bild nicht wiedergegeben) auch bei niedrigen Anströmwinkeln verstärkt, so daß die Wirkung des Seitenruders um 60 vH fällt. Bei seitlich einfallendem Winde tritt bei sehr kleinen Anstellwinkeln infolge der Windfahnenstabilität ein schwaches rückführendes Giermoment auf (Kurve $\beta_e = 10°$, $\zeta = 0°$). Bei Annäherung an das Auftriebsmaximum wächst das instabilisierend wirkende Flügelgiermoment stark an, so daß die Richtungsstabilität verloren geht; denn am zurückgeschobenen Flügelende reißt die Strömung infolge Ansammlung von Grenzschichtmaterial früher ab als an der vorgeschobenen Flügelhälfte. Bei weiterem Zunehmen des Anstellwinkels wird das anfachende Flügelgiermoment von dem in den Flugwind hereindrehenden Seitenleitwerksmoment allmählich überwogen, das jedoch infolge der Abschirmung geschwächt ist. Die Bestimmung des Rollgiermomentes litt infolge der früher dargelegten Ursachen unter zu geringer Meßgenauigkeit. Es sind deshalb lediglich für den beabsichtigten Vergleich mit den Flugversuchen in Bild 13 die Giermomentenbeiwerte um die Flugzeughochachse für einige Anstellwinkel zwischen 15° und 40° bei trudelfördernden Ruderausschlägen in Abhängigkeit von der Trudelkennzahl λ bei $\beta_e = 0°$ aufgetragen; ist ein positiver Schiebewinkel vorhanden (Schieben nach außen), so rücken die Schnittpunkte der Kurven mit der c_N-Nullachse nach rechts.

Von einer vollständigen Wiedergabe der Versuchsergebnisse ist aus den erwähnten Gründen hier abgesehen worden. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß qualitativ der Einfluß des Rollens auf das Giermoment erfaßt werden konnte[9]). Daher ist zu erwarten, daß bei gesteigerter Meßgenauigkeit (Erhöhung des Staudrucks, Verwendung eines größeren Modells) die Ermittlung des Rollgiermomentes im rotierenden Kanalstrahl einwandfrei erfolgen kann. Denn das Vorhandensein eines Gradienten des statischen Druckes kann zwar ein Wandern der Grenzschichtmasse bewirken, aber bei linearer Überlagerung kein Flügelgiermoment hervorrufen; das gleiche ist vom Rumpf- und Leitwerksgiermoment anzunehmen: der Widerstand kann gegebenenfalls infolge einer nach der Strahlmitte gerichteten Luftkraft bei größeren Anstellwinkeln gefälscht sein, nicht aber die Differenz der Widerstände der Backbord- und Steuerbordseite.

[9]) So ergab sich im Gebiet unterhalb des Höchstauftriebes ein negativer Wert des Rollgiermomentes.

Digitized by Google

VI. Flugversuche.

Die Ergebnisse der Modellversuche können mit den Werten des Großversuchs infolge des Kennwerteinflusses zahlenmäßig nicht völlig übereinstimmen. Es ist jedoch in dem vorangehenden Abschnitt gezeigt worden, daß die Wirkung der 5 Einflußgrößen α, β, λ, η, ζ bei den Kanalmessungen in ihrem Sinn im wesentlichen richtig wiedergegeben wird. Um über den größenmäßigen Unterschied gegenüber den Flugversuchen ein Bild zu gewinnen und um insbesondere festzustellen, ob auch die Modelluntersuchungen annähernd bei den gleichen Verhältnissen einen stationären Trudelzustand lieferten, wurden einige Versuchsflüge mit der $M\,27\,b_1$ ausgeführt, über die hier nur kurz berichtet sein soll.

Bei den Flugversuchen war in dem Flugzeug ein von der DVL entwickeltes Meßgerät, der sog. automatische Beobachter, eingebaut. Mit diesem Gerät wurden die drei Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen, die drei Normalbeschleunigungen in Richtung der drei Achsen, die Sinkgeschwindigkeit sowie die Motordrehzahl gemessen.

Im stationären Trudeln, von dem hier allein die Rede sein soll, folgt aus der Gleichheit der resultierenden Luftkraft mit der resultierenden Massenkraft

$$A^2 + W^2 + Q^2 = G^2 + (m\,\Omega^2\,R)^2.$$

Da das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Bahntangente

$$W + G \sin \gamma = 0$$

ergibt, der Bahnneigungswinkel beim Trudeln etwa zwischen -75^0 und -90^0 liegt und die Querkraft zahlenmäßig immer klein bleibt, so folgen die bekannten Beziehungen, daß annähernd der Widerstand gleich dem Fluggewicht und der Auftrieb gleich der Zentrifugalkraft ist.

Wie bei der Besprechung der Querkraftsmessungen hervorgehoben wurde, ist beim steilen Trudeln der Strömungshängewinkel im allgemeinen sehr groß und nähert sich einem rechten Winkel; infolgedessen ergänzt sich der Anstellwinkel und der absolute Betrag des Längsneigungswinkels mit hier befriedigender Genauigkeit zu einem rechten Winkel, auch wenn der Bahnneigungswinkel nicht -90^0 beträgt. Der Anstellwinkel α ist mithin gegeben durch

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\Omega}.$$

Der Schiebewinkel β kann an Hand der Bewegungsgleichungen berechnet werden. Einfacher ist es, wie dies bei den vorliegenden Flügen durchgeführt wurde, den Schiebewinkel mittels einer Winkeldüse zu messen; nach den Flugmessungen lag β zwischen 0^0 und 5^0 Schieben nach außen.

Bedeuten b_x, b_y, b_z die gemessenen Normalbeschleunigungen des Flugzeuges, so folgt aus dem Kräftegleichgewicht:

$$b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = g^2 + (\Omega^2\,R)^2;$$

diese Beziehung ermöglicht es, die Umfangsgeschwindigkeit $\Omega\,R$, den Trudelhalbmesser R und den Bahnneigungswinkel γ zu bestimmen.

Es seien einige Flugzeugdaten, auf deren Einhaltung bei den Flügen geachtet wurde, angegeben:

G/F	$= 46$ kg/m²	— Flächenbelastung,
i_x	$= 1{,}17$ m	— Trägheitsradius um x-Achse,
i_y	$= 1{,}43$ m	— Trägheitsradius um y-Achse,
i_z	$= 1{,}75$ m	— Trägheitsradius um z-Achse,
x_s	$= 0{,}16\,l_m$	— Schwerpunktsrücklage.

Die nachstehende Zahlentafel gibt eine Zusammenstellung einiger Versuchsflüge wieder. Flug 1 und 2 sind ein Linkstrudeln, Flug 3 ist ein Rechtstrudeln; diese müssen sich auch bei vollkommener Flugzeugsymmetrie unterscheiden, da das von der Luftschraube stammende Kreiselgiermoment eines einmotorigen Flugzeuges nicht zu vernachlässigen ist. Weitere Unterschiede sind durch die Schwierigkeit bedingt, bei den Versuchen die Ruder ($\xi \approx 0^0$, $\eta \approx -30^0$, $\zeta \approx -30^0$) in gleichen Ausschlägen zu halten.

	Flug 1	Flug 2	Flug 3
λ . . .	— 0,47	— 0,57	0,55
α [°] . .	27,5	32,2	24,5
c_a . . .	1,17	1,38	1,29
c_w . . .	0,50	0,63	0,56
c_M . . .	— 0,31	— 0,45	— 0,33
$c_L \cdot 10^3$.	— 3,2	— 5,7	4,3
$c_N \cdot 10^3$.	— 4,0	— 5,9	5,9

Da bei den Modellmessungen die Trudelkennzahl λ nicht über 0,37 gesteigert werden konnte, so darf eine Extrapolation über diesen Wert hinaus — zwecks Vergleich mit den Werten der Versuchsflüge — nur unter dem Vorbehalt erfolgen, daß bei einem mit höheren Drehzahlen trudelnden Flugzeug die Grenzschicht infolge der Trägheitskräfte nicht in einem solchen Maße nach außen gedrückt wird, daß dadurch eine wesentliche Änderung der Profileigenschaften eintritt.

Bei einem Vergleich der Werte der obigen Zahlentafel mit den entsprechenden Größen aus den Kanalversuchen fallen vor allem die hohen Auftriebsbeiwerte der Versuchsflüge auf, die bei den Modellversuchen auch nicht annähernd erreicht wurden; hier nicht wiedergegebene Kanalmessungen ergaben für gezogenes Höhenruder Auftriebsbeiwerte von 0,96 bis 1,00 im weit überzogenen Anstellwinkelbereich. Hierzu ist jedoch folgendes zu bemerken: einerseits zeigen auch die Kanalmessungen in einigen Fällen eine gewisse c_a-Erhöhung (man vergleiche Bild 5); denn da unter den gleichen Voraussetzungen, wie sie früher getroffen wurden, in erster Näherung angenommen werden kann, daß

$$c_a \approx \frac{A}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{c_{a_0}\,(\alpha_0 + \alpha_\omega) \cos \alpha_\omega + c_{w_0}\,(\alpha_0 + \alpha_\omega) \sin \alpha_\omega}{\cos^2 \alpha_\omega} \frac{l(y)}{s}\, d\left(\frac{y}{s}\right)$$

ist, so besteht die Möglichkeit, daß bei höheren Drehwerten auch der Auftrieb infolge der örtlich verschiedenen Anströmverhältnisse eine Vergrößerung erfährt. Es kann aber auch andererseits der Fall vorliegen, daß die bei den Flugmessungen erzielte Meßgenauigkeit noch nicht ausreichend war. Eine eingehende Beantwortung dieser Fragen kann aber erst dann erfolgen, wenn die Ergebnisse weiterer Flugversuche vorliegen; es ist anzunehmen, daß nach dem beabsichtigten Einbau verbesserter Geräte in dem automatischen Beobachter die Ermittlung der Auftriebsbeiwerte im Flug befriedigender wird.

Die bei den Flügen gemessenen Widerstandsbeiwerte sind, wie ein Vergleich mit den Werten von Bild 5 zeigt, trotz der etwas höheren Drehwerte durchweg kleiner als die entsprechenden Modellwerte; es war dies nicht anders zu erwarten, da beim Widerstand sich der bekannte Kennwerteinfluß stark bemerkbar macht.

Die Längsmomentenbeiwerte, die sich aus den Flügen ergeben, fügen sich dagegen recht befriedigend in die Kurvenscharen Bild 8 ein.

Zur Beurteilung der Roll- und Giermomentenbeiwerte ist eine möglichst genaue Kenntnis der Größe des Seitenwinkels erforderlich; hier ist für die weiteren Versuche eine Verbesserung zu erwarten. Da bei den Windkanalversuchen diese beiden Momente nicht um modellfeste Achsen gemessen werden, ist bei einem Vergleich mit den Flugmessungen eine Umrechnung erforderlich; wird diese unter der Annahme eines Außenschiebens von 5^0 für einen Anstellwinkel von 25^0 ausgeführt, so läßt die unter dem früheren Vorbehalt durchgeführte Extrapolation bei einem Drehwert, welcher etwas über 0,4 liegt, einen Gleichgewichtszustand erkennen, wenn sowohl Höhen- als auch Seitenruder maximal im trudelfördernden Sinn ausgeschlagen sind. Innerhalb einer bestimmten Genauigkeitsgrenze darf mithin auch beim Roll- und Giermoment von einer gewissen Übereinstimmung der Kanalversuche mit den Ergebnissen der Flugversuche gesprochen werden.

Digitized by Google

VII. Zusammenfassung.

An einem Modell des Flugzeugmusters BFW M 27 b_1 wurden in dem kleinen Windkanal der DVL Sechskomponentenmessungen bis zu höheren Anstellwinkeln ausgeführt. Außer der Wirkung des Schiebens wurde vor allem der Einfluß des Rollens auf die Luftkräfte und Luftkraftmomente untersucht. Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß dem Kanalstrahl eine zusätzliche Drehung erteilt wurde; das Modell war hierbei in üblicher Art aufgehängt.

Von den Ergebnissen ist besonders bemerkenswert:

1. Mit stark wachsenden Schiebewinkeln wandert der Höchstauftrieb zu höheren Anstellwinkeln;
2. bei niedrigen Anstellwinkeln verringert sich der Widerstand beim Rollen;
3. im weit überzogenen Anstellwinkelbereich vergrößert sich der Widerstand infolge Rollens;
4. bei höheren Anstellwinkeln wechselt die Querkraft ihr Vorzeichen; der Einfluß des Rollens auf die Querkraft ist recht erheblich;
5. das Längsmoment erweist sich vom Rollen als ziemlich unabhängig;
6. das Schieberollmoment hat im weit überzogenen Gebiet einen sehr hohen Betrag.

Bei der Bestimmung des Rollgiermomentes machte sich die geringe Meßgenauigkeit störend bemerkbar.

Zum Vergleich mit den Modellversuchen wurden einige Trudelflüge mit dem Flugzeug ausgeführt; die unter gewissen Vorbehalten durchgeführten Extrapolationen deuten darauf hin, daß das angewendete Meßverfahren des umlaufenden Kanalstrahles in manchen Fällen ein brauchbares Mittel ist, den Einfluß des Rollens auf die Luftkräfte und Luftkraftmomente mit einer gewissen Genauigkeit verhältnismäßig einfach zu ermitteln.

Digitized by Google

Schiebe-Rollmomente bei Knickflügeln.

Von G. Richter, Berlin.

Das an Tragflügeln bei seitlicher Anblasung auftretende Rollmoment kann in mehrere Teilmomente zerlegt werden. Bei Flügeln üblicher Ausführung mit V-Form oder Knick ist das durch die V-Stellung hervorgerufene Teilmoment maßgebend. Es werden Formeln und Kurventafeln aufgestellt, aus denen Nährungswerte für die zur Erzielung eines bestimmten Rollmomentes nötigen V-Winkel von Knickflügeln zu entnehmen sind. Ein durchgerechnetes Beispiel ergibt ausreichende Übereinstimmung der Nährungswerte mit der genauen Rechnung.

Gliederung.

I. Bezeichnungen.
II. Einleitung.
III. Teilmomente.
IV. Angenäherte Berechnung des Teilmomentes infolge V-Stellung.
1. Erste Näherung.
2. Korrektur.
V. Vergleich mit genau gerechnetem Beispiel.
VI. Zusammenfassung.
VII. Schrifttum.

I. Bezeichnungen.

A Auftrieb,
a Abstand des Flügelknicks von der x-Achse des Flugzeugs,
b Spannweite,
c_a Auftriebsbeiwert,
$c_{a\,\mathrm{ges}} = \frac{A}{qF}$,
$(c_a t)_0 = c_a t$ an der Stelle $y = 0$,
$(c_a t)_a$ Auftriebsverteilung des nicht schiebenden unverwundenen Flügels,
$(c_a t)_{\beta=0}$ Auftriebsverteilung des nicht schiebenden verwundenen Flügels,
$(c_a t)_\beta$ zusätzliche Auftriebsverteilung infolge Schiebens des Flügels ohne V-Form bzw. Knick,
$(c_a t)_{\mathrm{ges}}$ Auftriebsverteilung des schiebenden verwundenen Knickflügels,
$c_L = \frac{L}{q \cdot F \cdot \frac{b}{2}}$,
$c_{L_\beta} = \frac{\partial c_L}{\partial \beta}$,
F Flügelfläche,
h_v Höhe der Flügelspitze über der Flügelwurzel,
h_w » » » des mit vollem Fluggewicht treibenden Seeflugzeugs über der Wasseroberfläche,
L Rollmoment,
q Staudruck,
t Flügeltiefe,
t_y Flügeltiefe an der Stelle y,
t_0 » » » » $y = 0$,
$t_{y'}$ » » » » $y' = y - \bar{y}$,
y Spannweitenkoordinate,
y_0 Schwerpunktsabstand der Auftriebsverteilungsfläche von der x-Achse des Flugzeugs,
$\bar{y}$ Abstand der Unstetigkeitsstelle des Anstellwinkelverlaufs von der x-Achse,
y' Spannweitenkoordinate mit Nullpunkt bei $y = \bar{y}$,
α Anstellwinkel,
α_0 » bei $\nu\beta = 0$,
β Schiebewinkel,
ν V-Winkel,
Γ Zirkulation,
t_i Flügeltiefe an Flügelwurzel,
t_a » » Flügelspitze.

II. Einleitung.

Das bei seitlicher Anblasung unter dem Schiebewinkel β an einem Flugzeugtragflügel entstehende Rollmoment soll nach F. Wenk [1] zur Schaffung günstiger Flugeigenschaften die Bedingung erfüllen:

$$\frac{c_{L_\beta}}{c_{N_\beta}} \approx \frac{c_{L_z}}{c_{N_z}},$$

d. h. $\frac{\text{Schieberollmoment}}{\text{Richtungsstabilität}} \approx \frac{\text{Wenderollmoment}}{\text{Wendedämpfung}}$.

Damit c_{L_β} nicht zu groß wird, muß also bei V-Flügeln der V-Winkel in mäßigen Grenzen bleiben. Dem steht bei Seeflugzeugen, besonders Flugbooten, die Notwendigkeit entgegen, die Flügelenden genügend hoch über der Wasseroberfläche zu halten, so daß sie bei mäßigen Krängungswinkeln des Bootes ($\leq 10^0 - 12^0$) noch nicht zu Wasser kommen, d. h. $\frac{h_w}{b/2}$ muß eine bestimmte Größe haben. Bei gradlinigem Verlauf des Flügels zwischen Wurzel und Spitze ist diese Forderung nur zu erfüllen durch einen sehr hohen Bootskörper mit geradlinigem oder schwach V-förmigem Flügel, einen normalen Bootskörper mit einem auf einem Baldachin sitzenden gradlinigen Flügel oder einen normalen Bootskörper mit stark V-förmigen Flügeln. Um einen normalen Bootskörper mit geringem Luftwiderstand und niedriger Schwerpunktslage verwenden zu können und trotzdem die Bedingung eines genügend großen h_w bei mäßigem c_{L_β} zu erfüllen, hat Wenk die Verwendung eines Knickflügels nach Art der Möwenflügel vorgeschlagen (Bild 1). Bei diesem Flügel ändert der V-Winkel ν an der Knickstelle zwischen der Wurzel und der Spitze seinen Wert, d. h. die durch $\nu\beta$ hervorgerufenen zusätzlichen Auftriebskräfte ΔA_a der äußeren Flügelteile können u. U. ein dem der inneren Flügelteile entgegengesetztes Moment bilden. Infolge des größeren Hebelarmes der äußeren Flügelteile kann ν außen kleiner sein als innen, so daß bei $L_v = 0$ $h_v > 0$ ist. In den letzten Jahren sind auch viele Landflugzeuge mit Knickflügeln ausgeführt worden, bei denen die Knickstelle aber unterhalb der Verbindungslinie Flügelspitze—Flügelwurzel liegt. Bei diesen Flügeln wird der V-Winkel der inneren Flügelteile und die Lage der Knickstelle längs der Halbspannweite durch bauliche Anforderungen bestimmt, während die Höhe der Flügelspitze über der Flügelwurzel, d. h. der V-Winkel der äußeren Flügeltiefe, innerhalb weiter Grenzen so gewählt werden kann, daß die oben angegebene Flugeigenschaftsbedingung erfüllt wird.

In jedem Falle ist es also möglich, durch eine geeignete Kombination von ν, $\frac{a}{b/2}$ und $\frac{h_v}{b/2}$ ein gefordertes c_{L_β} zu erreichen. Wie die Rechnung zeigt, treten dabei auch keine extremen Bauformen auf, solange die geforderten Werte in normalen Grenzen bleiben.

Digitized by Google

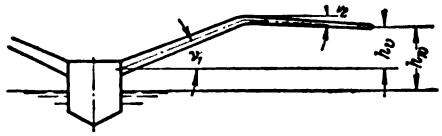


Bild 1. Knickflügel.

III. Teilmomente.

Das an dem ganzen Flugzeug auftretende Rollmoment kann zunächst zerlegt werden in das im allgemeinen unbedeutende Moment L_R der Luftkraft auf Rumpf, Seitenleitwerk, Fahrgestell bzw. Schwimmer usw., das Moment L_0 infolge seitlicher Anblasung des geraden Flügels ohne V-Stellung und das Moment L_V infolge der V-Stellung. L_R wird im folgenden vernachlässigt. L_0 setzt sich nach der z. Z. wahrscheinlichsten Erklärung aus drei Teilmomenten L_0', L_0'' und L_0''' zusammen. L_0' wird dadurch hervorgerufen, daß entsprechend der Tragflügeltheorie die mit dem Wind abfließenden Wirbel näher an die vordere Tragflügelspitze heranrücken als an die hintere. An der vorderen Spitze wird dadurch ein stärkerer Abwind induziert als an der hinteren, so daß der effektive Anstellwinkel und damit der Auftrieb vorn kleiner wird, die gegen den Wind vorgeschobene Flügelhälfte wird also nach unten gedrückt, d. h. $\frac{d c_{l_\beta}'}{d \beta} < 0$.

Die beiden anderen Teilmomente haben L_0' entgegengesetzte Vorzeichen. Bei schräger Anblasung eines Flügels mit gerade abgeschnittenen Flügelenden trifft die anströmende Luft an dem vorderen Ende Profile mit abgeschnittener Vorderkante, an dem hinteren Flügelende Profile mit abgeschnittener Hinterkante. Dadurch entstehen (nach Messungen von Del Proposto [2]) an dem vorgeschobenen Flügelende zusätzliche Unterdrücke, während die normale Saugwirkung an dem hinteren Ende herabgesetzt wird. Das so entstehende Moment L_0'' ist aber nicht sehr groß und bei den z. Z. allgemein üblichen abgerundeten Tragflügelenden mit auf Null abnehmender Dicke vernachlässigbar $\frac{d c_{l_\beta}''}{d \beta} > 0$.

Das dritte Teimoment L_0''' wird wahrscheinlich durch frühzeitige Ablösung der Grenzschicht an dem hinteren Flügelende hervorgerufen. Bei schräger Anströmung eines Tragflügels konstanter Tiefe besteht auf der Flügeloberseite an einem Punkt A eines Schnittes a ein geringerer Unterdruck als an dem Nachbarpunkt B (Bild 2). Es ist also ein Druckgefälle von A nach B vorhanden. Dadurch wird die Grenzschicht auf der Flügeloberseite, der ihre Energie zum größten Teil schon entzogen ist, in Richtung dieses Druckgradienten abgelenkt, so daß die Stromlinien der Grenzschicht den gezeichneten Verlauf haben, d. h. an der Hinterkante nach dem hinteren Flügelende abfließen. Diese Erscheinung ist durch englische Versuche [3] nachgewiesen worden. Die Grenzschichtdicke an dem hinteren Flügelende wird dabei so erhöht, daß die Strömung hier vorzeitig abreißt und der Auftrieb abnimmt, während an dem vorderen Flügelende die Strömung länger anliegt und der Auftrieb erhalten bleibt. Diese Annahme wird auch durch das verschiedenartige Abreißen der Strömung an Flügeln mit verschiedener Pfeilform bestätigt [4]. Das so entstehende Moment L_0''' ist bei positivem β positiv.

Aus den Messungen von Del Proposto ist zu entnehmen, daß L_0 für kleine Anstellwinkel der theoretischen Kurve für L_0' entspricht, daß bei großem β aber L_0''' stark überwiegt. Bei Trapezflügeln mit nach vorn gezogener Hinterkante ist dieser »Abreißeffekt« jedoch sicher wesentlich kleiner bzw. bei mäßigem β gar nicht vorhanden, so daß zum mindesten für solche Flügelformen L_0 für kleine Anstellwinkel aus der theoretischen Ermittlung von L_0' angenähert erhalten werden kann. Andererseits liefern die Momente L_0'' und L_0''' eine Erklärung für die der Theorie widersprechenden Ergebnisse von Messungen an schiebenden Modellflügeln, die stets als Flügel konstanter Tiefe mit meist

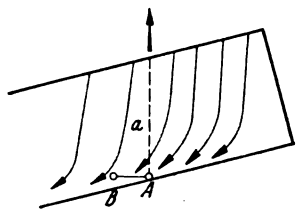


Bild 2. Abfließen der Grenzschicht eines schiebenden Flügels.

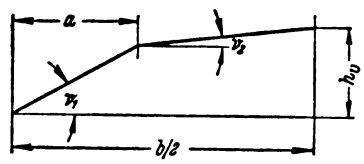


Bild 3. Bezeichnungen.

gerade abgeschnittenen Enden ausgebildet waren, bei denen also die Momente L_0'' und L_0''' stark hervortraten und das der Theorie entsprechende Moment L_0' überdeckten, so daß das gemessene Gesamtmoment L_0 ein der Theorie entgegengesetztes Vorzeichen hatte.

Im folgenden werden für die elliptische und die beiden Grenzfälle der rechteckigen und dreieckigen Auftriebsverteilung über die Spannweite einfache Näherungsgleichungen für den Zusammenhang zwischen $\frac{h_v}{b/2}$, ν_1 und L_V bzw. dem L_V entsprechenden Wert c_{l_β} aufgestellt. Die in diesen Gleichungen auftretenden Beizahlen sind Funktionen von $\frac{a}{b/2}$ und $\frac{d c_a}{d \alpha}$. In der Kurvendarstellung dieser Beizahlen wird $\frac{d c_a}{d \alpha}$ und nicht die anschaulichere Flügelstreckung $\frac{b^2}{F}$ als Parameter benutzt, um die Abweichung der jeweiligen Auftriebsverteilung von der elliptischen genauer zu berücksichtigen.

IV. Angenäherte Berechnung des Teilmomentes infolge V-Stellung.

Der Anstellwinkel α eines unter dem Schiebewinkel β angeblasenen Tragflügels mit dem V-Winkel ν ist bei kleinen Anstellwinkeln

$$\alpha = \alpha_0 + \nu \beta.$$

Der Auftrieb einer Flügelhälfte mit $\nu > 0$ ist also

$$\frac{A}{2} = \frac{A_0 + \Delta A}{2} = q \frac{F}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} (\alpha_0 + \nu \beta),$$

das Moment um die x-Achse bei kleinem α_0

$$L \approx 2 \frac{\Delta A}{2} y_0 = q \cdot F \cdot \frac{b}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \nu \beta \frac{y_0}{b/2}$$

$$c_l = \frac{d c_a}{d \alpha} \nu \beta \frac{y_0}{b/2}$$

$$c_{l_\beta} = \frac{\partial c_l}{\partial \beta} = \frac{d c_a}{d \alpha} \nu \frac{y_0}{b/2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Bei einem Knickflügel mit den V-Winkeln ν_1 und ν_2 (s. Bild 3) besteht die geometrische Beziehung

$$a \cdot \operatorname{tg} \nu_1 + \left(\frac{b}{2} - a\right) \operatorname{tg} \nu_2 = h_v$$

$$\nu_1 \cdot \frac{a}{b/2} + \left(1 - \frac{a}{b/2}\right) \nu_2 = \frac{h_v}{b/2} \quad \ldots\ldots (2)$$

In den folgenden Rechnungen wird $\frac{b}{2} = 1$ gesetzt. Die Gleichungen (1) und (2) gehen damit über in

$$c_{l_\beta} = \frac{d c_a}{d \alpha} \nu y_0 \quad \ldots\ldots\ldots (1a)$$

$$\nu_1 a + (1 - a) \nu_2 = h_v$$

bzw.

$$\nu_2 = \frac{h_v}{1 - a} - \nu_1 \frac{a}{1 - a} \quad \ldots\ldots (2a)$$

Digitized by Google

1. Erste Näherung.

Zur ersten Abschätzung der Rollmomente von Knickflügeln infolge $\nu\beta$ wird angenommen, daß der Auftrieb längs der Spannweite im Verhältnis der Anstellwinkel $\frac{\alpha_0 + \nu\beta}{\alpha_0}$ erhöht bzw. verringert wird, die Kurve $c_a t = f(y)$ also unstetig wird.

a) Elliptische Auftriebsverteilung.

$$c_a t = (c_a t)_0 \sqrt{1 - y^2}.$$

Die Auftriebsverteilungsfläche über b ist

$$\frac{F_{ell}}{2} = \frac{\pi (c_a t)_0}{2}$$

$$\frac{F_{ell}}{2} = F \cdot c_{a\,ges},$$

also ist

$$(c_a t)_0 = \frac{2F}{\pi} c_{a\,ges}$$

und

$$c_a t = \frac{2F}{\pi} c_{a\,ges} \sqrt{1 - y^2}.$$

Der Auftrieb des Flügelteils zwischen $y = 0$ und $y = a$ ist

$$A_i = q \int_0^a c_a t \cdot dy = q \frac{2F}{\pi} c_{a\,ges} \int_0^a \sqrt{1 - y^2}$$

$$A_i = c_{a\,ges}\, q \cdot F \cdot \frac{1}{\pi} (a \sqrt{1 - a^2} + \arcsin a).$$

Zur Vereinfachung wird der Ausdruck in der Klammer $= f(a)$ gesetzt. Die zusätzliche Auftriebskraft infolge $\nu_1\beta$ in dem betrachteten Flügelbereich ist

$$\Delta A_i = \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_0} A_i = \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \cdot \beta \cdot q \cdot F \frac{1}{\pi} f(a).$$

Durch eine entsprechende Rechnung erhält man für den äußeren Flügelteil

$$\Delta A_a = \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_2 \beta \cdot q \cdot F \left(\frac{1}{2} - \frac{f(a)}{\pi} \right).$$

Die Schwerpunktsabstände der Auftriebsverteilungs-Teilflächen von der x-Achse ergeben sich aus den geometrischen Beziehungen der Ellipse zu

$$y_{a_0} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1 - a^2}^3}{\frac{\pi}{2} - f(a)} \quad \text{für den Außenteil und}$$

$$y_{i_0} = \frac{2}{3} \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}^3}{f(a)} \quad \text{für den Innenteil.}$$

Das Rollmoment ist

$$L_\nu = 2 (\Delta A_i\, y_{i_0} + \Delta A_a\, y_{a_0}) = c_l\, q\, F.$$

Unter Benutzung von Gl. (2a) erhält man daraus nach einigen Umrechnungen

$$c_{l_{\beta\,(1)}} = \frac{d c_a}{d \alpha} \left[h_\nu \frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{1 - a^2}^3}{1 - a} - \nu_1 \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{1 - a^2}^3}{1 - a} - 1 \right) \right] \quad (3)$$

Als Abkürzung wird gesetzt

$$\frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{1 - a^2}^3}{1 - a} = k_1 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{4}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{1 - a^2}^3}{1 - a} - 1 \right) = k_2 \quad \ldots\ldots (5)$$

b) Rechteckige Auftriebsverteilung.

$$c_a t = \text{konst.} = c_{a\,ges} \frac{F}{2}.$$

Durch entsprechende Rechnungen wie bei der elliptischen Auftriebsverteilung erhält man

$$A_i = q F \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \beta \frac{a}{2}$$

$$A_a = q F \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_2 \beta \frac{1 - a}{2}$$

$$y_{i_0} = \frac{a}{2}; \quad y_{a_0} = a + \frac{1 - a}{2} = \frac{1 + a}{2}$$

$$L_\nu = 2 \cdot q \cdot F \frac{d c_a}{d \alpha} \beta \left(\nu_1 \frac{a^3}{4} + \nu_2 \frac{1 - a^2}{4} \right)$$

$$c_{l_{\beta\,(1)}} = \frac{1}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \left[\nu_1 a^2 + \nu_2 (1 - a^2) \right]$$

oder mit Gl. (2a)

$$c_{l_{\beta\,(1)}} = \frac{1}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \left[h_\nu (1 - a) - \nu_1 a \right] \quad \ldots\ldots (6)$$

c) Dreieckige Auftriebsverteilung.

$$c_a t = (c_a t)_0 (1 - y) = F c_{a\,ges} (1 - y)$$

$$\Delta A_i = q \cdot F \cdot \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \beta \left(a - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\Delta A_a = q \cdot F \cdot \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_2 \beta \frac{(1 - a)^2}{2}$$

$$y_{i_0} = \frac{a}{3} \frac{3 - 2a}{2 - a}; \quad y_{a_0} = \frac{2a + 1}{3}$$

$$L_\nu = q \cdot F \cdot \frac{d c_a}{d \alpha} \beta \frac{1}{3} \left[\nu_1 a^2 (3 - 2a) + \nu_2 (1 - a)^2 (2a + 1) \right]$$

$$c_{l_{\beta\,(1)}} = \frac{d c_a}{d \alpha} \frac{1}{3} \left[\nu_1 a^2 (3 - 2a) + \nu_2 (1 - a)^2 (2a + 1) \right]$$

$$c_{l_{\beta\,(1)}} = \frac{d c_a}{d \alpha} \left[h_\nu \frac{1}{3} (1 + a - 2a^2) - \nu_1 \frac{a}{3} (1 - 2a) \right] \quad \ldots (7)$$

$$\frac{1}{3} (1 + a - 2a^2) = n_1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\frac{a}{3} (1 - 2a) = n_2 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

2. Korrektur. (Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung.)

Nach A. Betz und E. Petersohn [5] verläuft die Zirkulationsverteilung über y an einer Unstetigkeitsstelle des Anstellwinkelverlaufs bei einem Rechteckflügel mit $b^2/F = \infty$ nach

$$\Gamma_y = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \pm \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \varepsilon$$

mit

$$\varepsilon = f\left(\frac{y'}{\frac{d c_a}{d \alpha} \cdot t_y} \right).$$

Diese Beziehung ist nach Petersohn [6] auch bei endlicher Spannweite gültig, wenn für Γ die Zirkulation Γ_y an der betreffenden Stelle und für $\frac{d c_a}{d \alpha}$ der dem betreffenden b^2/F entsprechende Wert eingesetzt wird. Statt der Zirkulation Γ kann man $c_a t = \frac{2}{v} \Gamma$ einsetzen, dann erhält man für rechteckige Auftriebsverteilung

$$(c_a t)_y = \frac{(c_a t)_1 + (c_a t)_2}{2} \pm \frac{(c_a t)_1 - (c_a t)_2}{2} \varepsilon.$$

Nach Bild 4 ist

$$\Delta c_a t = (c_a t)_1 - (c_a t)_y = \frac{(c_a t)_1 - (c_a t)_2}{2} (1 - \varepsilon).$$

Bei nicht konstanter Auftriebsverteilung über y wird gesetzt

$$\Delta c_a t = \frac{f(y)}{f(\bar{y})} \frac{(c_a t)_1 - (c_a t)_2}{2} (1 - \varepsilon) \quad \ldots\ldots (10)$$

mit

$$f(y) = \frac{(c_a t)_y}{(c_a t)_{y=0}}$$

$$f(\bar{y}) = f(y)_{y=\bar{y}}.$$

Digitized by Google

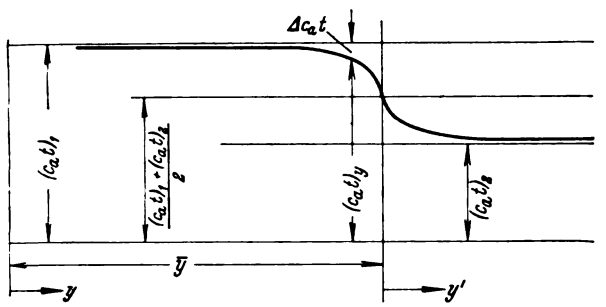


Bild 4. Auftriebsverteilung an einer Unstetigkeitsstelle des Anstellwinkelverlaufs bei rechteckiger Auftriebsverteilung über die Spannweite.

Der durch $c_a t$ gebildete Auftrieb ist

$$|\Delta A| = q \int \Delta c_a t \cdot d y',$$

das Moment um die x-Achse

$$|\Delta L| = q \int \Delta c_a t \cdot y \cdot d y'$$

das gesamte zusätzliche Moment infolge $\Delta c_a t$ ist

$$\Delta L = 2q \left(\int_{y'=0}^{1-a} \Delta c_a t\, y\, d y' - \int_{y'=0}^{1+a} \Delta c_a t\, y\, d y' - \int_{y=0}^{1} \Delta c_a t\, y\, d y \right) = c_L\, q F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

a) Elliptische Auftriebsverteilung.

$$(c_a t)_{ell} = \frac{2F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \alpha_0 \sqrt{1 - y^2}.$$

Für $y = a$ ist nach Gl. (10)

$$\Delta c_a t = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-a^2}} \frac{F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \sqrt{1-a^2}\ (1-\varepsilon)$$

$$\int_{y'=0}^{1-a} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y' = \frac{F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \int_{y'=0}^{1-a} \sqrt{1-y^2} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y'$$

$$\int_{y'=0}^{1+a} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y' = \frac{F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \int_{y'=0}^{1+a} \sqrt{1-y^2} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y'$$

Für $\bar{y} = 0$ ist

$$\Delta c_a t = \sqrt{1-y^2}\ \frac{2F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \beta (1-\varepsilon)$$

$$\int_{y=0}^{1} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y = \frac{2F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \beta \int_{y=0}^{1} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y.$$

Das gesamte zusätzliche Moment ist

$$\Delta L = 2q \frac{F}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta \left\{ (\nu_1 + \nu_2) \left[\int_{y'=0}^{1-a} \sqrt{1-y^2} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1+a} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' \right] - 2 \nu_1 \int_{y=0}^{1} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y \right\} = \Delta c_L\, q F$$

$$\Delta c_{l_\beta} = \frac{2}{\pi} \frac{d c_a}{d \alpha} \left\{ (\nu_1 + \nu_2) \left[\int_{y'=0}^{1-a} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1+a} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' \right] - 2 \nu_1 \int_{y=0}^{1} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y. \right.$$

Mit Gl. (2a)

$$\Delta c_{l_\beta} = h_v \frac{d c_a}{d x} k_3 - \nu_1 \frac{d c_a}{d \alpha} k_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

mit

$$k_3 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-a} \left[\int_{y'=0}^{1+a} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1-a} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' \right] \quad . \quad . \quad (13)$$

und

$$k_4 = k_3 + \frac{4}{\pi} \int_{y=0}^{1} \sqrt{1-y^2}\ (1-\varepsilon)\, y \cdot d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Das in diesen Gleichungen auftretende ε ist als Funktion von $\frac{y'}{\frac{d c_a}{d \alpha} t_{y'}}$ gegeben; zur Bestimmung der zu jedem y' gehörenden Flügeltiefe $t_{y'}$ ist angenommen:

Flügelgrundriß elliptisch, d. h. $t_y = t_0 \sqrt{1-y^2}$

$$\frac{d c_a}{d \alpha} = \left(\frac{d c_a}{d \alpha} \right)_\infty \frac{1}{1 + \frac{2}{b^2} \frac{\left(\frac{d c_a}{d \alpha} \right)_\infty}{2\pi} F}$$

$$\left(\frac{d c_a}{d \alpha} \right)_\infty = 5{,}8$$

$$F = \pi \frac{t_0}{2},$$

damit wird

$$\frac{d c_a}{d \alpha} \cdot t_y = 1{,}38 \left(5{,}8 - \frac{d c_a}{d \alpha} \right) \sqrt{1-y^2}.$$

b) Rechteckige Auftriebsverteilung.

$$c_a t = \text{konst.} = \frac{F}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \alpha_0$$

$$\bar{y} = a: \int_{y'=0}^{1-a} \Delta c_a t\, y\, d y' = \frac{F}{4} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \int_{y'=0}^{1-a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y'$$

$$\int_{y'=0}^{1+a} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y' = \frac{F}{4} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \int_{y'=0}^{1+a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y'$$

$$\bar{y} = 0: \int_{y=0}^{1} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y = \frac{F}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \beta \int_{y=0}^{1} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y$$

$$\Delta L = q \frac{F}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta \left\{ (\nu_1 + \nu_2) \left[\int_{y'=0}^{1-a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1+a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' \right] - 2 \nu_1 \int_{y=0}^{1} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y \right\}$$

$$\Delta c_{l_\beta} = \frac{1}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \left\{ (\nu_1 + \nu_2) \left[\int_{y'=a}^{1-a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1+a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' \right] - 2 \nu_1 \int_{y=0}^{1} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y \right\}$$

bzw.

$$\Delta c_{l_\beta} = h_v \cdot \frac{1}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} m_3 - \nu_1 \frac{1}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} m_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

mit

$$m_3 = \frac{1}{1-a} \left[\int_{y'=0}^{1+a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1-a} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y' \right] \quad (16)$$

und

$$m_4 = m_3 + 2 \int_{y=0}^{1} (1-\varepsilon)\, y \cdot d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Zur Bestimmung von ε ist gesetzt

Digitized by Google

$$t = \text{konst.} = \frac{F}{2}$$

$$\frac{d c_a}{d \alpha} t = 1{,}08 \left(5{,}8 - \frac{d c_a}{d \alpha}\right).$$

c) Dreieckige Auftriebsverteilung.

$$c_a t = F \frac{d c_a}{d \alpha} \alpha_0 (1 - |y'|)$$

$$y = a: \int_{y'=a}^{1-a} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y' = \frac{F}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \int_{y'=0}^{1-a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y'$$

$$\int_{y'=0}^{1+a} c_a t \cdot y \cdot d y' = \frac{F}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \beta (\nu_1 + \nu_2) \int_{y'=0}^{1+a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y'$$

$$\bar{y} = 0: \int_{y=0}^{1} \Delta c_a t \cdot y \cdot d y = F \frac{d c_a}{d \alpha} \nu_1 \beta \int_{y=0}^{1} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y$$

$$\Delta L = q F \frac{d c_a}{d \alpha} \beta \left\{ (\nu_1 + \nu_2) \left[\int_{y'=0}^{1-a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1+a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y' \right] - 2 \nu_1 \int_{y=0}^{1} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y \right\}$$

$$\Delta c_{L\beta} = \frac{d c_a}{d \alpha} \left\{ (\nu_1 + \nu_2) \left[\int_{y'=0}^{1-a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y' - \ldots \right] \right\}$$

$$\Delta c_{L\beta} = h_v \frac{d c_a}{d \alpha} n_3 - \nu_1 \frac{d c_a}{d \alpha} n_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

mit

$$n_3 = \frac{1}{1 - a} \left[\int_{y'=0}^{1+a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y' - \int_{y'=0}^{1-a} (1 - |y'|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y' \right] \quad \ldots \quad (19)$$

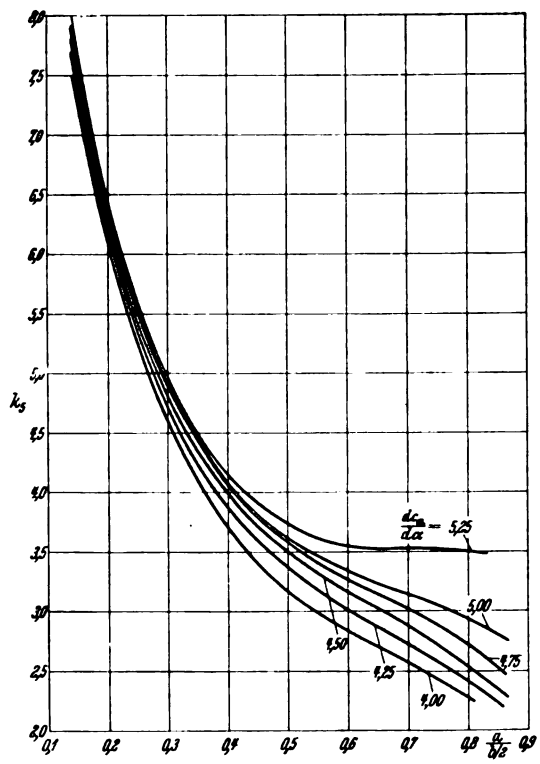


Bild 5. Beiwert k_5 in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d c_a}{d \alpha}$ (elliptische Auftriebsverteilung).

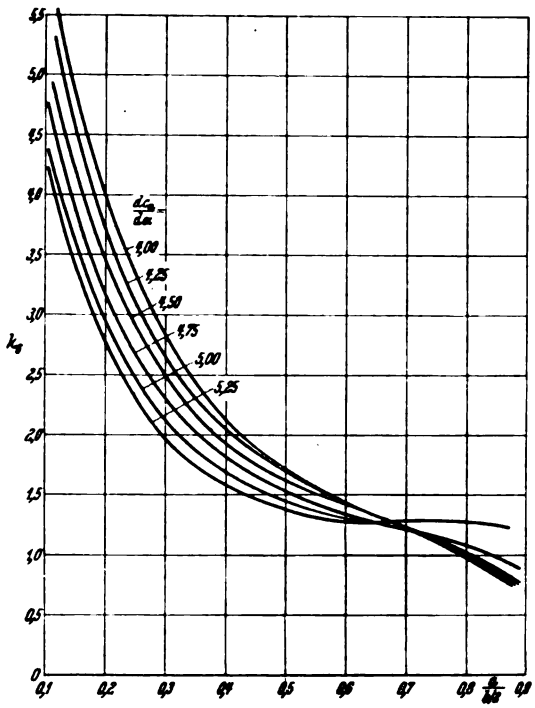


Bild 6. Beiwert k_4 in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d c_a}{d \alpha}$ (elliptische Auftriebsverteilung).

und

$$n_4 = n_3 + 2 \int_{y=0}^{1} (1 - |y|)(1 - \varepsilon) y \cdot d y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ε ist dabei bestimmt mit

$$t_y = t_{y=0} (1 - |y|)$$

$$\frac{d c_a}{d \alpha} t_y = 2{,}16 \left(5{,}8 - \frac{d c_a}{d \alpha}\right) (1 - |y|).$$

Die korrigierten Werte $c_{L\beta} = c_{L\beta}\textcircled{1} + \Delta c_{L\beta}$ sind also für

a) Elliptische Auftriebsverteilung.

$$c_{L\beta} = \frac{d c_a}{d \alpha} \left[\frac{h_v}{b/2} (k_1 + k_3) - \operatorname{tg} \nu_1 (k_2 + k_4) \right] \quad \ldots \quad (21)$$

also der für ein bestimmtes $c_{L\beta}$ erforderliche V-Winkel ν_1 des Flügelinnenteils

$$\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{h_v}{b/2} k_5 - c_{L\beta} k_6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

bzw. bei gegebenem ν_1 die erforderliche Höhe der Flügelspitze über der Flügelwurzel

$$\frac{h_v}{b/2} = \frac{\operatorname{tg} \nu_1}{k_5} + c_{L\beta} \frac{k_6}{k_5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

mit

$$k_5 = \frac{k_1 + k_3}{k_2 + k_4}$$

und

$$k_6 = \frac{1}{\frac{d c_a}{d \alpha} (k_2 + k_4)}.$$

k_5 und k_6 sind über $\frac{a}{b/2}$ mit $\frac{d c_a}{d \alpha}$ als Parameter in Bild 5 und 6 aufgetragen.

b) Rechteckige Auftriebsverteilung.

$$c_{L\beta} = \frac{1}{2} \frac{d c_a}{d \alpha} \left[\frac{h_v}{b/2} \left(1 + \frac{a}{b/2} + m_3\right) - \operatorname{tg} \nu_1 \left(\frac{a}{b/2} + m_4\right) \right] \quad (24)$$

also

$$\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{h_v}{b/2} m_5 - c_{L\beta} m_6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

bzw.

Digitized by Google

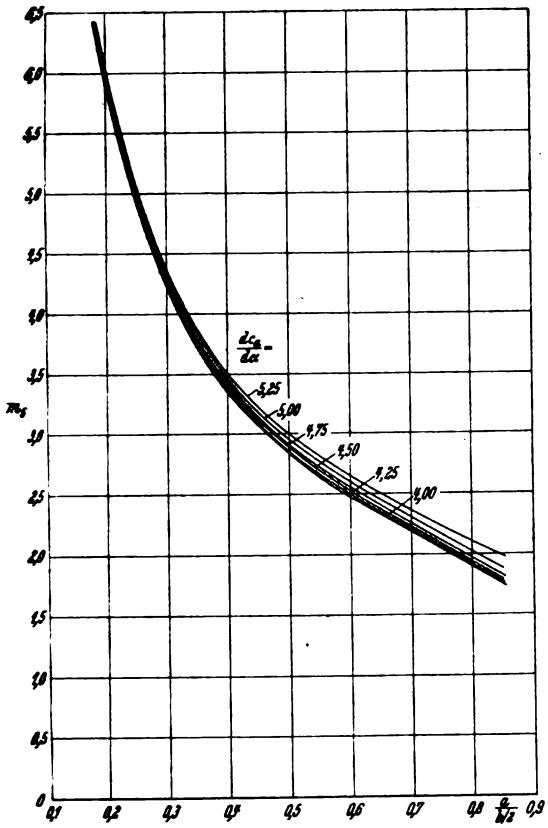


Bild 7. Beiwert m_s in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ (rechteckige Auftriebsverteilung).

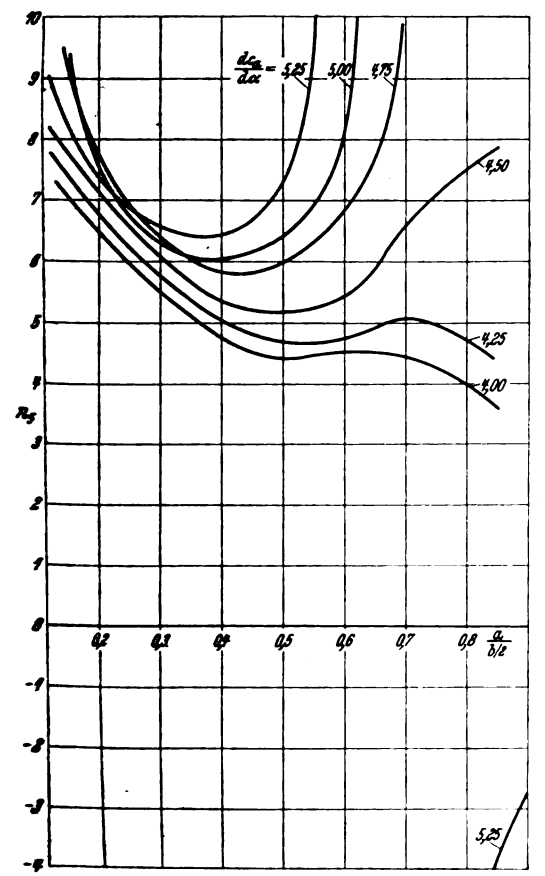


Bild 9. Beiwert n_s in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ (dreieckige Auftriebsverteilung).

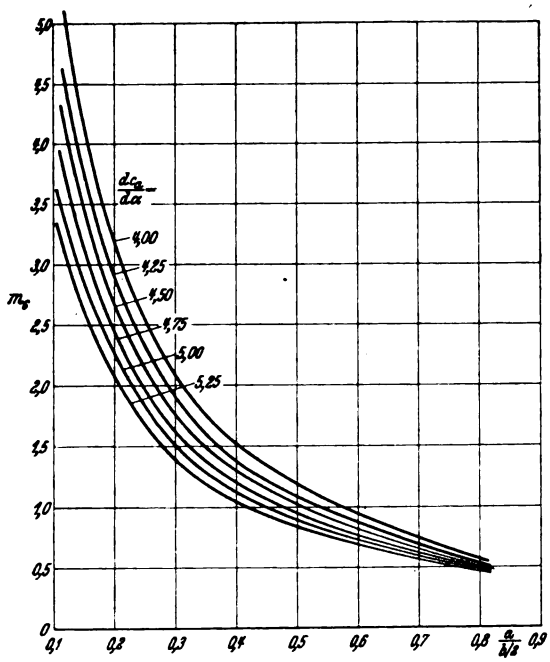


Bild 8. Beiwert m_s in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ (rechteckige Auftriebsverteilung).

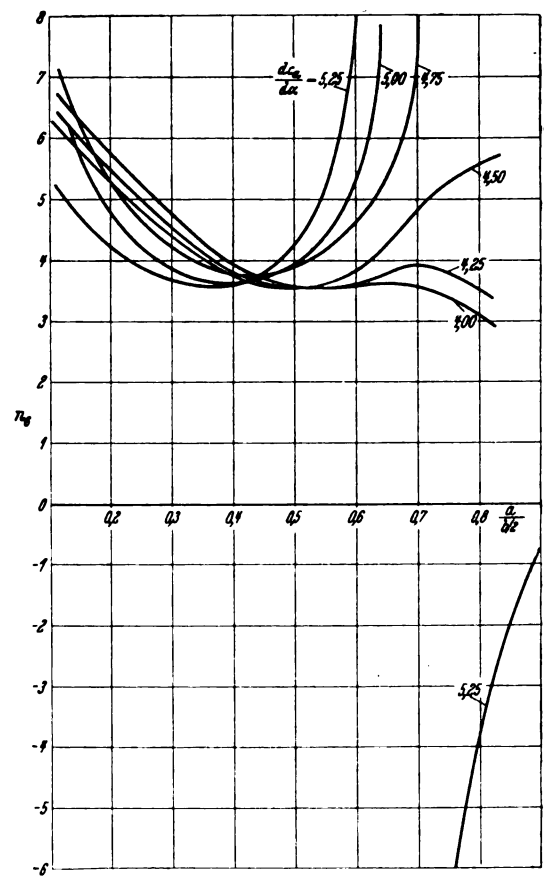


Bild 10. Beiwert n_s in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ (dreieckige Auftriebsverteilung).

Digitized by Google

$$\frac{h_v}{b/2} = \frac{\operatorname{tg} \nu_1}{m_5} + c_{l_\beta} \frac{m_6}{m_5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

mit

$$m_5 = \frac{1 + a + m_3}{a + m_4} \quad \text{nach Bild 7}$$

und

$$m_6 = \frac{2}{\frac{d c_a}{d \alpha} (a + m_4)} \quad \text{nach Bild 8.}$$

c) Dreieckige Auftriebsverteilung.

$$c_{l_\beta} = \frac{d c_a}{d \alpha} \left[\frac{h_v}{b/2} (n_1 + n_3) - \operatorname{tg} \nu_1 (n_2 + n_4) \right] \quad \ldots \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{h_v}{b/2} n_5 - c_{l_\beta} n_6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

$$\frac{h_v}{b/2} = \frac{\operatorname{tg} \nu_1}{n_5} + c_{l_\beta} \frac{n_6}{n_5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

mit

$$n_5 = \frac{n_1 + n_3}{n_2 + n_4} \quad \text{aus Bild 9 bzw. 11}$$

und

$$n_6 = \frac{1}{\frac{d c_a}{d \alpha} (n_2 + n_4)} \quad \text{aus Bild 10 bzw. 12.}$$

Bei der dreieckigen Auftriebsverteilung werden für bestimmte Werte von $\frac{d c_a}{d \alpha}$ und $\frac{a}{b/2}$ n_5 und n_6 unendlich groß. Um im Bereich dieser Stellen die Beiwerte entnehmen zu können, sind in Bild 11 und 12 die reziproken Beiwerte $\frac{1}{n}$ aufgetragen.

Das Unendlichwerden bedeutet, daß für diese Werte von $\frac{d c_a}{d \alpha}$ und $\frac{a}{b/2}$ ein Knick im Flügel ohne Wirkung ist und c_{l_β} nur von $\frac{h_v}{b/2}$ abhängt.

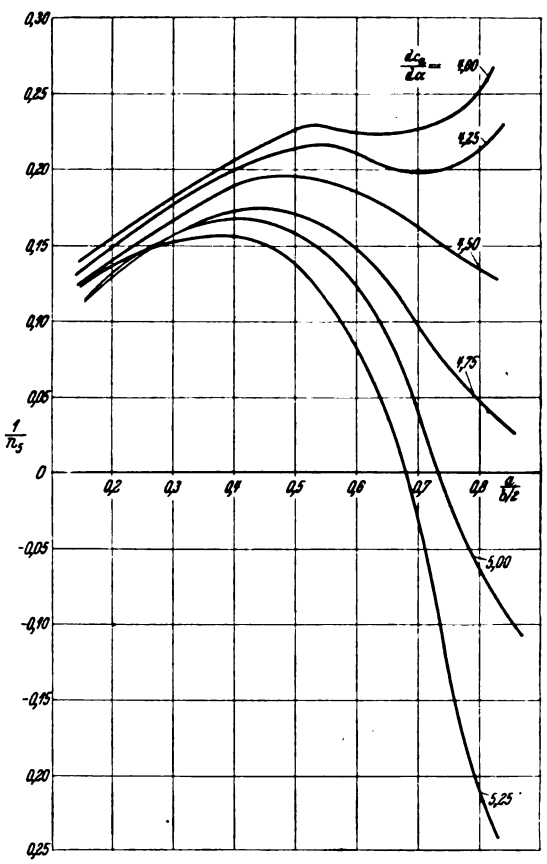


Bild 11. Reziproker Beiwert $\frac{1}{n_5}$ in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d c_a}{d \alpha}$ (dreieckige Auftriebsverteilung).

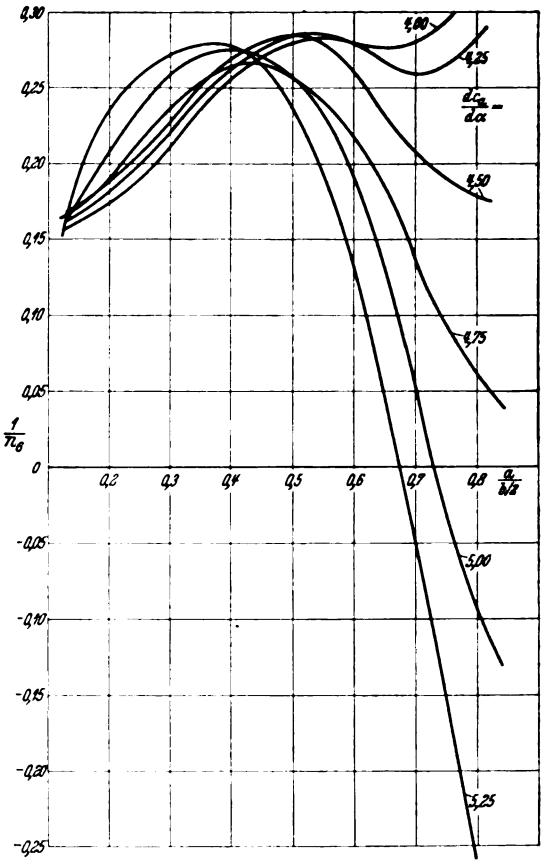


Bild 12. Reziproker Beiwert $\frac{1}{n_6}$ in Abhängigkeit von der Lage der Knickstelle $\frac{a}{b/2}$ und dem Auftriebsanstieg $\frac{d c_a}{d \alpha}$ (dreieckige Auftriebsverteilung).

V. Vergleich mit genau gerechnetem Beispiel.

Für einen üblichen Flugzeugtragflügel soll durch eine genauere Rechnung die Gültigkeit der angegebenen Formeln nachgeprüft werden. Das Rollmoment $L = c_L \cdot q \cdot F \cdot \frac{b}{2}$ wird aus L_0 und L_r berechnet; das von dem geometrischen Aufbau des Flugzeugs abhängige L_k wird vernachlässigt.

Es sei

$$\frac{b^2}{F} = 8; \quad \frac{t_i}{t_a} = 2{,}5; \quad \frac{d c_a}{d \alpha} = 4{,}7; \quad \frac{h_v}{b/2} = 0{,}175 \; (\approx 10^0).$$

Der Flügel soll eine Verwindung von — 3° an den Enden erhalten. Die Verwindung verläuft so über die Halbspannweite, daß der Flügelstrak geradlinig bleibt.

Das Verhältnis $\frac{a}{b/2}$ wird bestimmt durch die erforderlichen Längen von Landeklappe und Querruder. Falls nicht eine dieser Klappen geteilt werden soll, muß der Knick zwischen ihnen liegen. Die günstigste Querruderlänge ist $= \frac{2}{3} \frac{b}{2}$; mit Rücksicht auf die erforderliche Landeklappenlänge wird angenommen

$$\frac{a}{b/2} = 0{,}4,$$

Pfeilstellung = 0, d. h. Verbindungslinie der Profildruckpunkte gerade. Als Abstand der Druckpunkte von der Profilnase wird $\frac{t}{4}$ angenommen.

Das bei seitlicher Anblasung entstehende Schiebe-Rollmoment soll einem $c_{l_\beta} = 0{,}10$ entsprechen.

Angenommener Flugzustand:

$$c_a = 0{,}4$$
$$\beta = + 20^0 = + 0{,}349.$$

Digitized by Google

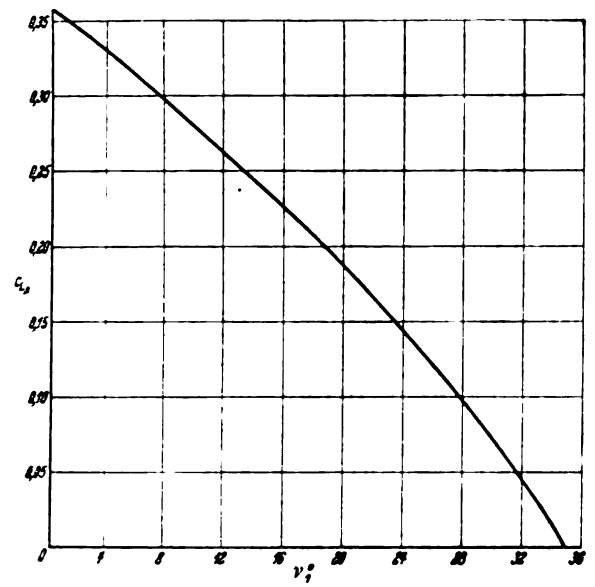


Bild 13. Schieberollmomentenanstieg $c_{l\beta} = \frac{\partial c_l}{\partial \beta}$ in Abhängigkeit von dem V-Winkel ν_1 des Tragflügels des Beispiels.

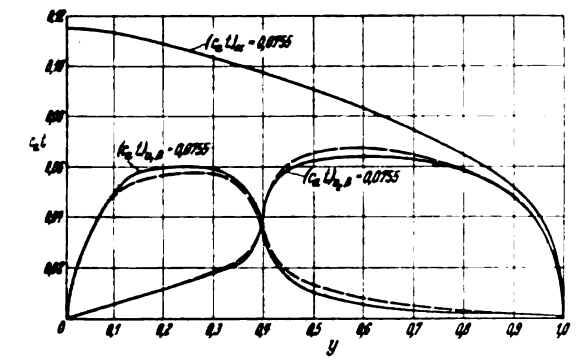


Bild 15. Auftriebsverteilungen über die Halbspannweite des berechneten Tragflügels für unstetige Anstellwinkelverteilung, gerechnet nach der genauen Auftriebsverteilungsrechnung (ausgezogen) und nach der Näherungsformel Gl. (10) (gestrichelt).

Auf die zusätzliche Auftriebsverteilung infolge $\nu\beta$ hat die geometrische Verwindung des Flügels keinen Einfluß. Maßgebend ist die Form der Auftriebsverteilung $(c_a t)\alpha$ des nicht schiebenden unverwundenen Flügels. Die berechnete Auftriebsverteilung (s. Bild 16) liegt zwischen der eines elliptischen und der eines dreieckigen Grundrisses, jedoch von der elliptischen nur wenig entfernt. Für den Flügel ist

bei elliptischer Auftriebsverteilung $k_5 = 4{,}05$, $k_6 = 1{,}84$ (aus Bild 5 und 6),

bei dreieckiger Auftriebsverteilung $n_5 = 5{,}7$, $n_6 = 3{,}75$ (aus Bild 9 und 10).

Mit

$$\frac{h_v}{b/2} = 0{,}175 \text{ und } c_{l\beta} = 0{,}1, \text{ ist also}$$

bei elliptischer Auftriebsverteilung $\operatorname{tg} \nu_1 = 0{,}175 \cdot 4{,}05 - 0{,}1 \cdot 1{,}84 = 0{,}526$ $\nu_1 = 27{,}7^0$,

bei dreieckiger Auftriebsverteilung $\operatorname{tg} \nu_1 = 0{,}175 \cdot 5{,}7 - 0{,}1 \cdot 3{,}75 = 0{,}623$ $\nu_1 = 31{,}9^0$.

Es wird angenommen $\nu_1 = 28^0$.

Dann ist

$$\operatorname{tg} \nu_2 = \frac{h_v}{1-a} - \operatorname{tg} \nu_1 \frac{a}{1-a} = -0{,}063$$

$$\nu_2 = -3{,}6^0$$

$$\nu_1 \beta = \quad 0{,}171$$

$$\nu_2 \beta = -0{,}022.$$

Die mit diesen Anstellwinkeln der entsprechenden Flügelteile berechneten Auftriebsverteilungen ergeben ein Rollmoment

$$L_V = +0{,}0169\, q \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3$$

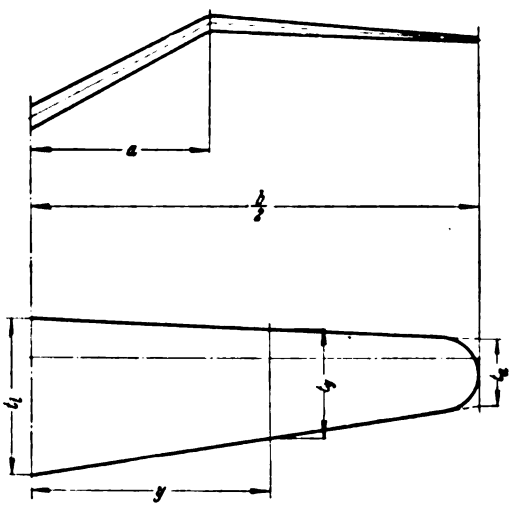


Bild 14. Tragflügel des Rechenbeispiels.

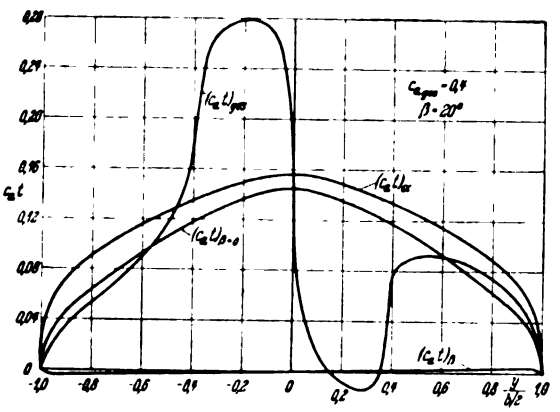


Bild 16. Gesamt- und Teilauftriebsverteilungen über die Spannweite des berechneten Tragflügels.

$(c_a t)_\alpha$: Auftriebsverteilung des nicht schiebenden unverwundenen Flügels.

$(c_a t)_{\beta=0}$: Auftriebsverteilung des nicht schiebenden verwundenen Flügels.

$(c_a t)_{\nu\beta}$: Auftriebsverteilung des schiebenden verwundenen Knickflügels.

und ein

$$c_{l_\beta} = \frac{L_V}{q F \frac{b}{2} \cdot \beta} = +0{,}097.$$

Dieser Wert entspricht dem geforderten $c_{l\beta} = 0{,}10$ gut. In Bild 13 ist $c_{l\beta} = f(\nu_1)$ für den Flügel des Beispiels aufgetragen. Aus dem Bild ergibt sich, daß der genaue Wert $c_{l\beta} = 0{,}10$ bei einem $\nu_1 = 27{,}7^0$ erreicht wird.

Würde der Flügel ohne Knick ausgeführt, so wäre bei gleichem $\frac{h_v}{b/2}$ $\nu_1 = 10^0$, also nach Bild 13 $c_{l\beta} = 0{,}28$.

Mit $\nu_1 = 28^0$ und $\nu_2 = -3{,}6^0$ hat der Flügel die Form von Bild 14.

Die Auftriebsverteilung $(c_a t)_{\nu\beta}$ und das zugehörige Moment L_0' des schiebenden Flügels ohne V-Stellung ist nach Weinig [7] ebenfalls berechnet. Es ist

$$L_0' = -0{,}002073 \cdot q \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3.$$

Bei Vernachlässigung des Momentes L_0''' infolge Grenzschichtablösung ist das gesamte Rollmoment des Flügels

$$L = (0{,}0169 - 0{,}00207)\, q \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3 = 0{,}01483 \cdot q \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3.$$

Da L_0' und L_0''' einander zum Teil aufheben, fällt also L_0 gegenüber L_V kaum ins Gewicht.

Zur Kontrolle für die Gültigkeit der Gl. (10) sind in Bild 15 die Auftriebsverteilungen $(c_a t)_{\nu\beta}$ für $\nu_1\beta = \nu_2\beta = 0{,}0755$ nach der genauen Auftriebsverteilungsrechnung und gestrichelt die entsprechend Gl. (10) mit

Digitized by Google

$$(c_a\, t)_{v,\beta} = (c_a\, t)_a \left[\varepsilon_{\overline{y}=0} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{\overline{y}=+0,4} - \varepsilon_{\overline{y}=-0,4} \right) \right]$$

und

$$(c_a\, t)_{v,\beta} = (c_a\, t)_a \cdot \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{\overline{y}=+0,4} - \varepsilon_{\overline{y}=-0,4} \right)$$

gerechneten aufgetragen. Es zeigt sich ausreichende Übereinstimmung.

In Bild 16 ist die gesamte Auftriebsverteilung über die Spannweite angegeben.

VI. Zusammenfassung.

Das an einem schiebenden Flugzeug auftretende Rollmoment wird in mehrere Teilmomente zerlegt, von denen bei Knickflügeln unter der Voraussetzung mäßiger Anstell- und Schiebewinkel und nicht zu kleiner V-Winkel des Flügels das Teilmoment maßgebend ist, das durch die Änderung des Profil-Anstellwinkels infolge der V-Form bei $\beta \neq 0$ hervorgerufen wird. Für die Abhängigkeit der zur Erreichung bestimmter Werte von $c_{l\beta} = \frac{\partial c_l}{\partial \beta}$ nötigen V-Winkel von der Lage der Knickstelle längs der Halbspannweite und dem Auftriebsanstieg des Flügels, d. h. der Flügelstreckung, werden einfache Näherungsformeln mit zugehörigen Kurventafeln aufgestellt. Eine genaue Durchrechnung eines Beispiels ergibt genügende Übereinstimmung der Näherungsformeln mit der genauen Rechnung.

VII. Schrifttum.

[1] F. Wenk, Zusammenhänge zwischen Flugstabilität, Schwimmstabilität und Flugwerksgestaltung bei Wasser- und Segelflugzeugen. Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung Jahrbuch 1936, S. 549/553.

[2] Del Proposto, Das Verhalten von Tragflügeln bei Seitenwind. Dissertation Technische Hochschule Aachen 1933.

[3] Some remarcable stalling experiments. Flight Bd. 30 (1936), Nr. 1438, S. 94/97; Nr. 1439, S. 120/121; Nr. 1445.

[4] H. B. Irving, Some notes on tapered wings. Aircraft Engineering Bd. 9 (1937), Nr. 96, S. 31/36.

[5] A. Betz und E. Petersohn, Zur Theorie der Querruder. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 8 (1928), S. 253/257.

[6] E. Petersohn, Theoretische und experimentelle Untersuchung der unter Einwirkung von Querrudern an Tragflügeln auftretenden Momente. Luftf.-Forschg. Bd. 2 (1928), Nr. 2, S. 40/48.

[7] F. Weinig, Schiebende und gepfeilte Tragflügel. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Nr. 2, S. 45/54 und Berichtigung Bd. 15 (1938), Nr. 4, S. 213.

Digitized by Google

East Engin.
Library

APR 26 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 3 enthält Arbeiten von: A. Walz S. 121-128, K. Bausch S. 129-134, K. Jaeckel S. 135-138, O. Lutz S. 139-147, H. Nautsch S. 148-156

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 3 SEITE 121 BIS 156 | MÜNCHEN, 20. 3. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Übertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel. Von A. Walz . . . . . Seite 121

Auftriebsverteilung und daraus abgeleitete Größen für Tragflügel in schwach inhomogenen Strömungen. Von K. Bausch . . . . . Seite 129

Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung für den zweidimensionalen Tragflügel bei beliebigen periodischen Bewegungen. Von K. Jaeckel . Seite 135

Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren. Von O. Lutz . . . . . Seite 139

Der Flugweg in Blindflugkurven, insbesondere bei Schlechtwetterlandungen. Von H. Nautsch . . . . . Seite 148

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 | 20. März 1939 | Lfg. 3

Übertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel.

Von A. Walz.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Die Druckverteilung bei anderen Anstellwinkeln bzw. c_a-Werten als den bei einer Messung gerade gewählten kann in ungünstig liegenden Fällen durch Inter- bzw. Extrapolation nicht hinreichend genau ermittelt werden. Es wird ein Weg beschrieben, der die Bestimmung der Druckverteilung bei einem beliebigen Anstellwinkel bzw. c_a-Wert aus gemessenen Druckverteilungen auch bei großen Extrapolationen mit guter Genauigkeit und verhältnismäßig geringem Zeitaufwand ermöglicht. Graphische Hilfsmittel und in Rezeptform gefaßte Anleitungen erleichtern die praktische Anwendung. (Der theoretisch weniger interessierte Leser kann die Abschnitte II 1) und III 1) übergehen).

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Verfahren mit zwei gemessenen Druckverteilungen.
III. Verfahren mit einer gemessenen Druckverteilung.
IV. Bestimmung des Abbildungskreis-Halbmessers.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die Druckverteilung eines Profils bei Anstellwinkeln bzw. c_a-Werten, die zwischen denen gemessener Druckverteilungen oder nur wenig höher oder tiefer als diese liegen, findet man oft hinreichend genau durch Inter- bzw. Extrapolation. Bei größeren Extrapolationen und auch bei einer zu geringen Anzahl gemessener Druckverteilungen wird diese Methode mühsam und unsicher. Nachstehend wird nun ein verhältnismäßig einfacher Lösungsweg beschrieben, der auch in diesen Fällen noch zu guten Ergebnissen führt. Er stellt hinsichtlich einiger wesentlicher Grundgedanken die Verallgemeinerung der von G. Flügel [1] und F. Weinig [2] [3] angegebenen rein potentialtheoretischen Lösung der vorliegenden Aufgabe dar in der Richtung, daß der oft erhebliche Einfluß der Grenzschicht auf die Druckverteilung nach Pinkerton [4] berücksichtigt wird. Dadurch werden Ergebnisse erzielt, die im allgemeinen dem Genauigkeitsgrad des Rechenverfahrens von Theodorsen-Pinkerton [4] gleichkommen, vorausgesetzt, daß die Ausgangs-Druckverteilungen einwandfrei und bei anliegender Strömung gemessen sind.

Ausgangspunkt der Rechnung können entweder zwei oder nur eine gemessene Druckverteilung bilden. Der Lösungsweg ist in jedem der beiden Fälle ein etwas anderer. Dementsprechend werden zwei in Theorie und Durchführung etwas voneinander verschiedene Verfahren beschrieben.

Das Verfahren des Abschnitts II wird man immer dann anwenden, wenn zwei gemessene Druckverteilungen, deren c_a-Differenz größer als etwa 0.2 ist, zur Verfügung stehen. Dieses Verfahren ist das kürzere und im allgemeinen auch etwas genauere von beiden. Der Arbeitsaufwand beträgt für die Ermittlung der Druckverteilung zu einem vorgegebenen Anstellwinkel- bzw. c_a-Wert etwa 3 bis 4 h, für jede weitere Druckverteilung etwa $^1/_2$ h zusätzlich. Das Verfahren des Abschnitts III kommt dann in Betracht, wenn nur eine oder zwei zu nahe beieinander liegende Druckverteilungen zur Hand sind. Es erfordert etwa doppelt soviel Arbeitsaufwand (für die Ermittlung der ersten Druckverteilung) wie das Verfahren des Abschnitts II. Beide Verfahren sind bei positiven und negativen Anstellwinkeln bis in die Nähe des Abreißpunktes verwendbar.

II. Verfahren mit zwei gemessenen Druckverteilungen.

1. Theorie.

Denkt man sich zunächst die gemessenen Druckverteilungen p_1 und p_2[1]) in reibungsloser Strömung entstanden, so hat der Differentialquotient $\frac{dz}{d\zeta}$ der Abbildungsfunktion, die die Strömung v um das Profil (ζ-Ebene) mit der Strömung v_k um den Kreis (z-Ebene) verknüpft, in jedem Profilpunkt einen bestimmten, vom Anstellwinkel unabhängigen Wert. Für das Verhältnis der bei zwei verschiedenen effektiven Anstellwinkeln α^*_{e1} und α^*_{e2}[2]) in einem Profilpunkt gemessenen Geschwindigkeiten $v_1 = \sqrt{1-p_1}$ und $v_2 = \sqrt{1-p_2}$ gilt somit

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_{k_1}}{v_{k_2}} = \frac{\sin(\varphi - \alpha^*_{e1}) + \sin\alpha^*_{e1}}{\sin(\varphi - \alpha^*_{e2}) + \sin\alpha^*_{e2}}\ ^3) \quad \ldots \quad (1)$$

Für gegebene Werte $\frac{v_1}{v_2}$, α^*_{e1} und α^*_{e2} ist Gl. (1) eine Bestimmungsgleichung für den Winkel φ, der den dem jeweiligen Profilpunkt durch konforme Abbildung zugeordneten Kreispunkt kennzeichnet. Ist aber φ für die einzelnen Profilpunkte bekannt, so läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung v_3 am Profil bei einem beliebigen Anstellwinkel ohne die stets zeitraubende konforme Abbildung berechnen; es ist

$$v_3 = v_{k_3}(\alpha^*_{e3}, \varphi) \cdot \frac{dz}{d\zeta} = v_{k_3}(\alpha^*_{e3}, \varphi) \cdot \frac{v_1}{v_{k_1}(\alpha^*_{e1}, \varphi)} \quad \ldots \quad (2)$$

[1]) Im nachfolgenden seien unter p, r, v_k, r'_k die mit dem Staudruck bzw. mit der Geschwindigkeit der ungestörten Strömung dimensionslos gemachten Größen, und zwar jeweils dem Betrage nach, verstanden.

[2]) α^*_e ist der effektive Anstellwinkel bezogen auf die theoretische Nullauftriebsverteilung des Profils, während die in der Tragflügeltheorie übliche Größe α_e als der effektive Anstellwinkel gegen die gemessene Nullauftriebsrichtung des Profils definiert ist. $\alpha^*_e - \alpha_e$ hat bei normalen Profilformen die Größenordnung $+1^1/_4{}^\circ$ (Bild 4); bei Profilen mit hochgezogener Hinterkante kann $\alpha^*_e - \alpha_e$ auch negativ werden.

[3]) Auf Grund dieses Ansatzes für r_k ist der Profilhinterkante der Wert $\varphi = 0$ zugeordnet.

Digitized by Google

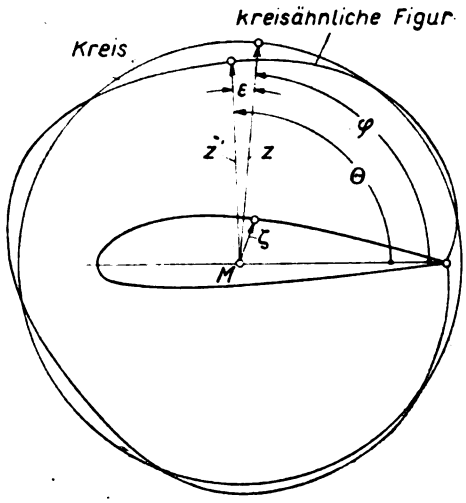


Bild 1 (links). Konforme Abbildung eines beliebigen Profils auf den Kreis nach Theodorsen und Garrick.

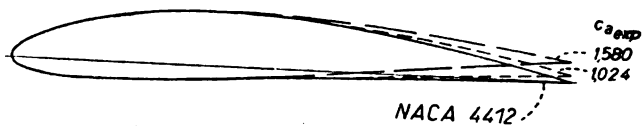
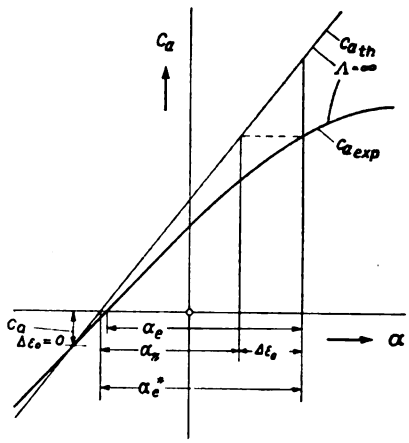


Bild 2. Die Änderungen der effektiven Profilform mit c_a nach Pinkerton (aus NACA-Rep. 563).

Bild 3 (rechts). Definitionsfigur für die in dieser Arbeit vorkommenden Winkelgrößen.



Führt man nun zur Berücksichtigung des Grenzschichteinflusses auf die Druckverteilung den Pinkertonschen Ansatz für die Geschwindigkeit am Profil [4] [5] (deutsche Bearbeitung) ein, so ist dieser bekannte einfache Lösungsweg[4]) zunächst nicht gangbar; denn für den Pinkertonschen Ansatz ist eine Veränderlichkeit von $\frac{dz}{d\zeta}$ mit dem Anstellwinkel charakteristisch, die sich streng nur in Verbindung mit einer konformen Abbildung erfassen läßt[5]).

Mit einigen vereinfachenden Annahmen, die nur eine geringe Einbuße an Genauigkeit bedingen, läßt sich jedoch der Ausdruck für $\frac{v_1}{v_2}$ auch in diesem Fall auf eine Form bringen, die eine Lösung der Aufgabe ohne konforme Abbildung nach dem Schema der beschriebenen Lösung bei reiner Potentialströmung ermöglicht.

Es gilt mit Benutzung der Pinkertonschen Geschwindigkeitsformel

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\left\{\sin\left[\varphi-\alpha^*_{e1}+\frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}(1+\cos\Theta)\right]+\sin\left[\alpha^*_{e1}-\Delta\varepsilon_{01}\right]\right\}\left(1+\frac{d\varepsilon}{d\Theta}-\frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}\sin\Theta\right)}{\left\{\sin\left[\varphi-\alpha^*_{e2}+\frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}(1+\cos\Theta)\right]+\sin\left[\alpha^*_{e2}-\Delta\varepsilon_{02}\right]\right\}\left(1+\frac{d\varepsilon}{d\Theta}-\frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}\sin\Theta\right)}.$$

ε und Θ sind Größen, die mit der konformen Abbildung des allgemeinen Profils auf den Kreis nach dem Verfahren von Theodorsen und Garrick [6] zusammenhängen (vgl. Bild 1). $\Delta\varepsilon_0$, bei Pinkerton $\Delta\varepsilon_T$ genannt, ist die Größe, mit der Pinkerton den mit α^*_e veränderlichen Grenzschichteinfluß auf die Druckverteilung näherungsweise in die Rechnung von Theodorsen hereinbringt.

Pinkerton legt der Druckverteilungsrechnung eine Profilform zugrunde, deren hinterer Teil so hoch- bzw. (bei negativen c_a-Werten) nach unten gebogen ist, daß die Hinterkante stets in der Mitte des mit dem Anstellwinkel veränderlichen Totwassergebietes liegt (vgl. Bild 2, das die Änderung der Profilform bei positiven c_a-Werten zeigt). $\Delta\varepsilon_0$ ist dabei die mit dieser fiktiven Formänderung verknüpfte Änderung der Nullauftriebsrichtung des Profils; praktisch wirkt sich diese Änderung der Nullauftriebsrichtung in der bekannten Verringerung von $\frac{dc_a}{d\alpha}$ aus.

$\Delta\varepsilon_0$ (vgl. Bild 3) ist definiert als

$$\Delta\varepsilon_0=\alpha^*_e-\frac{c_{a_{exp}}}{8\pi\frac{r}{t}}\cdot 57{,}3^0, \quad \ldots\ldots (3)$$

wobei r der Halbmesser des zum Profil gehörigen Abbildungskreises, t die Profiltiefe,

$$8\pi\frac{r}{t}=\frac{dc_{a_{th}}}{d\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

die Neigung der $c_a(\alpha)$-Kurve des Profils in reiner Potentialströmung und $c_{a\,exp}$ ein experimentell ermittelter c_a-Wert bei α^*_e sind.

Es handelt sich nun darum, die Größen $\frac{d\varepsilon}{d\Theta}$ und Θ aus der Beziehung für $\frac{v_1}{v_2}$ zu entfernen und $\Delta\varepsilon_0$ ohne konforme Abbildung zu bestimmen. Bedenkt man, daß $\frac{d\varepsilon}{d\Theta}$ und $\Delta\varepsilon_0$ kleine Größen sind (meist kleiner als 0,1) so kann man für den zweiten Teil des Pinkertonschen Ausdrucks für $\frac{v_1}{v_2}$ schreiben

$$\frac{1+\frac{d\varepsilon}{d\Theta}-\frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}\cdot\sin\Theta}{1+\frac{d\varepsilon}{d\Theta}-\frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}\cdot\sin\Theta}\approx\frac{\left(1+\frac{d\varepsilon}{d\Theta}\right)\left(1-\frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}\sin\Theta\right)}{\left(1+\frac{d\varepsilon}{d\Theta}\right)\left(1-\frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}\sin\Theta\right)}\approx\frac{1-\frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}\sin\Theta}{1-\frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}\sin\Theta}.$$

Ferner kann $\Theta=\varphi-\varepsilon\approx\varphi$ gesetzt werden, da ε klein ist (Größenordnung einige Winkelgrade) und die Glieder, in denen $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$ auftreten, mit der kleinen Größe $\frac{\Delta\varepsilon_0}{2}$ multipliziert sind. Der Ausdruck für $\frac{v_1}{v_2}$ geht mit diesen Vereinfachungen über in

[4]) Die von G. Flügel angegebene rein potentialtheoretische Lösung mit 2 Ausgangsdruckverteilungen ist hier in einer etwas anderen, für die nachfolgende Verallgemeinerung im Sinne des Pinkertonschen Gedankens geeigneten Form dargestellt.

[5]) Diese Veränderlichkeit von $\frac{dz}{d\zeta}$ mit dem Anstellwinkel ist, wie Pinkerton zeigt [4], im wesentlichen auf den Teil von $\frac{dz}{d\zeta}$ beschränkt, der die zweite Stufe der Abbildung beim Theodorsen-Verfahren, nämlich die Abbildung der kreisähnlichen Figur auf den Kreis, betrifft.

Digitized by Google

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\left\{\sin\left[\varphi - \alpha^*_{e1} + \frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}(1+\cos\varphi)\right] + \sin\left[\alpha^*_{e1} - \Delta\varepsilon_{01}\right]\right\}\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_{01}}{2}\sin\varphi\right)}{\left\{\sin\left[\varphi - \alpha^*_{e2} + \frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}(1+\cos\varphi)\right] + \sin\left[\alpha^*_{e2} - \Delta\varepsilon_{02}\right]\right\}\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_{02}}{2}\sin\varphi\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Die Bestimmung von $\Delta\varepsilon_0$ ohne konforme Abbildung läuft, wenn man $c_{a\,exp}$ als bekannt voraussetzt, nach Gl. (3) darauf hinaus, den Halbmesser r des Abbildungskreises zu einem beliebigen Profil ohne konforme Abbildung zu bestimmen. Dies gelingt mit guter Näherung dadurch, daß man das vorgegebene Profil durch ein möglichst formähnliches Kármán-Trefftz-Profil ersetzt und dessen r ermittelt. Die letztere Aufgabe läßt sich mit der Theorie der Kármán-Trefftz-Profile [7] leicht lösen. Hierüber ist in Abschnitt IV näheres ausgeführt.

Mit gegebenen Werten $\frac{v_1}{v_2}$, α^*_{e1}, α^*_{e2}, $\Delta\varepsilon_{01}$, $\Delta\varepsilon_{02}$ kann nun aus Gl. (5) φ[6]) bestimmt werden. Die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung bei einem beliebigen Anstellwinkel $\alpha^*_{e_3}$ berechnet sich, wenn man

$$2\left\{\sin\left[\varphi - \alpha^*_e + \frac{\Delta\varepsilon_0}{2}(1+\cos\varphi)\right] + \sin\left[\alpha^*_e - \Delta\varepsilon_0\right]\right\}\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_0}{2}\sin\varphi\right) = v_k' \quad \ldots (6)$$

setzt, zu

$$v_3 = v_{k_3}(\alpha^*_{e_3}, \Delta\varepsilon_{03}, \varphi) \cdot \frac{v_1}{v_{k_1}(\alpha^*_{e1}, \Delta\varepsilon_{01}, \varphi)} \quad \ldots (7)$$

Die Auswertung von Gl. (5) und (7) ist noch etwas umständlich. Es erschien daher wünschenswert, die Formeln, wenn auch mit etwas Genauigkeitsverlust, für die praktische Anwendung des Verfahrens weiter zu vereinfachen. Eine solche Vereinfachung läßt sich erzielen, wenn man von der Tatsache Gebrauch macht, daß $\Delta\varepsilon_0$ für gebräuchliche Profilformen abhängig von α^*_e immer ungefähr denselben Verlauf hat (Bild 4)[7]). Es ist dann v_k' nur noch eine Funktion von α^*_e bzw. der in Gl. (8) definierten Größe α_e und φ, die sich in einem Nomogramm darstellen und bequem auswerten läßt (Bild 5)[8]).

[6]) φ ist durch Gl. (5) bzw. (6) definiert als der Winkel am Kreis, der den Profilpunkten bei $\Delta\varepsilon_0 = 0$, d. h. $c_a \approx 0$ zugeordnet ist. Bei $\Delta\varepsilon_0 \neq 0$ ist die Punktzuordnung zwischen Profil und Kreis infolge der Änderung der effektiven Profilform durch das Anwachsen der Grenzschicht (es handelt sich, wie bereits erwähnt, im wesentlichen um ein Verbiegen der Hinterkante des Profils), eine andere. Das Wandern der Kreispunkte bei c_a-Änderungen wird durch den Pinkertonschen Ausdruck $\frac{\Delta\varepsilon_0}{2}(1+\cos\varphi)$ im sin-Argument der Geschwindigkeitsformel, Gl. (5) und (6), erfaßt.

[7]) Die Werte $\Delta\varepsilon_0$ des Bildes 4 wurden aus den theoretischen und experimentellen $c_a(\alpha)$-Kurven einer größeren Zahl normaler Profile wie NACA 2212, 2412, 2415, 4412, 23012 u. a. ermittelt. Die Kurve gibt Mittelwerte wieder, die auf etwa $\pm\,^1/_2{}^\circ$ mit den tatsächlichen Werten $\Delta\varepsilon_0$ übereinstimmen. — Für den Einfluß der Grenzschicht (hier $\Delta\varepsilon_0$ genannt) auf den wirksamen Anstellwinkel schlug Weinig in [3] bereits die Abschätzung $\Delta\varepsilon_0{}^\circ = c_a{}^4$ vor. Die nach dieser Formel unter Zugrundelegung eines Wertes $\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha} = 7{,}0$ berechneten Werte $\Delta\varepsilon_0$ sind abhängig vom wirksamen Anstellwinkel α_e in Bild 4 eingetragen. Der Näherungsgrad dieser Abschätzung mußte für die hier gestellte Aufgabe, insbesondere bei c_a-Werten kleiner als 1,0, als nicht ausreichend erachtet werden.

[8]) Pausen dieses Nomogramms können von der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen bezogen werden. Bild 5 ist wegen des kleinen Maßstabes für den praktischen Gebrauch im allgemeinen zu ungenau.

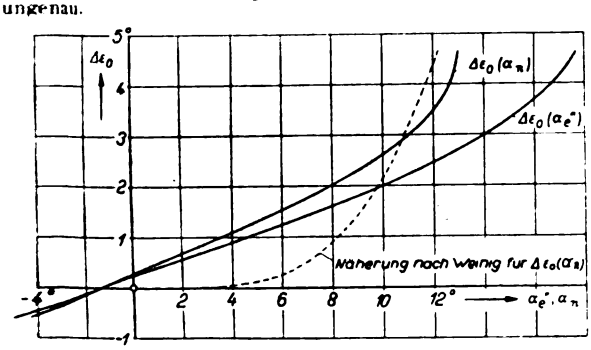


Bild 4. $\Delta\varepsilon_0$ abhängig von den Anstellwinkelgrößen $\alpha_e{}^*$ und $\alpha_e = \alpha_e{}^* - \Delta\varepsilon_0$ für normale Profilformen bis etwa 18% Dicke und 5% Wölbung.

Bei der Lösung einer praktischen Aufgabe geht man so vor, daß man den Wert $\frac{v'_{k_1}}{v'_{k_2}}$ oder besser das Quadrat davon für angenommene Werte φ aus dem Nomogramm ermittelt, das Verhältnis $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{1-p_1}{1-p_2}$ über der Profilsehne $\frac{x}{t}$ aufträgt und dann feststellt, an welcher Stelle $\frac{x}{t}$ der gerechnete Wert $\left(\frac{v'_{k_1}}{v'_{k_2}}\right)^2$ mit dem Wert $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$ übereinstimmt. Mit den Werten $\frac{x}{t}$ hat man dann die Profilpunkte gefunden, die den angenommenen Werten φ zugeordnet sind. (Eine unmittelbare Bestimmung von φ aus Gl. (5) für gegebene Werte $\frac{v_1}{v_2}$ ist nicht möglich.)

Bild 8 bis 10 zeigen Ergebnisse, die in dieser Weise für das Profil NACA 4412[9]) erhalten wurden. Man erkennt, daß die Übereinstimmung der Ergebnisse mit der Messung selbst in dem Fall extrem großer Extrapolationen von $c_a = -0{,}025$ und $+0{,}338$ (Bild 6 und 7) auf $c_a = 1{,}58$ noch recht gut ist[10]), wo die rein potentialtheoretische Behandlung schon beträchtliche Fehler ergibt.

In dem Nomogramm (Bild 5) ist der wirksame Anstellwinkel

$$\alpha_e = \alpha_e{}^* - \Delta\varepsilon_0 = \frac{c_{a\,exp}}{\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha}} \cdot 57{,}3^0 \quad \ldots\ldots (8)$$

eingeführt (Bild 3), wobei für $\Delta\varepsilon_0$ die in Bild 4 wiedergegebene, feste Funktion gewählt wurde. Dadurch wird die Bestimmung des zu einer vorgegebenen Druckverteilung gehörigen effektiven Winkels $\alpha_e{}^*$, die eine unter Umständen etwas zeitraubende Ermittlung des induzierten Anstellwinkels und der Nullauftriebsrichtung des Profils erfordern würde, umgangen. Der Wert $\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha}$ kann nach Gl. (4) und Abschnitt IV einfach und recht genau gefunden werden;

[9]) Die von Pinkerton an diesem Profil durchgeführten Druckverteilungsmessungen können, wie aus der Beschreibung der Messung, [4], hervorgeht, als recht genau gelten.

[10]) Druckverteilungen in der Nähe des Abreißpunktes können u. U., besonders bei mehr als etwa 18 vH dicken Profilen infolge der beschriebenen, vereinfachenden Annahmen etwas weniger genau als in dem Beispiel der Bilder 8 bis 10 ausfallen; das Ergebnis ist jedoch auch in diesem Fall immer noch genauer, als bei rein potentialtheoretischer Behandlung der Aufgabe.

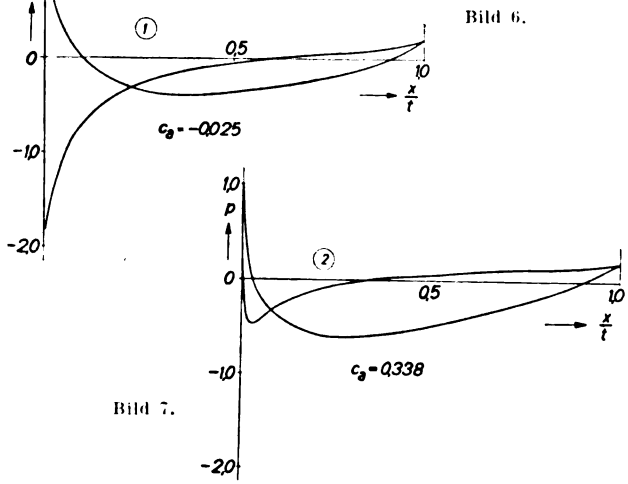


Bild 6.

Bild 7.

Bild 6 und 7. Gemessene Ausgangsdruckverteilungen des NACA-Profils 4412 (aus NACA-Rep. 563).

Digitized by Google

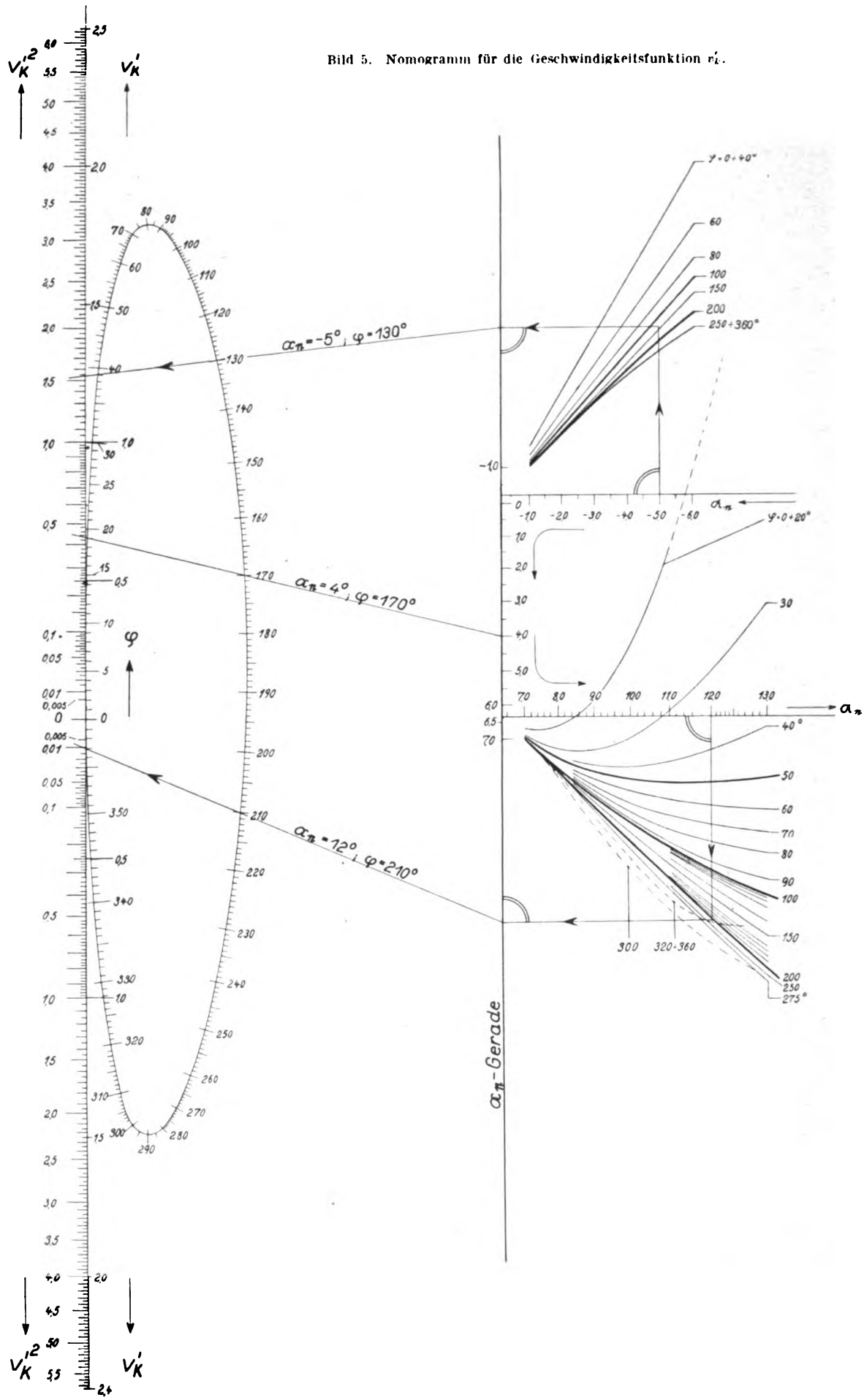
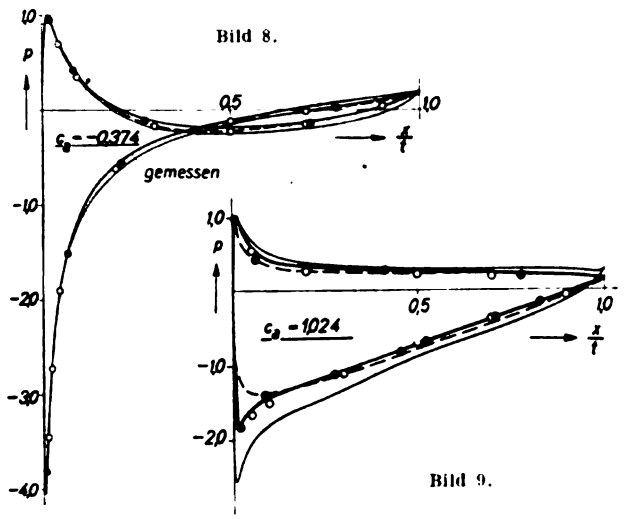


Bild 5. Nomogramm für die Geschwindigkeitsfunktion v_K'.

Digitized by Google



$c_{a\,exp}$ ist mit den Ausgangsdruckverteilungen gegeben bzw. wird für die gesuchte Druckverteilung vorgeschrieben.

2. Praktische Durchführung.

Man trägt zunächst die Werte $v_1^2 = 1 - p_1$[1]), sowie das Verhältnis $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$ der zwei gegebenen Druckverteilungen über der Profilsehne $\frac{x}{t}$ auf (Bild 11). (Streuungen der Punkte gleicht man dabei aus.) Dann ermittelt man den Wert $\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha} = 8\pi\frac{r}{t}$ des Profils (t = Profiltiefe, Bestimmung von r siehe Abschnitt IV) und rechnet die Werte

$$\alpha_{e_1} = \frac{c_{a_1\,exp}}{\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha}} \cdot 57{,}3^0, \quad \alpha_{e_2} = \frac{c_{a_2\,exp}}{\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha}} \cdot 57{,}3^0$$

und, wenn die Druckverteilung bei einem vorgeschriebenen Wert c_{a_3} gesucht ist, auch

$$\alpha_{e_3} = \frac{c_{a_3\,exp}}{\frac{d\,c_{a\,th}}{d\,\alpha}} \cdot 57{,}3^0.$$

Zu α_{e_1}, α_{e_2} und α_{e_3} bestimmt man nun mit Hilfe des Nomogramms (Bild 5) die zugehörigen Werte $v_{k'_1}^2$, $v_{k'_2}^2$ und $v_{k'_3}^2$ für $\varphi = 25,\ 50,\ 75,\ 100,\ 125^0$ usw. und bildet die Werte $\left(\frac{v'_{k_1}}{v'_{k_2}}\right)^2$. Nun sucht man in der Auftragung von $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$ über $\frac{x}{t}$ die Stellen $\frac{x}{t}$, an denen die Werte $\left(\frac{v'_{k_1}}{v'_{k_2}}\right)^2$ erreicht werden. (Damit hat man die Profilpunkte, die den angenommenen Werten φ entsprechen.) An den so ermittelten Stellen $\frac{x}{t}$ liest man die Werte v_1^2 ab und rechnet $C^2 = \frac{v_1^2}{v'^2_{k_1}}$. Der gesuchte Druck ist dann

$$p_3 = 1 - v'^2_{k_3} \cdot C^2.$$

Bemerkung zum Gebrauch des Nomogramms.

Für Werte α_e von $-1{,}0$ bis $+7{,}0^0$ ist der Gebrauch des Nomogramms besonders einfach: Man legt die Ablesegerade durch den in Betracht kommenden Punkt der α_e-Skala und durch den jeweiligen Wert der φ-Skala und liest $v_k'^2$ am Schnittpunkt der Ablesegeraden mit der $v_k'^2$-Skala

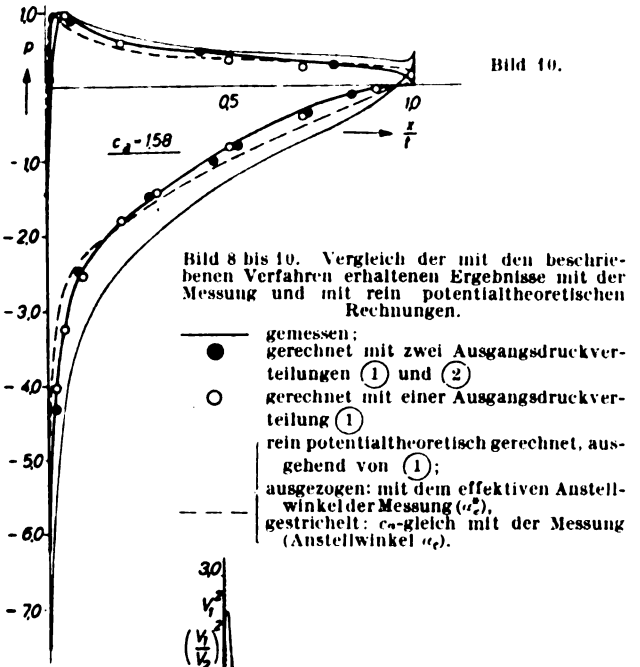


Bild 8 bis 10. Vergleich der mit den beschriebenen Verfahren erhaltenen Ergebnisse mit der Messung und mit rein potentialtheoretischen Rechnungen.

——— gemessen;
● gerechnet mit zwei Ausgangsdruckverteilungen (1) und (2)
○ gerechnet mit einer Ausgangsdruckverteilung (1)
rein potentialtheoretisch gerechnet, ausgehend von (1);
ausgezogen: mit dem effektiven Anstellwinkel der Messung (α_e^0),
– – – gestrichelt: c_a-gleich mit der Messung (Anstellwinkel α_e).

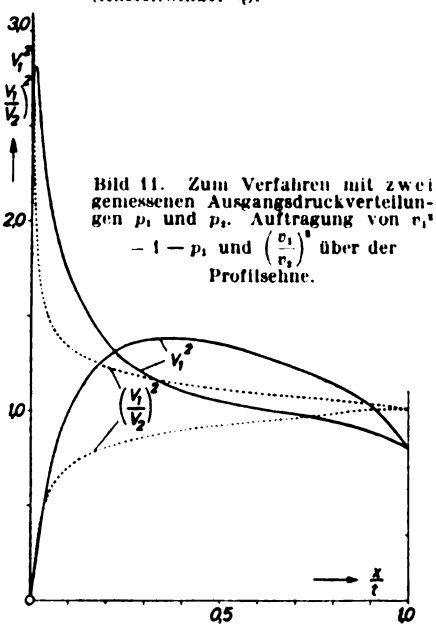


Bild 11. Zum Verfahren mit zwei gemessenen Ausgangsdruckverteilungen p_1 und p_2. Auftragung von $v_1^2 = 1 - p_1$ und $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$ über der Profilsehne.

ab. Der Punkt α_e bleibt dabei für alle Werte φ derselbe. Bei Werten $\alpha_e < -1{,}0$ und $> 7{,}0$ hat der Punkt auf der α_e-Geraden, der einem bestimmten Wert α_e entspricht, bei jedem Wert φ eine etwas andere Lage. Der Ermittlung der Lage dieses Punktes dienen die Kurvenscharen auf der rechten Hälfte des Nomogramms. Der Ermittlungsgang ist aus Bild 5 ersichtlich.

Eine gut geeignete Ablesegerade kann man sich durch Einritzen eines Haarstriches in einen hinreichend langen Zelluloid-Winkel verschaffen. Durch Einreiben von etwas Graphit eines weichen Bleistifts läßt sich dieser Strich haltbar schwärzen.

Maßstäbe:

v_1^2: 0,1 ≙ 1 cm, $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$: 0,1 ≙ 2 cm;

$\frac{x}{t}$: 0,1 ≙ 2 cm (in der Nähe der Profilnase 0,1 ≙ 10 cm).

Rechenschema:

Meßstelle $\frac{x}{t}$	p_1	p_2	$1 - p_1 = v_1^2$	$1 - p_2 = v_2^2$	$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$

φ	$v'^2_{k_1}$	$v'^2_{k_2}$	$v'^2_{k_3}$	$\left(\frac{v'_{k_1}}{v'_{k_2}}\right)^2$	$\frac{x}{t}$	v_1^2	$\left(\frac{v_1}{v'_{k_1}}\right)^2 = C^2$	$v'^2_{k_3} \cdot C^2 = v_3^2$	$1 - v_3^2 = p_3$

Digitized by Google

III. Verfahren mit einer gemessenen Druckverteilung.

1. Theorie.

Die zunächst zu lösende Aufgabe ist auch hier wieder die Bestimmung des Winkels φ am Abbildungskreis, der den Profilpunkten bei $\Delta\varepsilon_0 = 0$ zugeordnet ist (vgl. Anm. 6). Man gelangt dadurch zum Ziel, daß die bekannte Geschwindigkeitsverteilung am Kreis die Rolle der bei dem Verfahren des Abschnitts II benützten zweiten gemessenen Geschwindigkeitsverteilung — allerdings in anderer Form — übernehmen kann.

Zuerst sei des besseren Verständnisses wegen der Fall betrachtet, daß die Ausgangsdruckverteilung gerade bei einem solchen c_a-Wert gemessen sei, für den $\Delta\varepsilon_0 = 0$, d. h. $\alpha_e = \alpha_e^*$ (Gl. (8) für $\Delta\varepsilon_0 = 0$) ist, also bei einem kleinen negativen c_a-Wert (vgl. Bild 3). In diesem Fall kann φ wie bei dem Verfahren von F. Weinig [1] [2] durch Anwendung der Regel, daß Punkte gleichen Potentials an Profil und Kreis einander entsprechen, gefunden werden, d. h. mit Hilfe der Auftragungen der Geschwindigkeiten v_1 am Profil und der Geschwindigkeit am Kreis

$$v_{k_1} = 2\left\{\sin(\varphi - \alpha_{e_1}^*) + \sin\alpha_{e_1}^*\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

über der Profil- bzw. Kreisabwicklung ($\alpha_{e_1}^*$ hat hierbei einen kleinen negativen Wert; vgl. Bild 4 für $\Delta\varepsilon_0 = 0$). Der richtige Maßstab für die Kreisabwicklung ist gegeben mit dem Halbmesser r, der nach Abschnitt IV leicht aus der Profilform ermittelt werden kann[11]).

Mit bekannten Werten φ kann nun in ähnlicher Weise wie bei dem Verfahren des Abschnitts II die Geschwindigkeit bei einem beliebigen Anstellwinkel α_{e_2} (Gl. (8)) nach der Beziehung

$$v_2 = v'_{k_2}(\varphi, \alpha_{e_2}) \; \frac{v_1}{v_{k_1}(\varphi, \alpha_{e_1}^*)}$$

berechnet werden.

Wird eine Ausgangsdruckverteilung gewählt, für die $\Delta\varepsilon_0 \neq 0$, d. h. c_a stark von Null verschieden ist, so hat die c_a-gleiche Geschwindigkeitsverteilung am Kreis, mit der der Potentialvergleich zur Bestimmung von φ durchzuführen ist, die Form

$$v_{k_1} = 2\left\{\sin[\varphi^* - (\alpha_{e_1}^* - \Delta\varepsilon_{01})] + \sin[\alpha_{e_1}^* - \Delta\varepsilon_{01}]\right\} \quad (10)$$

oder mit Gl. (8)

$$v_{k_1} = 2\left\{\sin[\varphi^* - \alpha_{e_1}] + \sin\alpha_{e_1}\right\}.$$

Die Bezeichnung φ^* soll darauf hindeuten, daß man bei der Bestimmung potentialgleicher Punkte an Profil und Kreis in diesem Fall nicht unmittelbar den für die weitere Rechnung erforderlichen Wert φ (bei $\Delta\varepsilon_0 = 0$) erhält (vgl. Anm. 6). Aus der notwendigen Identität der sin-Argumente der Gl. (6) und (10) folgt, daß

$$\varphi = \varphi^* + \frac{\Delta\varepsilon_0}{2}(1 - \cos\varphi) \approx \varphi^* + \frac{\Delta\varepsilon_0}{2}(1 - \cos\varphi^*) \quad (11)$$

ist. Man kann jedoch den Winkel φ mit praktisch stets ausreichender Näherung unmittelbarer als an Hand der Gl. (10) und (11) finden. Man trägt hierzu v_k' über der Kreisabwicklung φ auf und bestimmt die Werte φ, für die

$$r\int_0^{\varphi} v'_{k_1}\, d\varphi = \int_0^{s} v_1\, ds$$

ist (s = Profilabwicklung). Es läßt sich nämlich mit einer kleinen Nebenrechnung, die hier übergangen werden kann, zeigen, daß

$$\int_0^{\varphi^* = \varphi - \frac{\Delta\varepsilon_0}{2}(1-\cos\varphi)} v_k\, d\varphi \approx \int_0^{\varphi} v'_k\, d\varphi,$$

womit bewiesen ist, daß die auf diesem kürzeren Weg gefundenen Werte φ praktisch Gl. (11) erfüllen. Der Fall $\Delta\varepsilon_0 = 0$ ist infolge $v_{k'\,\Delta\varepsilon_0=0} = v_k$ in diesem abgekürzten Verfahren enthalten.

Für die Geschwindigkeit v_2 am Profil bei einem beliebigen Anstellwinkel α_{e_2} gilt nun wieder

$$v_2 = v'_{k_2}(\varphi, \alpha_{e_2}) \; \frac{v_1}{v'_{k_1}(\varphi, \alpha_{e_1})}.$$

Mit diesem Verfahren erhaltene Ergebnisse sind ebenfalls in Bild 8 bis 10 eingetragen. Man erkennt auch hier die gute Übereinstimmung der gerechneten und gemessenen Werte.

2. Praktische Durchführung.

Man ermittelt zunächst nach Abschnitt IV den Halbmesser r des Abbildungskreises, sowie $\alpha_{e_1} = \frac{c_{a_1\,\mathrm{exp}}}{\frac{d\,c_{a_{\mathrm{th}}}}{d\,\alpha}} \cdot 57{,}3^0$ für die Ausgangsdruckverteilung und trägt die dem Nomogramm (Bild 5) zu entnehmenden Werte v_{k_1} über dem Winkel φ auf. Ferner trägt man die Geschwindigkeit v_1 am Profil über der mit der Größe $\frac{r}{57{,}3}$ dimensionslos gemachten Profilabwicklung s auf $\left(\frac{s}{r}\,57{,}3 = \sigma^0\right)$.

Die Abwicklung s ist zu messen ausgehend von der Profilhinterkante über die Saugseite zur Druckseite.

Nunmehr konstruiert man die Potentialkurven $\Phi'_{k_1} = \int v'_{k_1} d\varphi$ und $\Phi_1 = \int v_1 d\sigma$ nach bekannten graphischen Integrationsverfahren (siehe z. B. »Hütte I«).

Wenn die gemessene Druckverteilung einwandfrei und die Werte r, σ und α_{e_1} richtig bestimmt sind, müssen die Kurven $\Phi_{k'_1}$ und Φ_1 an sich im hinteren Staupunkt (bei $v_{k'_1} = 0$ bzw. $v_1 = 0$) mit gleichem Wert endigen (s. Bild 12), d. h. die Flächeninhalte der Kurven $v_{k'_1}$ und v_1 müssen auf Druck- und Saugseite je einander gleich sein. Kleine Unstimmigkeiten sind jedoch kaum zu vermeiden. Unterschiede in den Flächeninhalten bis etwa 2% sind belanglos; größere (im allgemeinen nicht auftretende) Abweichungen beseitigt man dadurch, daß man die Werte σ in dem entsprechenden Prozentsatz verkleinert oder vergrößert und die Kurve v_1 über dem verbesserten σ neu aufträgt. Sind die Abweichungen der Flächeninhalte im Saug- und Druckseitenteil verschieden, so rechnet man σ so um, daß die Flächeninhalte für die (meist wichtigere) Saugseite gleich werden.

Diese Prüfung auf Flächengleichheit nimmt man vor dem Konstruieren der Potentialkurven vor.

Zu den Werten σ, die den Ausgangswerten $\frac{x}{t}$ entsprechen, müssen nun die zugehörigen Werte φ, v'_{k_1} und v'_{k_2} ermittelt werden. Der Gang der Ermittlung von φ und v'_{k_1} ist aus Bild 12 ersichtlich: Den Werten σ sind diejenigen Werte φ zugeordnet, bei denen $\Phi_1 = \Phi'_{k_1}$ ist; v'_{k_1} liest man an den so gefundenen Stellen φ in der Kurve $v'_{k_1}(\varphi)$ ab. Den zu φ gehörigen Wert v'_{k_2} bei dem interessierenden Anstellwinkel $\alpha_{e_2} = \frac{c_{a_2\,\mathrm{exp}}}{\frac{d\,c_{a_{\mathrm{th}}}}{d\,\alpha}} \cdot 57{,}3^0$ entnimmt man dem Nomogramm (Bild 5). Dann ist $\frac{v_1}{v'_{k_1}} = C$ (v_1 bei σ!) und schließlich der gesuchte Druck

$$p_2 = 1 - (v'_{k_2} \cdot C)^2.$$

Der Gebrauch des Nomogramms ist bis auf den kleinen Unterschied, daß man auf der v_k'- anstatt auf $v_k'^2$-Skala abliest, derselbe wie bei dem Verfahren des vorhergehenden Abschnitts II.

Maßstäbe: v_1: 0,1 = 1 cm; für die Konstruktion der Potentialkurven: Abstand von Pol und Maßstabsgeraden = 10 cm.

[11]) Weinig bestimmt r aus dem Potentialunterschied zwischen vorderem und hinterem Staupunkt und aus dem Anstellwinkel α_e, wobei letzterer wieder aus dem Potentialunterschied zwischen Druck- und Saugseite gewonnen wird (α_e entspricht δ in der Weinigschen Arbeit). Demgegenüber stellt der hier vorgeschlagene Weg zur Bestimmung von r und α_e, insbesondere bei dem Verfahren des Abschnitts II, das die etwas mühsame Auftragung der Geschwindigkeit über der Profilabwicklung völlig umgeht, eine Vereinfachung dar.

Digitized by Google

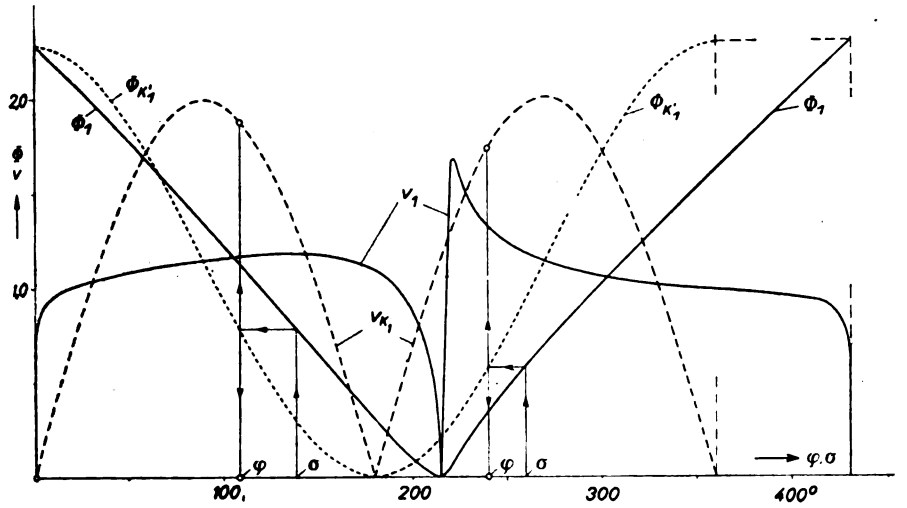


Bild 12. Zum Verfahren mit einer gemessenen Ausgangsdruckverteilung p_1. Auftragung der Geschwindigkeit $v_1 = |1 - p_1}$ am Profil und der Geschwindigkeitsfunktion v'_{k_1} über der Profil- bzw. Kreisabwicklung mit den zugehörigen Potentialkurven.

Rechenschema:

Willkürliche Werte								
φ	v'_{k_1}	$\frac{x}{t}$	p_1	$1 - p_1 = v_1^2$	v_1	s mm	$\frac{s}{r} \cdot 57{,}3 = \sigma$ Grad	
zu σ gehörige Werte								
φ	v'_{k_1}	v'_{k_2}	$\frac{v_1}{v'_{k_1}} = C$	$C \cdot v'_{k_2} = v_2$	v_2^2	$1 - v_2^2 = p_2$		

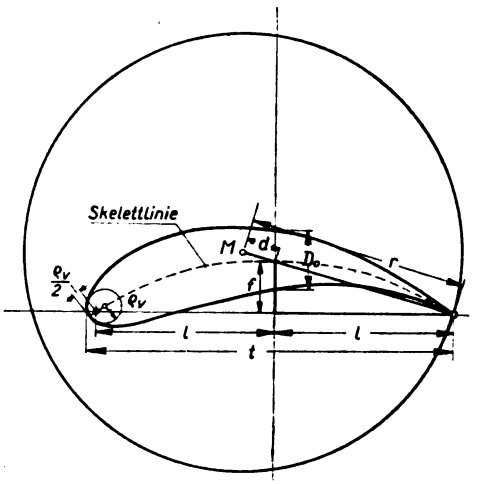


Bild 13. Zur Ermittlung der Konstruktionsparameter des Kármán-Trefftz-Profils, das eine vorgegebene beliebige Profilform ersetzt.

IV. Bestimmung des Abbildungskreis-Halbmessers r.

Für den Halbmesser r des zu einem Kármán-Trefftz-Profil gehörigen Abbildungskreises gilt (Bild 13)

$$r = \frac{l}{k}\left[d/l + \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}\right]^{12}), \quad \ldots\ldots (7)$$

wenn l, k, d/l und f/l die Formparameter dieses Profils sind (l = Abstand der Fixpunkte der Transformation vom Koordinaten-Ursprung, k = Profilparameter, der mit dem Hinterkantenwinkel δ durch die Beziehung $k = 2 - \frac{\delta}{\pi}$ zusammenhängt, d/l = Dickenparameter, f/l = Wölbungsparameter). Ersetzt man ein beliebiges Profil durch ein möglichst formähnliches Kármán-Trefftz-Profil, so ist der Abbildungskreis-Halbmesser r dieses beliebigen Profils praktisch gleich dem des Kármán-Trefftz-Ersatzprofils (auch dann, wenn das Profil einen S-Schlag besitzt). Die Aufgabe, den Halbmesser r für ein beliebiges Profil zu bestimmen, läuft also darauf hinaus, die Formparameter des Kármán-Trefftz-Ersatzprofils zu ermitteln. Die Lösung dieser Aufgabe wird mit dem in Bild 14 wiedergegebenen Diagramm recht einfach: man mißt den Halbmesser ϱ_v des kleinsten Krümmungskreises an der Profilnase (Bild 13), sowie die Dicke D_0 des Profils an der Stelle $\frac{1}{2}\left(t - \frac{\varrho_v}{2}\right) \approx l$ von der Hinterkante entfernt (t = Profiltiefe) und kann dann dem Diagramm die zu den Werten $\frac{\varrho_v}{l}$ und $\frac{D_0}{l}$ gehörigen Parameter k und d/l des Kármán-Trefftz-Ersatzprofils entnehmen. Die Definition der Wölbungsgröße f ist aus Bild 13 ersichtlich.

Die Größen d/l und k sind etwas mit f/l veränderlich; bei der Berechnung von r für normale Profilformen ist diese Veränderlichkeit jedoch vernachlässigbar. Das Diagramm des Bild 14, das an sich nur für den Wert $f/l = 0{,}1$ gilt, kann deshalb für alle praktisch vorkommenden Werte f/l (von 0 bis etwa 0,2) benützt werden.

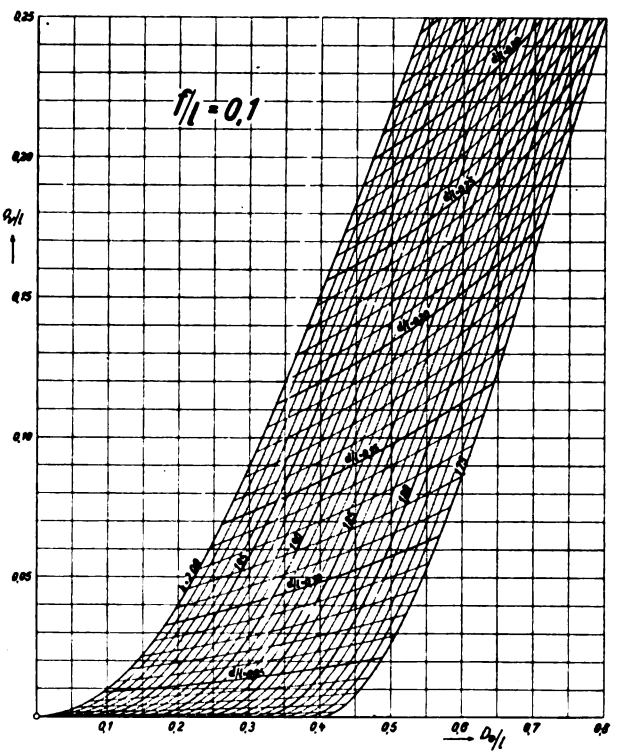


Bild 14. Zusammenhang zwischen den Konstruktionsparametern und den Formgrößen eines Kármán-Trefftz-Profils.

[12]) Der Bezeichnung l entspricht a' in der Arbeit von Betz und Keune.

Digitized by Google

V. Zusammenfassung.

Für die Übertragung gemessener Druckverteilungen auf andere Anstellwinkel bzw. c_a-Werte wird ein Weg beschrieben, der auch bei großen Extrapolationen durch Berücksichtigung des dann wesentlichen Grenzschichteinflusses auf die Druckverteilung nach Pinkerton noch gute Ergebnisse liefert. Für die zwei praktisch in Betracht kommenden Aufgabenstellungen, daß man von zwei oder von nur einer gemessenen Druckverteilung ausgeht, werden zwei in Theorie und Durchführung etwas verschiedene Verfahren entwickelt. Das Verfahren mit zwei gemessenen Ausgangsdruckverteilungen ist dabei das einfachere und meist auch etwas genauere, setzt aber voraus, daß die Ausgangsdruckverteilungen nicht zu nahe beieinander liegen ($|c_{a_1} - c_{a_2}|$ = etwa 0,2). Die praktische Anwendung der Verfahren wird durch graphische Hilfsmittel und rezeptförmige Darstellung erleichtert. —

Herrn Dr.-Ing. O. Schrenk danke ich für die Anregung dieser Arbeit und für praktischen Rat bei ihrer Abfassung.

Abgeschlossen August 1938.

VI. Schrifttum.

[1] G. Flügel, Ergebnisse aus dem Strömungsinstitut der Technischen Hochschule Danzig. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft Bd. 31 (1930) S. 110.

[2] F. Weinig. Übertragung der Druckverteilung eines Tragflügelprofils bei einem bestimmten auf einen beliebigen Anstellwinkel. Werft Reed. Hafen (1931) S. 115.

[3] F. Weinig, Die Abhängigkeit der Geschwindigkeits- und Druckverteilung an einem Tragflügelprofil vom Anstellwinkel. Werft Reed. Hafen (1933) S. 127.

[4] R. M. Pinkerton, Calculated and measered pressure distributions over the midspan section of the NACA 4412 airfoil. NACA-Rep. 563 (1936).

[5] W. Kochanowsky, Zur Berechnung der Druckverteilung über den Umfang beliebig geformter Flügelschnitte. Jahrbuch der Luftfahrtforschung (1937) I S. 52. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin.

[6] T. Theodorsen u. I. E. Garrick, General potential theory of arbitrary wing section. NACA-Rep. Nr. 452 (1933).

[7] A. Betz u. F. Keune, Verallgemeinerte Kármán-Trefftz-Profile. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 336.

Digitized by Google

Auftriebsverteilung und daraus abgeleitete Größen für Tragflügel in schwach inhomogenen Strömungen.

Von Karl Bausch.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Berlin-Adlershof, Aerodynamisches Institut.

Es wird auf Grund der Prandtlschen Traglinientheorie die Berechnung der Auftriebsverteilung eines Tragflügels in einem zur Flügelsymmetrieebene parallelen, von Ort zu Ort nach Geschwindigkeit und Richtung wenig verschiedenen stationären Luftstrom durch geeignete Flügelverwindung auf die Lösung desselben Problems bei homogener Strömung zurückgeführt.

Die Ergebnisse werden angewandt: 1. Zur Ermittlung der durch kleine örtliche Schwankungen der Strömungsrichtung und -geschwindigkeit bedingten Korrektur von Flügelmessungen im Windkanal, 2. zur Berechnung von Rollmoment, induziertem Widerstand und Wendemoment für den mit konstanter Geschwindigkeit im gleichmäßigen Luftstrom um die Strahlachse rotierenden Flügel[1]).

Gliederung.

I. Formulierung und Lösung des Problems durch die Prandtlsche Gleichung.
II. Rückführung der Lösungsgrößen auf die Verhältnisse bei homogener Strömung.
III. Anwendungen:
1. Einfluß örtlicher Schwankungen der Strömungsrichtung und -geschwindigkeit auf Flügelmessungen im Windkanal.
2. Der im gleichmäßigen Luftstrom mit konstanter Geschwindigkeit um die Strahlachse rotierende Flügel.
3. Vergleich der theoretischen Ergebnisse für den rotierenden Flügel mit Kanalmessungen.

I. Formulierung und Lösung des Problems durch die Prandtlsche Gleichung.

Eine ausgedehnte Literatur beschäftigt sich seit einer Reihe von Jahren mit der exakten oder näherungsweisen Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln der verschiedensten Umrißformen und Anstellwinkelvorgaben. Alle diese Rechnungen, die an die Prandtlsche Theorie der tragenden Linie[2]) anknüpfen, betrachteten stets den Tragflügel in homogener Strömung. Vielleicht ist es nicht ganz überflüssig, darauf hinzuweisen, daß die Prandtlsche Gleichung das Problem der Auftriebsverteilung auch für bestimmte Fälle inhomogener Anströmung, also Strömungen von örtlich verschiedener Geschwindigkeit und Richtung löst, und daß sich diese Fälle leicht auf solche in homogener Strömung zurückführen lassen.

Zitieren wir die für die senkrecht angeblasene, gerade tragende Linie gültige Prandtlsche Gleichung etwa in der nach H. Schmidt[3]) gebildeten Form

$$\left[\frac{\varphi(r,\vartheta)}{b}\right]_{r\to 1} - \frac{L(\vartheta)}{4\sin\vartheta}\cdot\left[\frac{\partial\frac{\varphi(r,\vartheta)}{b}}{\partial r}\right]_{r\to 1} = \frac{L(\vartheta)}{4}\left\{v(\vartheta)\cdot\alpha_g(\vartheta)\right\}, \quad \ldots\ldots (1)$$

in der $\varphi(r,\vartheta)$ eine mit der gesuchten Zirkulation $\Gamma(\vartheta)$ gemäß der Gleichung

$$\Gamma(\vartheta) = 2\left[\varphi(r,\vartheta)\right]_{r\to 1} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

verknüpfte, am angegebenen Ort [3] näher definierte Potentialfunktion bedeutet, so ist aus (1) zu erkennen, daß die Lösung $\frac{\varphi(r,\vartheta)}{b}$ und damit auch $\frac{\Gamma(\vartheta)}{b}$ nur von den Vorgaben $L(\vartheta)$ und $v(\vartheta)\cdot\alpha_g(\vartheta)$ abhängt.

Alle Flügel, für die die Vorgaben von Flügeltiefe $l(\vartheta)$, Spannweite b und Profilverlauf $\alpha_\infty'(\vartheta)$ denselben Quotienten $\frac{l(\vartheta)/b}{\alpha_\infty'(\vartheta)} = L(\vartheta)$ besitzen, haben demnach dieselbe Zirkulationsverteilung $\frac{\Gamma(\vartheta)}{b}$, sofern das Produkt aus örtlichem Anströmwinkel und örtlicher Strömungsgeschwindigkeit gleich ist.

Die Mannigfaltigkeit der Strömungen, die diese Bedingung erfüllen, ist allerdings durch verschiedene Forderungen, an die die Gültigkeit der Prandtlschen Gleichung gebunden ist, einzuschränken. Diese gilt bekanntlich streng genommen nur für Potentialströmungen, die normal auf eine gerade tragende Linie treffen und deren hinter der tragenden Linie abgehendes Wirbelband als eben angesehen werden darf. Es sind also nur solche inhomogenen Strömungen erlaubt, deren Geschwindigkeit und Richtung über die ganze Flügelspannweite wenig von einem mittleren Wert abweichen, und die vernachlässigbare Komponenten quer zur tragenden Linie besitzen. Natürlich darf sich die Strömungsverteilung innerhalb eines gewissen Bereichs über- und unterhalb der tragenden Linie nicht von den in der Höhe der tragenden Linie vorhandenen Werten unterscheiden. Auszuschließen sind insbesondere Strömungen, die Wirbel enthalten, so z. B. der Schraubenstrahl oder Strömungen mit Geschwindigkeitssprüngen, sofern nicht die vorhandenen Wirbel gegenüber der Potentialströmung von vernachlässigbarer Wirkung auf die tragende Linie sind.

II. Rückführung der Lösungsgrößen auf die Verhältnisse bei homogener Strömung.

Da nun also für einen Flügel von gegebenem Profil- und Tiefenverlauf die Zirkulationsverteilung $\frac{\Gamma}{b}[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]$ unter den genannten Einschränkungen nur von dem Produkt $v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)$ abhängt, so läßt sich ihre Berechnung sehr einfach auf den zumeist behandelten Fall homogener Strömung zurückführen. Man braucht ja nur eine homogene Ersatzströmung mit der Geschwindigkeit v_0 und dem zugehörigen Flügelanstellwinkel $\alpha_{g_0}(\eta)$ so zu wählen, daß

$$v_0\cdot\alpha_{g_0}(\eta) = v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

gilt, so wird sich in beiden Fällen dieselbe Zirkulationsverteilung einstellen.

Für die Zirkulation ergibt sich:

$$\frac{\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]}{b} = \frac{\Gamma[v_0\cdot\alpha_{g_0}(\eta)=\frac{v(\eta)}{v_0}\cdot\alpha_g(\eta)]}{b} = \frac{v_0}{2}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_{g_0}(\eta)=\frac{v(\eta)}{v_0}\cdot\alpha_g(\eta)} \quad \ldots (4)$$

$$\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]} = \frac{v_0}{v(\eta)}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_{g_0}=\frac{v(\eta)}{v_0}\cdot\alpha_g(\eta)} \quad \ldots\ldots (5)$$

[1]) Die im Text benützten Formelzeichen decken sich mit den in »Vorbemerkungen zu einer Reihe von Mitteilungen über Ergebnisse der Prandtlschen Tragflügeltheorie« von Harry Schmidt, Luftf.-Forschg., Bd. 15 (1938), Lfg. 5, S. 222 zusammengestellten Bezeichnungen.

[2]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie. I. Mitteilg. Gött. Nachr., math.-phys. Klasse (1918), S. 451.

[3]) H. Schmidt, Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie. Z. angew. Math. Mech., Bd. 17 (1937), S. 105.

Digitized by Google

Gelingt es also, nach einer der bekannten Methoden die Auftriebsverteilung

$$\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_{g_0}=\frac{v(\eta)}{v_0}\cdot\alpha_g(\eta)}$$

des Flügels in homogener Strömung beim Anstellwinkel $\alpha_{g_0}(\eta) = \frac{v(\eta)}{v_0}\cdot\alpha_g(\eta)$ zu bestimmen, so ist damit nach (4) auch die Zirkulationsverteilung und nach (5) die Auftriebsverteilung im inhomogenen Fall gefunden.

Während $\frac{\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]}{b}$ für die ganze Familie der durch $\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}$ und $v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)$ vorgegebenen Flügel eine invariante Funktion ist, gilt dies nun gemäß (5) nicht mehr für $\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}$ und alle daraus hergeleiteten Größen wie $\alpha_e(\eta)$, $\alpha_i(\eta)$ usw. (Vgl. im Gegensatz hierzu die entsprechenden Aussagen für homogene Strömung[4].) Analog läßt sich nun natürlich auch das Gesetz der linearen Überlagerbarkeit nur noch für die Zirkulation aussprechen, d. h. falls

$$v(\eta) = v_0 + \Delta v(\eta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\alpha_g(\eta) = \alpha_g^*(\eta) + \Delta\alpha(\eta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ist, wo $\Delta v(\eta)$ und $\Delta\alpha(\eta)$ im Sinne der S. 129 gemachten Einschränkungen kleine Größen sind, so gilt:

$$\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)] = \Gamma[v_0\cdot\alpha_g^*(\eta)] + \Gamma[v_0\cdot\Delta\alpha(\eta)] + \Gamma[\Delta v(\eta)\cdot\alpha_g^*(\eta)] + \Gamma[\Delta v(\eta)\cdot\Delta\alpha(\eta)], \quad \ldots \quad (8)$$

was leicht aus Gleichung (1) zu erkennen ist.

Im Gegensatz zum Falle homogener Strömung, wo die zur Anströmrichtung senkrechten Auftriebsdichten in allen Profilschnitten gleichgerichtet sind, schwanken nunmehr die Richtungen ihrer durch $\varrho v(\eta)\,\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha(\eta)]$ gegebenen Beträge nach Maßgabe der örtlichen Anblasrichtung. (Bild 1.)

Die Werte des Gesamtauftriebs A und des induzierten Widerstandes W_i sind also zweckmäßig auf eine nach äußeren Gesichtspunkten gewählte Richtung (z. B. die Kanalachse im Windkanal) zu beziehen. Es wird nun stets Komponenten des örtlichen Auftriebs geben, die einen positiven oder negativen Beitrag zum resultierenden induzierten Widerstand liefern und umgekehrt. Entsprechendes gilt natürlich auch für das Rollmoment L und das induzierte Wendemoment N_i. Bei Vernachlässigung der von 2. und höherer Ordnung kleinen Glieder ergeben sich für die genannten Luftkräfte und ihre Momente die Formeln:

$$\frac{A}{b^2} = \frac{\varrho}{4}\int_{-1}^{1} v^2(\eta)\cdot\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}\cdot d\eta, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{W_i}{b^2} = \frac{\varrho}{4}\int_{-1}^{1} v^2(\eta)\cdot\left\{c_{wi}(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\} d\eta - \frac{\varrho}{4}\int_{-1}^{1} v^2(\eta)\cdot\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}\cdot\Delta\alpha(\eta)\cdot d\eta, \quad (10)$$

$$\frac{L}{b^3} = -\frac{\varrho}{8}\int_{-1}^{1} v^2(\eta)\cdot\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}\cdot\eta\cdot d\eta, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

[4] A. Kupper und H. Schmidt, Allgemeine Gesichtspunkte für die Darstellung von Zahlenergebnissen der Theorie der tragenden Linie. Luftf.-Forschg., Bd. 15 (1938), Lfg. 5, S. 228.

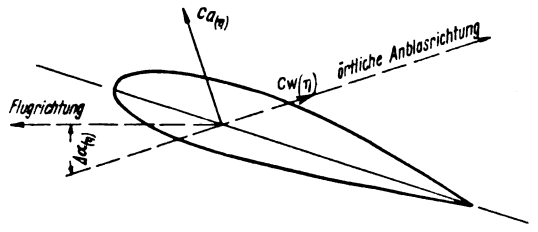


Bild 1. Lage der Luftkräfte in einem Flügelschnitt, dessen Anblasrichtung um $\Delta\alpha$ gegen die Flugrichtung geneigt ist.

$$\frac{Ni}{b^3} = \frac{\varrho}{8}\int_{-1}^{1} v^2(\eta)\cdot\left\{c_{wi}(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}\cdot\eta\cdot d\eta - \frac{\varrho}{8}\int_{-1}^{1} v^2(\eta)\cdot\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\}\cdot\Delta\alpha(\eta)\cdot\eta\cdot d\eta \quad (12)$$

III. Anwendungen.

1. Einfluß örtlicher Schwankungen der Strömungsrichtung und -geschwindigkeit auf Flügelmessungen im Windkanal.

Da sich im Windkanal niemals streng homogene Strömungen herstellen lassen, so sind die aus der Messung von Kräften und Momenten gewonnenen Beiwerte gegenüber den auf eine ideale Strömung bezogenen mit Fehlern behaftet und müssen unter Umständen korrigiert werden.

Für die Kanalströmung mit der erwarteten Horizontalgeschwindigkeit v_0 seien die Geschwindigkeitsschwankungen $\Delta v(\eta)$ und die Richtungsschwankungen $\Delta\alpha(\eta)$ gegen die Horizontale bekannt. Die geometrische Anstellwinkelverteilung des Flügels gegen die Horizontale ist durch $\alpha_g^*(\eta)$ gegeben.

Führt man

$$\left.\begin{aligned}\left\{c_a(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\} &= \frac{2}{v(\eta)}\cdot\frac{\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]}{b},\\ \left\{c_{wi}(\eta)\,\frac{l(\eta)}{b}\right\} &= \frac{2}{v(\eta)}\cdot\frac{\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]}{b}\\ &\quad\cdot\left(\alpha_g(\eta) - \frac{2}{v(\eta)\,L(\eta)}\cdot\frac{\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]}{b}\right)\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

in die Gleichungen (9) bis (12) ein und nimmt dann nach (8) die Aufspaltung der Zirkulation $\Gamma[v(\eta)\cdot\alpha_g(\eta)]$ in Teilzirkulationen vor, so erhält man unter Benutzung der Identitäten

$$\left.\begin{aligned}\Gamma[v_0\cdot\alpha_g^*(\eta)] &= v_0\cdot\Gamma[v=1,\alpha_g^*(\eta)],\\ \Gamma[v_0\cdot\Delta\alpha(\eta)] &= v_0\cdot\Gamma[v=1,\Delta\alpha(\eta)],\\ \Gamma[\Delta v(\eta)\cdot\alpha_g^*(\eta)] &= v_0\cdot\Gamma\left[v=\frac{\Delta v(\eta)}{v_0},\ \alpha_g^*(\eta)\right]\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

nach einfachen Umrechnungen zwischen den gemessenen und den durch * bezeichneten korrigierten Beiwerten der Luftkräfte und ihrer Momente die Beziehungen:

$$\bar{c}_a = \bar{c}_a^* + A\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma[v=1,\,\Delta\alpha(\eta)]}{b}\,d\eta + \int_{-1}^{1}\frac{\Gamma}{b}\left[v=\frac{\Delta v(\eta)}{v_0},\ \alpha_g^*(\eta)\right]d\eta + \int_{-1}^{1}\frac{\Delta v(\eta)}{v_0}\cdot\frac{\Gamma[v=1,\,\alpha_g^*(\eta)]}{b}\,d\eta\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$c_{wi} = \overline{c_{wi}}^* + A\left\{\int_{-1}^{1}\left[\alpha_g^*(\eta) - \frac{4}{L(\eta)}\cdot\frac{\Gamma[v=1,\,\alpha_g^*(\eta)]}{b}\right]\times\left[\frac{\Gamma[v=1,\,\Delta\alpha(\eta)]}{b} + \frac{\Gamma}{b}\left[v=\frac{\Delta v(\eta)}{v_0},\ \alpha_g^*(\eta)\right]\right]d\eta + \int_{-1}^{1}\frac{\Delta v(\eta)}{v_0}\cdot\alpha_g^*(\eta)\cdot\frac{\Gamma[v=1,\,\alpha_g^*(\eta)]}{b}\cdot d\eta\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

$$c_l = c_l^* - A\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma[v=1,\,\Delta\alpha(\eta)]}{b}\cdot\eta\cdot d\eta + \int_{-1}^{1}\frac{\Gamma}{b}\left[v=\frac{\Delta v(\eta)}{v_0},\ \alpha_g^*(\eta)\right]\cdot\eta\cdot d\eta + \int_{-1}^{1}\frac{\Delta v(\eta)}{v_0}\cdot\frac{\Gamma[v=1,\,\alpha_g^*(\eta)]}{b}\,\eta\cdot d\eta\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Digitized by Google

$$c_{y_i} = c_{y_i}^* + \Lambda \left\{ \int_{-1}^{1} \left[\alpha_g^* (\eta) - \frac{4}{L(\eta)} \cdot \frac{\Gamma[v=1,\ \alpha_g^*(\eta)]}{b} \right] \times \left[\frac{\Gamma[v=1,\ \Delta\alpha(\eta)]}{b} + \frac{\Gamma}{b}\left| v = \frac{\Delta v(\eta)}{v_0},\ \alpha_g^*(\eta) \right| \right] \cdot \eta \cdot d\eta + \int_{-1}^{1} \frac{\Delta v(\eta)}{v_0} \cdot \alpha_g^*(\eta) \cdot \frac{\Gamma[v=1,\ \alpha_g^*(\eta)]}{b} \cdot \eta \cdot \eta d \quad . \quad (18)$$

Beispiel:

Bei einer durch Bild 2 gegebenen Verteilung der Strömungsrichtung und -geschwindigkeit war im großen Kanal der DVL an einem elliptischen Flügel vom Streckungsverhältnis $\Lambda = 6$ durch Wägung der Verlauf der Beiwerte von Auftrieb, induziertem Widerstand, Roll- und induziertem Wendemoment in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α und vom Schränkungswinkel δ_0 der gegeneinander um die Querachse drehbaren Flügelhälften bestimmt worden.

Da der Flügel eine bauliche Verwindung $\delta_1(\eta)$ gemäß Bild 3 (gezählt gegen eine willkürliche $\alpha = 0^0$-Richtung) besaß, so ließ sich $\alpha_g^*(\eta)$ stets in der Form

$$\alpha_g^*(\eta) = \alpha + \delta_0(\eta) + \delta_1(\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

mit

$$\delta_0(\eta) = \begin{cases} 0 \text{ für } -1 \leq \eta \leq 0 \\ \delta_0 \text{ für } \quad 0 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19b)$$

darstellen.

Der Verlauf der von α bzw. δ_0 linear abhängigen Größen des Auftriebs und des Rollmomentes läßt sich alsdann vollständig charakterisieren durch die Werte

$$\frac{\partial \bar{c}_a^*}{\partial \alpha}, \frac{\partial \bar{c}_a^*}{\partial \delta_0} \text{ und } [\bar{c}_a^*]_{\substack{\alpha=0 \\ \delta_0=0}} \text{ bzw. } \frac{\partial c_l^*}{\partial \delta_0}, \frac{\partial c_l^*}{\partial \alpha} = [c_l^*]_{\substack{\alpha=0 \\ \delta_0=0}} = 0,$$

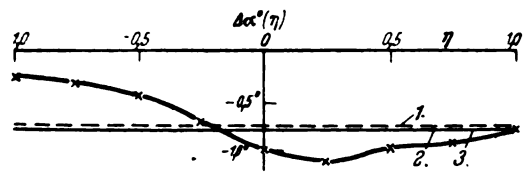


Bild 2a. Verteilung der Strahlrichtung gegen die Horizontale längs der Flügelspannweite. Bestimmung der mittleren Strahlrichtung nach 3 verschiedenen Mittelbildungen. (Vgl. Zahlentafel 2a.)

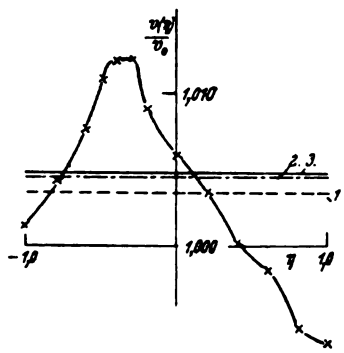


Bild 2b. Verteilung der Strahlgeschwindigkeit längs der Flügelspannweite. Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit nach 3 verschiedenen Mittelbildungen. (Vgl. Zahlentafel 2b.)

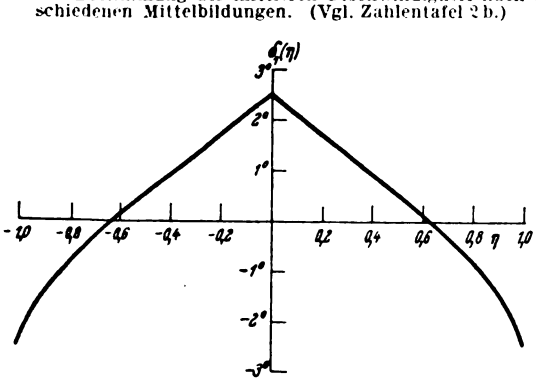


Bild 3. Vorgegebene Flügelverwindung.

und es besteht zwischen diesen und den direkt aus den Messungen erhaltenen Größen

$$\frac{\partial \bar{c}_a}{\partial \alpha}, \frac{\partial \bar{c}_a}{\partial \delta_0}, [\bar{c}_a]_{\substack{\alpha=0 \\ \delta_0=0}} \text{ sowie } \frac{\partial c_l}{\partial \alpha}, \frac{\partial c_l}{\partial \delta_0}, [c_l]_{\substack{\alpha=0 \\ \delta_0=0}}$$

ein nach Einführung von (19a) und (19b) in (15) und (17) leicht ersichtlicher Zusammenhang.

Zum Zwecke der Rechnung wurden die Verteilungen $\frac{\Delta v(\eta)}{v_0}$ und $\Delta\alpha(\eta)$ aus Bild 2 durch gebrochene Streckenzüge angenähert. Unter Ausnützung der Formel (4) konnten dann sämtliche Teilzirkulationen der Formeln (15) und (17) aus früheren Rechnungen des Verfassers[5]) bestimmt werden. Die so erhaltenen Korrekturen der direkten Meßwerte sind in Zahlentafel 1 enthalten. Sie sind, wie man sieht, zumeist dicht an oder sogar noch unter der Grenze der Meßgenauigkeit. Aus diesem Grunde wurde auf die Ausdehnung der numerischen Rechnung auf die Korrektur des induzierten Widerstandes bzw. Wendemoments verzichtet. Die zum Teil schlechte Übereinstimmung der korrigierten Meßwerte mit der Theorie könnte daher rühren, daß die der Korrektur zugrunde gelegten Verteilungen von $\frac{\Delta v(\eta)}{v_0}$ und $\Delta\alpha(\eta)$ nach Bild 2 vielleicht den Verhältnissen während der Messung nicht genau entsprachen. Lehrreich ist der in Bild 2a und 2b durchgeführte Versuch einer Mittelbildung für die Geschwindigkeitsverteilung $v(\eta)$ bzw. die Richtungsschwankung $\Delta\alpha(\eta)$. Während die Mittelbildung 2, die die Tiefenverteilung des Flügels mitberücksichtigt, sehr gut mit dem auf Grund der Auftriebsgleichsetzung erhaltenen strengen aerodynamischen Mittel übereinstimmt und statt

[5]) K. Bausch, Zahlenergebnisse für ellipt. Flügel mit stückweise konstanter und stückweise linearer Anstellwinkelverteilung. Luftf.-Forschg., Bd. 15 (1938), Lfg. 5.

Zahlentafel 1. Vergleich der gemessenen und der auf homogene Anströmbedingungen korrigierten Flügelkennwerte.

Benennung	Theorie hom. Ström.	Meßwerte unkorrig.	Meßwerte korrig.	Meßfehler
$\frac{d\bar{c}_a}{d\alpha}$	3,87	3,91	3,87	+ 0,02
$\frac{d\bar{c}_a}{d\delta_0}$	1,93	1,862	1,857	± 0,02
$[\bar{c}_a]_{\substack{\alpha=0 \\ \delta_0=0}}$	0,05	0,082	0,03	± 0,005
$\frac{dc_l}{d\alpha}$	0	— 0,016	0,0136	± 0,003
$\frac{dc_l}{d\delta_0}$	— 0,341	— 0,332	— 0,335	± 0,003
$[c_l]_{\substack{\alpha=0 \\ \delta_0=0}}$	0	— 0,0024	— 0,0059	± 0,0005

Zahlentafel 2a. Mittelbildungen der Richtungsschwankung.

Mittelbildung	Formel	$\bar{\varepsilon}$
1.	$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Delta\alpha(y)\, dy$	0,740
2.	$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{F} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Delta\alpha(y)\, l(y)\, dy$	0,776
3.	$\bar{\varepsilon} \cdot \frac{d\bar{c}_a}{d\alpha} = \frac{1}{F} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{c_a(y)\, l(y)\}_{[\varepsilon(y)]}\, dy$	0,777

Digitized by Google

Zahlentafel 2b. Mittelbildungen der Geschwindigkeitsverteilung.

Mittelbildung	Formel	$\bar{v}$ / v_0
1.	$\bar{v} = \frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v(y)\cdot dy$	1,0034
2.	$\bar{v}^2 = \frac{1}{F}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v^2(y)\, l(y)\, dy$	1,0044
3.	$\bar{v}^2 \frac{d\bar{c}_a}{d\alpha}\cdot F = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v^2(y)\cdot \frac{\partial}{\partial\alpha}\{c_a(y)\, l(y)\}_{[v(y)]}\cdot dy$	1,0046

diesem genommen werden darf, sind die Abweichungen der einfachen algebraischen Mittelwerte nach den Formeln (1) unzulässig groß.

2. Der im parallelen gleichförmigen Luftstrom mit konstanter Geschwindigkeit um die Strahlachse rotierende Flügel.

Der vorgelegte Flügel rotiere mit einer so geringen Winkelgeschwindigkeit ω um die horizontale Achse der Grundströmung, daß

$$\omega \cdot \frac{b}{2} \ll v_0;$$

dann kann der Spiralencharakter der vom Flügel nach hinten abgehenden Wirbelzöpfe vernachlässigt und das Problem als ein Sonderfall der im Abschnitt 1 behandelten örtlich veränderlichen Strömungen behandelt werden. Im Profilschnitt η tritt als Folge der im positiven Sinne wirkenden Drehgeschwindigkeit ω zur Geschwindigkeit v_0 der Grundströmung eine zu ihr senkrechte Komponente $\omega \frac{b}{2}\cdot\eta$ hinzu, die der Drehung entgegenwirkt (Rolldämpfung). Dadurch erfährt also die Grundströmung eine lineare Verwindung und der Anstellwinkel $\alpha_g^*(\eta)$ vermehrt sich um den Betrag

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha(\eta) &= \frac{\omega b}{2 v_0}\cdot\eta, \\ \text{während}\qquad v(\eta) &= \sqrt{v_0^2 + \omega^2\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot\eta^2} \approx v_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24)$$

angenähert konstant bleibt. Deshalb gilt auch im Gebiet gesunder Strömung

$$\left.\begin{aligned} \left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)+\Delta\alpha(\eta)} &= \left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}, \\ \left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)+\Delta\alpha(\eta)} &= \left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25)$$

durch welche Symbolik einfach das Gesetz der linearen Superponierbarkeit zum Ausdruck gebracht werden soll.

Mit Hilfe von (24) und (25) folgen nun aus (8) bis (11) nach Einführung der üblichen Beiwerte und unter Berücksichtigung, daß aus Symmetriegründen

$$\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} d\eta = \int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} \times \eta^2\cdot d\eta = \int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\cdot\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta = 0$$

ist, die Beziehungen:

$$\frac{\bar{c}_a}{A} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} d\eta = \left\{\frac{\bar{c}_a}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}, \quad \ldots \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{c_{Wi}}}{A} &= \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{\frac{c_{Wi}}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot d\eta \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot d\eta \\ &+ \frac{\omega b}{2 v_0}\left[\left\{\frac{c_l}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\right]. \quad \ldots \quad (27) \end{aligned}$$

$$\frac{c_L}{A} = \left\{\frac{c_l}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{\frac{c_l}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}, \quad \ldots \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{Ni}}{A} &= \left\{\frac{c_{Ni}}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} \\ &\times\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} \\ &\times\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta \\ &- \frac{\omega b}{2 v_0}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\eta^2\cdot d\eta. \quad \ldots \quad (29) \end{aligned}$$

Eine kurze Betrachtung der Formeln (26) bis (29) lehrt, daß der Flügelauftrieb durch die Rotation nicht beeinflußt wird, während zum ursprünglichen Rollmoment ein rolldämpfendes Moment hinzutritt. In den Formeln für die Beiwerte des induzierten Widerstandes und Wendemomentes haben die einzelnen Glieder eine einfache, anschauliche Bedeutung. Jeweils das erste Glied in (27) bzw. (29) stellt nämlich die am ruhenden Flügel beim Anstellwinkel $\alpha_g^*(\eta)$ zu erwartenden Beiwerte dar; die folgenden Glieder mit Ausnahme je des letzten sind Zusätze zu Widerstand bzw. Wendemoment, wie sie durch Verwindung des Flügels um $\Delta\alpha(\eta)$ auftreten würden. Je das letzte Glied schließlich gibt den Anteil, der infolge Verwindung der Strömung um $\Delta\alpha(\eta)$ von den Horizontalkomponenten des örtlichen Auftriebs beigetragen wird. Bild 4 soll die letztgenannten Beiträge noch besonders veranschaulichen. Es sind in symmetrischen Flügelpunkten die um denselben Winkel $\Delta\alpha(\eta)$ gegen die Vertikale nach vorn bzw. nach hinten geneigten örtlichen Auftriebe eingezeichnet, und zwar zerlegt in ihre von $\alpha_g^*(\eta)$ bzw. $\Delta\alpha(\eta)$ herrührenden Anteile. Da die letzteren antisymmetrisch sind, haben sie gleiche und gleichgerichtete Horizontalkomponenten, liefern also stets einen Vortrieb, aber nie einen Beitrag zum Wendemoment.

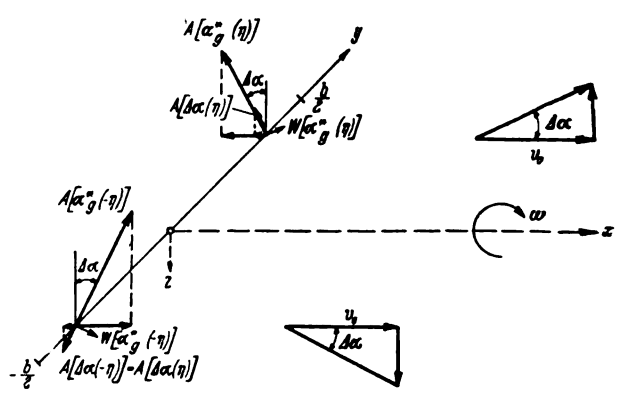


Bild 4. Luftkräfte in symmetrisch gelegenen Punkten des rotierenden Flügels.

Digitized by Google

Wäre $\alpha_g^*(\eta)$ eine symmetrische Anstellwinkelverteilung, so wären die Horizontalkomponenten der von $\alpha_g^*(\eta)$ herrührenden örtlichen Auftriebe antisymmetrisch, würden also nur zum Wendemoment, nicht aber zum Widerstand beitragen. Offenbar ist symmetrischer Anstellwinkelverlauf aber nur möglich, wenn der Flügel durch äußere Kräfte in Rotation versetzt wird. Wir werden nun auch analytisch diesen Fall von dem infolge von Luftkräften rotierenden Flügel unterscheiden.

Fall 1. Flügelrotation durch Luftkräfte hervorgerufen (z. B. durch Querruderausschlag). $\alpha_g^*(\eta)$ ist eine unsymmetrische Anstellwinkelverteilung. Infolge des von ihr erzeugten Rollmomentesgerät der Flügel in Rotation, erfährt dabei eine Rolldämpfung und erreicht eine stationäre Drehzahl ω, die durch die Bedingung

$$\left\{c_L\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{c_L\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} = 0 \quad \ldots\ldots (30)$$

charakterisiert ist.

Damit in Übereinstimmung ergibt sich nun natürlich im stationären Endzustand nach (28)

$$c_L = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

während aus (27)

$$\frac{\overline{c_{Wi}}}{A} = \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot d\eta + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot d\eta \quad \ldots\ldots (32)$$

folgt. Dabei bedeutet der Fortfall des letzten Gliedes aus (27) in (32), daß im behandelten Falle die Horizontalkomponenten des örtlichen Auftriebs nichts zum Widerstand beitragen, der sich also einfach so berechnet, als befände sich der Flügel mit dem Anstellwinkel $\alpha_g^*(\eta) + \Delta\alpha(\eta)$ in einer homogenen Parallelströmung. Gesamtauftrieb und induziertes Wendemoment sind aus den unveränderten Formeln (26) und (29) zu bestimmen.

Fall 2. Flügelrotation durch mechanische Kräfte hervorgerufen. $\alpha_g^*(\eta)$ ist jetzt eine symmetrische Funktion, demnach

$$\left\{c_L\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} = \left\{c_{Ni}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} = 0$$

und aus Symmetriegründen auch

$$\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} d\eta = \int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot d\eta = 0.$$

Damit folgt aus (27)

$$\frac{\overline{c_{Wi}}}{A} = \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} + \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} + \frac{\omega b}{2v_0}\cdot\left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}, \quad (33)$$

aus (28)

$$\frac{c_L}{A} = \left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}, \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

welcher Ausdruck das Dämpfungsmoment darstellt, das durch den mechanischen Antrieb überwunden werden muß, und schließlich aus (29)

$$\frac{c_{Ni}}{A} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}\cdot\left\{\alpha_i(\eta)\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta - \frac{\omega b}{2v_0}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{c_a(\eta)\frac{l(\eta)}{b}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)}\cdot\eta^2\cdot d\eta, \quad \ldots\ldots (35)$$

während $\frac{\overline{c}_a}{A}$ unverändert aus (26) zu entnehmen ist.

Die Formeln (33) bzw. (35) bestätigen, daß beim mechanisch rotierten Flügel die vom geometrischen Anstellwinkel $\alpha_g^*(\eta)$ herrührenden örtlichen Auftriebe nur zum Wendemoment und die von $\Delta\alpha(\eta)$ herrührenden nur zum Widerstand (das stets negative Glied $\frac{\omega b}{2v_0}\left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)}$) beitragen. Die beiden ersten Glieder von (33) beweisen die Tatsache, daß in homogener Strömung der induzierte Widerstand eines Flügels, dessen Anstellwinkelverteilung sich aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion der Spannweite zusammensetzt, gleich der Summe der zwei Einzelwiderstände ist. In (35) ist unschwer zu erkennen, daß die beiden ersten Glieder dem dritten stets entgegenwirken.

Beispiel:

Es sei ein elliptischer Flügel, d. h. ein Flügel, dessen Tiefen- und Profilverlauf der Bedingung

$$\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)} = \frac{4}{k}\sqrt{1-\eta^2} \quad (k = \text{konst.})$$

genügt, vorgelegt. Dann lassen sich mit Hilfe von a. a. O.[6][7] für elliptische Flügel gefundenen Relationen (künftig zitiert unter ihrer dortigen Numerierung mit vorangestelltem [6] bzw. [7]), die für die Fälle 1 und 2 erhaltenen allgemeinen Formeln durch einfache Umformungen in die folgenden Ausdrücke überführen.

Fall 1: Wegen

$$\left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)=\frac{\omega b}{2v_0}\eta} = -\frac{\pi}{4(k+2)}\cdot\frac{\omega b}{2v_0} \quad \text{(vgl. [7] Zahlentafel 1)}$$

und

$$\left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} = -\frac{k}{2(k+2)}\int_{-1}^{1}\alpha_g^*(\eta)\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta \quad \text{(vgl. [6], 5)}$$

bestimmt sich die stationäre, durch Querruderausschlag erreichte Rollgeschwindigkeit zu

$$\omega = -\frac{4k}{\pi}\cdot\frac{v_0}{b}\int_{-1}^{1}\alpha_g^*(\eta)\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}\cdot\eta\cdot d\eta.$$

Es folgt weiter

aus (26): $\frac{\overline{c}_a}{A} = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1}\int_{-1}^{1}\alpha_g^*(\eta)\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}\cdot d\eta$

aus (31): $c_L = 0$

aus (32): $\frac{\overline{c_{Wi}}}{A} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\overline{c}_a}{A}\right)^2 + \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\substack{\overline{c}_a=0\\ \omega=0}} - \frac{8}{\pi}\left\{\frac{c_L}{A}\right\}^2_{\alpha_g^*(\eta)}$

aus (29): $\frac{c_{Ni}}{A} = \left\{\frac{c_{Ni}}{A}\right\}_{\substack{\overline{c}_a=0\\ \omega=0}} - \frac{3}{\pi}\frac{\overline{c}_a}{A}\left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} - \frac{2k}{\pi}\left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{\alpha_g^*(\eta)} \times\int_{-1}^{1}(\alpha_r^*(\eta)-\alpha_i^*(\eta))\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}\cdot\eta^2\cdot d\eta$

(vgl. [6], 4) (36) a bis d

Fall 2: Für die jetzt symmetrische Anstellwinkelverteilung $\alpha_g^*(\eta)$ des mit der Geschwindigkeit ω mechanisch gedrehten Flügels berechnet sich $\frac{\overline{c}_a}{A}$ formal nach (36a), während aus (33) der Widerstandsbeiwert

$$\frac{\overline{c_{Wi}}}{A} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\overline{c}_a}{A}\right)^2 + \left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\substack{\overline{c}_a=0\\ \omega=0}} - \frac{k}{2}\left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{\Delta\alpha(\eta)} \quad (37)$$

[6] K. Bausch, Aerodynamische Beiwerte des elliptischen Flügels. Luftf.-Forschg., Bd. 15 (1938), Lfg. 5, S. 243.

[7] H. Schmidt, Theorie der Auftriebsverteilung beliebig verwundener elliptischer Flügel. Luftf.-Forschg., Bd. 15 (1938), Lfg. 5, S. 234.

Digitized by Google

mit $\left\{\frac{\overline{c_{Wi}}}{A}\right\}_{1a(\eta)} = \frac{\pi}{2(k+2)^2}\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)^2$, (37a) (vgl. [7] Zahlentaf. 1)

aus (34) der Beiwert des Rolldämpfungsmoments

$$\frac{c_l}{A} = \left\{\frac{c_L}{A}\right\}_{1a(\eta)} = -\frac{\omega b\,\pi}{8\,v_0\,(k+2)} \quad \text{(vgl. [7] Zahlentaf. 1)} \quad \ldots\ldots (38)$$

und aus (35) der Beiwert des induzierten Wendemoments

$$\frac{c_{Ni}}{A} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{k+2}\cdot\frac{\omega b}{2v_0}\int_{-1}^{1}(\alpha^*_e(\eta)-\alpha^*_i(\eta))\,\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}\cdot\eta^2\cdot d\eta \quad \ldots\ldots (39)$$

folgen.

In beiden Fällen vermindert sich der durch die zwei ersten Glieder von (36b) bzw. (37) dargestellte induzierte Widerstand des festgehaltenen Flügels. Die Verminderung rührt im ersten Fall allein von der scheinbaren Verwindung des Flügels her, während im zweiten Fall auch die infolge Verwindung der Strömung vorhandenen Horizontalkomponenten des Auftriebs in der schon früher besprochenen Weise dazu beitragen. Die Rollwendemomente sind bei positiver Rollgeschwindigkeit ω im allgemeinen negativ. Während im zweiten Falle ein Wendemoment überhaupt erst durch das Rollen entsteht, tritt im ersten Fall zu den beiden Gliedern des festgehaltenen Flügels das dritte Glied hinzu. In beiden Fällen können die Zusätze ihr Vorzeichen ändern, da

$$\int_{-1}^{1}(\alpha^*_e(\eta)-\alpha^*_i(\eta))\,\frac{l(\eta)/b}{\alpha'_\infty(\eta)}\cdot\eta^2\cdot d\eta$$

für Flügel kleiner Streckung negativ werden kann. Um dies zu erläutern, möge als Spezialfall des Falles 2 der unverwundene elliptische Flügel herangezogen werden.

Setzt man in (37) bis (39) $\alpha^*_i(\eta) = \alpha$, so bleiben die einfachen Endformeln:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\bar{c}_a}{A} &= \frac{\pi}{k+1}\cdot\alpha\\
\frac{c_L}{A} &= -\frac{\pi}{4(k+2)}\cdot\frac{\omega b}{2v_0}\\
\frac{\overline{c_{Wi}}}{A} &= \frac{\pi}{(k+1)^2}\cdot\alpha^2 - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{k}{(k+2)^2}\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)^2\\
\frac{c_{Ni}}{A} &= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{k-1}{(k+1)(k+2)}\cdot\alpha\cdot\frac{\omega b}{2v_0}\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{k-1}{k+2}\cdot\bar{c}_a\cdot\frac{\omega b}{2v_0}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (40)$$

Man erkennt nun, daß sich das negative Vorzeichen des induzierten Wendemomentes für $k < 1$, d. h. $A < \frac{c'_{a\infty}}{\pi}$ umkehrt, vorausgesetzt natürlich, daß für Flügel so kleiner Streckung die Traglinientheorie noch gültig wäre.

3. Vergleich des rotierenden Flügels mit Kanalmessungen.

Zur Prüfung der Ergebnisse der Rechnung standen dem Verfasser noch unveröffentlichte Messungen von Schönemann DVL zur Verfügung, bei denen an einem ruhenden Flügel im rotierenden Luftstrahl durch Wägung Auftrieb, Widerstand, Roll- und Wendemoment gemessen worden waren. Die Relativbewegung zwischen Flügel und Strömung entspricht dem Fall 2 der vorausgegangenen Ausführungen. Die Drehgeschwindigkeit des Luftstrahles konnte variiert werden und die damit errechneten Werte von $\frac{\omega b}{2v_0}$ lagen in dem Bereich $-0{,}187 < \frac{\omega b}{2v_0} < 0.224$, wobei das positive Vorzeichen einer Rechtsdrehung des Flügels relativ zu der nichtrotierend gedachten Strömung entspricht.

Da der Umriß des untersuchten Flügels sich nicht wesentlich von dem elliptischen Umriß gleicher Fläche und Spannweite unterschied, können für die Rechnung die

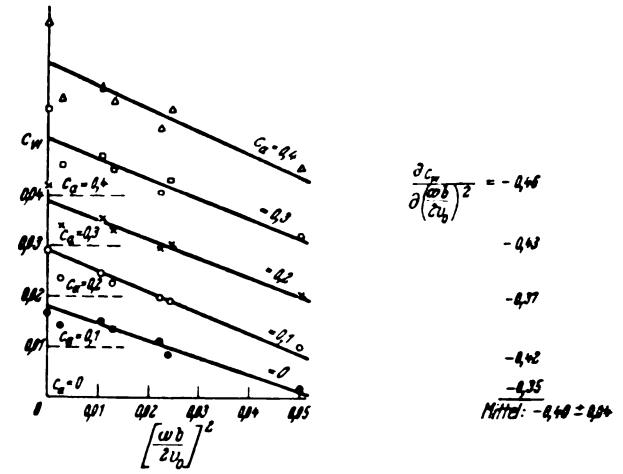


Bild 5. Gemessene Widerstandsbeiwerte für den Flügel im rotierenden Strahl, aufgetragen über $\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)^2$ bei festem $\bar{c}_a$.

Formeln (40) herangezogen werden. Die hieraus entnommenen Differentialquotienten

$$\frac{\partial c_l}{\partial\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)} = -\frac{\pi A}{4(k+2)},$$

$$\frac{\partial\left(c_{Ni}\Big/\frac{\omega b}{2v_0}\right)}{\partial\,\bar{c}_a} = -\frac{k-1}{4(k+2)},$$

$$\frac{\partial\,\overline{c_{Wi}}}{\partial\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)^2} = -\frac{\pi A}{4}\cdot\frac{k}{(k+2)^2},$$

gebildet für $k = 3{,}08$ und $A = 5$, werden mit den entsprechenden, aus den Messungen folgenden Werten verglichen (Zahlentafel 2).

Zahlentafel 3. Vergleich der Meß- bzw. Rechenergebnisse für den Flügel im rotierenden Strahl.

	$\frac{\partial c_l}{\partial\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)}$	$\frac{1}{\frac{\omega b}{2v_0}}\cdot\frac{\partial c_N}{\partial\,\bar{c}_a}$	$\frac{\partial\,\overline{c_{Wi}}}{\partial\left[\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)^2\right]}$				
			$\bar{c}_a = 0$	$\bar{c}_a = 0{,}1$	$\bar{c}_a = 0{,}2$	$\bar{c}_a = 0{,}3$	$\bar{c}_a = 0.4$ Mittel
Meßergebn.	$-0{,}75$	$-0{,}098$	$-0{,}35$	$-0{,}42$	$-0{,}37$	$-0{,}43$	$-0{,}46$ $-0{,}40$ $\pm 0{,}04$
Rechenergebn.	$-0{,}74$	$-0{,}102$ (induziert. Wendemoment)	$-0{,}47$ (induzierter Widerstand)				

Dabei ist die Übereinstimmung für Roll- und Wendemoment sehr gut, für den Widerstand, Bild 5, einigermaßen erfüllt. Das letztere Ergebnis ist nicht verwunderlich, da in Formel (40) nur der induzierte Widerstandsanteil enthalten ist, während ja in der Messung noch der mit $\frac{\omega b}{2v_0}$ wachsende Profilwiderstand hinzukommt, der demnach der widerstandsverringernden Tendenz von $\frac{\partial\,\overline{c_{Wi}}}{\partial\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)^2}$ entgegenwirkt. Auf das Wendemoment hat der Profilwiderstand einen sehr viel geringeren Einfluß als auf den Gesamtwiderstand, da seine Verteilung in beiden Flügelhälften auch beim drehenden Flügel nahezu gleich ist. Demgemäß wird das Wendemoment durch die Formel (40) nahezu richtig wiedergegeben, und in der Tat zeigten die Messungen die zu erwartende Linearität von c_N in $\frac{\omega b}{2v_0}$ und in $\bar{c}_a$ mit sehr geringer Streuung und guter zahlenmäßiger Übereinstimmung mit dem berechneten induzierten Wendemoment.

Digitized by Google

Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung für den zweidimensionalen Tragflügel bei beliebigen periodischen Bewegungen.

Von Karl Jaeckel, Breslau.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Aufstellung der Grundbeziehungen und deren zweckmäßige Umformung.
III. Ansatz einer Fourierreihe und Darstellung der Zirkulationsverteilung.
IV. Bestimmung der Zirkulationskoeffizienten als Funktionen der gegebenen Koeffizienten.
V. Vereinfachung der Ergebnisse durch Berechnung von Funktionalbeziehungen.
VI. Lösung einer auftretenden Integro-Differentialgleichung und Herstellung der Endformeln, die die Küssnerschen Ergebnisse enthalten.
VII. Bemerkungen über spezielle Profilformen und die Formeln für die Kräfte auf das Profil.
VIII. Zusammenfassung.
IX. Schrifttum.

I. Einleitung.

Das hier vorliegende Problem ist schon früher von Birnbaum [1] in Angriff genommen worden, aber erst Küssner [2] ist es gelungen, für harmonische Bewegungen des Flügels die Lösung anzugeben. Der Weg zu diesen Ergebnissen führte über geeignete Reihenentwicklungen des Integranden scheint aber den kurzen Angaben nach zu urteilen nicht so einfach gewesen zu sein, daß eine Wiedergabe der Ableitung in Frage gekommen wäre. Die auf diese Weise einem Außenstehenden nicht zugängliche Begründung der angegebenen Ergebnisse wird im folgenden in einer hinreichend einfachen Darstellung unabhängig entwickelt und verallgemeinert, so daß die vorliegenden Ausführungen als Ergänzung der Küssnerschen Arbeiten von Wert sein dürften[1]).

II. Aufstellung der Grundbeziehungen und deren zweckmäßige Umformung.

Wir denken uns ein dünnes Profil, mit dem ein Koordinatensystem verbunden ist. Bild 1. Über der Profilsehne von o bis l liege eine Zirkulationsverteilung $\gamma(\xi, \tau)$. Infolge der Abhängigkeit von der Zeit τ lösen sich an jeder Stelle x des Profils freie Wirbel ab, die mit der Strömungsgeschwindigkeit v nach hinten abschwimmen. Diese freien Wirbel induzieren nun ebenso wie die gebundenen Wirbel Geschwindigkeiten, die für die Bestimmung der Zirkulationsverteilung von grundsätzlicher Bedeutung sind. Die insgesamt induzierten Vertikalgeschwindigkeiten am Profil müssen gleich den hier vorhandenen Bewegungsgeschwindigkeiten sein, da das Profil für die Flüssigkeit undurchdringlich ist. Die an einer Stelle z des Profils induzierte Geschwindigkeit wird erzeugt erstens von den auf der Profillinie liegenden gebundenen Wirbeln, zweitens von den ebenfalls im Bereiche des Profils gerade vorhandenen freien Wirbeln und drittens von den freien Wirbeln, die sich hinter dem Profil in einer Wirbelschleppe angeordnet haben, die wir der Einfachheit halber auf die verlängerte x-Achse projiziert denken können, auf der sie eine einfache Wirbelbelegung bilden soll. Weiterhin sei das vorliegende Problem im Küssnerschen Sinne linearisiert, so daß die folgende Darstellung gültig wird, bei der wir auch die Profilwirbelbelegung auf der x-Achse annehmen.

[1]) Wie mir jetzt durch Herrn Dr. Küssner bekannt wird, hat Herr Dr. Schwarz dieses Problem in ähnlich einfacher Weise dargestellt, wobei er auf die hier benutzten Reihenentwicklungen verzichten konnte.

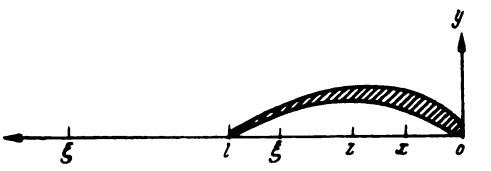


Bild 1.

Die Stärke der gebundenen Wirbel an der Stelle ξ zur Zeit τ bezeichnen wir mit $\gamma(\xi, \tau)$. Die freien Wirbel, die sich an derselben Stelle ξ befinden, rühren von der Zirkulationsänderung sämtlicher davorliegenden gebundenen Wirbel her, so daß wir unter Heranziehung des Satzes von der Erhaltung der Gesamtwirbelstärke ihre Intensität angeben können, sie wird

$$-\frac{1}{v}\int_0^{\xi}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\left(x, \tau-\frac{\xi-x}{v}\right)dx.$$

An einer außerhalb des Profils liegenden Stelle ζ der Wirbelschleppe haben wir nach entsprechenden Überlegungen die folgende Wirbelstärke vorliegen:

$$-\frac{1}{v}\int_0^{l}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\left(x, \tau-\frac{\zeta-x}{v}\right)dx.$$

Demnach läßt sich die Aufwärtsgeschwindigkeit $w(z)$ an einer Stelle z der Profillinie wie folgt berechnen [2]:

$$2\pi\cdot w(z)=\int_0^{l}\frac{\gamma(\xi,\tau)-\frac{1}{v}\int_0^{\xi}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\left(x,\tau-\frac{\xi-x}{v}\right)dx}{\xi-z}\,d\xi+\int_l^{\infty}\frac{-\frac{1}{v}\int_0^{l}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\left(x,\tau-\frac{\zeta-x}{v}\right)dx}{\zeta-z}\,d\zeta. \quad (1)$$

Nach der identischen Umformung

$$\tau-\frac{\zeta-x}{v}=\tau-\frac{\zeta-l}{v}-\frac{l-x}{v}$$

können wir den Ausdruck $w(z)$ mit Hilfe der sogleich zu definierenden Funktion $g(\xi, \tau)$ zweckmäßig vereinfachen.

Wir setzen

$$\int_0^{\xi}\gamma\left(x, \tau-\frac{\xi-x}{v}\right)dx=g(\xi,\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und gewinnen daraus

$$\gamma(\xi,\tau)-\frac{1}{v}\int_0^{\xi}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\left(x,\tau-\frac{\xi-x}{v}\right)dx=\frac{\partial g}{\partial\xi},$$

$$\int_0^{\xi}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\left(x,\tau-\frac{\xi-x}{v}\right)dx=\frac{\partial g}{\partial\tau},$$

Digitized by Google

wobei wir bemerken, daß der Zusammenhang der hier eingeführten Funktion $g(\xi, \tau)$ mit der gesuchten Funktion $\gamma(\xi, \tau)$ durch die Gleichung

$$\gamma(\xi, \tau) = \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \tau) + \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial \tau}(\xi, \tau) \quad \ldots\ldots (3)$$

gegeben ist.

Wir erhalten in dieser Schreibweise für die Aufwärtsgeschwindigkeit die höchst einfache Formel

$$2\pi \cdot w(z) = \int_0^l \frac{\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \tau)\, d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{v}\int_l^\infty \frac{\frac{\partial g}{\partial \tau}\left(l, \tau - \frac{\zeta - l}{v}\right)}{\zeta - z}\, d\zeta. \quad (4)$$

Man erkennt sofort, daß ein cos-Reihenansatz unmittelbar für $\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \tau) \cdot \frac{d\xi}{d\varphi}$ am besten geeignet ist, um die Schwierigkeiten bei der Berechnung des ersten Integrals einfach erledigen zu können.

III. Ansatz einer Fourierreihe und Darstellung der Zirkulationsverteilung.

Wir setzen demgemäß

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\partial g}{\partial \varphi} = l v \sum_0^\infty a_n \cos n\varphi \qquad \xi = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi) \quad (5)$$

als gleichmäßig konvergente Fourierreihe an[2]). Durch Integration erhalten wir

$$g(\varphi, \tau) = l v \left(a_0(\tau)\,\varphi + \sum_1^\infty \frac{a_n(\tau)}{n} \sin n\varphi\right), \quad \ldots\ldots (6)$$

wobei wir die Integrationskonstante weglassen können, da die Flüssigkeit vor dem Profil wirbelfrei sein soll.

Für die Wirbelverteilung auf der Profillinie erhalten wir somit nach Gleichung (3)

$$\gamma(\xi, \tau) = l v \left\{ \frac{\sum_0^\infty a_n \cos n\varphi}{\frac{l}{2}\sin\varphi} + \frac{a_0'}{v}\varphi + \sum_1^\infty \frac{a_n'}{n \cdot v} \sin n\varphi \right\}$$

oder auch

$$\gamma(\xi, \tau) = 2v \left\{ \frac{\sum_0^\infty a_n \cos n\varphi + \frac{l a_0'}{2v}\varphi \sin\varphi}{\sin\varphi} + \sum_1^\infty \frac{l a_n'}{2 v n} \sin n\varphi \right\}.$$

Nun läßt sich $\varphi \cdot \sin\varphi$ in eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe entwickeln

$$\varphi \cdot \sin\varphi = \sum_0^\infty b_n \cos n\varphi \quad \ldots\ldots (7)$$

mit

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -1/2, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n^2 - 1},$$

so daß wir auch schreiben können:

$$\gamma(\xi, \tau) = 2v \left\{ \frac{\sum_0^\infty \left(a_n + \frac{l a_0'}{2v} b_n\right) \cos n\varphi}{\sin\varphi} + \sum_1^\infty \frac{l a_n'}{2 v n} \sin n\varphi \right\}. \quad \ldots\ldots (8)$$

Nehmen wir jetzt an, wie wir später zeigen werden, daß die Koeffizienten der ersten Fourier-Reihe sich zerlegen lassen in der Form

$$a_n + \frac{l a_0'}{2v} b_n = c_{n-1} - c_{n+1}, \quad n = 2, \quad \ldots\ldots (9)$$

so läßt sich diese folgendermaßen umordnen

$$\sum_2^\infty \left(a_n + \frac{l a_0'}{2v} b_n\right) \cos n\varphi = -2 \sum_1^\infty c_n \sin n\varphi \cdot \sin\varphi + c_2 \cos\varphi + c_1,$$

so daß wir für $\gamma(\xi, \tau)$ schließlich erhalten

$$\gamma(\xi, \tau) = 2a \left\{ \frac{\left(c_1 + a_0 + \frac{l a_0' b_0}{2v}\right) + \left(c_2 + a_1 + \frac{l a_0'}{2v} b_1\right)\cos\varphi}{\sin\varphi} + \sum_1^\infty \left(\frac{l a_n'}{2 v n} - 2c_n\right) \sin n\varphi \right\}. \quad (10)$$

Nun muß $\gamma(\xi, \tau)$ an der Stelle $\xi = l$, d. h. $\varphi = \pi$ entsprechend der Bedingung, daß der Staupunkt des Profils an der Hinterkante liegen soll, für alle Zeiten Null sein, woraus sich ergibt:

$$c_1 + a_0 + \frac{l a_0'}{2v} b_0 = c_2 + a_1 + \frac{l a_0'}{2v} b_1 \quad \ldots\ldots (11)$$

IV. Bestimmung der Zirkulationskoeffizienten als Funktionen der gegebenen Koeffizienten.

Die gesuchten Koeffizienten a_n des Fourier-Ansatzes bzw. die daraus abgeleiteten c_n finden wir aus der eingangs erwähnten Undurchdringlichkeitsbedingung für die Profillinie. Zunächst setzen wir die Reihe (5) in den Ausdruck für $w(z)$ ein und denken uns das erste Integral in bekannter Weise ausgewertet [3]

$$2\pi \cdot w(z) = -2v \sum_1^\infty a_n \frac{\sin n\psi}{\sin\psi}\,\pi - 2\pi \int_l^\infty \frac{a_0'\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) d\zeta}{2\zeta - l + l\cos\psi}, \quad z = \frac{l}{2}(1 - \cos\psi). \quad (12)$$

Wir berechnen die gesuchten Koeffizienten durch Vergleich entsprechender Glieder, wofür wir uns die Bewegungsgeschwindigkeit und die Wirkung der Wirbelschleppe auf das Profil in der folgenden Weise gegeben denken:

$$w(z) = -2v\left(\frac{P_0}{2} + \sum_1^\infty P_n \cos n\psi\right) \quad \ldots\ldots (13)$$

$$\int_l^\infty \frac{a_0'\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) d\zeta}{2\zeta - l + l\cos\psi} = 2v\left(\frac{J_0}{2} + \sum_1^\infty J_n \cos n\psi\right) \quad (14)$$

Wir erhalten demnach zunächst

$$2\left(\frac{P_0}{2} + \sum_1^\infty P_n \cos n\psi\right) = \sum_1^\infty a_n \frac{\sin n\psi}{\sin\psi} + 2 \cdot \left(\frac{J_0}{2} + \sum_1^\infty J_n \cos n\psi\right)$$

oder

$$\sum_1^\infty \{(P_{n-1} - J_{n-1}) - (P_{n+1} - J_{n+1})\} \sin n\psi = \sum_1^\infty a_n \sin n\psi$$

und schließlich durch Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (P_0 - J_0) - (P_2 - J_2) \\ a_n &= (P_{n-1} - J_{n-1}) - (P_{n+1} - J_{n+1}), \quad n \geq 2 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Wir finden also in der Tat eine Zerlegung nach einem niederen und höheren Zeiger.

Wegen (7)

$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n^2 - 1} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \quad n \geq 2$$

[2]) Diese Bedingung ist hinreichend aber nicht notwendig für die Existenz des Hauptwerts, es genügt die gleichmäßige Konvergenz von (6), die bei Beschränkung auf geeignete Entwicklungen (13) gesichert ist.

Digitized by Google

erhalten wir demnach für die c_n der Gleichung (9)

$$c_n = P_n - J_n + \frac{(-1)^n \cdot l\, a_0'}{n \cdot 2\, v} \quad n \geqq 1 \quad \ldots \quad (16)$$

Schreiben wir die Wirbelverteilung $\gamma(\xi, \tau)$ abgekürzt mit den Koeffizienten Z_n in der Form

$$\gamma(\xi, \tau) = 2\, v \left(Z_0 \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} + 2 \sum_1^\infty \frac{Z_n}{n} \sin n\varphi \right), \quad (17)$$

so ergibt sich nach Gleichung (10) zunächst

$$Z_0 = c_2 + a_1 + \frac{l\, a_0'}{2\, v} - b_1, \quad 2\,\frac{Z_n}{n} = \frac{l\, a_n'}{2\, v \cdot n} - 2\, c_n \quad (18)$$

und unter Berücksichtigung der eben gefundenen Ergebnisse

$$\left.\begin{aligned} Z_0 &= P_0 - J_0 \\ 2\,\frac{Z_n}{n} &= -(2\,P_n - 2\,J_n) - \frac{(-1)^n \cdot l\, a_0'}{v \cdot n} \\ &\quad + \frac{l}{2\, v \cdot n}\left((P_{n-1}' - J_{n-1}') - (P_{n+1}' - J_{n+1}')\right) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Wir finden demnach die gesuchten Koeffizienten Z_n ausgedrückt durch die P_n, durch den Koeffizienten a_0, der aber durch die Gleichungen (11) und (15a) bestimmbar ist, und die Funktionenfunktion J_n, die wir nun zu behandeln haben.

V. Vereinfachung der Ergebnisse durch Berechnung von Funktionalbeziehungen.

Aus der Definitionsgleichung (14) gewinnen wir die J_n als Fourier-Koeffizienten

$$J_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\, v} \int_0^\pi \cos n\psi\, d\psi \cdot \int_l^\infty \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} a_0\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right)}{\frac{2\,\zeta - l}{l} + \cos\psi}\, d\zeta \cdot$$

Nach Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen[3]) erhalten wir zunächst

$$J_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\, v} \int_l^\infty \frac{\partial\, a_0}{\partial\, \tau}\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) d\zeta \int_0^\pi \frac{\cos n\psi}{\frac{2\,\zeta - l}{l} + \cos\psi}\, d\psi.$$

Nun läßt sich das innere Integral auswerten, es gilt [6]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\eta + \cos\psi} = (-1)^n \cdot \frac{e^{-n\Theta}}{\mathfrak{Sin}\,\Theta} \quad \text{mit } \eta = \mathfrak{Cof}\,\Theta, \quad (20)$$

so daß wir schließlich bekommen:

$$J_n = \frac{l \cdot (-1)^n}{2\, v} \int_0^\infty \frac{\partial\, a_0}{\partial\, \tau}\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) \cdot e^{-n\Theta}\, d\Theta. \quad (21)$$

Wir versuchen nun alle Glieder in Z_n, die diese Funktion enthalten, zusammenzufassen. Zunächst bilden wir $J_{n+1} - J_{n-1}$ und finden

$$J_{n+1} - J_{n-1} = \frac{l\,(-1)^n}{2\, v} \int_0^\infty \frac{\partial\, a_0}{\partial\, \tau}\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) \cdot e^{-n\Theta} \cdot 2\,\mathfrak{Sin}\,\Theta\, d\Theta.$$

Wegen

$$\frac{\partial\, a_0}{\partial\, \tau} \cdot \mathfrak{Sin}\,\Theta = -\frac{2\, v}{l} \cdot \frac{\partial\, a_0}{\partial\, \Theta}$$

läßt sich eine teilweise Integration ausführen, so daß sich ergibt

$$J_{n+1} - J_{n-1} = 2\,(-1)^n\, a_0(\tau) - 2\,(-1)^n \cdot n \int_0^\infty a_0\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) e^{-n\Theta}\, d\Theta.$$

[3]) Der Nachweis, daß diese Vertauschung zulässig ist, wird hier übergangen, wie auch an einigen anderen Stellen die erforderlichen genauen Untersuchungen in dieser Darstellung fortgelassen werden.

Differentiieren wir diese Beziehung und beachten (21), so können wir für den Zirkulationskoeffizienten Z_n ($n \geqq 1$) die folgende einfache Formel angeben

$$\frac{2\, Z_n}{n} = -2\, P_n - \frac{l}{2\, v\, n}(P_{n+1}' - P_{n-1}'), \quad \ldots \quad (22)$$

in der der spezielle Küssnersche Ausdruck enthalten ist.

Um auch den ersten Zirkulationskoeffizienten Z_0 ermitteln zu können, müssen wir zunächst a_0 aus den Gleichungen (11) und (15a) bestimmen. Durch eine einfache Umrechnung erhalten wir eine Integro-Differentialgleichung von der Form

$$a_0(\tau) + \frac{l}{2\, v} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\, \tau}\, a_0\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right)(1 + e^{-\Theta})\, d\Theta = P_0 - P_1, \quad \ldots \quad (23)$$

aus der wir uns a_0 berechnet denken können, so daß wir für Z_0 erhalten

$$Z_0 = P_0 - \frac{l}{2\, v} \int_0^\infty \frac{\partial\, a_0}{\partial\, \tau}\left(\tau - \frac{\zeta - l}{v}\right) d\Theta \quad \ldots \quad (24)$$

VI. Lösung einer auftretenden Integro-Differentialgleichung und Herstellung der Endformeln, die die Küssnerschen Ergebnisse enthalten.

Im folgenden wollen wir die Integralgleichung (23) unter der Annahme zu lösen versuchen, daß die gegebenen Funktionen P_0 und P_1 periodische Funktionen der Zeit sein sollen. Wir setzen demnach bei geeigneten Konvergenzforderungen

$$P_0 - P_1 = \sum_{n=0}^\infty (p_n - q_n)\, e^{n\, i\, \nu\, t}, \quad a_0 = \sum_0^\infty A_n \cdot e^{n\, i\, \nu\, t} \quad (25)$$

und erhalten

$$\sum_0^\infty A_n\, e^{n\, i\, \nu\, t} + \frac{l}{2\, v} \int_0^\infty \sum_0^\infty A_n \cdot n\, i\, \nu \cdot e^{n\, i\, \nu \left(t - \frac{\zeta - l}{v}\right)} \times (1 + e^{-\Theta})\, d\Theta = \sum_0^\infty (p_n - q_n)\, e^{n\, i\, \nu\, t},$$

woraus nach Vertauschung des Integrals mit dem Summenzeichen bei Berücksichtigung der Transformation

$$\frac{2\,\zeta - l}{l} = \mathfrak{Cof}\,\Theta$$

durch Koeffizientenvergleich folgt

$$A_n\left(1 + n\,\frac{l\, i\, \nu}{2\, v} \cdot e^{\frac{n\, l\, i\, \nu}{2\, v}} \int_0^\infty e^{-\frac{n\, l\, i\, \nu}{2\, v}\,\mathfrak{Cof}\,\Theta} (1 + e^{-\Theta})\, d\Theta\right) = p_n - q_n.$$

Die hier auftretenden Integrale von der Form

$$(-1)^m \int_0^\infty e^{-i\,\varrho\,\mathfrak{Cof}\,\Theta} e^{-m\Theta}\, d\Theta = I_m(\varrho) \quad \ldots \quad (26)$$

können wir nun durch Hankelsche Funktionen ausdrücken. Nach Nielsen [4] finden wir die Darstellung

$$I_m(\varrho) = -i^m \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(i\, H_m^{(2)}(\varrho) + \frac{1}{\pi}\, \mathfrak{S}_m(\varrho)\right)$$

mit

$$\mathfrak{S}_m(\varrho) = 2\sqrt{\pi} \cdot i^m \cdot e^{-i\varrho} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(2\,m - s - 1)!}{s!\, \Gamma\left(m - s + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2\, i\, \varrho}\right)^{m-s}, \quad \ldots \quad (27)$$

so daß die gesuchten Koeffizienten A_n wie folgt dargestellt werden können

$$A_n = -\frac{p_n - q_n}{1 + n\,\frac{l\, i\, \nu}{2\, v}\, e^{\frac{n\, l\, i\, \nu}{2\, v}}\,(I_0 - I_1)} \quad \ldots \quad (28)$$

Bilden wir nun a_0 und setzen a_0' in den Ausdruck für Z_0 ein, so ergibt sich

Digitized by Google

$$\mathfrak{Z}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{n i \nu \tau} \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}{i H_0^{(2)}\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right) + H_1^{(2)}\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n e^{n i \nu \tau} \frac{i H_0^{(2)}\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}{i H_0^{(2)}\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right) + H_1^{(2)}\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}.$$

Definieren wir jetzt mit Küssner eine Funktion T durch die Gleichung

$$T(\varrho) = \frac{-i H_0^{(2)}(\varrho) + H_1^{(2)}(\varrho)}{i H_0^{(2)}(\varrho) + H_1^{(2)}(\varrho)}, \quad \ldots \quad (29)$$

so erhalten wir für Z_0 schließlich

$$\mathfrak{Z}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{n i \nu \tau} \frac{1 + T\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n e^{n i \nu \tau} \frac{1 - T\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}{2} \Bigg\}, \quad \ldots \quad (30)$$

ein Ergebnis, das im Sonderfall mit $p_n = 0$, $q_n = 0$ außer für $n = 1$ genau mit dem von Küssner übereinstimmt. Die verallgemeinerten Formeln für die Zirkulationskoeffizienten Z_n sind demnach die folgenden

$$Z_0 = \text{Realt.} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{n i \nu \tau} \cdot \frac{1 + T\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n e^{n i \nu \tau} \cdot \frac{1 - T\left(\frac{n l \nu}{2 v}\right)}{2} \right\} \quad \ldots \quad (31)$$

$$Z_n = -n P_n - \frac{l}{2 v}\left(\frac{P'_{n+1} - P'_{n-1}}{2}\right)$$

Beachtenswert scheint mir hierbei die Tatsache zu sein, daß die Z_n proportional zu den Koeffizienten der Funktion $\sin \psi \cdot \frac{d^2 z}{d \tau^2}$ gebildet sind.

VII. Bemerkungen über spezielle Profilformen und die Formeln für die Kräfte auf das Profil.

Betrachtet man Gleichung (12), so erkennt man, daß die Wirkung der außerhalb des Profils liegenden Wirbelschleppe zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn $a_0'(\tau) = 0$ wird. Dieser Fall tritt nach (23) ein, wenn $P_0 = P_1 + \text{konst.}$ ist. Die übrigen Koeffizienten sind dabei noch vollkommen willkürlich. Wir können demnach feststellen, daß jede Bewegungsgeschwindigkeit von der Form

$$\frac{d z}{d \tau} = w(z) = -2 v \left(\frac{P_0}{2}(1 + 2 \cos \psi) + \sum_{1}^{\infty} P_n \cos n \psi\right)$$

mit $P_1 = \text{konst.}$ . . . . (32)

keine wirksamen Wirbel hinter dem Profil in der Flüssigkeit zurückläßt.

Ergänzend sei erwähnt, daß nach neueren Untersuchungen des Verfassers [5] die Kräfte auf das Profil auch ohne Zuhilfenahme der Überlegungen mit der Saugkraft an der Vorderkante des Profils einfach nach der Kutta-Joukowskischen Formel berechnet werden können, wobei sich für den Auftrieb A und den Vortrieb V die folgenden Formeln ergeben

$$A = \varrho \cdot v \int_0^l \gamma(\xi, \tau)\, d\xi,$$

$$V = -\varrho \int_0^l \left(w_0 - v \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \gamma(\xi, \tau)\, d\xi \Bigg\} \quad \ldots \quad (33)$$

mit ϱ als der Luftdichte und w_0 als der von den gebundenen Wirbeln induzierten Aufwärtsgeschwindigkeit am Profil.

VIII. Zusammenfassung.

Unter Einführung einer aus der gesuchten Funktion für die Wirbelverteilung abgeleiteten Funktion gelingt es, die von allen Wirbeln herrührende Geschwindigkeit am Profil einfach auszudrücken und damit die Zirkulationsverteilung zu bestimmen, deren Koeffizienten sich ganz allgemein angeben lassen, wenn nur die Lösung einer neuartig auftretenden Integro-Differentialgleichung als bekannt angesehen wird. Für ein periodisches Zeitgesetz läßt sich die Lösung finden, so daß für diesen wichtigsten Fall das Ergebnis vorliegt, in dem als Sonderfall die Endformeln von Küssner [2] enthalten sind.

IX. Schrifttum.

[1] W. Birnbaum, Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 277.
[2] H. G. Küssner, Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 410.
[3] H. Glauert, Grundlagen der Tragflügel- und Luftschrauben-Theorie. Berlin, Julius Springer 1929.
[4] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig, Teubner 1904. S. 128.
[5] K. Jaeckel, Ingenieur-Archiv, Bd. 9, Heft 5, S. 371.
[6] K. Jaeckel, Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 53.

Digitized by Google

Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren.

I. Teilbericht: Die Vorgänge in unverzweigten, an mehreren Stellen angeregten Leitungen.

Von O. Lutz, Braunschweig.

Bericht der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig, Institut für Motorenforschung.

Ausgehend von einer früheren Arbeit über Resonanzschwingungen in Rohrleitungssystemen wird gezeigt, wie man bei mehrfach angeregten Leitungen durch ein Zerlegungsverfahren die Vorgänge rechnerisch erfassen und überschauen kann.

In dem vorliegenden ersten Bericht werden unverzweigte Leitungen behandelt; in weiteren Berichten sollen in gleicher Weise kompliziertere Leitungssysteme untersucht werden.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Übersicht.
3. Berechnungsgrundlagen.
   a) Die Bewegungsgleichung und die Darstellung ihrer Lösung.
   b) Randbedingungen.
      α) Offenes Rohrleitungsende.
      β) Drosselscheibe am offenen Ende.
      γ) Querschnittsänderung.
   c) Die Vorgänge in einer offenen Leitung.
4. Die Vorgänge in einer an zwei Stellen angeregten Leitung.
5. Die Vorgänge bei mehrfacher Anregung.
   a) Verlängerte Leitung mit zweifacher Anregung.
   b) Die allgemeine Lösung für die unverzweigte Leitung von gleichem Querschnitt.
6. Einfluß von Drosselungen und Querschnittsänderungen.
   a) Leitung mit zweifacher Anregung und Querschnittsänderung.
   b) Leitung mit Drosselung.
7. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Die Schwingungserscheinungen in den Rohrleitungen von periodisch arbeitenden Mehrzylindermaschinen (Verbrennungsmotoren, Kolbenpumpen) sind bislang noch nicht so weit geklärt, daß sie der Vorausberechnung zugänglich wären. Für Ausbreitungsschwingungen, die in einer beliebig gestalteten Rohrleitung an einer Stelle angeregt werden, hat der Verfasser vor einigen Jahren Berechnungsverfahren angegeben[1]), die eine Weiterentwicklung der — von Sommerfeld und Debye[2]) zum erstenmal auf Maschinen angewandten — Helmholtzschen Theorie der Vorgänge in Orgelpfeifen darstellen. Obwohl dabei kleine Schwingungsgrößen vorausgesetzt und auch sonst verschiedene einschneidende Vernachlässigungen vorgenommen werden mußten, haben sie sich bei Einzylindermaschinen bewährt.

Bei Reihenmotoren werden nun die Schwingungen nicht nur an einer Stelle, sondern periodisch nacheinander an mehreren Stellen angeregt. Dieser Fall war bisher der quantitativen Vorausberechnung verschlossen, lediglich qualitativ konnte an Hand des »Wellenplanes«[3]) etwas ausgesagt werden; die nachstehenden Betrachtungen zeigen jedoch, daß eine Verfolgung der Einzelwellen meist zu falschen Ergebnissen führen muß, da die Rückwurfbedingungen an den Enden von solchen Leitungssystemen nicht einheitlich für die Einzelwellen sind.

Auch das auf List[4]) zurückgehende Verfahren der schrittweisen Berechnung von Schwingungsvorgängen, das für Einzelfälle wertvolle Ergebnisse zeitigt, scheint nicht geeignet, die Vorgänge bei Mehrzylindermaschinen im Überblick zu erfassen.

In der vorliegenden Arbeit werden die früher entwickelten Berechnungsverfahren auf die Fälle der mehrfachen Anregung ausgedehnt. Es zeigen sich dabei überraschende und nicht erwartete Ergebnisse, die manche Erfahrungen an Reihenmotoren erklären; vor allem schaffen sie aber die Grundlagen für die Vorausberechnung von Ansaugleitungssystemen. Für Auspuffleitungen werden sie die Lage der Resonanzfrequenzen in Näherung gut wiedergeben.

2. Übersicht.

Zum besseren Verständnis der Ableitungen werden in Ziffer 3 zunächst das Verfahren und die für den vorliegenden Bericht wichtigsten Ergebnisse der früheren Arbeit zusammengestellt. Ein einfaches Beispiel (Ziffer 4) zeigt dann in ausführlicher Behandlung das weiterhin verwendete Verfahren und begründet den angewandten Kunstgriff der Zerlegung in einzelne »offene« Rohrteile. In Ziffer 5 werden solche Beispiele mit Anregung durch Geschwindigkeitsschwankungen an mehreren Stellen des Leitungssystems behandelt, welche die in Ziffer 4 angeführte Zerlegung erlauben. Schließlich werden in Ziffer 6 noch die Einflüsse von Querschnittsänderungen und Drosselungen untersucht, womit alle Anordnungsmöglichkeiten unverzweigter Leitungen der Vorausberechnung zugänglich sind.

3. Berechnungsgrundlagen.

a) Die Bewegungsgleichung und die Darstellung ihrer Lösungen.

Es wird vorausgesetzt, daß in den betrachteten Leitungsanordnungen nur eine Gasbewegung längs der Rohrachsen, nicht auch quer zu ihnen vorhanden ist, und daß der Bewegungs- und Druckzustand in jedem Querschnitt homogen ist, so daß beide als eindimensional angesehen werden dürfen.

Unter der weiteren Voraussetzung, daß die durch den Schwingungsvorgang hervorgerufenen Abweichungen in Dichte, Druck und Geschwindigkeit klein bleiben gegenüber den Mittelwerten, daß adiabatische Zustandsänderung angenommen werden darf und daß auch Reibungseinflüsse unbeachtet bleiben dürfen[5]), wird der Bewegungs- und Druckvorgang an einer beliebigen Stelle x eines Rohres durch die bekannten Differentialgleichungen für die Schallausbreitung:

[1]) O. Lutz, Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen von Kolbenmaschinen. Heft 3 der Berichte aus dem Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der Technischen Hochschule Stuttgart, Stuttgart 1934.

[2]) P. Voissel, Resonanzerscheinungen in der Saugleitung von Kompressoren und Gasmotoren, VDI-Forschungsheft 106.

[3]) Zuerst wohl von Oppitz benutzt, vgl. A. Oppitz, Die Druckschwankungen in den Auspuffleitungen der Dieselmaschinen und deren Rückwirkung auf die Spülung. Werft Reed. Hafen (1930) S. 27.

[4]) H. List, Die Erhöhung des Liefergrads durch Saugrohre bei Dieselmotoren. Mitteilungen a. d. technischen Instituten der staatl. Tung-chi-Universität, Woosung, China, Heft 4 (1932), und A. Pischinger, Bewegungsvorgänge in Gassäulen, insbesondere beim Auspuff- und Spülvorgang von Zweitaktmaschinen, Forschung Bd. 6 (1935) S. 245.

[5]) Die genauen Ableitungen und Überlegungen über den Einfluß der einzelnen Vernachlässigungen sowie die nähere Beschreibung der Vektor-Darstellung finden sich in der in Fußnote 1 genannten Arbeit des Verfassers (a. a. O. S. 22 u. f.); künftige Hinweise ohne weitere Angabe beziehen sich auf diese Arbeit.

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

beschrieben, wobei die Geschwindigkeit v und der Druck p noch durch

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \varrho_0 a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

miteinander verbunden sind (a bezeichnet die Schallgeschwindigkeit, ϱ die Dichte).

Eine einfache und übersichtliche Lösung ergibt sich, wenn man komplexe Größen verwendet[6]). Als Einzellösung für einen Schwingungsvorgang von der Kreisfrequenz ω ergibt sich damit:

$$v = v_0 + e^{i\omega t}\left(\mathfrak{A} e^{i\frac{\omega x}{a}} + \mathfrak{B} e^{-i\frac{\omega x}{a}}\right) \ldots\ldots (4)$$

und

$$p = p_0 - \varrho\, a\, e^{i\omega t}\left(\mathfrak{A} e^{i\frac{\omega x}{a}} - \mathfrak{B} e^{-i\frac{\omega x}{a}}\right). \ldots (5)$$

worin v_0 und p_0 die Mittelwerte und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beliebige, aber konstante Schwingungsvektoren (von der Dimension einer Geschwindigkeit) sind, die durch die Randbedingungen bestimmt werden müssen. Als allgemeine Lösung für einen beliebigen periodischen Vorgang von der Grundfrequenz ω folgt:

$$v = v_0 + \sum_n e^{in\omega t}\left(\mathfrak{A}_n e^{i\frac{n\omega x}{a}} + \mathfrak{B}_n e^{-i\frac{n\omega x}{a}}\right) \ldots\ldots (4a)$$

und

$$p = p_0 - \varrho\, a \sum_n e^{in\omega t}\left(\mathfrak{A}_n e^{i\frac{n\omega x}{a}} - \mathfrak{B}_n e^{-i\frac{n\omega x}{a}}\right) \quad (5a)$$

Für die folgenden Betrachtungen sind nur die Schwingungsglieder

$$\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_n e^{i\frac{n\omega x}{a}} + \mathfrak{B}_n e^{-i\frac{n\omega x}{a}}$$

und

$$\mathfrak{P}_n = -\varrho\, a\, \mathfrak{A}_n e^{i\frac{n\omega x}{a}} + \varrho\, a\, \mathfrak{B}_n e^{-i\frac{n\omega x}{a}}$$

wichtig; führt man noch alle Druckwerte $\mathfrak{P}$ durch

$$\mathfrak{P}^* = \frac{\mathfrak{P}}{\varrho\, a} \ldots\ldots\ldots (6)$$

auf die Dimension einer Geschwindigkeit zurück, so erhält man die einfache Form

$$\mathfrak{V}_n = \mathfrak{A}_n e^{i\frac{n\omega x}{a}} + \mathfrak{B}_n e^{-i\frac{n\omega x}{a}} \ldots\ldots (7)$$

und

$$\mathfrak{P}_n^* = -\mathfrak{A}_n e^{i\frac{n\omega x}{a}} + \mathfrak{B}_n e^{-i\frac{n\omega x}{a}} \ldots\ldots (8)$$

Der Geschwindigkeits- und Druckverlauf selbst folgt aus

$$v = v_0 + \sum_n \mathfrak{V}_n e^{in\omega t}, \quad p = p_0 + \varrho\, a \sum_n \mathfrak{P}_n^* e^{in\omega t}. \quad (9)$$

Die anzustellenden Betrachtungen können nur mit linearen Beziehungen zwischen v und p durchgeführt werden; es läßt sich aber zeigen, daß die aufzustellenden Randbedingungen dieser Forderung entsprechen, wobei die in Kauf zu nehmenden Vernachlässigungen in den meisten Fällen

[6]) Zum Verständnis sei kurz aufgeführt: Ausgehend von der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ wird folgendes festgelegt:
$\cos x$ = (Reeller Teil von) e^{ix}
$\sin x$ = (Reeller Teil von) $-ie^{ix}$
und die eingeklammerte Aussage bei der Rechnung gar nicht mehr berücksichtigt. Dies darf so lange geschehen, als nur lineare Beziehungen auftreten. Ferner werden komplexe Amplituden verwendet, die neben der Größe auch die Phase der Schwingung angeben:
$\mathfrak{A} = Ae^{i\varphi}$, also $\mathfrak{A}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$; A ist die Größe der Amplitude, φ der Phasenwinkel, um den die Schwingung voreilt.

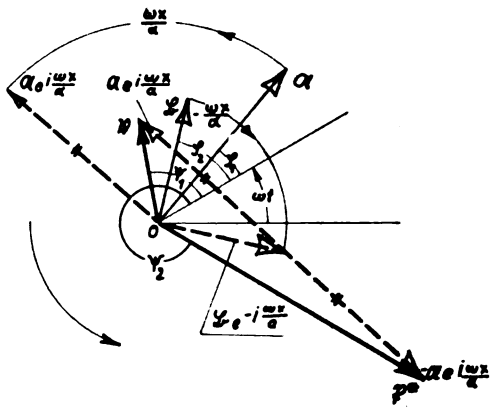


Bild 1. Vektorplan.

zulässig sind. Damit kann die Grundschwingung als Vertreterin des Schwingungsvorgangs ausgewählt werden; für jede Oberschwingung ergibt sich formal die gleiche Lösung, und die allgemeine Lösung kann durch Summieren gewonnen werden. Für die Grundschwingung erhält man nach (7) und (8):

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{A} e^{i\frac{\omega x}{a}} + \mathfrak{B} e^{-i\frac{\omega x}{a}} \ldots\ldots (7a)$$

und

$$\mathfrak{P}^* = -\mathfrak{A} e^{i\frac{\omega x}{a}} + \mathfrak{B} e^{-i\frac{\omega x}{a}}, \ldots\ldots (8a)$$

worin $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die komplexen Amplituden (vgl. Anmerkung 5)

$$Ve^{i\varphi_1}, \; P_e^{*i\varphi_1}, \; Ae^{i\varphi_1} \text{ und } Be^{i\varphi_2}$$

sind.

In Bild 1 ist der Vektorplan für diesen Schwingungsvorgang aufgezeichnet. Der Vektor $\mathfrak{A}$ ist um den Winkel $\omega t + \varphi_1$ gegen die Zeitachse verdreht, der Vektor $\mathfrak{B}$ um den Winkel $\omega t + \varphi_2$. Der Vektor $\mathfrak{A} e^{i\frac{\omega x}{a}}$ schließt entsprechend mit der Zeitachse den Winkel $\omega t + \varphi_1 + \frac{\omega x}{a}$ ein, eilt also dem Vektor $\mathfrak{A}$ um den Winkel $\frac{\omega x}{a}$ voraus, während der Vektor $\mathfrak{B} e^{-i\frac{\omega x}{a}}$ um den gleichen Winkel dem Vektor nacheilt. Entsprechend (7a) und (8a) ist hieraus der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{V}$ und der Druckvektor $\mathfrak{P}^*$ zu bilden.

Man erkennt aus dem Vektorplan die physikalische Deutung des Vorgangs. Im Rohr laufen zwei Wellenzüge mit den Amplituden A und B; die Wellengeschwindigkeit ist gleich der Schallgeschwindigkeit. Der eine Wellenzug ist für die Druckschwingung und für die Geschwindigkeitsschwingung gleich, der entgegengesetzt laufende in der Amplitude ebenfalls gleich, in der Phase jedoch um 180° verschoben.

Verfolgt man den Vorgang an anderen Stellen des Rohres, so ergibt sich, daß sich die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{P}^*$ auf kongruenten, aber um 90° verdrehten Ellipsen bewegen.

b) Randbedingungen.

Für die Vorgänge an den Enden bzw. Übergangsstellen der Leitungssysteme gelten Randbedingungen[7]), von denen die wichtigsten zusammengestellt werden sollen:

α) Offenes Rohrleitungsende. In erster Näherung kann angenommen werden, daß der Druck p_0 gleich dem Außendruck p_a ist, die Druckschwankung bei $x = 0$ also verschwindet:

$$\mathfrak{P}_0^* = 0 \ldots\ldots\ldots (10)$$

β) Drosselscheibe am offenen Ende. Die Drosselscheibe rufe in der Strömung einen engsten Querschnitt f_d hervor (Bild 2). In f_d ist die Strahleneinschnürung schon berücksichtigt; es wird vorausgesetzt, daß diese bei allen

[7]) A. a. O. S. 30 u. f.

Digitized by Google

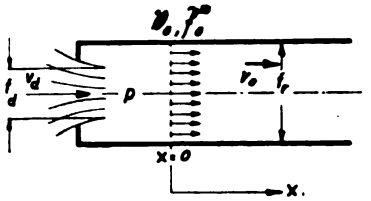


Bild 2.

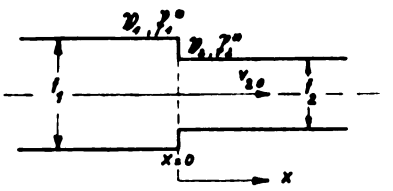


Bild 3.

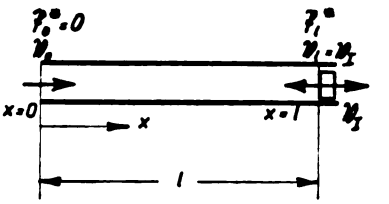


Bild 4. Schema der am Anfang offenen Leitung.

vorkommenden Geschwindigkeiten gleich, die Kontraktionsziffer μ also konstant ist. Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen[8]) ergibt sich für die Randbedingung an der Stelle $x = 0$:

$$\delta_1 \mathfrak{V}_0 = -\mathfrak{P}_0^*, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11a)$$

wobei die Abkürzung

$$\delta_1 = \frac{v_d^2}{a\, v_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11b)$$

benützt ist (v_d = mittlere Geschwindigkeit an der Drosselstelle, v_0 = mittlere Rohrgeschwindigkeit). Eine genauere Randbedingung für das offene Rohr ($v_d = v_0$) wäre demnach

$$\frac{v_0}{a}\,\mathfrak{V}_0 = -\mathfrak{P}_0^*; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11c)$$

sie ist zu benutzen, wenn die mittlere Rohrgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit nicht mehr vernachlässigt werden kann.

γ) Querschnittsänderung. Mit den Bezeichnungen in Bild 3 folgt

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{f_1}{f_2}\,\mathfrak{V}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12a)$$

und

$$\delta_2 \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{P}_1^* - \mathfrak{P}_2^*, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12b)$$

wobei die Abkürzung

$$\delta_2 = \left(1 - \frac{f_2^2}{f_1^2}\right)\frac{v_{20}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12c)$$

verwendet ist (v_{20} ist der Geschwindigkeitsmittelwert im Rohrstück 2). Für $v_{20} \ll a$ kann

$$\mathfrak{P}_1^* = \mathfrak{P}_2^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12d)$$

gesetzt werden.

c) Die Vorgänge in einer offenen Leitung.

Es wird sich ergeben, daß die Vorgänge in mehrfach angeregten Leitungen sich auf Vorgänge in einzelnen, offenen Rohren zurückführen lassen. Aus diesem Grund sollen zunächst die Vorgänge in einer offenen, am Ende angeregten Leitung besprochen werden.

Das Rohr sei am Ende $x = 0$ offen (vgl. Bild 4), so daß dort nach (10) $\mathfrak{P}_0^* = 0$ zu setzen ist.

Am Ende $x = l$ werde eine Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_I$ aufgezwungen. Dann ist nach (7a) und (8a) anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 &= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{P}_0^* &= -\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

also $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Für die Schwingungsvektoren am Ende $x = l$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_I = \mathfrak{V}_I &= \mathfrak{A}\left(e^{i\frac{\omega l}{a}} + e^{-i\frac{\omega l}{a}}\right), \\ \mathfrak{P}_l^* &= \mathfrak{A}\left(-e^{i\frac{\omega l}{a}} + e^{-i\frac{\omega l}{a}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Aus dem entsprechenden Vektorplan (Bild 5), geht hervor, daß Geschwindigkeitsschwankung und Druckschwankung um eine Viertelperiode gegeneinander versetzt sind und daß beide ihre Phasenlage beibehalten, auch wenn $\frac{\omega l}{a}$ geändert wird (d. h. also auch für alle Werte $\frac{\omega x}{a}$, für alle Stellen im Rohr).

[8]) A. a. O. S. 32.

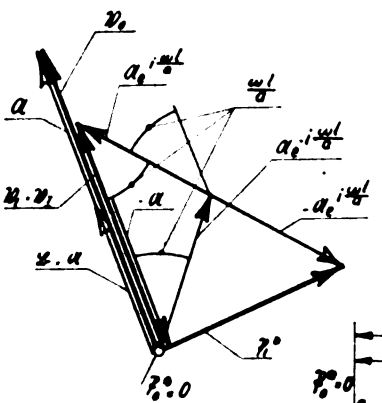


Bild 5. Vektorplan für das offene Rohr.

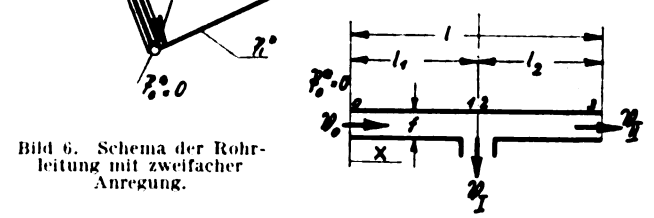


Bild 6. Schema der Rohrleitung mit zweifacher Anregung.

Für den Zusammenhang der Schwingungswerte ergibt sich aus dem Vektorplan oder (13) und (14):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_e^* &= -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega l}{a}\cdot\mathfrak{V}_I, \\ \mathfrak{V}_0 &= \frac{1}{\cos\frac{\omega l}{a}}\cdot\mathfrak{V}_I \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Es folgt daraus das bekannte Ergebnis, daß Resonanzen für

$$\cos\frac{\omega l}{a} = 0$$

oder

$$\frac{\omega l}{a} = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

eintreten.

4. Die Vorgänge in einer an zwei Stellen angeregten Leitung.

Die angewandte Lösungsmethode werde an dem einfachsten Beispiel für doppelte Anregung (Bild 6) gezeigt. In einer am einen Ende offenen Rohrleitung von überall gleichem Querschnitt f und der Länge l sollen die stehenden Schwingungen durch beliebig vorgegebene Geschwindigkeitsschwankungen $\mathfrak{V}_I$ und $\mathfrak{V}_{II}$ angeregt werden, wobei $\mathfrak{V}_I$ an einer beliebigen Stelle des Rohres, $\mathfrak{V}_{II}$ am Ende wirkt. (Die Abzweigstelle mit der Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_I$ wird vom gleichen Querschnitt f vorausgesetzt; ist ein anderer Querschnitt vorhanden, so ist die darin vorhandene Schwankung $\mathfrak{V}_I'$ nach der Kontinuitätsbedingung in $\mathfrak{V}_I$ überzuführen.)

Wenn nur Anregung an einer Stelle vorläge, könnte der übliche Lösungsweg eingeschlagen werden: man geht von der Randbedingung am offenen Leitungsende aus, die zu einer Aussage über die Phasenlage und das Größenverhältnis der beiden Wellenzüge führt; durch Anwendung der Gl. (7a) und (8a) oder der graphischen Methode nach Bild 1 kommt man zur Geschwindigkeitsschwankung an der Anregungsstelle, die mit der aufgezwungenen Schwankung übereinstimmen muß. Der Vektorplan muß deshalb so gedreht und im Maßstab geändert werden, daß beide Schwankungen gleiche Größe und Phase haben. Es mag an dieser

Digitized by Google

Stelle gleich eingefügt werden, daß Resonanzen im Leitungssystem dann auftreten, wenn sich im Vektorplan für diese Geschwindigkeitsschwankung ein Minimum ergibt; da diese Schwankung durch die Anregung in gewisser Größe erzwungen wird, werden in diesem Fall die anderen Schwankungswerte am größten (vgl. Ziffer 3c).

Dieser einfache Weg kann nicht mehr beschritten werden, da an der ersten Anregungsstelle der Einfluß der zweiten Anregung nicht bekannt ist — er hängt vom noch nicht bekannten Schwingungszustand im Rohrteil 2 ab — und damit kann der Schwingungszustand im Rohrteil 1 nicht bestimmt werden; man muß vielmehr die analytische Methode verwenden.

Am offenen Rohrende gilt die Randbedingung (10):

$$\mathfrak{P}_0^* = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Am Anfang des Rohrteils 1 ($x_1 = 0$) ist entsprechend (7a) und (8a) zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 &= \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1, \\ \mathfrak{P}_0^* &= -\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17a)$$

also

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1$$

und

$$\mathfrak{V}_0 = 2\,\mathfrak{A}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17b)$$

Am Ende des Rohrteiles 1 ist der Schwingungszustand nach (7a) und (8a) gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_1 &= \mathfrak{A}_1\left(e^{i\frac{\omega l_1}{a}} + e^{-i\frac{\omega l_1}{a}}\right), \\ \mathfrak{P}_1^* &= \mathfrak{A}_1\left(-e^{i\frac{\omega l_1}{a}} + e^{-i\frac{\omega l_1}{a}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17c)$$

Für den Rohrteil 2 werde an der Stelle 2 mit einem neuen Schwingungsansatz begonnen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_2 &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2, \\ \mathfrak{P}_2^* &= -\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17d)$$

Nach der Kontinuitätsbedingung muß nun sein

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_I + \mathfrak{V}_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17e)$$

wobei $\mathfrak{V}_I$ die aufgezwungene Geschwindigkeitsschwankung ist (positive Amplitude von der Rohrleitung nach außen gerichtet).

Da die Stellen 1 und 2 nur eine gedankliche Aufteilung des gleichen Ortes bezeichnen, ist auch

$$\mathfrak{P}_1^* = \mathfrak{P}_2^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17f)$$

Am Rohrende ergibt sich entsprechend

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_3 &= \mathfrak{A}_2 e^{i\frac{\omega l_2}{a}} + \mathfrak{B}_2 e^{-i\frac{\omega l_2}{a}}, \\ \mathfrak{P}_3^* &= -\mathfrak{A}_2 e^{i\frac{\omega l_2}{a}} + \mathfrak{B}_2 e^{-i\frac{\omega l_2}{a}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17g)$$

mit der letzten Randbedingung

$$\mathfrak{V}_3 = \mathfrak{V}_{II} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17h)$$

Bevor aus den Gl. (a) bis (h) die Schwingungswerte ermittelt werden, soll der Schwingungsvorgang an Hand des Vektorplanes in Bild 7 verdeutlicht werden.

Bildteil *a* zeigt den Schwingungsvorgang am offenen Rohrende. Nach (a) sind die beiden Wellenzüge $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ gleich groß und gleichgerichtet; $\mathfrak{V}_0$ und $\mathfrak{P}_0^*$ ergeben sich nach (a) und (b). An der Stelle 1 ist die Phase des Wellenzugs $\mathfrak{A}_1$ um den Winkel $\frac{\omega l_1}{a}$ verschoben, die des Wellenzugs $\mathfrak{B}_1$ um den Winkel $-\frac{\omega l_1}{a}$; hieraus ergeben sich nach (c) die Schwingungsgrößen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{P}_1^*$ an der Stelle 1 (Bildteil *b*). Die Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_2$ an der Stelle 2 muß dann der Bedingung (e) gehorchen, während der Druck $\mathfrak{P}_2^*$ an dieser Stelle nach (f) $= \mathfrak{P}_1^*$ ist. Dieser neue Schwingungszustand $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{P}_2^*$ setzt sich nun nach (d) aus den Wellenzügen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ zusammen; für den Schwingungszustand $\mathfrak{V}_3$ und $\mathfrak{P}_3^*$ am Rohrende 3 sind die Schwingungsvektoren $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ um die entsprechenden Winkel $-\frac{\omega l_2}{a}$ und $-\frac{\omega l_2}{a}$ zu drehen (Bildteil *c*). $\mathfrak{V}_3$ muß nach der Bedingung (h) gleich der Schwingungsanregung $\mathfrak{V}_{II}$ sein.

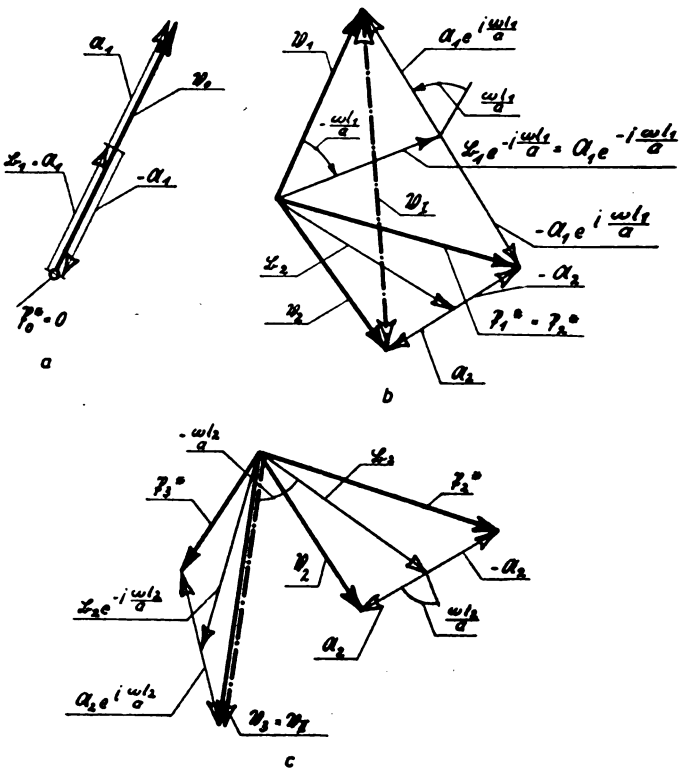


Bild 7.

Aus Bildteil *b* geht hervor, daß an der Anregungsstelle 1 sowohl die Amplituden als auch die Phasen der beiden Wellenzüge sprunghaft geändert werden ($\mathfrak{A}_2$ verschieden von $\mathfrak{A}_1 e^{i\frac{\omega l_1}{a}}$). Dies bedeutet aber, daß Schwingungsvorgänge an mehrfach angeregten Leitungen nicht durch einen Wellenplan (vgl. Anm. 3) beschrieben werden können, auch nicht einmal qualitativ; weiter unten wird hierauf noch näher eingegangen.

Die Bestimmung der Schwingungswerte aus den Gl. (a) bis (b) geschieht zweckmäßig so, daß zunächst aus (d), (g) und (h) die vier Größen $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{P}_3^*$ eliminiert werden; dann läßt sich die daraus entstehende Beziehung zwischen $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{P}_2^*$ und $\mathfrak{B}_{II}$ mit den restlichen Bedingungen zu folgendem Zusammenhang umformen:

$$\frac{\mathfrak{V}_0}{2}\left(e^{i\frac{\omega l}{a}} + e^{-i\frac{\omega l}{a}}\right) - \frac{\mathfrak{V}_I}{2}\left(e^{i\frac{\omega l_2}{a}} + e^{-i\frac{\omega l_2}{a}}\right) = \mathfrak{V}_{II}, \quad (18)$$

oder

$$\mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l}{a} = \mathfrak{V}_I \cos\frac{\omega l_2}{a} + \mathfrak{V}_{II}, \quad \ldots \quad (18a)$$

aus dem sich $\mathfrak{V}_0$ und damit der gesamte Vektorplan nach Bild 7 ergibt.

Gl. (18a) zeigt, daß unendlich große Schwingungswerte $\mathfrak{V}_0$ für $\cos\frac{\omega l}{a} = 0$ eintreten, daß also die Resonanzfrequenzen nur von der Gesamtlänge l der Leitung beeinflußt werden, nicht etwa auch von den Einzellängen l_1 und l_2. Außerdem führt die Gleichung zu einem einfachen und anschaulichen Ersatzschema (vgl. Bild 8) für die Ermittlung und Beurtei-

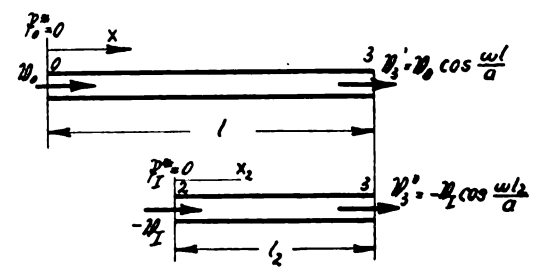


Bild 8.

Digitized by Google

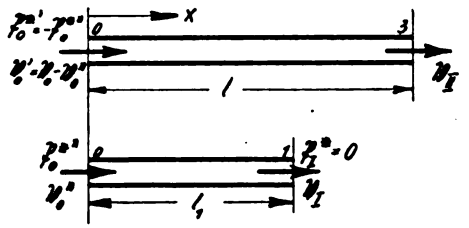


Bild 9.

lung der Schwingungsvorgänge. Die linke Seite von (18a) stellt nämlich nach (15) die Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_3'$ am Ende $x = l$ eines Rohres von der Länge l dar, das am Ende $x = 0$ offen ist; ebenso stellt der erste Teil der rechten Seite die Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_3''$ eines Rohres von der Länge l_2 dar, wenn dieses Rohr am anderen Ende mit $-\mathfrak{V}_I$ angeregt wird und die Druckschwankung dabei verschwindend klein ist (ebenfalls offenes Rohr, $\mathfrak{P}_I^* = 0$). Daß eine solche Trennung der Vorgänge erlaubt ist, ergibt sich daraus, daß Wellen superponiert werden dürfen (wofür (18) eine Bestätigung gibt); Gl. (18a) zeigt aber darüber hinaus, wie das Superponieren zweckmäßig zu erfolgen hat.

Es wäre ja auch möglich, das Ersatzschema nach Bild 9 zu wählen, wobei die Wellen nicht zwischen den beiden Anregungsstellen, sondern im Leitungsteil zwischen dem offenen Ende $x = 0$ und der ersten Anregungsstelle superponiert werden. Da der Schwingungszustand im Rohrteil l_1 durch die gegebenen Schwingungsgrößen $\mathfrak{V}_I$, $\mathfrak{P}_I^*$ festliegt, kennt man damit auch die Schwingungswerte $\mathfrak{V}_0''$ und $\mathfrak{P}_0^{*''}$ am Anfang. Nun muß für das Gesamtsystem an dieser Stelle aber die Druckschwankung verschwinden (offenes Rohr, $\mathfrak{P}_0^* = 0$), also herrscht beim Ersatzstück 1 an dieser Stelle die Druckschwankung $-\mathfrak{P}_0^{*''}$; zusammen mit der Anregungsschwankung $\mathfrak{V}_{II}$ am anderen Ende ergibt sich der Schwingungszustand im Ersatzstück 1.

Dieses Vorgehen ist aber umständlicher als das durch Bild 8 gekennzeichnete; außerdem zeigt es, daß bei dieser Aufteilung am offenen Rohrleitungsende eine Verwicklung insofern eintritt, als die beiden Ersatzstücke an dieser Stelle nicht mehr als offen gelten dürfen ($\mathfrak{P}_0^{*''}$ ist im allgemeinen von 0 verschieden). Dies bedeutet aber, daß die auf das offene Rohrende hinlaufenden, von den Anregungsstellen ausgehenden Einzelwellen dort nach einem verwickelten, nicht im voraus bestimmbaren Zusammenhang zurückgeworfen werden; hierin liegt der Haupteinwand gegen das Aufstellen von Wellenplänen[9]) begründet.

Als wichtigstes Ergebnis folgt:

> Für die Ermittlung von Schwingungsvorgängen in mehrfach angeregten Leistungssystemen dürfen nicht die von den Anregungsstellen ausgehenden Einzelwellen verfolgt werden, da die Rückwurfbedingungen für die Einzelwellen am Rohrende nicht bekannt sind; es muß vielmehr eine Aufteilung nach einzelnen Leitungsteilen vorgenommen werden, in denen die Schwingungsvorgänge in bekannter Weise ermittelt und erst zum Schluß superponiert werden.

Auf Grund dieser Erkenntnis lassen sich bereits viele Aufgaben in einfacher und anschaulicher Weise lösen, wie in Ziffer 5 gezeigt wird. Als Einführung hierzu sollen die Vorgänge bei zweifacher Anregung weiter verfolgt werden.

Die Aufteilung des Rohrleitungssystems in die zwei Teilstücke l und l_2, in denen die Schwingungen nach den in Bild 8 angegebenen Randbedingungen angeregt werden, führt zu den Vektorplänen des Bildes 10.

Rohrteil l_2 ist am Anfang (Stelle 2) als offen zu betrachten ($\mathfrak{P}_I^* = 0$); dort wird die Geschwindigkeitsschwankung $-\mathfrak{V}_I$ aufgezwungen. Der Schwingungszustand kann dargestellt werden durch die Wellenvektoren $\mathfrak{A}_I$ und $\mathfrak{V}_I$ wobei gelten muß:

[9]) Vgl. Anm. 3.

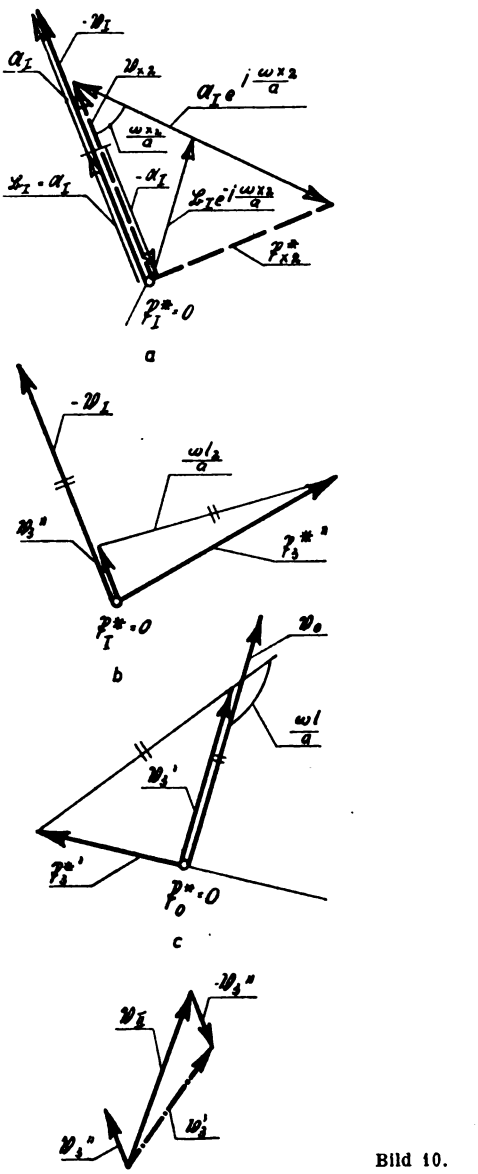


Bild 10.

$$-\mathfrak{V}_I = \mathfrak{A}_I + \mathfrak{V}_I$$
$$\mathfrak{P}_I^* = -\mathfrak{A}_I + \mathfrak{V}_I = 0$$

also

$$\mathfrak{A}_I = \mathfrak{V}_I.$$

Für andere Stellen x_2 im Rohr l_2 sind die Vektoren um die entsprechenden Winkel $\frac{\omega x_2}{a}$ und $-\frac{\omega x_2}{a}$ zu drehen (Plan *a*). Für das Rohrende $x = l$ (oder $x_2 = l_2$) ergibt sich der Plan *b*, wobei der Winkel an der Spitze von $\mathfrak{V}_l''$ gleich $\frac{\omega l_2}{a}$ und die Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck gleich dem Absolutbetrag des Vektors sein muß.

Da auch Rohrteil l am Anfang $x = 0$ offen ist, gilt ein entsprechender Vektorplan (Bildteil *c*), bei dem allerdings Phasenlage und -größe der Vektoren noch nicht bekannt sind. Nimmt man den Anfangszustand $\mathfrak{V}_0$, $\mathfrak{P}_0^* = 0$ an, so folgt daraus der Zustand $\mathfrak{V}_3'$, $\mathfrak{P}_3^{*'}$ am Rohrende. Dort muß aber entsprechend der vorgenommenen Aufteilung $\mathfrak{V}_3' + \mathfrak{V}_3'' = \mathfrak{V}_{II}$ sein. Hieraus ergibt sich $\mathfrak{V}_3'$ (Bildteil *d*); der Vektorplan *c* ist dann noch so zu drehen und im Maßstab zu ändern, daß beide Vektoren $\mathfrak{V}_3'$ zur Deckung kommen. Der wirkliche Schwingungszustand wird gemäß der vorgenommenen Aufteilung

im Rohrteil l_1 durch Plan *c* (angewendet auf Stellen $x > l_1$),

im Rohrteil l_2 durch die geometrische Summe der Pläne *a* und *c* (für $x > l_1$)

Digitized by Google

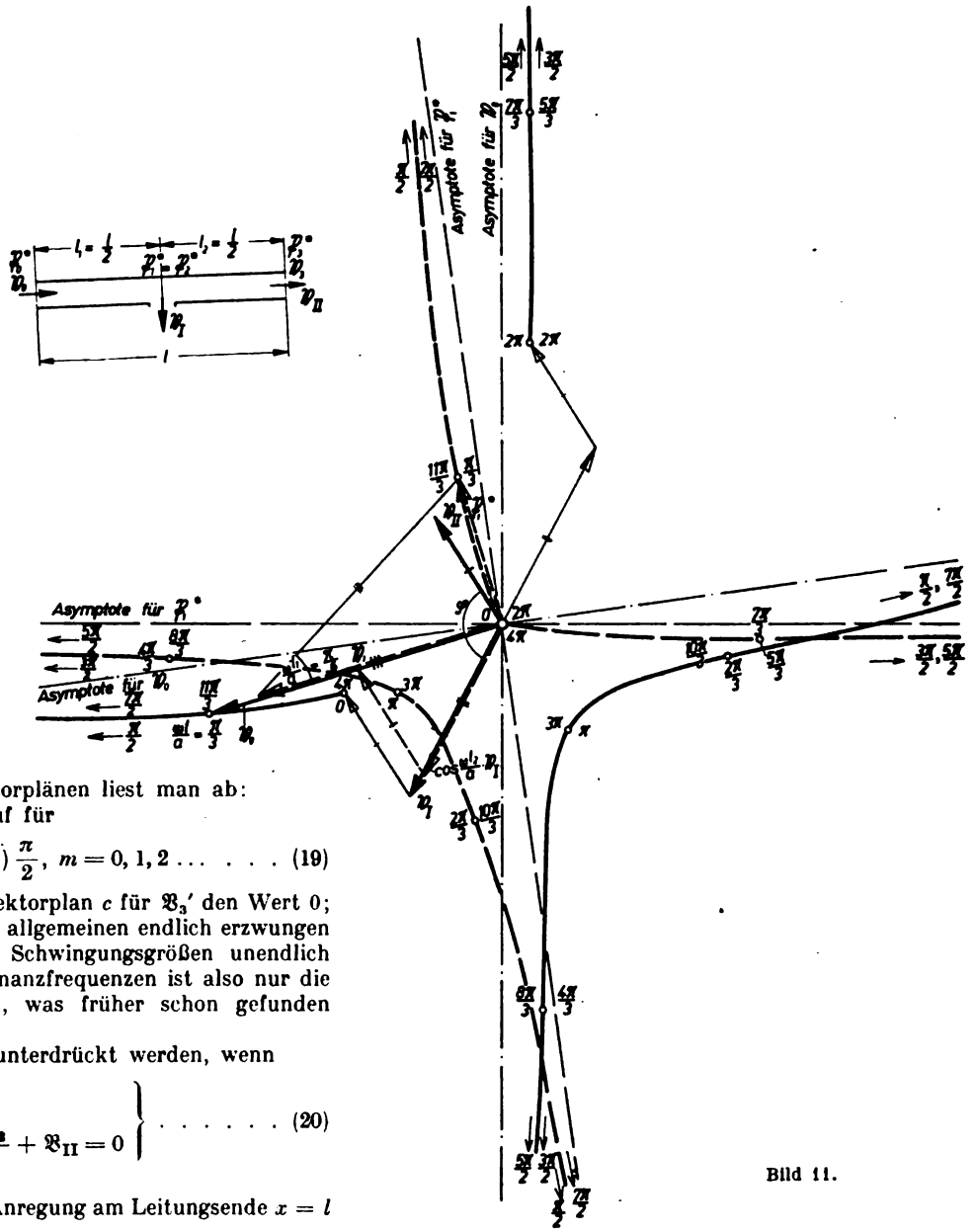


Bild 11.

beschrieben. Aus den Vektorplänen liest man ab:

1. Resonanzen treten auf für

$$\frac{\omega l}{a} = (2m+1)\frac{\pi}{2},\quad m = 0, 1, 2 \ldots \quad \ldots \quad (19)$$

In diesem Fall ergibt der Vektorplan *c* für $\mathfrak{V}_3'$ den Wert 0; da aber nach *d* der Wert im allgemeinen endlich erzwungen wird, müssen alle übrigen Schwingungsgrößen unendlich groß werden. Für die Resonanzfrequenzen ist also nur die Gesamtlänge l maßgebend, was früher schon gefunden wurde.

2. Resonanzen können unterdrückt werden, wenn

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{V}_3'' = \mathfrak{V}_{II} \\ \text{oder}\quad &\mathfrak{V}_I \cos\frac{\omega l_2}{a} + \mathfrak{V}_{II} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

ist.

In diesem Fall ist keine Anregung am Leitungsende $x = l$ vorhanden.

3. Nach (10) können Resonanzen nur unterdrückt werden, wenn die beiden Anregungen in Phase oder um eine halbe Periode versetzt sind.

Nur unter dieser Voraussetzung kann die Vektorsumme verschwinden, und zwar muß noch sein:

$$\cos\frac{\omega l_2}{a} = (\mp)\frac{V_{II}}{V_I} \quad \ldots \ldots \quad (20a)$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus der Phasenlage.

4. Resonanzen können nur unterdrückt werden, wenn die im Zuge der Leitung liegende Anregung größer oder mindestens gleich groß ist wie die Anregung am Leitungsende (vgl. 20a).

Bevor weitere Schlüsse gezogen werden, soll der Gesamtvorgang geschildert und die Resonanzvermeidung näher untersucht werden.

In Bild 11 ist der Verlauf des Gesamtvorgangs für ein Leitungssystem aufgezeichnet, bei dem $l_2 : l = 1:2$ ist. Die Anregungsschwankungen $\mathfrak{V}_I$ und $\mathfrak{V}_{II}$ sind in der Amplitude verschieden und in der Phase um den Winkel φ verschoben.

Zunächst wird aus den Anregungsschwankungen $\mathfrak{V}_I$ und $\mathfrak{V}_{II}$ nach (18a) die Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_0$ am Leitungsanfang $x = 0$ bestimmt, wie aus dem für $\frac{\omega l}{a} = \frac{\pi}{3}$ eingezeichneten Beispiel ersichtlich ist. Durch Wiederholung der Konstruktion ergibt sich der geometrische Ort für die Spitze des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{V}_0$ (ausgezogene Kurve).

Im Gegensatz zu den Ergebnissen bei einfacher Anregung wechselt die Phase der Geschwindigkeitsschwankung; da die Leitungslängen l_2 und l in dem einfachen Verhältnis 1:2 zueinander stehen, zeigt der Vektorplan eine »Periode« von $\frac{\omega l}{a} = 4\pi$ allgemein: $\frac{\omega l}{a} = 2 i_2 i \pi$ für $l_2 = i_2 m$ und $l = i m$. Die Vorgänge werden also sehr verwickelt, wenn l_2 und l nicht kommensurabel sind. Nur eines bleibt: Die Resonanzfrequenzen treten wie beim einfachen Rohr von der Länge l auf, einerlei, wo und wie angeregt wird.

Aus $\mathfrak{V}_0$ kann nach (17) die Druckschwankung $\mathfrak{P}_1^*$ an der Anregungsstelle I bestimmt werden (vgl. wieder das eingezeichnete Beispiel, gestrichelte Kurve). Bemerkenswert ist, daß die Phasenverschiebung zwischen der Druckschwankung $\mathfrak{P}_1^*$ und der Anregungsschwankung $\mathfrak{V}_I$ an dieser Stelle kleiner als eine Viertelperiode werden kann $\left(\text{etwa für } \frac{\omega l}{a} = \pi\right)$. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zu den Vorgängen bei einfach angeregten Leitungen[10]), wo der Phasenunterschied immer größer ist als eine Viertelperiode;

[10]) A. a. O. S. 35 u. f.

Digitized by Google

es deutet darauf hin, daß bei Ansaugleitungen in besonderen Fällen eine Verbesserung des Liefergrads eintreten kann[11]).

Bei der Ermittlung von $\mathfrak{P}_1^*$ ergibt sich auch $\mathfrak{V}_1$; zusammen mit der Anregungsschwankung $\mathfrak{V}_I$ folgt daraus $\mathfrak{V}_2$ und aus dem Zustand $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{P}^*$ $(= \mathfrak{P}_1^*)$ in bekannter Weise $\mathfrak{P}_3^*$. Der geometrische Ort für die Spitze des Vektors $\mathfrak{P}_3^*$ ist der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.

Zur Untersuchung der Resonanzvermeidung werde zum Abschluß noch der praktisch wichtige Fall betrachtet, daß die Anregungsschwankungen $\mathfrak{V}_I$ und $\mathfrak{V}_{II}$ gleich groß und in der Phase um eine halbe Periode verschoben sind. In (18a) ist dann einzusetzen:

$$\mathfrak{V}_I = -\mathfrak{V}_{II},$$

und es folgt

$$\mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l}{a} = \mathfrak{V}_I\left(\cos\frac{\omega l_2}{a} - 1\right) \quad \ldots \quad (21a)$$

Resonanz wird vermieden, wenn

$$\cos\frac{\omega l_2}{a} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21b)$$

ist, also für

$$\frac{\omega l_2}{a} = 2m\pi,\ m = 0, 1, 2 \ldots\ldots \quad \ldots \quad (21c)$$

Sieht man von dem Fall $l_2 = 0$ ab, so ergibt sich die kürzeste Länge l_2, bei der eine Resonanz unterdrückt werden kann, aus

$$\frac{\omega l_2}{a} = 2\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21d)$$

Für die Grundschwingungsform der Gassäule im Rohre (jene Form, bei der keine Schwingungsknotenfläche im Rohr auftritt) gilt aber die Resonanzbedingung

$$\frac{\omega l}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21e)$$

Da nun l_2 voraussetzungsgemäß kleiner als l ist, erkennt man, daß die Resonanz der Grundschwingung nicht unterdrückt werden kann, auch nicht die der ersten Oberschwingung, sondern erst die der zweiten Oberschwingung $\left(\frac{\omega l}{a} = \frac{5\pi}{2}\right)$, und zwar muß dafür

$$l_2 : l = 4 : 5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21f)$$

sein. Zur Vermeidung der Resonanz der dritten Oberschwingung müßte entsprechend

$$l_2 : l = 4 : 7 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21g)$$

gewählt werden usf.; es folgt also:

5. Bei Zweizylindermaschinen mit gleichmäßiger Anregung können durch eine Leitungsanordnung nach Bild 6 die Resonanzen der Grundschwingungsform der Gassäule und der ersten Oberschwingung nicht unterdrückt werden.

6. Mit einer bestimmten Anordnung kann nur jeweils eine Resonanz vermieden werden.

Besitzt die Anregungsschwankung auch Oberharmonische, so ändert sich das Bild nochmals. Da die zweiten Harmonischen bei gleichmäßiger Anregung in Phase sind (wenn die Grundharmonischen um eine halbe Periode versetzt liegen), so folgt

$$\mathfrak{V}_{I_2} = \mathfrak{V}_{II_2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21h)$$

und zur Resonanzvermeidung muß

$$\cos 2\frac{\omega l_2}{a} = -1 \quad \ldots\ldots \quad (21i)$$

oder

$$\frac{\omega l_2}{a} = (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m = 0, 1, 2 \ldots\ldots \quad \ldots \quad (21k)$$

sein. Für die Resonanzfrequenzen gilt aber

$$\frac{\omega l}{a} = (2m+1)\frac{\pi}{4},\ m = 0, 1, 2 \ldots\ldots, \quad (21l)$$

d. h. die erste Resonanzunterdrückung würde für

$$l_2 : l = 2 : 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21m)$$

eintreten. Man hat deshalb das Ergebnis 6 noch enger zu fassen:

7. Bei gleichmäßiger Anregung kann mit der Anordnung nach Bild 6 nur die Resonanz einer bestimmten Oberschwingung mit einer bestimmten Anregungsharmonischen unterdrückt werden.

Auf die Resonanzvermeidung wird später noch einmal eingegangen.

[11]) Hierüber soll später berichtet werden.

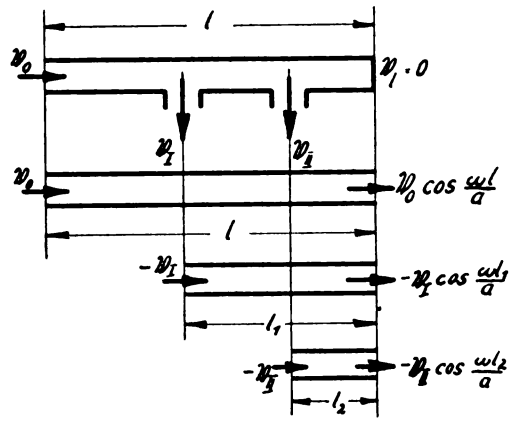


Bild 12.

5. Die Vorgänge bei mehrfacher Anregung.

Nach dem mitgeteilten Verfahren der Aufspaltung in einzelne »offene« Rohre lassen sich die Schwingungsvorgänge in allen unverzweigten Leitungen mit mehrfacher Anregung schnell ermitteln. Hierzu gehört etwa der Fall, daß die Leitung über die letzte Anregungsstelle hinaus verlängert ist und blind endigt. Dies soll zunächst kurz behandelt werden, und dann die allgemeine Lösung für die unverzweigte Leitung mit mehrfacher Anregung angeschrieben werden.

a) Verlängerte Leitung mit zweifacher Anregung.

Die Leitungsanordnung und das Ersatzschema, das in bereits bekannter Weise zu wählen ist, sind in Bild 12 enthalten. Die (gesuchte) Öffnungsschwankung $\mathfrak{V}_0$ bringt am Ende des Ersatzrohres l die Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l}{a}$ hervor, während die Ersatzstücke l_1 und l_2 jeweils die Schwankungsanteile $-\mathfrak{V}_I \cos\frac{\omega l_1}{a}$ und $-\mathfrak{V}_{II}\cos\frac{\omega l_2}{a}$ bringen. Da an dieser Stelle keine Geschwindigkeitsschwankung vorhanden sein kann (Abschlußwand der Leitung), so muß also sein

$$\mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l}{a} = \mathfrak{V}_I \cos\frac{\omega l_1}{a} + \mathfrak{V}_{II}\cos\frac{\omega l_2}{a} \quad . \quad (22a)$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Geschwindigkeitsschwankung am Leitungsanfang, und hieraus in bekannter Weise alle übrigen Schwingungsgrößen.

Zur Resonanzvermeidung — etwa wieder für gleichmäßige Anregung $\mathfrak{V}_I = -\mathfrak{V}_{II}$ — steht nun die Beziehung

$$\cos\frac{\omega l_1}{a} = \cos\frac{\omega l_2}{a} \quad \ldots\ldots \quad (22b)$$

zur Verfügung, die (von der trivialen Lösung $l_1 = l_2$ abgesehen) für

$$\frac{\omega(l_1 + l_2)}{a} = 2m\pi,\ m = 0, 1, 2, \ldots \quad (22c)$$

erfüllt wird. Ohne näher darauf einzugehen, soll nur festgestellt werden, daß mit einer solchen Anordnung schon die erste Oberschwingung der Gassäule unterdrückt werden kann, nicht erst die zweite.

b) Die allgemeine Lösung für die unverzweigte Leitung von gleichem Querschnitt.

Bild 13 zeigt die allgemeine Form einer unverzweigten Leitung gleichen Querschnitts mit n Anregungsstellen.

Die Zerlegung führt zu der allgemeinen Beziehung:

$$\mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l}{a} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{V}_i \cos\frac{\omega l_i}{a} \quad \ldots \quad (23a)$$

Digitized by Google

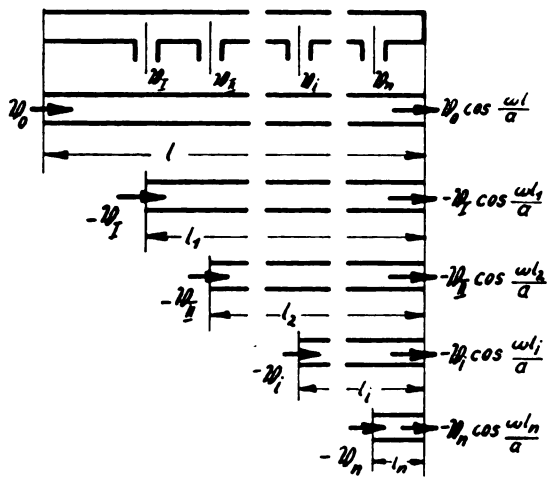


Bild 13.

Es gelten die Sätze:

1. Bei unverzweigten Leitungen von gleichem Querschnitt und mehrfacher Anregung treten Resonanzfrequenzen auf wie in einem am einen Ende offenen Rohr von der Gesamtlänge der Leitung. das am anderen Ende angeregt wird, also für

$$\frac{\omega l}{a} = (2m+1)\frac{\pi}{2},\quad m = 0, 1, 2 \ldots\ldots \quad (23\text{b})$$

2. Resonanzen können unterdrückt werden für

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{V}_i \cos\frac{\omega l_i}{a} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (23\text{c})$$

6. Einfluß von Drosselungen und Querschnittsänderungen.

Das Verfahren der Zerlegung in einzelne einfache Rohre läßt sich auch auf die Vorgänge in Leitungen mit Querschnittsänderung und solchen mit Drosselstellen ausdehnen.

Tritt in einer Leitung eine Querschnittsänderung nach Bild 3 auf, so kann nach den eingangs aufgezählten Randbedingungen (12a) und (d)

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{f_1}{f_2}\mathfrak{V}_1,$$
$$\mathfrak{P}_2^* = \mathfrak{P}_1^*$$

gesetzt werden, sofern die mittlere Rohrgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit klein ist. Spaltet man auf in

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}_1 &= \left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2,\\ \mathfrak{P}_1^* &= \mathfrak{P}_2^*,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

so hat man eine ähnliche Randbedingung wie bei dem seitlich angeregten Rohr (vgl. (17e) und (f)), so daß der Ersatz nach Bild 14 gewählt werden kann.

In bekannter Weise gilt

$$\mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l}{a} - \left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)\mathfrak{V}_1 \cos\frac{\omega l_2}{a} = \mathfrak{V}_3;$$

da aber

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega l_1}{a}$$

ist, folgt

$$\mathfrak{V}_0\left\{\cos\frac{\omega l}{a} - \left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)\cos\frac{\omega l_1}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a}\right\} = \mathfrak{V}_3$$

oder

$$\mathfrak{V}_0\left\{\frac{f_1}{f_2}\cos\frac{\omega l_1}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a} - \sin\frac{\omega l_1}{a}\sin\frac{\omega l_2}{a}\right\} = \mathfrak{V}_3 \quad (25\text{a})$$

Die Resonanzbedingung ist

$$\operatorname{tg}\frac{\omega l_1}{a}\operatorname{tg}\frac{\omega l_2}{a} = \frac{f_1}{f_2} \quad \ldots\ldots \quad (25\text{b})$$

Das Ergebnis stimmt mit dem auf andere Weise[12]) gefundenen überein.

[12]) A. a. O. S. 41 u. f.

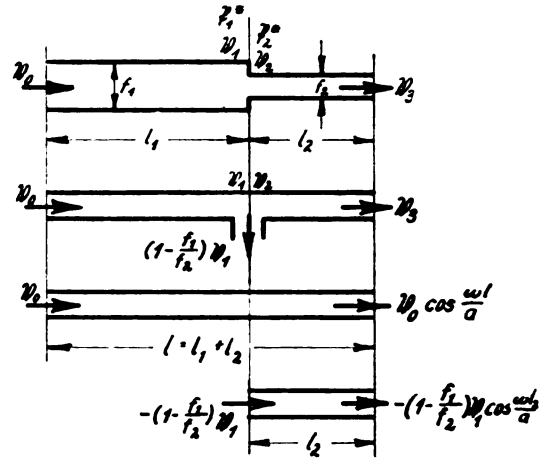


Bild 14.

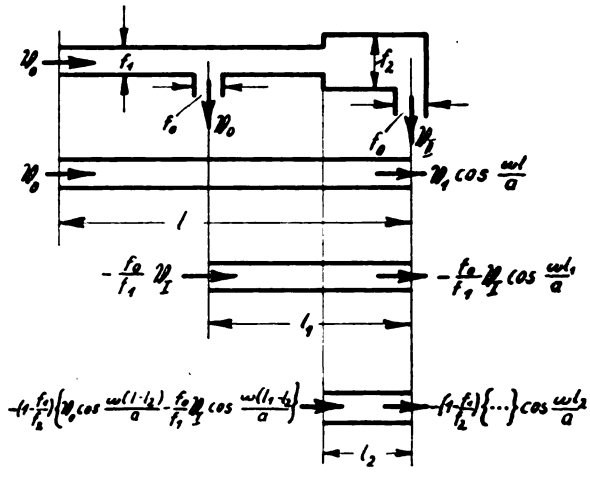


Bild 15.

a) Leitung mit zweifacher Anregung und Querschnittsänderung.

Als Beispiel für den Einfluß von Querschnittsänderungen werden die in Bild 15 enthaltene Leitung mit zwei Anregungsstellen und einer dazwischen liegenden Querschnittsänderung untersucht.

Die entsprechende Aufspaltung ist bereits in Bild 15 enthalten; man liest daraus folgenden Zusammenhang ab:

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{V}_0\cos\frac{\omega l}{a} - \left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)\mathfrak{V}_0\cos\frac{\omega(l-l_2)}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a}\\ &= \frac{f_0}{f_1}\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}\cos\frac{\omega l_1}{a}\\ &\quad - \left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)\frac{f_0}{f_1}\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}\cos\frac{\omega(l_1-l_2)}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a} + \frac{f_0}{f_2}\mathfrak{V}_{\mathrm{II}}\\ &\text{oder}\\ &\mathfrak{V}_0\left\{\frac{f_1}{f_2}\cos\frac{\omega(l-l_2)}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a} - \sin\frac{\omega(l-l_2)}{a}\sin\frac{\omega l_2}{a}\right\}\\ &= \frac{f_0}{f_1}\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}\left\{\frac{f_1}{f_2}\cos\frac{\omega(l_1-l_2)}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a}\right.\\ &\quad \left. - \sin\frac{\omega(l_1-l_2)}{a}\sin\frac{\omega l_2}{a}\right\} + \frac{f_0}{f_2}\mathfrak{V}_{\mathrm{II}}\end{aligned}\right\} \quad (26\text{a})$$

Resonanzen treten auf für

$$\operatorname{tg}\frac{\omega(l-l_2)}{a}\operatorname{tg}\frac{\omega l_2}{a} = \frac{f_1}{f_2}; \quad \ldots\ldots \quad (26\text{b})$$

bei »gleichmäßiger« Anregung ($\mathfrak{V}_{\mathrm{I}} = -\mathfrak{V}_{\mathrm{II}}$) können sie durch die Erfüllung folgender Bedingung unterdrückt werden:

$$\cos\frac{\omega(l_1-l_2)}{a}\cos\frac{\omega l_2}{a} - \frac{f_2}{f_1}\sin\frac{\omega(l_1-l_2)}{a}\sin\frac{\omega l_2}{a} = 1 \quad (26\text{c})$$

Auf eine weitere Diskussion soll verzichtet werden.

Digitized by Google

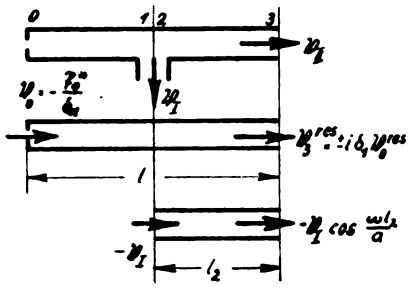


Bild 16.

In der gezeigten Weise lassen sich alle unverzweigten Leitungen mit Querschnittsänderung behandeln.

b) Leitung mit Drosselung.

In Ansaugleitungen von Ottomotoren findet an der Vergaserdrossel eine starke Einschnürung des Gasweges statt, die die Ausbildung der Schwingungsvorgänge beeinflussen muß.

Die Drosselstelle liege nach Bild 16 am Beginn der Ansaugleitung; als Beispiel sei wieder zweifache Anregung angenommen.

Die Zerlegung gilt wieder in gleicher Form, da sich an den Randbedingungen (17e) und (f) an der Stelle 1, 2 nichts ändert.

Als einziger Unterschied gegenüber Ziffer 4 bleibt der geänderte Vorgang im Ersatzstück 1. Die Vorgänge in einem Rohr mit Drosselung sind an anderer Stelle eingehend behandelt worden[13]). Als wesentliche Ergebnisse kann man übernehmen:

[13]) A. a. O. S. 37 u. f.

1. Resonanz tritt ein für

$$\frac{\omega l}{\alpha} = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots \ldots \quad (27a)$$

d. h. wie in einem Rohr ohne Drosselstelle. Nur wenn $\delta_1 > 1$ (vgl. Ziffer 3, b, β) wird, tritt ein Unterschied auf; nun verhält sich das Rohr wie ein an beiden Enden geschlossenes, und für die Resonanzen gilt

$$\frac{\omega l}{\alpha} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2 \ldots \ldots \quad (27b)$$

2. In der Resonanz wird (für $\delta_1 < 1$)

$$\mathfrak{B}_3^{res} = \pm i\,\delta_1\,\mathfrak{B}_0^{res} \quad \ldots \ldots \quad (27c)$$

Es folgt daraus für die Vorgänge in der Resonanz:

$$\mathfrak{B}_0^{res} = \mp i\,\frac{1}{\delta_1}\left(\mathfrak{B}_I \cos\frac{\omega l_2}{a} + \mathfrak{B}_{II}\right) \ldots \quad (28)$$

Je schärfer die Drosselung, desto geringer werden die Resonanzamplituden.

Da die Vorgänge in gedrosselten Rohren schon eingehend geklärt und beschrieben sind, erübrigt sich ein weiteres Eingehen.

7. Zusammenfassung.

Die Schwingungsvorgänge in mehrfach angeregten, unverzweigten Leitungen lassen sich durch Zerlegen des Leitungssystems in einzelne, an der Anregungsstelle »offene« Rohre auf bereits bekannte, einfache Zusammenhänge zurückführen.

In einem späteren Bericht sollen die Vorgänge in verzweigten Leitungen behandelt und andere Anregungen — die etwa den Ansaugvorgang bei Verbrennungsmotoren besser wiedergeben — untersucht werden.

Digitized by Google

Der Flugweg in Blindflugkurven, insbesondere bei Schlechtwetterlandungen.

Von H. Nautsch, Berlin.

Es wird ein Weg angegeben, den Flugweg in Kurven unter Berücksichtigung des Windes rechnerisch und zeichnerisch zu erfassen. Dabei wird auf die Möglichkeit hingewiesen, entsprechend hergerichtete Figuren direkt als Navigationshilfsmittel — z. B. für Schlechtwetterlandungen — zu verwerten. Das angegebene Verfahren erlaubt dem fortgeschrittenen Blindflug- und Navigations-Fachmann, die Anwendungsmöglichkeiten und die Genauigkeit bisher verwendeter Methoden zu überprüfen und ihre Verbesserung zu erleichtern.

Gliederung.

A. Einleitung.
B. Die Berechnung des Flugweges.
I. Die Blindflugkurve bei Windstille.
II. Die Blindflugkurve bei Wind.
III. Die Flugzeit in der Kurve.
IV. Der Windkurs während der Kurve.
V. Berechnete Werte für die Zeichnung des Flugweges.
VI. Der Grundkurs (rw. Kurs) während der Kurve.
VII. Zeitlicher Maßstab.
VIII. Flugweg und Flugzeit von und bis zu der Blindflugkurve.
IX. Ergebnis.
C. Anwendungsbeispiele bei Schlechtwetterlandungen.
D. Schlußbemerkungen.

A. Einleitung.

Von den verschiedenen Faktoren der Luftnavigation ist der Windeinfluß als der wichtigste seit langem bekannt. Zu seiner Berücksichtigung sind Tabellen und Geräte eingeführt, um für alle möglichen Fälle Luvwinkel bzw. Grundkurs und Grundgeschwindigkeit zu berechnen, allerdings nur bei geraden Flugstrecken.

Der Flugweg in der Kurve — insbesondere unter Berücksichtigung des Windes — wurde für die Navigation bisher meist vernachlässigt oder nur roh abgeschätzt. Für längere Flüge mag dies angängig sein, jedoch nicht mehr für Schlechtwetterlandungen, weil hier die Kurvenflugzeit einen wesentlichen Teil der Flugzeit überhaupt ausmacht. Bei den heute üblichen Schlechtwetterlandeverfahren beträgt die Zeit, innerhalb der sich das Flugzeug in Kurven befindet, wenigstens etwa 2 bis 4 min; das Verhältnis der Flugzeiten zwischen Kurven- und Geradeausflug während des eigentlichen Landeverfahrens (nachdem das Flugzeug bereits einmal über dem Platz gestanden hat) wird in der Zukunft voraussichtlich sich noch vergrößern, da man aus erklärlichen Gründen bestrebt ist, die Landezeit auf ein Minimum herabzudrücken. Für eine genaue Navigation während des Landeverfahrens muß daher der Flugweg während der Kurven berücksichtigt werden.

Die heute geübte Blindflugpraxis macht diese Aufgabe verhältnismäßig einfach, weil — wenigstens während des Fluges in Wolken — eine bestimmte Kurvenart sich eingebürgert hat, die sogenannte Blindflugkurve, d. i. eine Kurve mit der Winkelgeschwindigkeit 2°/s, wobei die 360°-Vollkurve genau 180 s dauert. Für diese Winkelgeschwindigkeit werden in Deutschland die Wendezeiger justiert, die dabei eine Zeigerbreite Ausschlag aufweisen; auch für den selbsttätigen Kurvenflug mit Hilfe selbsttätiger Steuerungen sind diese Werte vorgesehen.

B. Die Berechnung des Flugweges.

I. Die Blindflugkurve bei Windstille.

Der Flugweg in der Blindflugkurve ist bei Windstille ein Kreis mit dem Radius $R = \frac{e}{\omega} \cdot k$[1]), wobei k ein Faktor ist, der sich durch die Umrechnung der physikalischen Meßeinheiten in die in der Luftfahrt gebräuchlichen ergibt.

Mißt man e in km/h und setzt als Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2°/\text{s} \left(= \frac{2\pi}{180\,\text{s}}\right)$ ein, so erhält man R (in Metern ausgedrückt):

$$R = \frac{e \cdot 180}{3{,}6 \cdot 2\pi} = 7{,}9578 \cdot e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

II. Die Blindflugkurve bei Wind.

Bei Wind wird auch während der Kurve das Flugzeug ständig um einen gewissen Betrag, der von Windgeschwindigkeit und Richtung abhängt, von der Kreisbahn abgetrieben. Der Flugweg in der Kurve wird also durch einen Kreis gebildet, dessen Mittelpunkt ständig wandert in einer Richtung und mit einer Geschwindigkeit, die der Windrichtung bzw. der Windgeschwindigkeit entspricht.

Geometrisch kann man diesen Flugweg in der Blindflugkurve konstruieren, indem man einen (kleineren) Kreis (r) auf einer Geraden abrollen läßt, Bild 1, und dabei den Weg aufzeichnet, den ein mit dem Kreis verbundener Punkt zurücklegt. Dieser Punkt liegt auf einem verlängerten Halbmesser des Kreises in einer Entfernung (R) vom Kreismittelpunkt, welche von der Eigengeschwindigkeit abhängt und gleich dem Radius der Blindflugkurve $R = \frac{e}{\omega} \cdot k$ ist. Der Radius des auf der Geraden abrollenden Kreises (r) hingegen hängt ab von der Windgeschwindigkeit (W) und der Winkelgeschwindigkeit und ist $r = \frac{W}{\omega} \cdot k$. Die Rich-

[1]) e = Eigengeschwindigkeit, km h, ω = Winkelgeschwindigkeit, ° s.

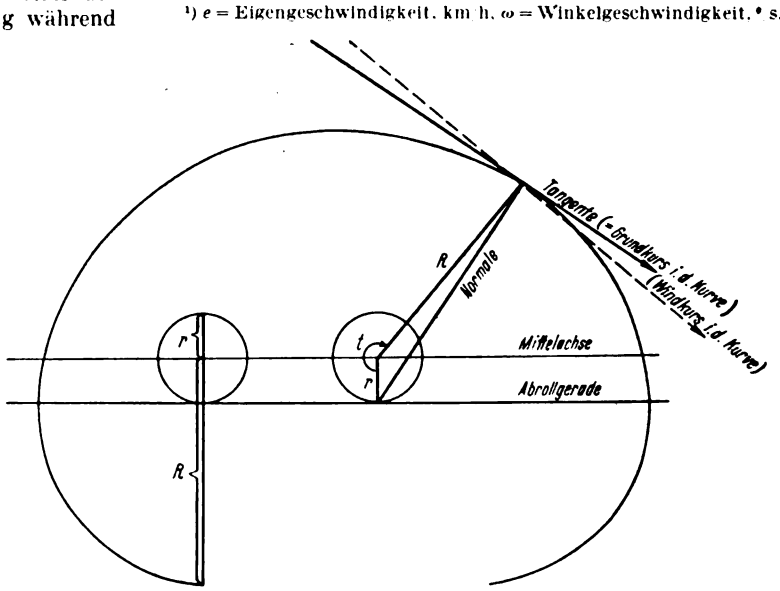


Bild 1. Entstehung der Zykloide durch Abrollen des Kreises (r) mit dem Ausleger (R) auf der Abrollgeraden.

Digitized by Google

tung der Abrollgeraden entspricht der Windrichtung. Das bei einer solchen Konstruktion entstehende Bild nennt man Radlinie oder Zykloide; die mathematische Form dafür lautet in Parameterdarstellung bei rechtwinkeligen Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x &= rt - R\sin t \\ y &= -R\cos t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Der in Gleichung (2) auftretende Parameter t bedeutet mathematisch den Wälzungswinkel, um den der Kreis abrollt.

Praktisch entspricht er (bis auf konstante Faktoren) der Flugzeit nach Beginn der Kurve bzw. dem Windkurs[2]).

III. Die Flugzeit in der Kurve.

Für die Blindflug-Rechtskurve ergibt sich

$$t = \frac{2\pi}{180}\,T \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Faßt man die Gleichungen (1), (2) und (3) zusammen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}2778 \cdot W \cdot T - 7{,}9578 \cdot e \cdot \sin\,(T \cdot 2^0) \\ y &= -7{,}9578 \cdot e \cdot \cos\,(T \cdot 2^0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

Hierin bedeuten

W die Windgeschwindigkeit, km/h,
e die Eigengeschwindigkeit, km/h,
T die Kurvenflugzeit, s (seit Verlassen des Kurses gegen den Wind),
x und y sind in Metern ausgedrückt.

Die x-Achse entspricht dabei der Windrichtung.

IV. Der Windkurs während der Kurve.

An Stelle der Flugzeit (T) kann man den Windkurs (WK) einführen. Für Wind aus rw. Nord lassen die obigen Gleichungen sich in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}1389 \cdot W \cdot WK - 7{,}9578 \cdot e \cdot \sin\,(WK) \\ y &= -7{,}9578 \cdot e \cdot \cos\,(WK) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

Für beliebige Windrichtung (WR) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}1389 \cdot W \cdot (WK - WR) - 7{,}9578 \cdot e \cdot \sin\,(WK - WR) \\ y &= -7{,}9578 \cdot e \cdot \cos\,(WK - WR) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

In jedem Falle muß das Koordinatensystem nach der Windrichtung orientiert werden. Handelt es sich um eine Rechtskurve, so muß die positive x-Achse mit der Richtung übereinstimmen, nach welcher der Wind weht. Bei einer Linkskurve muß die positive x-Achse dem Wind entgegengerichtet sein.

V. Berechnete Werte für die Zeichnung des Flugweges.

Die Gleichungen (4—6) lassen erkennen, daß die Form der Blindflugkurve nur von dem Verhältnis zwischen Wind- und Eigengeschwindigkeit $\left(\frac{W}{e}\right)$ abhängig ist und daß deren Absolutwerte bei der Zeichnung nur den Maßstab bestimmen.

Zahlentafel 1 enthält die x- und y-Werte für verschiedene Verhältnisse $\frac{W}{e}$. In Bild 2 ist der Weg in der Blindflugkurve für das Verhältnis $\frac{W}{e} = 0{,}2$ abgebildet. Die Kurve ist für $W = 30$ km/h, $e = 150$ km/h berechnet unter Zugrundelegung des Längenmaßstabes 1 : 40000. Bild 2 gilt jedoch für alle Blindflugkurven mit dem gleichen Verhältnis zwischen Wind- und Eigengeschwindigkeit $\frac{W}{e} = 0{,}2$. Für

Zahlentafel 1. Zykloidenwerte für verschiedene Verhältnisse $\frac{W}{e}$.

Windkurs	y	x für $\frac{W}{e}$ = 0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0	−796	0	0	0	0	0	0	0
10	−784	−124	−117	−110	−103	− 96	− 83	− 69
20	−748	−244	−230	−216	−202	−188	−161	−133
30	−690	−356	−335	−314	−293	−272	−231	−190
40	−610	−456	−428	−400	−372	−344	−289	−234
50	−512	−541	−506	−472	−437	−403	−333	−263
60	−398	−607	−565	−524	−482	−441	−357	−273
70	−272	−651	−602	−554	−505	−457	−369	−262
80	−138	−673	−617	−562	−506	−451	−340	−229
90	− 0	−671	−609	−546	−484	−421	−296	−171
100	+138	−645	−576	−506	−437	−367	−228	− 89
110	+272	−595	−519	−442	−366	−289	−137	+ 16
120	+398	−523	−440	−356	−273	−189	− 23	+143
130	+512	−429	−339	−248	−158	− 67	+113	+293
140	+610	−318	−221	−124	− 27	+ 70	+265	+460
150	+690	−190	− 86	+ 18	+122	+226	+435	+643
160	+748	− 50	+ 61	+172	+283	+394	+617	+839
170	+784	98	216	354	452	570	806	1042
180	796	250	375	500	625	750	1000	1250
190	784	402	534	664	796	928	1193	1457
200	748	550	689	828	967	1106	1383	1661
210	690	690	836	982	1128	1274	1565	1856
220	610	818	971	1124	1277	1430	1735	2040
230	512	930	1090	1250	1410	1570	1888	2207
240	398	1024	1191	1358	1525	1692	2024	2357
250	272	1095	1269	1442	1626	1789	2137	2484
260	138	1145	1326	1506	1687	1867	2228	2589
270	0	1171	1359	1546	1734	1921	2296	2672
280	−138	1173	1367	1562	1756	1951	2340	2729
290	−272	1151	1352	1554	1755	1957	2359	2762
300	−398	1107	1315	1524	1732	1941	2357	2773
310	−512	1040	1255	1470	1685	1902	2332	2763
320	−610	956	1178	1400	1622	1844	2289	2734
330	−690	856	1085	1314	1533	1772	2231	2689
340	−748	744	980	1216	1452	1688	2161	2633
350	−784	624	867	1110	1353	1569	2082	2568
360	−796	500	750	1000	1250	1500	2000	2500
360 + 10	−784	376	633	890	1147	1404	1917	2431
20	−748	256	520	784	1048	1312	1839	2367
30	−690	144	415	686	957	1227	1768	2310
40	−610	44	322	600	878	1156	1711	2266
50	−512	− 41	244	528	813	1098	1668	2237
60	−398	−107	185	476	768	1059	1643	2227
70	−272	−151	148	446	745	1043	1641	2238
80	−138	−173	133	438	744	1049	1660	2271
90	+ 0	−171	141	454	766	1079	1704	2329

Die vorstehenden x- und y-Werte sind in Meter für $e = 100$ km/h berechnet. Wenn man als Maßstabseinheit 0,1 mm wählt, erhält man damit die Zykloide in den Maßstäben: 1 : 10000 1 : 15000 1 : 20000 1 : 25000 für e = 100 km/h 150 km/h 200 km/h 250 km/h, wobei im Zeitmaßstab 1 min = 166,666 mm ist.

Für den Längenmaßstab 1:25000 (Meßtischblatt) muß man als Einheit 0,08 mm **bei $e = 200$ km/h** bzw. 0,06 mm bei $e = 150$ km/h wählen.

[2]) Windkurs (früher auch häufig Steuerkurs genannt) ist der Winkel zwischen Flugzeuglängsachse und Meridian.

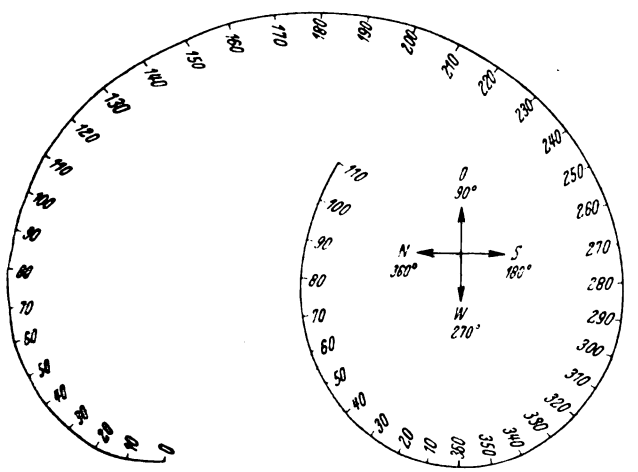


Bild 2. Blindflugkurve für $\frac{W}{e} = 0{,}2$. Die der Zykloide beigeschriebenen rw. Windkurse gelten für Rechtskurve bei Wind aus rw. 360° (bzw. für Linkskurve bei Wind aus rw. 180°). Maßstab vergl. Bild 3.

Digitized by Google

andere Absolutwerte ändert sich nur der Längenmaßstab; z. B. beträgt für

$W = 40$ km/h und $e = 200$ km/h der Längenmaßstab 1 : 53333

$W = 60$ km/h und $e = 300$ km/h der Längenmaßstab 1 : 80000.

Die in Bild 2 der Flugwegkurve beigeschriebenen Grad-Zahlen entsprechen dem Wert »rw. Windkurs minus Windrichtung« ($WK - WR$), bei Wind aus rw. Nord und Rechtskurve also dem rw. Windkurs. Diese Gradzahlen gelten auch für alle Flugstrecken (über Grund), welche die Flugwegkurve an diesen Punkten berühren oder welche diesen Tangenten parallel verlaufen.

VI. Der Grundkurs (rw. Kurs) während der Kurve.

Die Richtung dieser Tangenten ist nicht identisch mit der angegebenen Windkursrichtung (vgl. auch Bild 1), sie entspricht ja auch nicht dem Windkurs (Kurs durch die Luft) sondern dem Grundkurs — bei Wind aus rw. Nord und Rechtskurve also dem rw. Kurs. Diese Grundkurswerte (Zahlentafel 2, Bild 3) kann man (Bild 3) auch der Flugwegkurve beischreiben. Die Differenz zwischen Grundkurs- und Windkurszahl entspricht dann dem Luvwinkel für den Grundkurs bzw. der Abtrift für den Windkurs.

VII. Zeitlicher Maßstab.

Wegen der einfachen Beziehung zwischen Windkurs und Flugzeit (2°-Kursänderung gleich 1 s-Zeitänderung) kann man einen zeitlichen Maßstab einführen, welcher unabhängig von den Absolutwerten für Wind und Eigengeschwindigkeit ist und nur von dem Verhältnis $\frac{W}{e}$ abhängt.

Beim Gebrauch eines solchen Zeitmaßstabes (Bild 3) ist jedoch zu berücksichtigen, daß er nur für den Flugweg durch die Luft gilt, also nur für den Windkurs direkt anwendbar ist, jedoch nicht ohne weiteres auch für den Grundkurs, weil die Grundgeschwindigkeit ja für die einzelnen Kurse verschieden ist.

Man kann aber an die Kurve — z. B. von 10° zu 10° die Tangenten (Grundkurse) einzeichnen und an ihnen den jeweilig zugeordneten zeitlichen Maßstab für den Flugweg

Zahlentafel 2. Windkurswerte für rw.-Kurswerte*) (Kurse über Grund).

Kurs über Grund	Windkurs für $\frac{W}{e}$ = 0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0	0
10	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0	6,0	5,0
20	18,0	17,1	16,1	15,1	14,1	12,2	10,2
30	27,1	25,7	24,3	22,8	21,4	18,5	15,6
40	36,3	34,5	32,6	30,8	28,9	25,1	21,3
50	45,6	43,4	41,2	39,0	36,7	32,2	27,6
60	55,0	52,5	50,1	47,5	45,0	39,8	34,4
70	64,6	61,9	59,2	56,4	53,7	48,0	42,0
80	74,4	71,6	68,7	65,9	62,9	56,9	50,6
90	84,3	81,4	78,5	75,6	72,6	66,4	60,0
100	94,4	91,6	88,7	85,9	82,9	76,9	70,6
110	104,6	101,9	99,2	96,4	93,7	88,0	82,0
120	115,0	112,5	110,1	107,5	105,0	99,8	94,4
130	125,6	132,4	121,2	119,0	116,7	112,2	107,6
140	136,3	134,5	132,6	130,8	128,9	125,1	121,3
150	147,1	145,7	144,3	142,8	141,4	138,5	135,6
160	158,0	157,1	156,1	155,1	154,1	152,2	150,2
170	169,0	168,5	168,0	167,5	167,0	166,0	165,0
180	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0
190	191,0	191,5	192,0	192,5	193,0	194,0	195,0
200	202,0	202,9	203,9	204,9	205,9	207,8	209,8
210	212,9	214,3	215,7	217,2	218,6	221,5	224,4
220	223,7	225,5	227,4	229,2	231,1	234,9	238,7
230	234,4	236,6	238,8	241,0	243,3	247,8	252,4
240	245,0	247,5	249,9	252,5	255,0	260,2	265,6
250	255,4	258,1	260,8	263,6	276,3	272,0	278,0
260	265,6	268,4	271,3	274,1	277,1	283,1	289,4
270	275,7	278,6	281,5	284,4	287,4	293,6	300,0
280	285,6	288,4	291,3	294,1	297,1	303,1	309,4
290	295,4	298,1	300,8	303,6	306,3	312,0	318,0
300	305,0	307,5	309,9	312,5	315,0	320,2	325,6
310	314,4	316,6	318,8	321,0	323,3	327,8	332,4
320	323,7	325,5	327,4	329,2	331,1	334,9	338,7
330	332,9	334,3	335,7	337,2	338,6	341,5	344,4
340	342,0	342,9	343,9	344,9	345,9	347,8	349,8
350	351,0	351,5	352,0	352,5	353,0	354,0	355,0
360	360,0	360,0	360,0	360,0	360,0	360,0	360,0

*) Bei Windrichtung rw 360°.

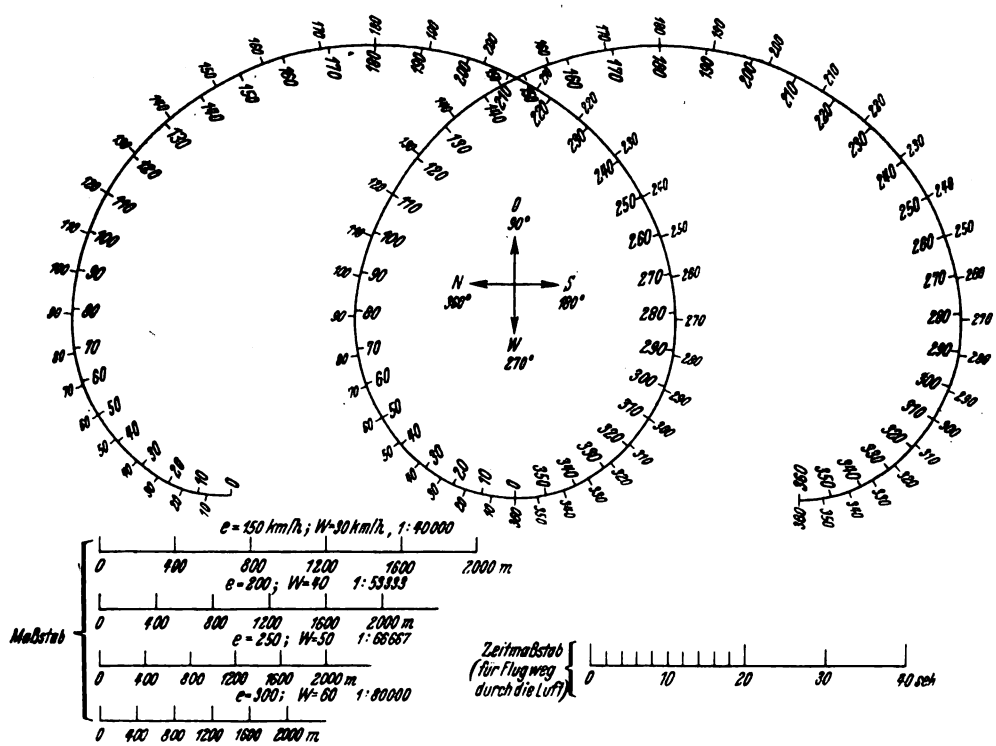


Bild 3. Blindflugkurve für $\frac{W}{e} = 0{,}2$. Bei Wind aus rw. 360° und Rechtskurve bedeuten die der Zykloide beigeschriebenen Zahlen 0,10 . . . . rw. Kurse 0.10 . . . . rw. Windkurse.

Digitized by Google

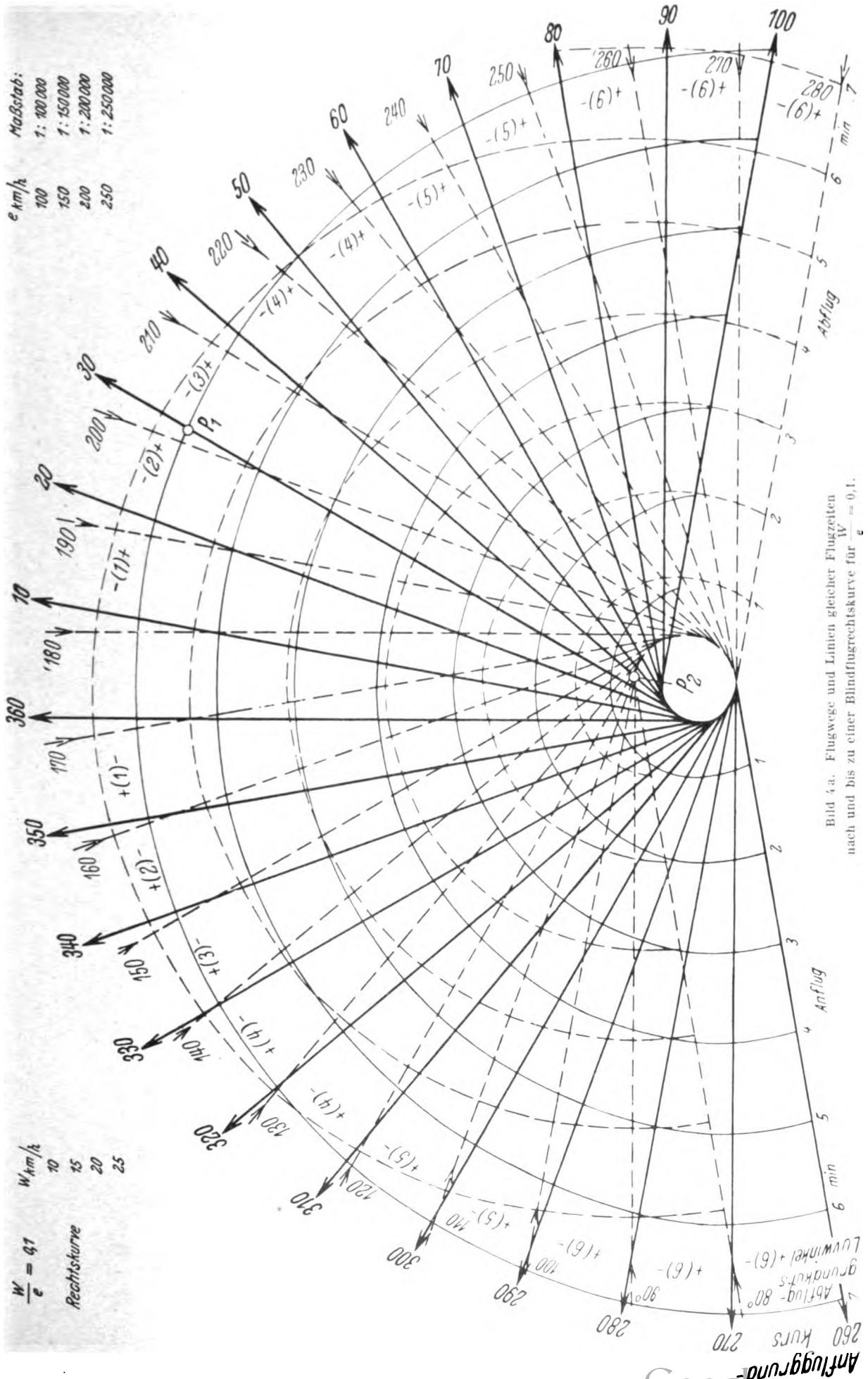


Bild 4a. Flugwege und Linien gleicher Flugzeiten nach und bis zu einer Blindflugrechtskurve für $\frac{W}{e} = 0{,}1$.

Digitized by Google

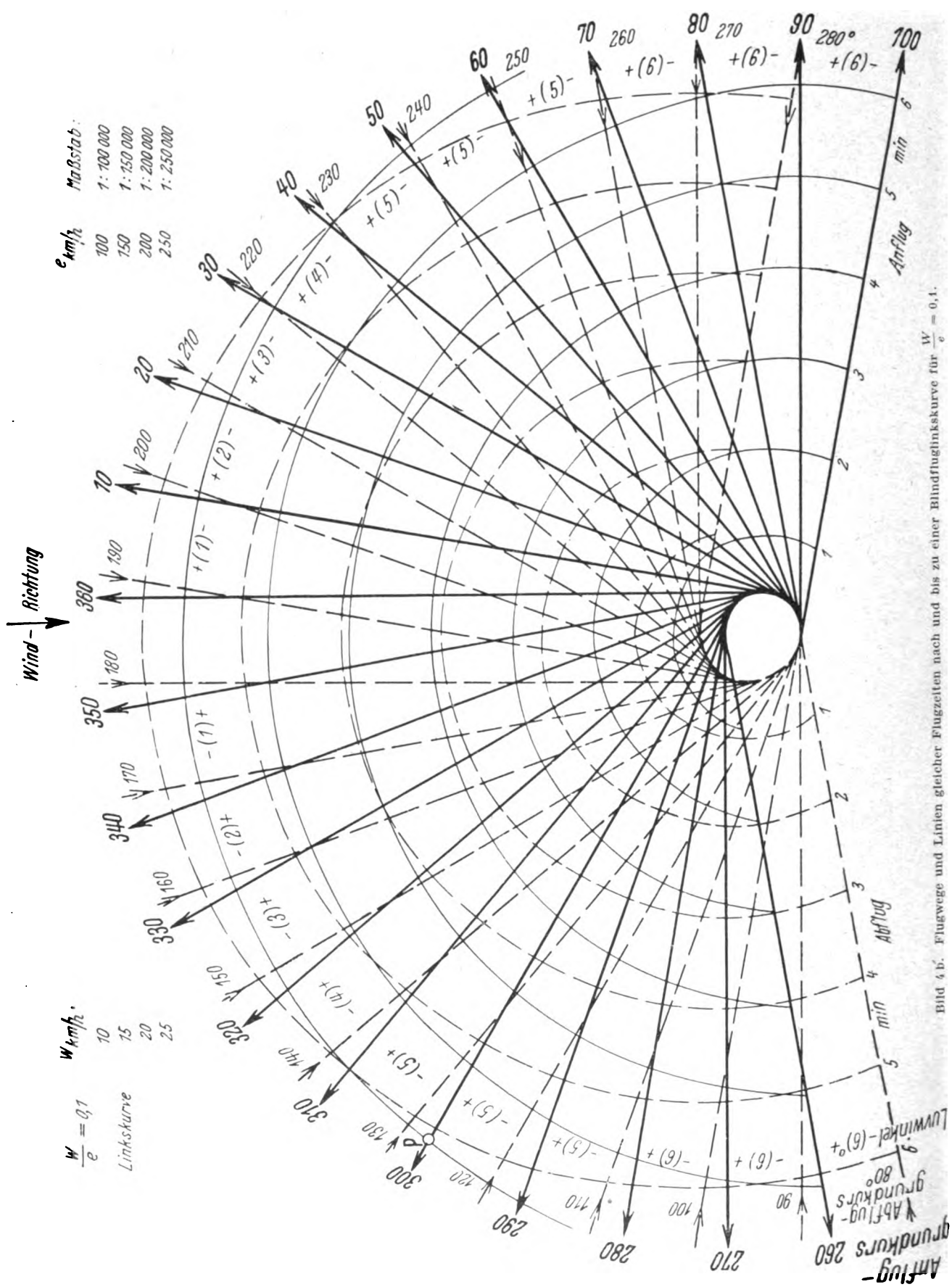


Bild 4 b. Flugwege und Linien gleicher Flugzeiten nach und bis zu einer Blindflugkurve für $\frac{W}{e} = 0{,}1$.

Digitized by Google

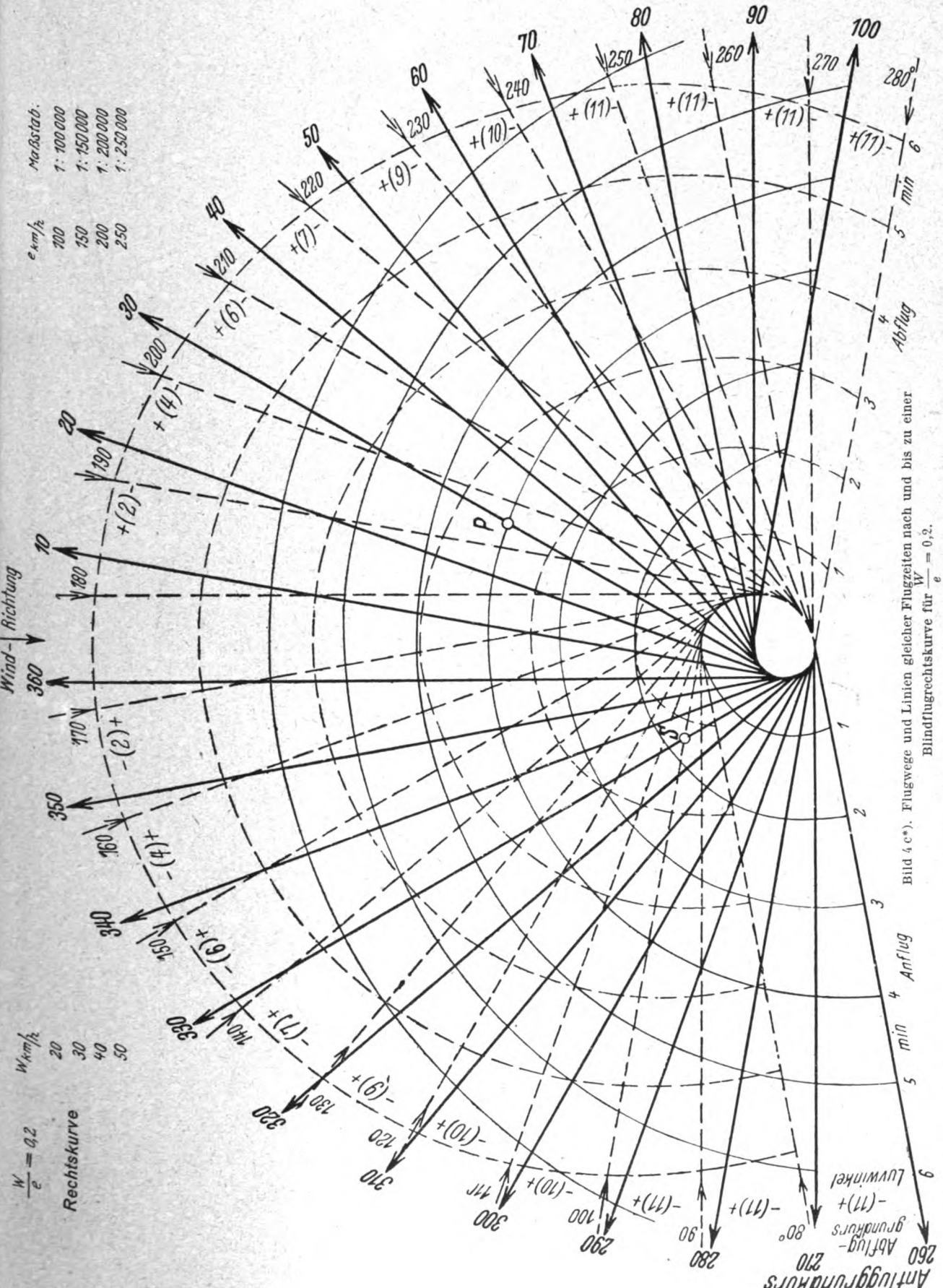


Bild 4 c*). Flugwege und Linien gleicher Flugzeiten nach und bis zu einer Blindflugrechtskurve für $\frac{W}{e} = 0{,}2$.

*) Berichtigung: Bei den Luvwinkelwerten sind die Vorzeichen + und — zu vertauschen. Bei der Linie gleicher Anflugzeit „1 min“ fehlt versehentlich ein Stück.

Digitized by Google

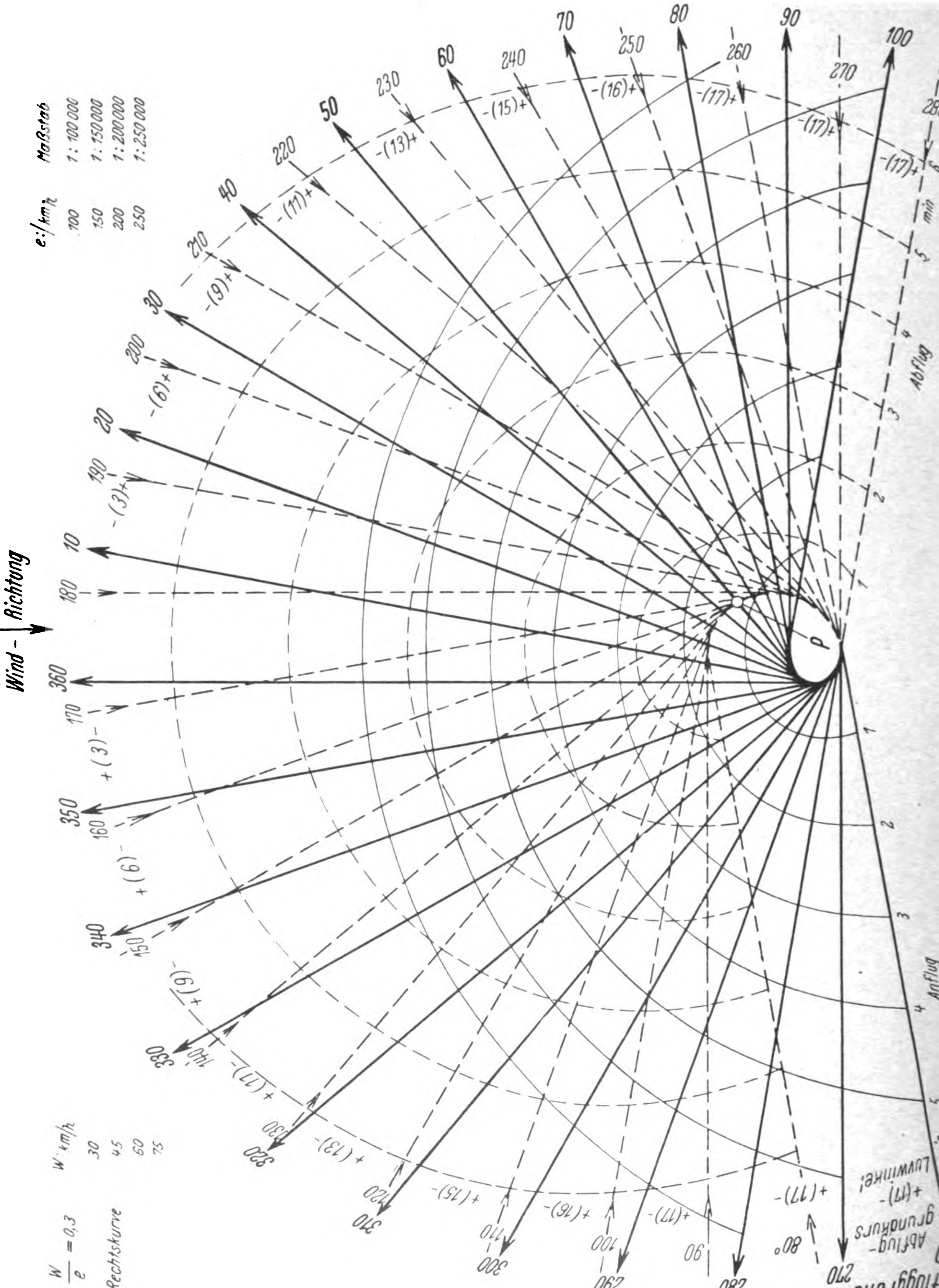


Bild 4d. Flugwege und Linien gleicher Flugzeiten nach und bis zu einer Blindflugrechtskurve für $\frac{W}{e} = 0{,}3$.

über Grund abtragen, wobei aber zu unterscheiden ist zwischen dem Flugweg bis zur Kurve und dem Flugweg nach der Kurve (Bild 4a—d).

Für die Zeichnung solcher Figuren gelten die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 0{,}2778 \cdot W \cdot T - 7{,}9578 \cdot e \cdot \sin(T \cdot 2^0) \\ &\quad - 0{,}2778 \cdot n \cdot e \cdot \cos(T \cdot 2^0) + 0{,}2778 \cdot n \cdot W \\ Y_n &= -7{,}9578 \cdot e \cdot \cos(T \cdot 2^0) + 0{,}2778 \cdot n \cdot e \cdot \sin(T \cdot 2^0) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} X_b &= 0{,}2778 \cdot W \cdot T - 7{,}9578 \cdot e \cdot \sin(T \cdot 2^0) \\ &\quad + 0{,}2778 \cdot b \cdot e \cdot \cos(T \cdot 2^0) - 0{,}2778 \cdot b \cdot W \\ Y_b &= -7{,}9578 \cdot e \cdot \cos(T \cdot 2^0) - 0{,}2778 \cdot b \cdot e \cdot \sin(T \cdot 2^0) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wobei n bzw. b die Anzahl der Geradeausflug-Sekunden nach bzw. bis zu der Kurve bedeuten.

Bei diesen Gleichungen entsprechen die ersten Glieder den Gleichungen (4), stellen also den Kurvenflugweg dar; die übrigen Glieder ergibt das Winddreieck, gebildet aus Eigen- und Windgeschwindigkeit, Windkurs und Windrichtung.

VIII. Flugweg und Flugzeit von und bis zu der Blindflugkurve.

Bild 4a bis d geben den Flugweg nebst An- und Abflugzeit von bzw. bis zu der Kurve für die verschiedensten Möglichkeiten wieder, welche für Schlechtwetteranflüge in Frage kommen. Durch die gleichzeitige Eintragung der An- und Abflugwege sind für die verschiedenen Abflugkurse und Abflugzeiten (vom Standort-»Platz« aus) die jeweilig zugeordneten Anflugkurse und -zeiten direkt ablesbar am Schnittpunkt (bzw. interpolierten Schnittpunkt) zwischen den An- und Abfluglinien. Einige Anwendungsmöglichkeiten zeigen die in Abschnitt C folgenden Beispiele.

Entsprechend Bild 3 gilt auch Bild 4 jeweils nur für ein bestimmtes Verhältnis $\frac{W}{e}$. Der Absolutwert der Eigengeschwindigkeit bestimmt den Längenmaßstab. Dieser ist auf den Abbildungen vermerkt und so gewählt, daß er

z. B. bei $e = 200$ km/h 1:200000
oder bei $e = 250$ km/h 1:250000

beträgt, daß also ohne besondere Denkarbeit der Gesamtflugweg auf eine Karte entsprechenden Maßstabs übertragen bzw. mit ihr verglichen werden kann.

Die angegebenen An- und Abflugkurse entsprechen den in den Gleichungen (6, 7 und 8) vorkommenden Werten »Kurs minus Windrichtung«. Bei der Verwendung rechtweisender oder mißweisender Kurse ist also eine kleine Umrechnung nötig. (Vgl. Beispiele, Abschnitt C.) Diese läßt sich vermeiden, wenn man die Kurszahlen auf einem drehbaren Kreisring anordnet, den man auf die Windrichtung (in Bild 4a bis d oben durch einen Windrichtungspfeil angedeutet) einstellt. Die Kurszahlen lassen sich dann direkt als rechtweisende oder mißweisende Kurse verwerten.

In Bild 4 sind die Tangenten an die Blindflugkurve, also die An- und Abfluggrundkurse von 10° zu 10° eingetragen und jeweils der zugehörige Luvwinkel vermerkt. Ebenso ist es auch möglich, bei der Zeichnung der An- und Abflugwege diejenigen auszuwählen, die den Windkursen etwa 10°, 20°, ... entsprechen. Letztere Darstellungsart wird willkommener sein, wenn man vom angezeigten Kompaßkurs ausgeht; die gewählte erscheint zweckmäßiger, weil man die Werte für die Anfluggrundlinie und für Funkpeilungen direkt entnehmen kann.

IX. Ergebnis.

Auf Grund des Dargelegten lassen sich also für alle vorkommenden Fälle Figuren konstruieren, die mit mathematischer Genauigkeit den Flugweg während des Landeverfahrens darstellen.

Es wird damit überhaupt erst die Möglichkeit gegeben, die bei einem Landeverfahren wichtigen Daten:

Abflugwindkurs
Abfluggrundkurs
Abflugzeit
} nach erstmaligem Überfliegen des Platzes

Kurvenbetrag bzw. Kurvenzeit
Anflugwindkurs
Anfluggrundkurs
Anflugzeit
} nach Beendigung aller Kurven

mathematisch genau zu berechnen.

In der Hand des Flugzeugführers oder des Peilflugleiters können entsprechend hergerichtete Figuren (wie etwa Bild 4a—d) eine wertvolle Hilfe darstellen, ohne grobe Schätzungen den Weg des Flugzeuges während des Landeverfahrens zu verfolgen bzw. vorher zu bestimmen oder überhaupt die günstigsten Werte zu erkennen und zu verwerten.

Voraussetzung für die Anwendung solcher Figuren bleibt allerdings die Kenntnis des Windes. Durch Ablesen der Werte für verschiedene Windverhältnisse kann man jedoch den Einfluß eines etwaigen Windfehlers abschätzen.

C. Anwendungsbeispiele für Schlechtwetterlandungen.

Aufgabe I:

Ein Flugzeug soll auf einer bestimmten Anfluggrundlinie (Peilschneise) (z. B. rw. 300°) zur Landung anschweben. Gesucht ist der Kurs, mit dem das Flugzeug erstmalig den Platz überfliegen soll, damit es nach einer gewissen Abflugzeit und einer einzigen Kurve wieder die Grundlinie zum endgültigen Landeanflug erreicht; außerdem sind gesucht: Abflugzeit, Anflugzeit und Anflugwindkurs.

Beispiel Ia:

Bekannt sei: Wind: 20 km/h aus rw. 360°,
Eigengeschwindigkeit: 200 km/h.
Gewünscht sei: Anflugzeit 7 min nach Linkskurve.

Lösung (Bild 4b): Auf der Anfluggeraden »300°« wird bei »7 min« der Punkt P (Flugplatz) markiert. Durch diesen Punkt führt die (gestrichelte) Abfluggerade »127°« (interpoliert) bei »6 min 10 s«. Als Luvwinkel liest man für Abflug »— 5°« bzw. für Anflug »+ 5°« ab.

Ergebnis: Das Flugzeug muß den Platz mit dem rw. Windkurs 122° überfliegen, nach 6 min 10 s eine Blindfluglinkskurve bis zum rw. Windkurs 305° (also 88½ s Kurvenzeit) fliegen und wird nach weiteren 7 min genau am Platz sein.

Beispiel Ib:

Bekannt sei: Wind: 30 km/h aus 270°,
Eigengeschwindigkeit: 150 km/h.
Gewünscht sei: Anflugzeit 4 min nach Rechtskurve.

Lösung (Bild 4c): Als Anfluggerade wird ermittelt:

300° — 270° = **30°**
(Anflugkurs) (Windrichtung)

Auf der Anfluggeraden 30° wird bei 4 min der Punkt P markiert. Als dazugehörige Werte liest man ab:

Abfluggerade 196°, d. h. Abflugkurs (196 + 270) = 106°,
Abflugzeit 2 min 30 s,
Luvwinkel beim Abflug + 3°,
Luvwinkel beim Anflug — 6°.

Ergebnis: Das Flugzeug muß den Platz mit dem rw. Windkurs 109° überfliegen, nach 2 min 30 s eine Blindflugrechtskurve bis zum rw. Windkurs 294° fliegen und wird nach weiteren 4 min genau am Platz sein.

Beispiel Ic:

Bekannt sei: Wind: 60 km/h aus rw. 250°,
Eigengeschwindigkeit: 200 km/h.
Gewünscht sei: Schnellstmögliche Landung nach einer Rechtskurve, also Abflugzeit = 0, d. h. das Flugzeug soll nach Überfliegen des Platzes sofort in eine Rechtskurve gehen.

Lösung (Bild 4d): Als Anfluggerade wird ermittelt:

300° — 250° = **50°**
(Anflugkurs) (Windrichtung)

Auf der 50°-Anfluggeraden wird deren Schnittpunkt P mit der Kurve für die Abflugzeit 0 min markiert. Als dazugehörige Werte liest man ab:

Digitized by Google

Abfluggerade 150°, d. h. Abflugkurs (150 + 250) = 40°,
Luvwinkel beim Abflug — 9°,
Luvwinkel beim Anflug — 13°,
Anflugzeit 1 min 15 s.

Ergebnis: Das Flugzeug muß den Platz mit dem rw. Windkurs 31° überfliegen, anschließend sofort eine Blindflugrechtskurve bis zum rw. Windkurs 287° fliegen und wird nach weiteren 1 min 15 s genau am Platz sein.

Aufgabe II:

Ein Flugzeug soll auf der Anfluggrundlinie z. B. rw. 270° zur Landung anschweben. Der Flugplatz wird erstmalig mit einem bestimmten (nicht frei wählbaren) Kurs überflogen. Der Abflug soll etwa parallel zur Anfluggrundlinie erfolgen. Gesucht ist der Kurvenwinkel bis zum eigentlichen Abflug, also der Abflugwindkurs, ferner Abflugzeit, Anflugzeit und Anflugwindkurs.

Beispiel IIa:
Bekannt sei: Wind: 15 km/h aus rw. 240°,
Eigengeschwindigkeit: 150 km/h,
rw. Überflugwindkurs: 340°.
Gewünscht sei: Anflugzeit 7 min.

Lösung (Bild 4a): Als Anfluggerade wird ermittelt: (270 — 240) = 30° und als dazugehöriger Luvwinkel — 3° abgelesen. Auf der 30°-Anfluggeraden wird bei »7 min« der Punkt P_1 markiert.

Als Überfluggerade wird ermittelt: (340 — 240) = 100° und als dazugehöriger Luvwinkel — 6° abgelesen. Auf der Überfluggeraden 106° wird bei »0 min« der Punkt P_2 markiert.

Jetzt wird Kurs und Flugzeit für den Weg $P_1 — P_2$ ermittelt:

Z. B. mit Hilfe eines Kursdreiecks stellt man als Kurs 209° und als Entfernung 96 mm fest, für die man auf der entsprechenden Abfluggeraden eine Flugzeit von 5 min 20 s abliest.

Als rw. Abflugwindkurs ergibt sich (209° + 240° + 3°) = 92°.

Ergebnis: Nach Überfliegen des Platzes kurvt das Flugzeug sofort rechtsherum bis zum rw. Windkurs 92°, behält diesen Kurs 5 min 20 s bei, kurvt anschließend rechts herum bis zum rw. Windkurs 267° und wird nach weiteren 7 min Geradeausflug genau am Platz sein.

Beispiel IIb:
Bekannt sei: Wind: 30 km/h aus rw. 300°,
Eigengeschwindigkeit: 150 km/h,
rw. Überflugkurs 40°.
Gewünscht sei: Schnellstmögliche Landung nach einer Rechtskurve.

Lösung (Bild 4c): Als Anfluggerade wird ermittelt: (270° — 300° =) 330° und als zugehöriger Luvwinkel + 6° abgelesen.

Als Überfluggerade wird ermittelt: (40° — 300°) = 100°. Am Schnittpunkt (S) der beiden Geraden »330°« und »100°« liest man ab:

Abflugzeit 1 min 15 s,
Anflugzeit 1 min 50 s.

Ergebnis: 1 min 15 s nach Überfliegen des Platzes mit rw. Kurs 40° (rw. Windkurs 29°) ist eine Rechtskurve bis zum rw. Windkurs 276° und anschließend 1 min 50 s lang geradeaus bis zum Platz zu fliegen.

Aufgabe III:

Ein Flugzeug soll längere Zeit über einem Ort kurven, ohne durch Wind sich abtreiben zu lassen. Gesucht sind

A) Flugzeit für die Geradeausflugstrecke gegen den Wind, die nach jeder Vollkreiskurve einzuschalten ist, bzw.
B) die Kurse, bei denen von Rechts- auf Linkskurve bzw. umgekehrt übergegangen werden muß, wenn die Windabtrift also durch abwechselndes Links- und Rechtskurven (8-Kurvenflug) ausgeglichen werden soll.

Lösung A): Bild 4a bis d entnimmt man als Geradeausflugzeit gegen den Wind für das jeweilige Verhältnis $\frac{W}{e}$:

20 s	für	$\frac{W}{e} = 0{,}1$
45 s	»	» $= 0{,}2$
77 s	»	» $= 0{,}3$

Außerdem ergibt sich durch Rechnung

32 s	für	$\frac{W}{e} = 0{,}15$
60 s	»	» $= 0{,}25$
120 s	»	» $= 0{,}4$
180 s	»	» $= 0{,}5$

Lösung B): In Bild 1 bis 4 bzw. nach Tafel 1 ermittelt man als den gesuchten Ort zum Kurvenwechsel den Punkt, an dem die den Kurvenflugweg darstellende Linie sich selbst schneidet, und liest als Windkurse ab:

197	bzw. 163	für	$\frac{W}{e} = 0{,}1$
204	» 156	»	» $= 0{,}15$
212	» 148	»	» $= 0{,}2$
218	» 142	»	» $= 0{,}25$
225	» 135	»	» $= 0{,}3$
238	» 122	»	» $= 0{,}4$
252	» 108	»	» $= 0{,}5$

z. B. bei Wind 30 km/h aus rw. 360°, Eigengeschwindigkeit 150 km/h muß mit rw. Windkurs 212° die Rechtskurve und mit rw. Windkurs 148° die Linkskurve eingeleitet werden. Bei anderer Windrichtung muß zu den genannten Kurswerten die Windrichtung addiert werden.

D. Schlußbemerkungen.

Wegen der heute noch bestehenden Ungenauigkeit im Innehalten von Kurs und Geschwindigkeit sowie in der Kenntnis des Windes mag das angegebene Verfahren manchem übertrieben genau erscheinen. Nach den vorliegenden genauen Unterlagen ist es jedoch möglich, vereinfachte Methoden für die Schlechtwetterlande-Navigation auf ihre Anwendungsmöglichkeiten und Genauigkeiten zu untersuchen; sie können auch als Grundlage dienen für die Entwicklung von im praktischen Flugbetrieb verwendbaren Tabellen oder mechanischen Rechengeräten.

Digitized by Google

East Engin. Library

JUN 2 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 4 enthält Arbeiten von: Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38 S. 157, M. Kohler S. 158-177, S. Hoerner S. 178-183, P. Jordan S. 184-197, K. Solf S. 198-208, K. Jaeckel S. 209-211, M. Richter S. 212-217

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 4 SEITE 157 BIS 218 | MÜNCHEN, 20. 4. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38 . . . . . Seite 157

Über die Strömungsvorgänge an steil angestellten und überzogenen Tragflügeln bei Parallelbewegung und Drehung. Von M. Kohler . . . . . Seite 158

Kräfte und Momente schrägangeströmter Tragflügel. Von S. Hoerner . Seite 178

Auftriebsberechnung und Strömungsvorgänge beim Überschreiten des Maximalauftriebes. Von P. Jordan . . . . . Seite 184

Zur Berechnung der symmetrischen Längsbewegung eines Flugzeugs. Von K. Solf . . . . . Seite 198

Das Geschwindigkeitsfeld eines beliebigen dünnen und schwach gewölbten Tragflügelprofils. Von K. Jaeckel, Breslau . . . . . Seite 209

Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Von M. Richter . Seite 212

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 | 20. April 1939 | Lfg. 4

Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38.

Die Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung hatte anläßlich ihrer Hauptversammlung 1937 in München Preisaufgaben ausgeschrieben. Auf der Grundlage des Schrifttums und sonstiger Kenntnisse und Unterlagen war für den Flugzeugbau, für das Gebiet der Flugmotoren, für das Flugfunkwesen und das Waffenwesen der Luftfahrt je eine Aufgabe vorgesehen.

Die mit einem Preise ausgezeichneten Arbeiten werden, nach einer Vereinbarung mit der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, in der Schriftenreihe »Luftfahrtforschung« veröffentlicht. Die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bringt in dieser Lieferung die Arbeiten auf dem Gebiete des Flugzeugbaus.

Flugzeugbau.

Über die Strömungserscheinungen an einem Tragflügel bei symmetrischer Anströmung liegen zahlreiche experimentelle und theoretische Arbeiten vor. Ebenso ist die Frage der unsymmetrischen Strömung, soweit sie durch Querruderschlag hervorgerufen wird, bereits weitgehend untersucht. Zur Erforschung der Flugeigenschaften fehlen jedoch u. a. noch Erkenntnisse über die Strömungserscheinungen und die Luftkräfte sowie die hierdurch hervorgerufenen Momente an einem Tragflügel bei unsymmetrischer Anströmung, wie sie z. B. beim Schieben, bei Drehbewegungen des Flügels, bei unsymmetrischer ablösender Strömung od. dgl. entstehen.

Aufgabe.

Für die Bestimmung dieser Strömungserscheinungen, insbesondere der Luftkraftmomente, sind entweder an Hand von Rechnungen oder Messungen neue Unterlagen zu liefern, oder aber auf Grund der vorhandenen Unterlagen die bisher beobachteten Erfahrungstatsachen zu klären.

Von Interesse sind sowohl Betrachtungen, die eine Potentialströmung voraussetzen, als auch Untersuchungen über die abgelöste Strömung. Das Ergebnis soll so herausgearbeitet sein, daß es möglichst unmittelbare Anwendung auf flugtechnische Fragen gestattet.

Preisgericht für die Aufgabe.

Seewald, Friedrich, Dr.-Ing., Berlin (Vorsitzender);
v. Doepp, Philipp, Dipl.-Ing., Dessau;
Prandtl, Ludwig, Prof., Göttingen;
Wieselsberger, Karl, Prof., Aachen.

Einen zweiten Preis erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Erkundung« von Dipl.-Ing. Max Kohler, Friedrichshafen.

Einen weiteren zweiten Preis erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Oktober 1938« von Dr.-Ing. Sighard Hoerner, Kassel.

Eine Anerkennung erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Elisabeth« von Peter Jordan, Göttingen.

Ebenfalls eine Anerkennung erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Ma« von Dr. Johannes Weissinger, Berlin. Diese dem Preisgericht der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung mit dem Titel »Der schiebende Tragflügel« vorgelegte Arbeit trug infolge ihrer ungewöhnlich kurzen Entstehungszeit einen weithin nur programmatischen und skizzenhaften Charakter. Da die Arbeit in diesem halbfertigen Zustand wenig Interesse finden dürfte, soll sie erst nach ihrer vollständigen Fertigstellung zu einem späteren Zeitpunkt veröffentlicht werden.

Digitized by Google

Über die Strömungsvorgänge an steil angestellten und überzogenen Tragflügeln bei Parallelbewegung und Drehung*).

Von M. Kohler, Friedrichshafen/Bodensee.

Bericht aus der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Mit der vorliegenden Arbeit wird versucht einen tieferen Einblick in die verwickelten Strömungsvorgänge an Tragflügeln im Bereiche des Auftriebshöchstwertes zu gewinnen. Hierzu wurden rechnerische und experimentelle Untersuchungen an einem geraden-stillstehenden, einem verwundenen-stillstehenden und einem geraden-drehenden Rechteckflügel vorgenommen.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Versuchsgegenstände.
3. Herstellung der Modelle.
4. Versuchseinrichtungen und Meßverfahren.
5. Darstellung der Messungsergebnisse.
6. Umfang der Messungen und der Auswertung.
7. Über die Wirkungen am stillstehenden und drehenden Tragflügel.
8. Besprechung der Ergebnisse aus Theorie und Experiment.
9. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Es ist bekannt, daß sich der Charakter der Strömung um einen Tragflügel beim Überschreiten des Auftriebshöchstwertes wesentlich ändert. Die Strömung beginnt auf der Flügeloberseite »unruhig« zu werden und löst sich bei weiterer Anstellwinkelsteigerung vom Flügel ab. Das Ablösen kann örtlich einsetzen und dann über die ganze Flügeloberseite fortschreiten. Unter gewissen Vorbedingungen ist aber auch ein schlagartiges Abreißen längs der Spannweite möglich. Die im allgemeinen vorhandene Formsymmetrie des Tragwerks läßt einen symmetrischen Ablauf der Vorgänge erwarten. Dies trifft mitunter zu, dann meist aber nur kurzzeitig; denn es handelt sich hier um schwach stabile oder labile Gleichgewichtszustände. Schon ein geringfügiges Stören — etwa durch eine Böe — vermag eine Asymmetrie der Strömung längs der Spannweite herbeizuführen und damit eine gefahrvolle Änderung der Fluglage auszulösen. Das durchsackende Flugzeug kippt über ein Flügelende ab, gerät in eine heftig beschleunigte Drehbewegung und erreicht erst im stationären Trudelflug den neuen Gleichgewichtszustand.

Schon beim Entwurf des Tragwerks versucht man durch Wahl einer geeigneten Auftriebsverteilung diesen unerwünschten Flugbewegungen vorzubeugen. Die Theorie des endlichen Tragflügels vermag heute Rechenverfahren anzugeben, die das Ermitteln solcher Verteilungen für die meisten neuzeitlichen Flügelformen gestatten. Sie setzt voraus, daß der Auftrieb und der Anstellwinkel in einfacher Weise voneinander abhängen und daß der Widerstand gegenüber dem Auftrieb klein bleibt. Solange die Strömung am Flügel fest anliegt, scheinen diese Voraussetzungen auch noch bei ziemlich hohen Auftriebsbeiwerten erfüllt zu sein. Beginnt sie sich aber abzulösen, so treffen die Voraussetzungen nicht mehr zu. Damit verliert die Tragflügeltheorie in der bisherigen Form ihre Gültigkeit. Es hat nun den Anschein, als dürfe die Hochauftriebsforschung zunächst durch die Grenzschichttheorie eine weitere Vertiefung erfahren. Aber auch diese Theorie ist heute noch nicht in der Lage, quantitativ brauchbare Verfahren zum Erfassen dieser verwickelten Zustände aufzuzeigen. Die Schwierigkeiten steigern sich dadurch, daß im Bereiche des Auftriebshöchstwertes Gebiete anliegender und abgerissener Strömung nebeneinander vorkommen, über deren Wechselwirkung bis heute nichts Sicheres auszusagen ist, und schließlich noch dadurch, daß beim drehenden Tragwerk das Berücksichtigen der Trägheitskräfte infolge des Übergangs vom ruhenden auf das drehende Bezugssystem erforderlich wird.

Angesichts dieser Sachlage erschien es angebracht, Strömungsbeobachtungen und Druckmessungen an steil angestellten und »überzogenen« Tragflügeln vorzunehmen und dabei festzustellen, wie weit die Theorie mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Um übersichtliche Verhältnisse zu schaffen, wurden Tragflügelmodelle mit rechteckigem Grundriß benutzt. Von zwei Flügeln wurde einer stillstehend, der andere drehend im Windstrom untersucht. Zu den auf diese Weise ermittelten Messungsergebnissen wurden die eines weiteren Rechteckflügels genommen, der längs der Spannweite einem bestimmten Drehwert entsprechend verwunden war[1]).

2. Versuchsgegenstände.

Für die nachstehenden Abschnitte werden diese drei Tragflügel folgendermaßen gruppiert und bezeichnet:

1. Tragflügel 1, gerader Rechteckflügel für die Versuche ohne Drehung;
2. Tragflügel 2, verwundener Rechteckflügel, Bild 1;
3. Tragflügel 3, gerader Rechteckflügel für die Versuche bei Drehung.

Als Tragflügelschnitt diente das Profil Göttingen 420[2]), das schon mehrmals zu Windkanalversuchen benutzt wurde[3]) Die Modelle hatten eine Spannweite $b = 800$ mm und eine Tiefe $t = 160$ mm, also ein Seitenverhältnis $t : b = 1 : 5$. Die Modellränder waren scharfkantig. Die Messungen wurden im Windkanal IV der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen ausgeführt, dessen Normaldüse einen Durchmesser $D = 1{,}50$ m hat und dessen »Turbulenzspiegel« mit $Re \approx 0{,}24 \cdot 10^6$ (d. i. die Re-Zahl der Kugel für $c_w = 0{,}3$) angegeben werden kann[4]). Die Anblasgeschwindigkeit mußte mit Rücksicht auf die Festigkeit des drehenden Modells auf $v_0 \approx 20$ m/s beschränkt bleiben. Die Reynoldsche Zahl der Versuche betrug demnach $Re \approx 0{,}22 \cdot 10^6$ (bezogen auf die Flügeltiefe). Diese an sich niedrige Re-Zahl spielt im Rahmen der hier vorzunehmenden Vergleiche nur eine untergeordnete Rolle, da alle Messungsergebnisse unter denselben Bedingungen ermittelt wurden.

*) Die Arbeit wurde von der Fakultät für Maschinenwesen an der T.H. Hannover als Dissertation genehmigt. D 89.

[1]) Diese Messungen sind auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Betz, Göttingen, ausgeführt worden, und zwar vor den Messungen am stillstehenden und drehenden Tragflügel.

[2]) Aufmaße siehe AVA-Lieferung III, S. 29.

[3]) a) Polarenmessungen: AVA-Lieferung I, S. 108; AVA-Lieferung III, S. 78.
b) Autorotationsmessung: O. Schrenk, Z. Flugtechn. Bd. 19 (1929), S. 533.

[4]) AVA-Lieferung IV, S. 106, Beitrag O. Flachsbart.

Digitized by Google

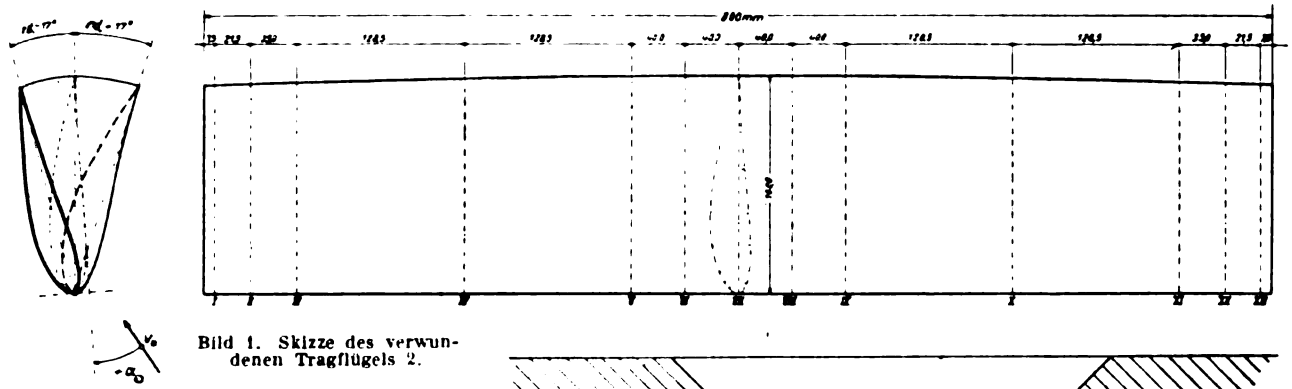


Bild 1. Skizze des verwundenen Tragflügels 2.

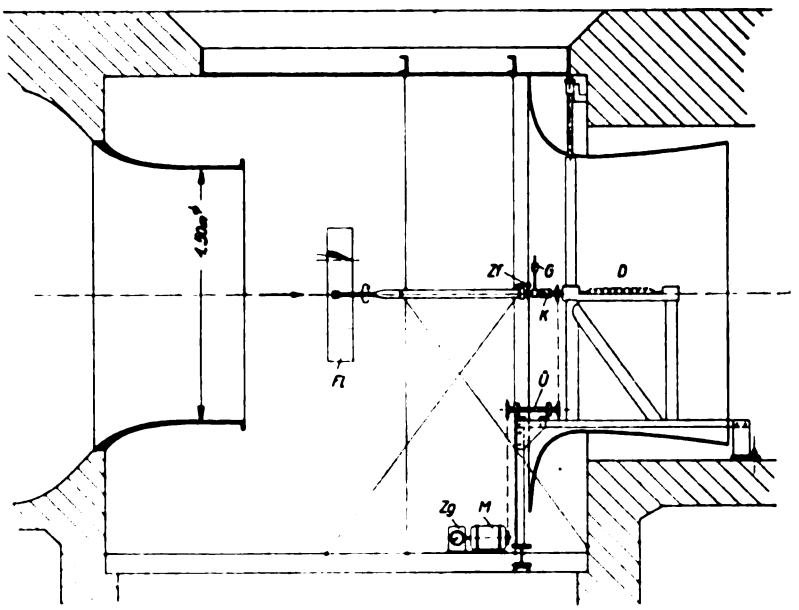


Bild 3. Schema des Versuchsaufbaues im Windkanal. Verkleinerung etwa 1:30.

D Druckübertragungsgeräte; *Fl* Tragflügel; *G* Ausgleichsgewicht; *K* elastische Kupplung; *M* Antriebsmotor; *U* Übertragungsglieder; *Zf*, *Zg* feiner bzw. grober Drehzahlmesser.

3. Herstellung der Modelle.

Tragflügel 1 und 2 wurden nach der in Göttingen üblichen Bauweise angefertigt. Sie bestanden aus einem Metallskelett, das mit Gips ausgestrichen wurde. Als Träger der Druckanbohrungen dienten Metallrippen, als Druckleitungen Metallröhrchen, die im Innern der Modelle verlegt waren, Bild 2.

Für Tragflügel 3 mußte jedoch ein anderes Herstellverfahren gesucht werden, da nach früheren Erfahrungen mit dem Abspringen des Gipses bei höheren Drehzahlen zu rechnen war. Nach einigen Vorversuchen entschied sich der Verfasser für einen Flügel in Form einer Vollschale. Das Oberteil und das Unterteil des Tragflügels wurden als Teilschalen in 2 mm starkes Messingblech getrieben, auf der Innenseite mit Druckleitungen ausgelegt und längs den Nähten verlötet. Vor dem Zusammensetzen der Teilschalen wurde ein Verstärkungsstück in Flügelmitte eingefügt, das das Befestigen des Flügels auf der Versuchsvorrichtung ermöglichte. Das Anfertigen des Flügels erforderte hohes handwerkliches Können[5]).

4. Versuchseinrichtungen und Meßverfahren.

Tragflügel 1 und 2 wurden mit der in Göttingen bei Sechskomponentenmessungen gebräuchlichen Drahtaufhängung in den Windkanal eingebaut. Diese Aufhängung zeichnet sich dadurch aus, daß die Strömung ohne Störung auf das Modell trifft. Tragflügel 3 wurde auf der in Bild 3 wiedergegebenen Versuchsvorrichtung befestigt. Es handelt sich um eine Drehvorrichtung, wie sie bei Autorotationsuntersuchungen benutzt wird. Sie wurde für die vorliegenden Versuche durch einen elektrischen Antrieb ergänzt, der das Einstellen bestimmter Drehwerte erlaubte.

Als Druckmeßgerät diente ein von O. Schrenk und dem Verfasser stammendes Vielfachmanometer[6]). Die Verbindung zwischen den Manometerrohren und den Rohren im Tragflügel wurde durch Gummischläuche hergestellt.

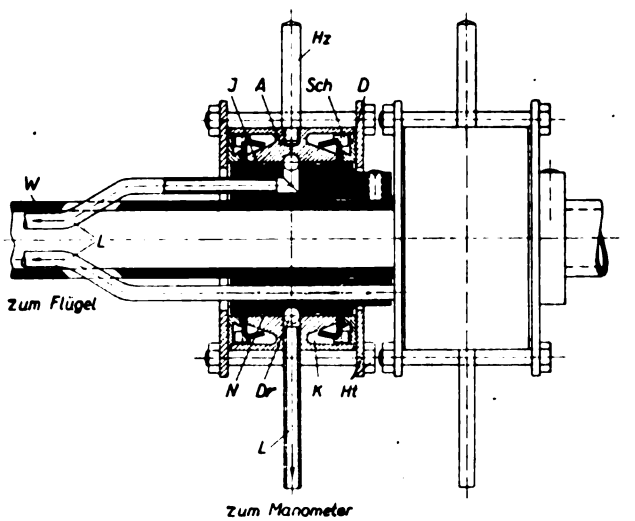


Bild 4. Druckübertragungsgerät, Verkleinerung etwa 1:1,5.

A Außenring; *D* Deckel; *Dr* Druckkanal; *Hz* Haltezapfen; *Ht* weitere Halteteile; *J* Innenring; *K* Dichtungskammer; *L* Druckleitungen; *N* Dichtungsnute; *Sch* Schleuderring; *W* Modellwelle.

[5]) Es erfolgte durch Meister J. Lotze vom KWI-Göttingen, dem hierfür Dank geziemt.

[6]) Schriftreihe: Geräte der AVA-Göttingen; Heft: Mikromanometer.

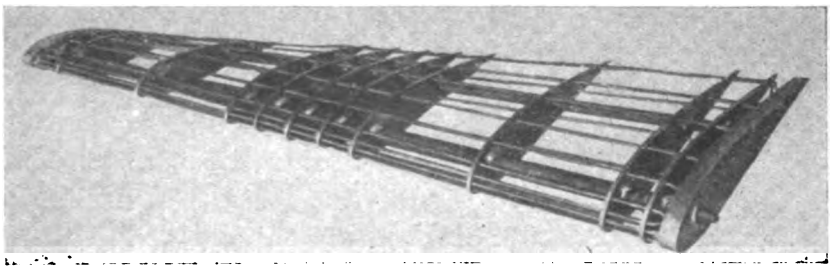


Bild 2. Metallskelett des verwundenen Tragflügels 2.

Digitized by Google

Das Messen der Drücke an den Tragflügeln 1 und 2 ging in der üblichen Weise vor sich. Es wurde jeweils die Druckverteilung für einen Flügelschnitt mit einer einzigen Messung ermittelt. Die Druckanbohrungen der übrigen Schnitte waren dabei mit einer Dichtungsmasse verschlossen. — Die Druckmessung am drehenden Tragflügel 3 gestaltete sich schwieriger. Zum Übertragen der Drücke vom drehenden System auf das im Raume ruhende Manometer wurde die in Bild 4 dargestellte »hydraulische Kupplung« verwendet. Es handelt sich um das von G. Fuhrmann entwickelte und von O. Flachsbart[7]) umgestaltete Gerät, an dem einige weitere Änderungen vorgenommen wurden. Diese Änderungen bestanden darin, daß der Schleuderring *Sch* eine kegelige Verlängerung und der Außenring *A* eine dazu passende kegelige Andrehung erhalten haben. Dadurch wurde eine zusätzliche Dichtungsstelle geschaffen, die die Sicherheit bei der Druckübertragung erhöhte.

Trotzdem erforderte das Messen der Drücke die allergrößte Sorgfalt[8]). Zu Beginn der Versuche standen fünf, später neun solcher Kupplungen zur Verfügung. Es ließ sich daher nicht vermeiden, die Druckverteilung eines Flügelschnittes in mehreren Teilmessungen zu bestimmen. Um diese Einzelergebnisse einwandfrei aneinanderreihen zu können, wurde jeweils ein Punkt der voraufgegangenen Teilmessung als Kontrollpunkt mitgemessen. Es zeigte sich aber, daß die Anblasgeschwindigkeit und die Drehzahl des Modells nach einiger Übung ausreichend genau wieder eingestellt und gleich groß gehalten werden konnten, so daß nur in einigen Fällen eine Berichtigung erforderlich war.

Für die am drehenden System gemessenen Drücke mußte eine besondere Korrektur eingeführt werden, mit der die Trägheitswirkung der in den Druckleitungen mitdrehenden Luftmassen ihre Berücksichtigung fand.

$$p = p' + p_y^*$$

p = endgültiger Druck an der Meßstelle;

p' = der für diese Meßstelle am Manometer angezeigte Druck;

p_y^* = Schleuderdruck der in der Meßleitung eingeschlossenen Luftmasse

$$p_y^* = \varrho\,\omega_{xa}^2 \int_{y^*=r_{y_1}^*}^{y^*=r_{y_2}^*} y^*\,dy^* = \frac{\varrho}{2}\,\omega_{xa}^2 \cdot (r_{y\,2}^{2\,*} - r_{y\,1}^{2\,*}).$$

Für die Auswertung wurde $r_{y2}^* \gg r_{y1}^*$ angenommen und r_{y2}^* als r_y^* geschrieben.

$$p_y^* = \frac{\varrho}{2}\,(r_y^*\,\omega_{xa})^2 = q_u\,y^*,$$

d. h. der Schleuderdruck ist gleich dem Staudruck der Umfangsgeschwindigkeit der Meßstelle. Der Stern bedeutet, daß es sich hier um den Abstand eines Punktes des trag-

[7]) Handbuch der Experimentalphysik Bd. 4 Teil 3, Beitrag O. Flachsbart, Luftschrauben, S. 385.

[8]) Bei den Messungen wurde ich von den Ingenieuren H. Hennecke und F. Redicker, bei der Auswertung von Ingenieur H. Boenecke in dankenswerter Weise unterstützt.

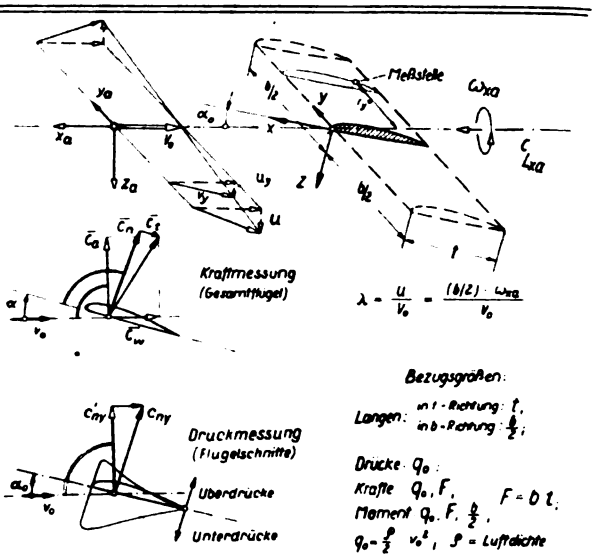


Bild 5. Allgemeine Definitionsskizze.

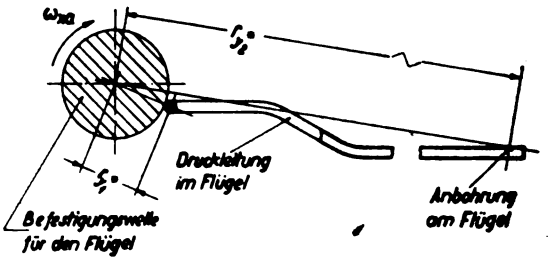


Bild 6. Definitionsskizze zur Berücksichtigung der Schleuderdrücke der in den Druckleitungen mitdrehenden Luftmassen.

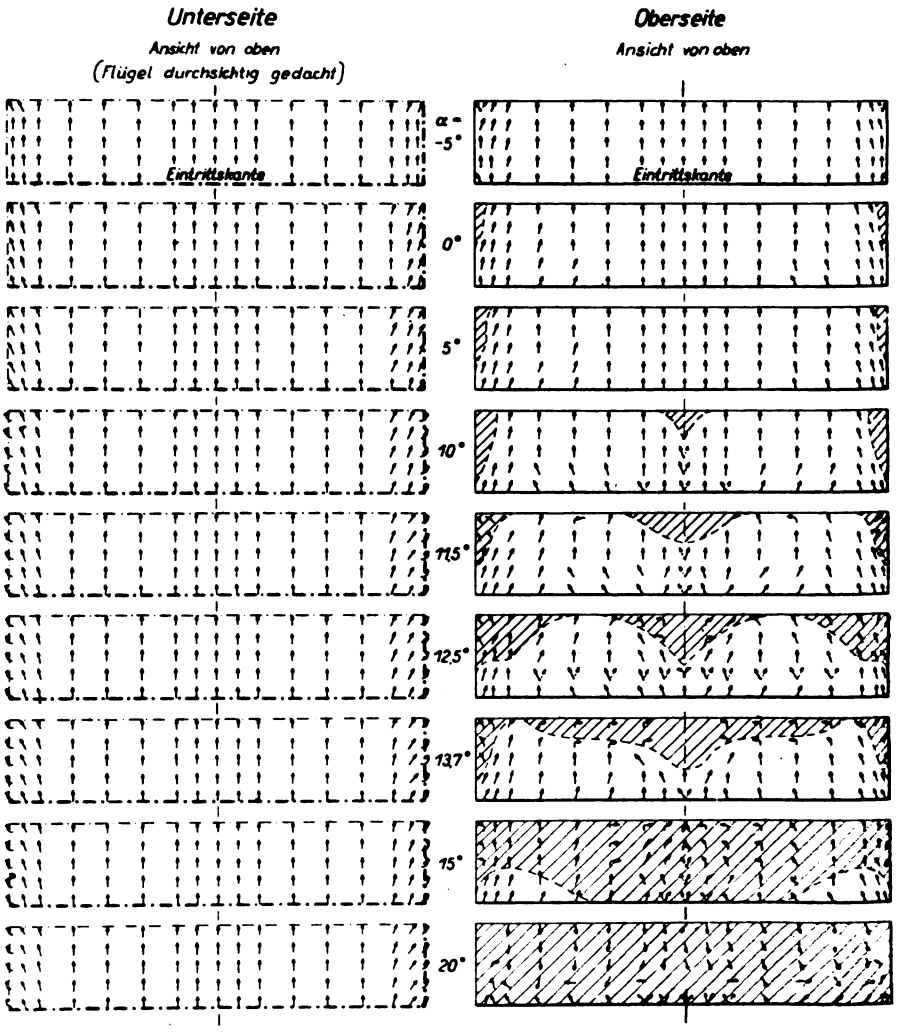


Bild 8. Fadensondenbeobachtungen etwa 1 mm über der Oberfläche des stillstehenden Tragflügels 1 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Digitized by Google

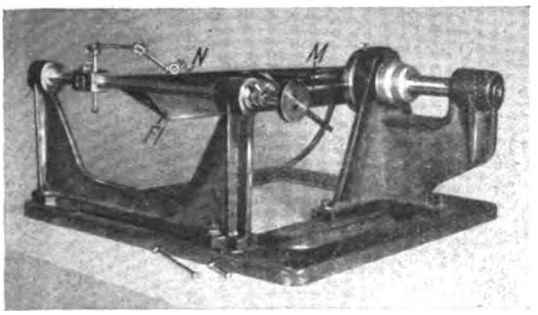


Bild 7. Hilfsgerät zur Ermittlung des Abstandes der Druckanbohrungen auf dem Tragflügel 3 von der Drehachse des Modells.
Fl Tragflügel;
M Maßstab;
N Abtastnadel.

flügelfesten Systems x, y, z (Meßstelle) von der Längsachse x_a (Drehachse) des strömungsfesten Systems x_a, y_a, z_a handelt (s. auch Bild 5, 6). Zur Ermittlung von r_y^* wurde das in Bild 7 wiedergegebene Hilfsgerät benutzt.

5. Darstellung der Meßergebnisse.

Sämtliche am Tragflügel gemessenen und korrigierten Drücke p wurden durch Division mit dem Staudruck q_0 der ungestörten Anströmgeschwindigkeit v_0 dimensionsfrei gemacht. Damit ergeben sich für die außerhalb der Drehachse liegenden Schnitte des drehenden Tragflügels 3 Druckwerte, die größer als eins sind; denn der den Betrag der Drücke bestimmende Staudruck q_y der örtlichen Anströmgeschwindigkeit v_y ist infolge der örtlichen Umfangsgeschwindigkeit u_y größer als q_0. Beim Vergleich der Messungsergebnisse des verwundenen Tragflügels 2 und des drehenden Tragflügels 3 mußte auf diese Tatsache Rücksicht genommen werden. Dies geschah durch Multiplikation der Werte des verwundenen Tragflügels mit der Verhältniszahl $\frac{q_y}{q_0}$.

Die dimensionsfreien Drücke p/q_0 wurden für jeden Flügelschnitt auf der Profilsehne über dem dimensionsfreien Abstand x/t der Meßstelle vom vordersten Punkt des Profils aus aufgetragen. Zur Verbesserung der Übersicht über das an sich umfangreiche Versuchsmaterial wurden jeweils die Druckverteilungsbilder der Flügeloberseite und der Flügelunterseite zusammengefaßt. Als Trennstelle diente vorn der vorderste Meßpunkt, hinten die Profilspitze[9]. Im weiteren wurden die Summenwerte dieser Druckverteilungskurven als örtliche Normalkraftbeiwerte c_{ny} über dem dimensionsfreien Abstand $2y/b$ der Meßschnitte von der Flügelmitte dargestellt. Damit gelang es, erstens durch eine Integration längs der Spannweite den mittleren Normalkraftbeiwert $\overline{c_n}$ der Tragflügel 1 und 3 (für $\lambda = 0$) zu ermitteln und zweitens über die Komponente c_{ny}' (s. Bild 5) und unter Einführung des Hebelarmes den Beiwert c_{Lxa} des Momentes um die Flügeldrehachse zu bestimmen.

6. Umfang der Messungen und der Auswertung.

Der Umfang der Messungen war folgender:

1. Tragflügel 1, gerader Rechteckflügel, $\lambda = 0$.
   p/q_0, c_{ny} und $\overline{c_n}$ für $\alpha = 0$; 5; 10; 15; 20 und 30° [10]). In das Bild 14 sind außerdem die $\overline{c_n}$-Werte für $\alpha = 35$; 40; 45; 50° aufgenommen worden. Auf die Wiedergabe der Druckverteilungen für diese Winkel wurde verzichtet, da sie grundsätzlich den Verteilungen für $\alpha = 30°$ gleichen.
2. Tragflügel 2, verwundener Rechteckflügel. Verwindung längs der Spannweite entsprechend $\lambda = 0{,}3$.
   p/q_0, c_{ny} und c_{Lxa} für $\alpha_0 = 0$; 5; 10; 15; 20 und 30°.
3. Tragflügel 3, gerader Rechteckflügel bei $\lambda = 0$ bzw. $\lambda + 0$.
   p/q_0, c_{ny} und $\overline{c_n}$ für $\alpha_0 = 15$; 20 und 30° bei $\lambda = 0$. p/q_0, c_{ny} und c_{mLxa} für $\alpha_0 = 15°$ bei $\lambda = 0{,}1$; 0,2 und 0,4; ferner für $\alpha_0 = 20$ und 30° bei $\lambda = 0{,}1$; 0,2; 0,4; 0,6 und 0,7.

Außerdem wurden am Tragflügel 1 und 2 Fadensondenbeobachtungen bei mehreren Anstellwinkeln durchgeführt und skizzenmäßig festgehalten, Bild 8, 9.

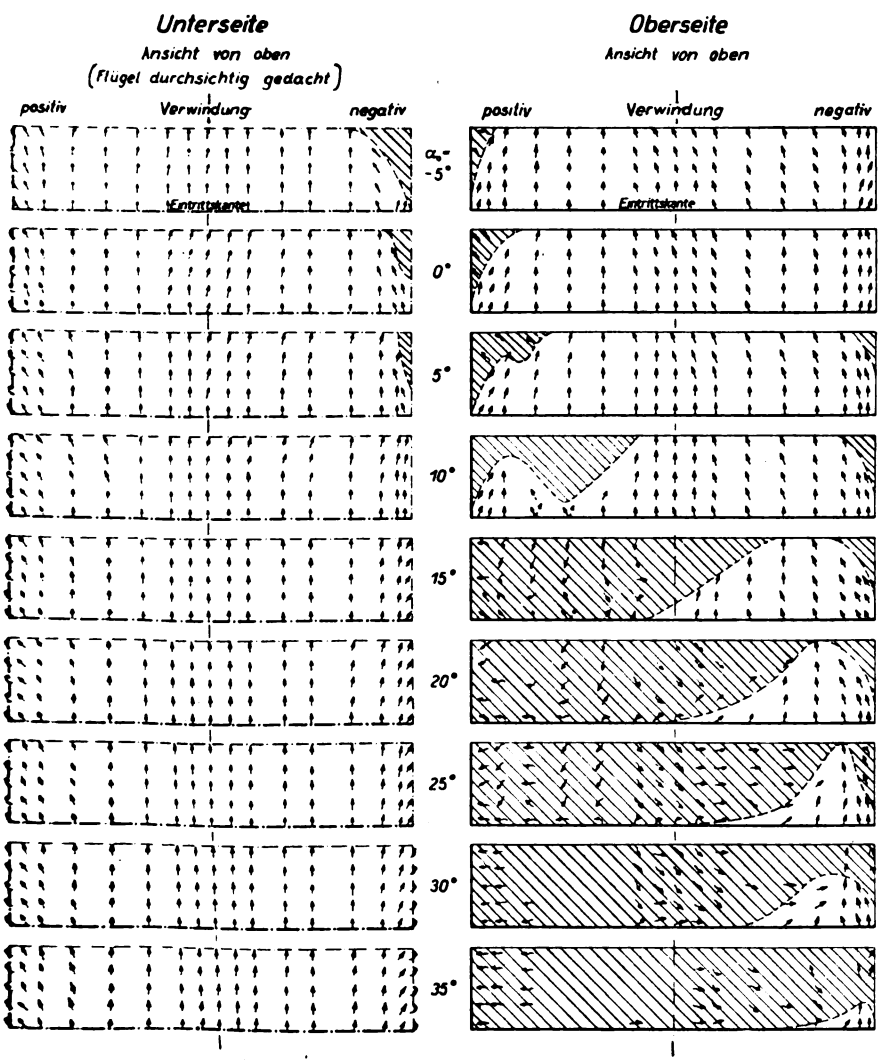


Bild 9. Fadensondenbeobachtungen etwa 1 mm über der Oberfläche des verwundenen Tragflügels 2 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

*) Beim ersten Besehen der Druckverteilungsbilder der Flügeloberseite empfiehlt es sich, sie um 180° zu drehen. Die Druckkurven treten dabei etwas klarer hervor.

[10]) Die Messungsergebnisse wurden mit den im Windkanal eingestellten Anstellwinkeln α (gerader Flügel *1*) und α_0 (Mittelschnitt des verwundenen Flügels *2* und drehenden Flügels *3*) wiedergegeben, um das Ordnen zu erleichtern. Die Korrekturen infolge des endlichen Strahldurchmessers sind hier:

$\alpha°$ bzw. $\alpha_0°$	0	5	10
$\Delta\alpha°$	−0,3	−0,5	−0,7
α_0 bzw. $\alpha_0°$	15	(20)	(30)
$\Delta\alpha°$	−0,7	(−0,6)	(−0,5)

Digitized by Google

Die Versuchsauswertung erstreckte sich über:

a) einen Vergleich der theoretischen Auftriebsverteilung mit der experimentellen Normalkraftverteilung längs der Spannweite bei allen drei Tragflügeln, soweit dies z. Zt. überhaupt möglich ist;
b) einen Vergleich der Druckverteilung über dem Mittelschnitt des geraden Tragflügels 1 und des verwundenen Tragflügels 2;
c) einen Vergleich der Druckverteilung eines von der Drehachse verhältnismäßig weitab liegenden Schnittes auf der linken und rechten Tragflügelhälfte (links und rechts vom gedachten Flugzeugführer aus) am drehenden und entsprechend verwundenen Tragflügel, und schließlich
d) die Ermittlung des Autorotationsbereiches des untersuchten Rechteckflügels mit Hilfe der Kurve $c_{m\,L\,a} = f(\alpha_0)$ und den Vergleich mit früheren Autorotationsmessungen an einem Tragflügel mit gleichem Profil[11]).

Zur Ermittlung der theoretischen Auftriebsverteilung wurde das Rechenverfahren von H. Multhopp[12]) herangezogen, das wie alle Verfahren dieser Art der Prandtlschen Tragflügeltheorie entstammt. Es weist den für die Praxis wichtigen Vorteil auf, daß die Ergebnisse mit einem erträglichen Aufwand an Zeit erhalten werden können.

Die Art des Zuordnens der theoretischen und experimentellen Ergebnisse wird in den nachstehenden Ausführungen besprochen.

7. Über die Wirkungen am stillstehenden und drehenden Tragflügel.

Vor einer Erörterung der Messungsergebnisse mag es zweckmäßig sein, auf die Einzelwirkungen am stillstehenden und drehenden Tragflügel näher einzugehen. Es wirken

1. am stillstehenden Tragflügel
   a) Druckgradientkräfte auf alle Teilchen der Tragflügelströmung,
   b) Reibungskräfte von der Wand auf die wandnächsten Teilchen der Strömung,
   c) Schleppkräfte von der gesunden Außenströmung auf die Teilchen der Reibungsschicht,

   und zwar in Tiefen- und Spannweitenrichtung, ferner
2. am drehenden Tragflügel außer diesen Kräften, Trägheitskräfte infolge
   a) der Zentrifugalbeschleunigung wandnächster Teilchen,
   b) der Coriolisbeschleunigung aller, insbesondere der nicht der Reibungsschicht angehörenden Teilchen der Tragflügelströmung.

Die Wirkungen sind in dem hier in Betracht kommenden Auftriebsgebiet etwa folgende:

In Tiefenrichtung: Auf der Oberseite: Bis zum Druckminimum Beschleunigung der Strömungsteilchen, dann Verzögerung infolge Druckanstiegs; Abbremsen der wandnächsten Teilchen bei nachlassender Schleppwirkung der Außenströmung; Verdicken der Reibungsschicht und schließlich Ablösen der Strömung, im allgemeinen von hinten nach vorn fortschreitend. Im abgerissenen Gebiet kein eindeutiger Strömungszustand mehr.

Auf der Unterseite: Druckabfall vom weit vorn liegenden Staupunkt aus, Beschleunigung der Strömungsteilchen, dünne Reibungsschicht, günstige Schleppwirkung der Außenströmung; der Reibungswiderstand wird von den wandnächsten Teilchen leicht überwunden; kein Ablösen der Strömung.

In Spannweitenrichtung: Strömungsteilchen wandern auf das Gebiet tiefsten Unterdrucks zu, und zwar in um so stärkerem Maße, je kleiner ihre Geschwindigkeit ist, verdicken dort die Reibungsschicht, begünstigen also das Ablösen. Bei abgelöster Strömung befindet sich die Stelle größten Unterdrucks am Rande des »Totwassers«. Teilchen der Reibungsschicht des Nachbargebietes mit anliegender Strömung, aber auch des Gebietes abgerissener Strömung

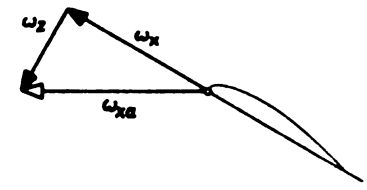


Bild 10. Zerlegung des strömungsfesten Vektors ω_{xa} in die entsprechenden flügelfesten Teilvektoren ω_x und ω_z.

werden in dieses Tiefdruckgebiet hineingesaugt. Dadurch Verbreitern des Bereiches abgerissener Strömung.

Durch die Zentrifugalbeschleunigung werden wandnächste Teilchen von innen gegen und über die Flügelränder gedrängt. Bei allseitig fest anliegender Strömung kommt den Schleuderwirkungen offenbar auch bei hohen Drehwerten keine besondere Bedeutung zu. Bei beginnender Ablösung hingegen scheinen sie entscheidenden Einfluß auf den Strömungscharakter zu gewinnen.

Zur Betrachtung der Corioliswirkungen möge der Flügel gegenüber der flügelfesten z-Achse als eine sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_z drehende Scheibe angesehen werden, s. Bild 10.

Da für den Flügel die Rechtsdrehung gewählt wurde, äußert sich die Coriolisbeschleunigung in einer Linksabweisung der Strömung (links: von einem mitdrehenden in Richtung der Relativbewegung schauenden Beobachter). So ergibt beispielsweise eine etwa durch Druckgefälle in Spannweitenrichtung nach außen erzwungene Relativbewegung auf der nach oben gehenden Tragflügelhälfte ein Abdrängen der Strömung gegen die Flügelhinterkante, auf der rechten Flügelhälfte gegen die Flügeleintrittskante zu, demnach links eine Ablenkung in einem das Anliegen der Strömung fördernden, rechts in einem das Ablösen begünstigenden Sinne. In Tiefenrichtung erfolgt die Ablenkung links nach innen, rechts nach außen. Es ist anzunehmen, daß die die gesamte Tragflügelströmung ergreifende Coriolisbeschleunigung bei kleineren Anstellwinkeln und den üblicherweise vorkommenden Drehwerten überhaupt keine Rolle spielt. Bei höheren Anstellwinkeln und hierbei dann, wenn die Strömung sich im Übergang vom anliegenden in den abgerissenen Zustand befindet, mag sie von Bedeutung sein, etwa beim Übergang in den steilen Trudelflug ($\alpha_0 \approx 30^0$; $\lambda = 0{,}35$) oder in den flachen Trudelflug ($\alpha_0 \approx 50^0$; $\lambda \approx 0{,}6$).

Bei der folgenden Besprechung der Messungsergebnisse wird auf die eben aufgeführten Einzelwirkungen von Fall zu Fall hingewiesen.

8. Besprechung der Ergebnisse aus Theorie und Experiment.

a) Tragflügel 1, gerader Rechteckflügel $\lambda = 0$ (Bild 11 bis 14).

Die Druckverteilungskurven für diesen Flügel (Bild 11 und 12) zeigen bei den kleineren Anstellwinkeln auf der Oberseite und Unterseite im wesentlichen den für das untersuchte Profil zu erwartenden Verlauf. Beachtlich sind allerdings die Tiefdruckgebiete über dem rückwärtigen Teil der Flügeloberseite im Randgebiet. Sie sind auch bei anderen Messungen festgestellt worden und müssen auf das heftige Umströmen der hier scharf ausgebildeten Flügelrandkanten zurückgeführt werden.

Die durch Integration längs der Tiefe und Spannweite ermittelten Beiwerte der mittleren Normalkraft des Flügels $\overline{c_n}$ wurden in das Schaubild, Bild 14, eingetragen. Sie stimmen bis auf die Werte im Bereiche des Auftriebsabfalles gut mit den Werten der Kraftmessung überein. Zur Erklärung dieser Unterschiede soll angeführt sein, daß es in diesem c_a-Bereich nur selten gelingt, die durch »Hochziehen« des Flügels im Windkanal zum Wiederanliegen gezwungene Strömung für die Dauer einer Druckverteilungsmessung in diesem Zustand zu erhalten, zumal die wenn auch kleinen Druckanbohrungen (Durchmesser 0,5 mm) selbst bei sorgfältigster Ausführung Störstellen für den in diesem Bereiche hochempfindlichen Strömungsmechanismus darstellen.

[11]) Siehe Fußnote 3b).
[12]) H. Multhopp, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 153.

Digitized by Google

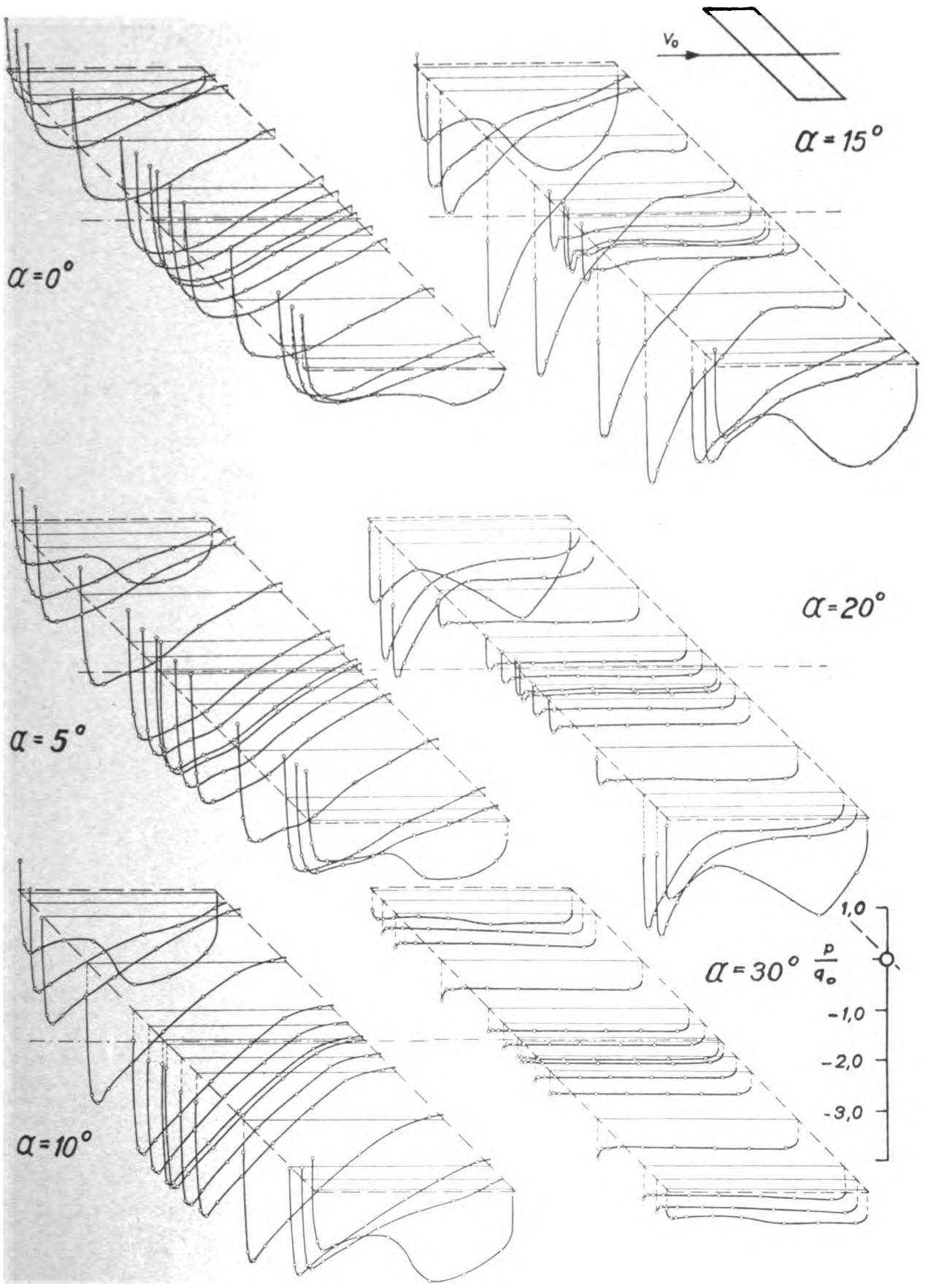


Bild 11. Druckverteilungen über der Oberseite des stillstehenden Tragflügels 1 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Digitized by Google

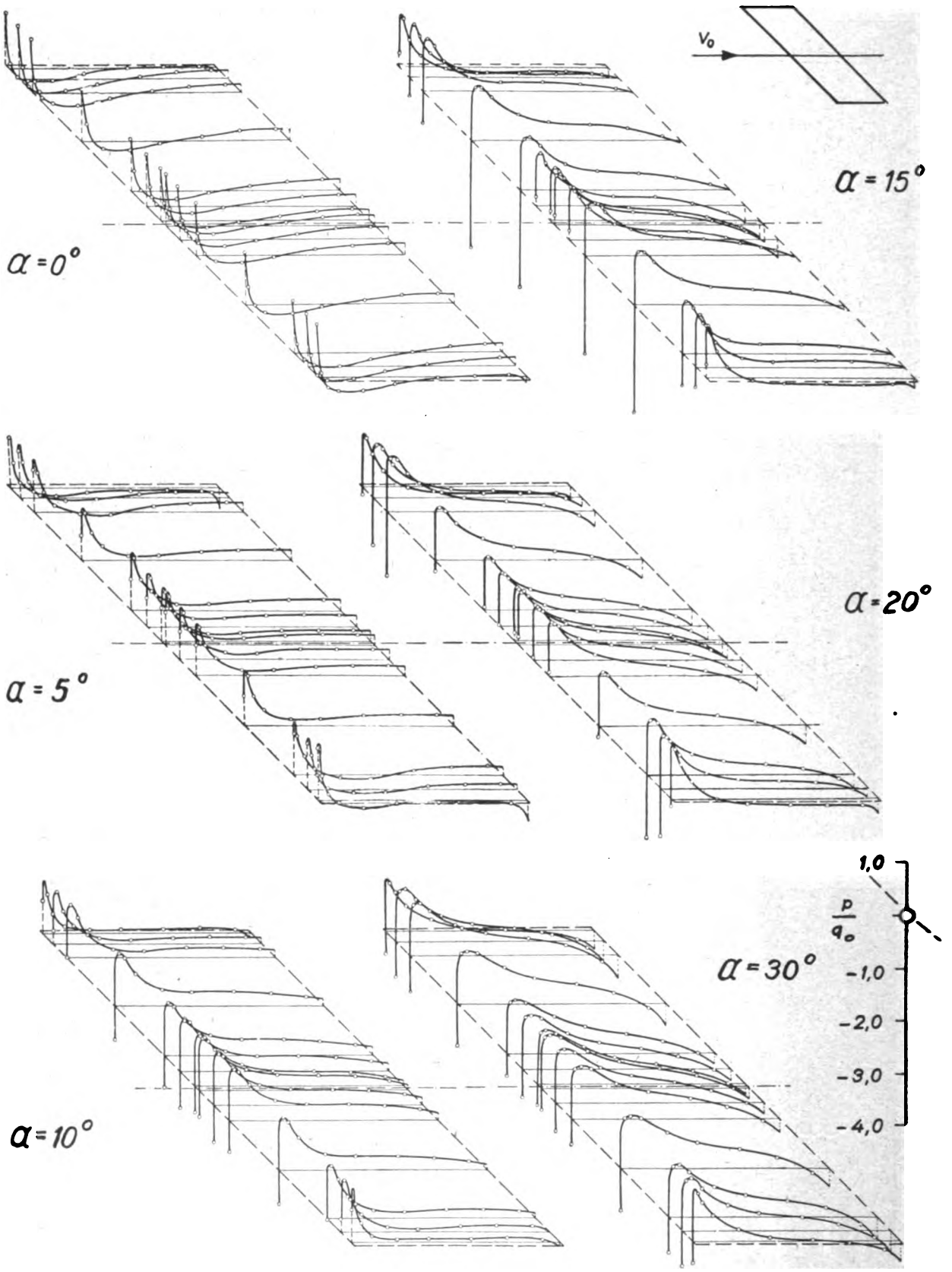


Bild 12. Druckverteilungen über der Unterseite des stillstehenden Tragflügels 1 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Digitized by Google

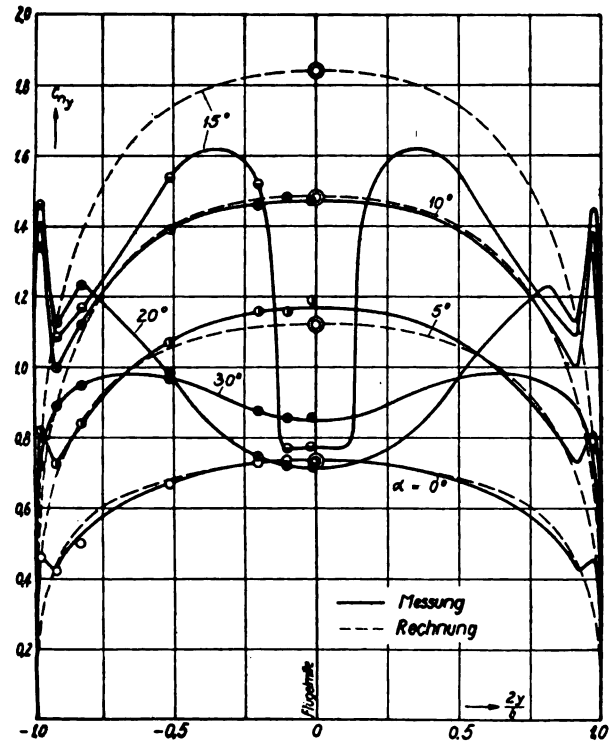


Bild 13. Experimentelle Normalkraftverteilung für den stillstehenden Tragflügel 1 bei verschiedenen Anstellwinkeln und Vergleich mit der rechnerischen Auftriebsverteilung.

Immerhin war es bei $\alpha = 15^0$ nach stets mehrmals wiederholten Versuchen gelungen, die Druckverteilung im hochgezogenen Zustande zu bestimmen und damit den Beginn des Abreißens der Strömung für den Rechteckflügel messend festzuhalten, Bild 11 und 13. Überraschend ist dabei, daß sich der schmale Streifen völlig abgerissener

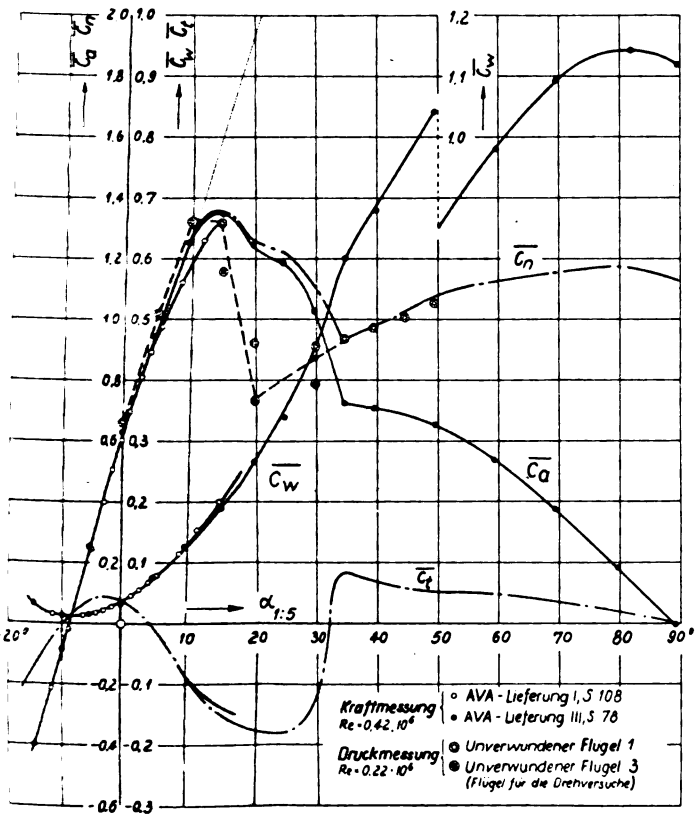


Bild 14. Ergebnisse von Kraft- und Druckmessungen an Tragflügeln mit dem Profil Göttingen 420 und dem Seitenverhältnis 1:5.

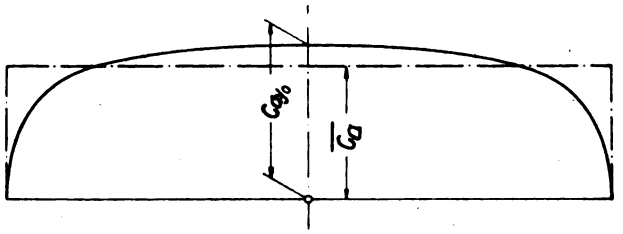


Bild 15. Definitionsskizze für $\overline{c_a}$ und $c_{a_{y_0}}$.

Strömung in Flügelmitte neben dem Gebiet wenigstens im Flügelvorderteil anliegender Strömung zu halten vermochte. Anzeichen des Ablösens weisen allerdings auch die in Mitte der Halbspannweite liegenden Schnitte auf. Nur über den randnahen Schnitten herrscht noch gesunde Strömung. Bei $\alpha = 20^0$ ist das »Totwassergebiet« schon erheblich breiter geworden und auch die Druckverteilung über den weit außen liegenden Schnitten läßt das bevorstehende völlige Ablösen erkennen. Bei $\alpha = 30^0$ ist dies erreicht; selbst die Tiefdruckgebiete in Flügelrandnähe sind in sich zusammengesunken, Bild 11. — Bei den Fadensondenbeobachtungen ist der Grad der Ablösung infolge des störenden Einflusses der Sonde stets größer als bei den Messungen selbst.

Die Strömung auf der Flügelunterseite zeigt bei allen untersuchten Anstellwinkeln kein außergewöhnliches Verhalten. Sie scheint von den Vorgängen auf der Flügeloberseite kaum beeinflußt zu werden, Bild 12.

Die Ergebnisse der Rechnung und Messung sind in Bild 13 einander gegenübergestellt. Über das Zuordnen der Kurven sei erwähnt:

Die Theorie liefert die Grundverteilung für den Anstellwinkel eins. Die Auftriebsverteilungen der verschiedenen Anstellwinkel sind nun dieser Grundverteilung affin. Das Affinitätsmaß wurde für den Auftriebsbeiwert der Flügelmitte $c_{a\,y0}$ bestimmt. Dazu wurde dem Bild 14 für den in Frage kommenden und mit der Windkanalkorrektur versehenen Anstellwinkel der mittlere Auftriebsbeiwert $\overline{c_a}$ entnommen und mit dem Betrag des Verhältnisses des theoretischen Auftriebsbeiwertes in Flügelmitte $c_{a\,y_0\,th}$ und dem theoretischen mittleren Auftriebsbeiwert $\overline{c_a}_{th}$ multipliziert.

$$c_{a\,y_0} = \overline{c_a}\left(\frac{c_{a\,y\,otb}}{\overline{c_a}_{th}}\right).$$

Von diesem Werte $c_{a\,y0}$ aus wurde dann die Entwicklung der rechnerischen Auftriebsverteilung vorgenommen, wobei noch $c_{a_y} = c_{n_y}$ gesetzt wurde, Bild 15.

Bild 13 läßt für die kleineren Anstellwinkel trotz der etwas störenden Auftriebsspitzen an den Flügelrändern eine gute Übereinstimmung zwischen den rechnerischen und versuchsmäßigen Ergebnissen erkennen. Bei größeren Anstellwinkeln — etwa von $\alpha = 15^0$ ab — treten aber beachtliche Unterschiede auf, die bei weiterer Anstellwinkelzunahme schließlich untragbar groß werden. Bei diesen Anstellwinkeln ist die Strömung nicht mehr imstande, dem Flügelprofil zu folgen. Sie reißt ab und verliert damit den Charakter, den die Theorie bei ihr voraussetzt.

b) Tragflügel 2, verwundener Rechteckflügel.

Verwindung entsprechend $\lambda = 0{,}3$ (Bild 16, 17, 18).

Die Verwindung kommt einer Rechtsdrehung gleich, daher geradlinige Zunahme des Anstellwinkels von links nach rechts. Die betragsmäßige Änderung ist für $\alpha_0 = 15^0$ auf Bild 19 zu erkennen.

Den Vergleich zwischen den rechnerischen und experimentellen Untersuchungen ermöglicht Bild 18. Die rechnerischen Werte sind aus der Verteilung des unverwundenen Flügels und aus dem Anteil der Verwindung durch Überlagerung entstanden, Bild 20. Als Schlüsselwert diente $c_{n_{y_0}}$ des geraden Tragflügels, d. h. $c_{n_{y_0}}$ (gerader Flügel) $= c_{n\,y0}$ (verwundener Flügel). Das ist — wie auch die Messungen

Digitized by Google

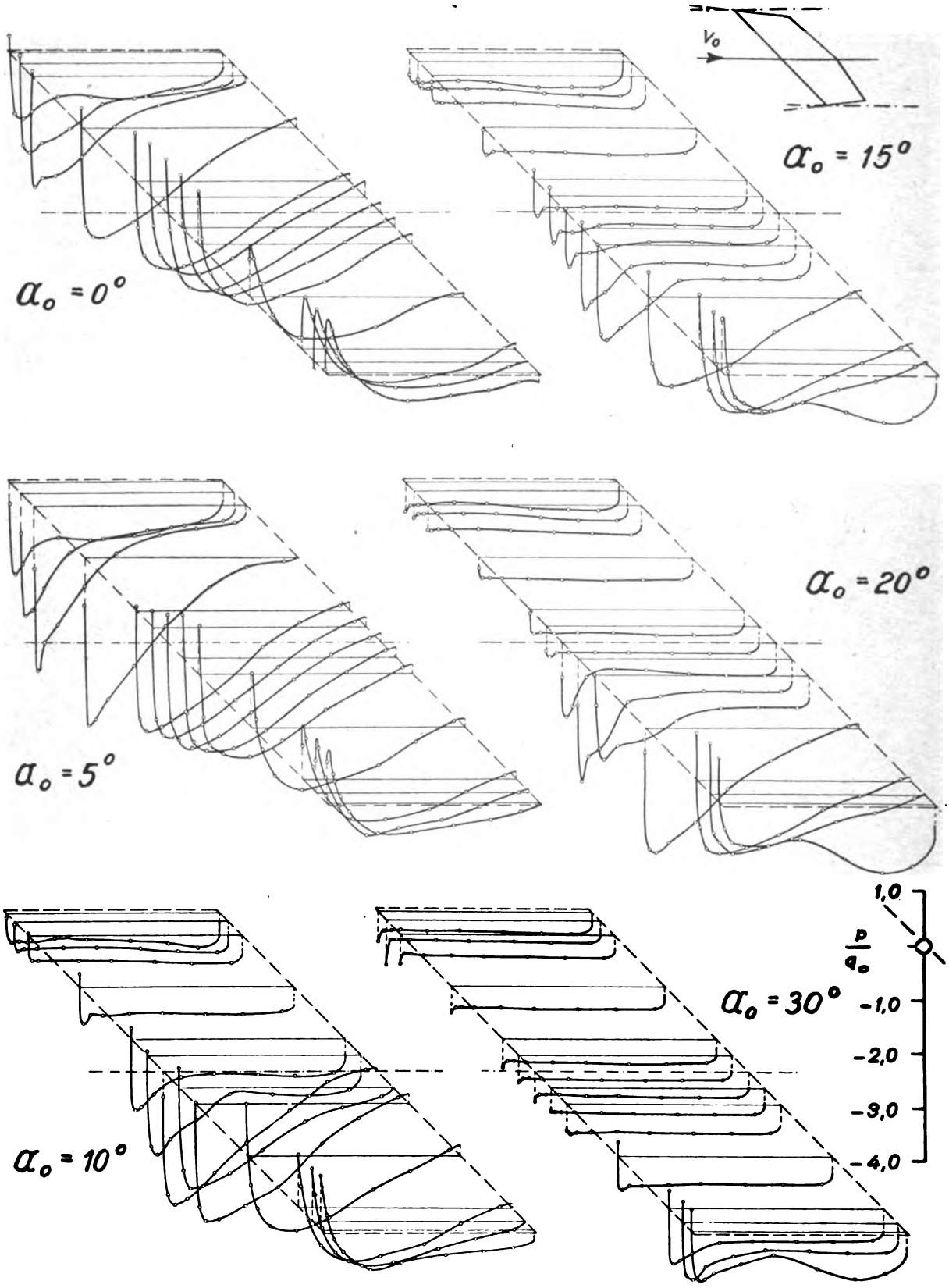


Bild 16. Druckverteilungen über der Oberseite des verwundenen Tragflügels 2 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Digitized by Google

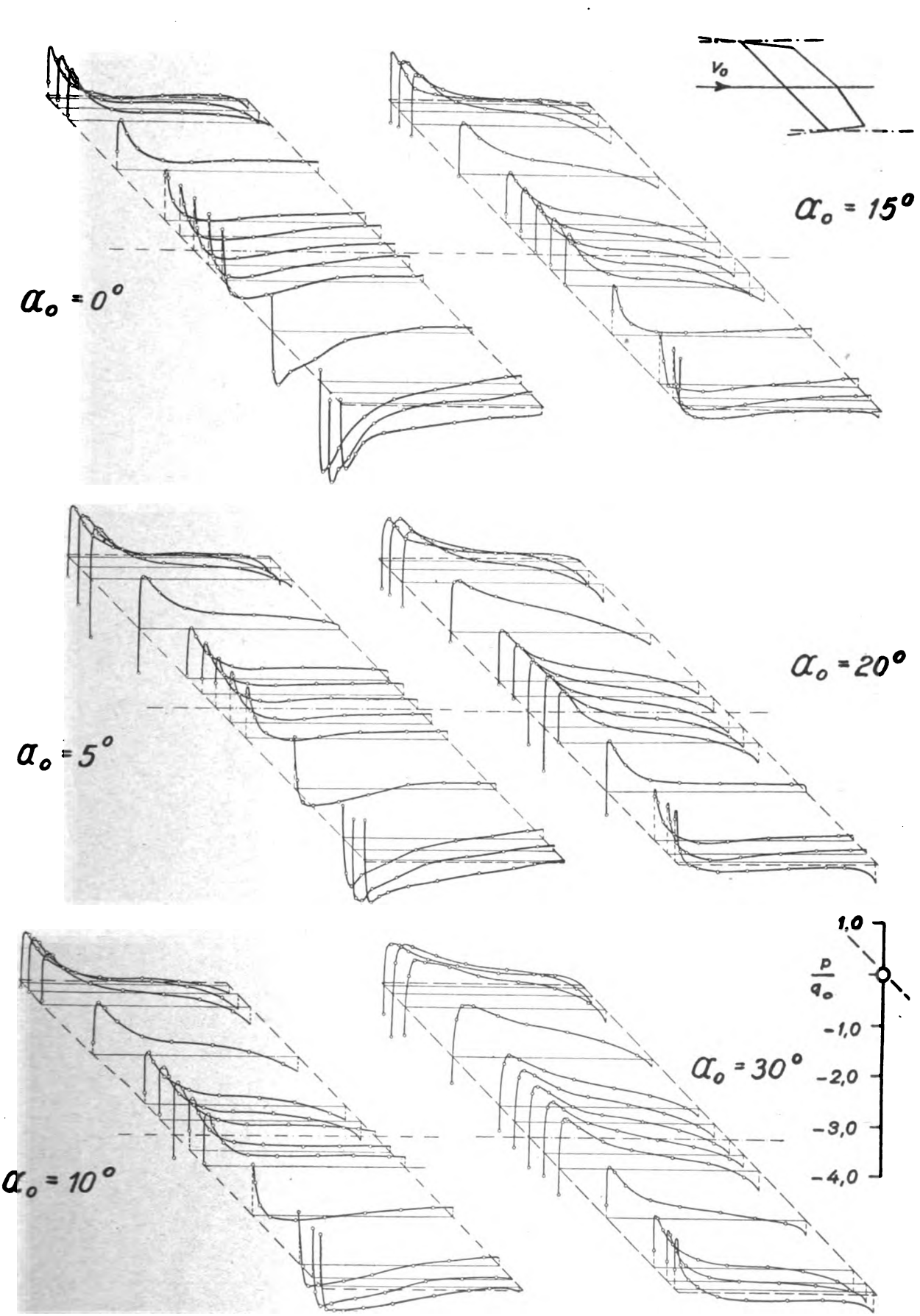


Bild 17. Druckverteilungen über der Unterseite des verwundenen Tragflügels 2 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Digitized by Google

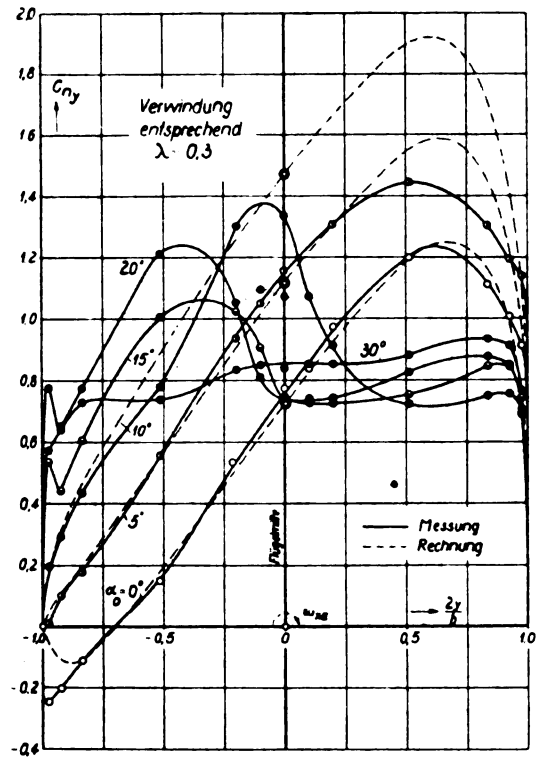


Bild 18. Experimentelle Normalkraftverteilung für den verwundenen Tragflügel 2 bei verschiedenen Anstellwinkeln und Vergleich mit der rechnerischen Auftriebsverteilung.

zeigen (Normalkräfte Bild 18; Druckverteilungen Bild 21) — bei vollständig anliegender Strömung zulässig, da die von den Tragflügelhälften nach hinten abgehenden Wirbel in der Flügelmitte zusätzliche Anstellwinkel von gleichem Betrag, aber entgegengesetztem Vorzeichen, induzieren.

Rechnung und Experiment liefern Ergebnisse, die bei anliegender Strömung in gutem Einklang sind, Bild 18. Bei $\alpha_0 = 5°$ ist allerdings schon der Beginn des Ablösens über den stark belasteten Schnitten der rechten Flügelhälfte zu erkennen. Bei $\alpha_0 = 10°$ nimmt dann die Oberseitenströmung die Form an, die beim Abkippen über den Flügelrand vorhanden ist. Die Unterschiede in den rechnerischen und versuchsmäßigen Werten sind hierbei schon recht erheblich. Bei $\alpha_0 = 15°$ und $20°$ ist die Asymmetrie der Normalkraftverteilung so weit fortgeschritten, daß der sich selbst überlassene Flügel in Autorotation geraten würde. Eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment ist hierbei überhaupt nicht mehr zu erwarten, da das »Totwasser« der Oberseitenströmung schon zu breit geworden ist. Das gilt erst recht für $\alpha_0 = 30°$, wo auf der Flügeloberseite nur mehr völlig abgerissene Strömung anzutreffen ist. — Die Druckverteilung der Unterseite zeigt keinen außergewöhnlichen Verlauf. Sie liefert ein mit dem Anstellwinkel wachsendes rückdrehendes Moment. Der Vergleich mit dem drehenden Tragflügel 3 wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

c) Tragflügel 3, gerader Rechteckflügel bei Drehung (Bild 22 bis 32).

Die Untersuchungen wurden bei $\alpha_0 = 15°$ begonnen. Das Messen bei kleinerem Anstellwinkel erschien bei der mit Rücksicht auf die hohen Drehwerte gewählten Art der Modellbefestigung nicht ratsam, da mit einer erheblichen Störung der Strömung in Flügelmitte durch die Haltestange des Modells zu rechnen war. Von $\alpha_0 = 15°$ ab liegt diese Stange aber im abgerissenen Strömungsteil der Oberseite, so daß von da ab ihr Einfluß als unbedeutend angesehen werden kann.

Die für $\lambda = 0$ aus der Druckverteilung bestimmten mittleren Normalkraftbeiwerte $\overline{c_n}$ liegen nach Bild 14 etwas

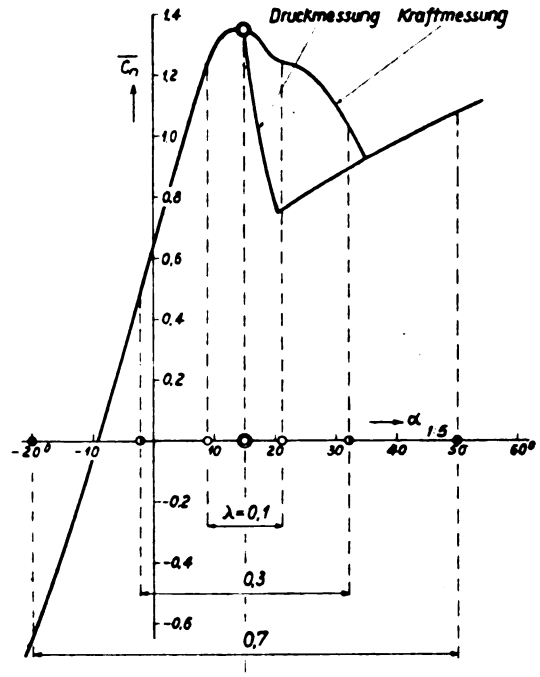


Bild 19. Änderungsbereich des geometrischen Anstellwinkels infolge der Drehung, aufgezeigt für $\alpha_0 = 15°$ und einige Drehwerte.

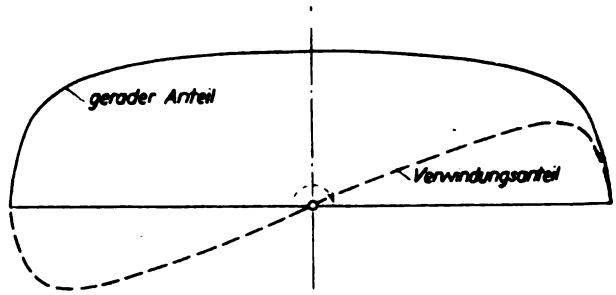


Bild 20. Schematische Darstellung der an einem längs der Spannweite gleichsinnig verwundenen oder drehenden System für die Auftriebsverteilung wirksamen Anteile.

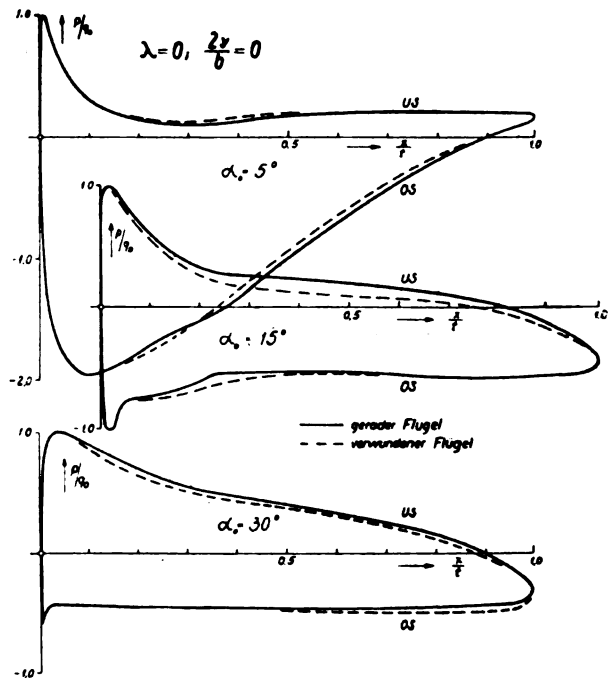


Bild 21. Vergleich der Druckverteilung in Tiefenrichtung über dem Mittelschnitt,
a) des geraden Tragflügels 1,
b) des verwundenen Tragflügels 2
bei mehreren Anstellwinkeln.

Digitized by Google

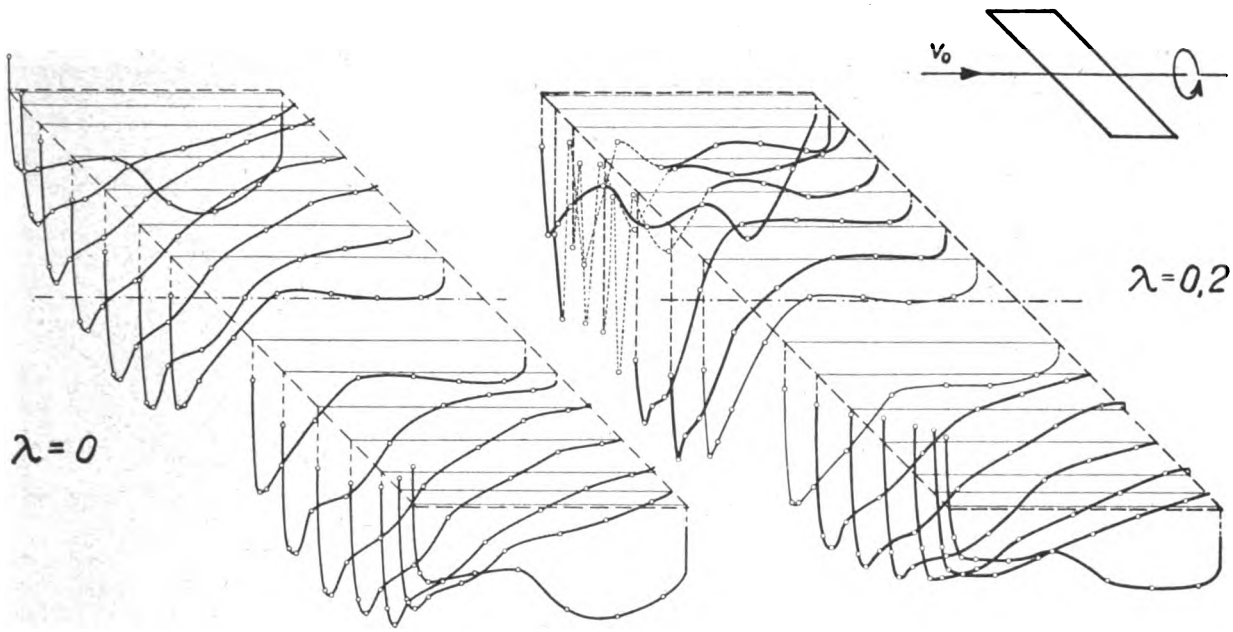
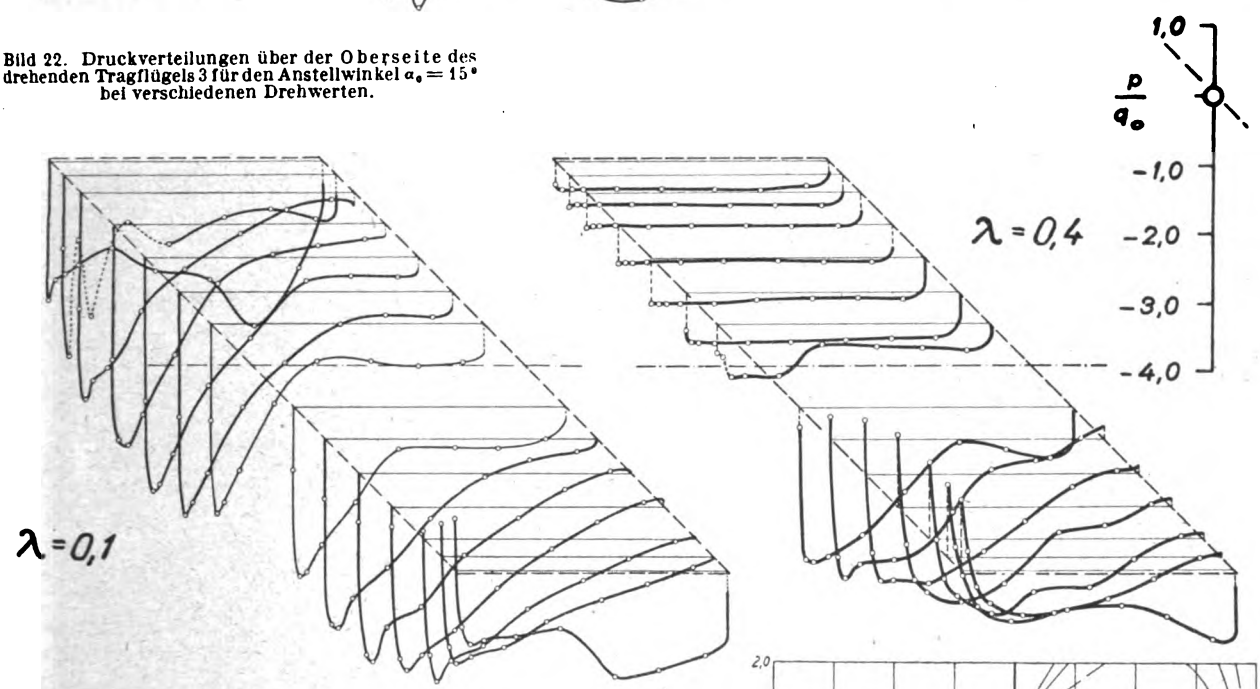


Bild 22. Druckverteilungen über der Oberseite des drehenden Tragflügels 3 für den Anstellwinkel $\alpha_0 = 15°$ bei verschiedenen Drehwerten.



tiefer als die des Tragflügels 1. Dies läßt sich neben den oben schon geschilderten Schwierigkeiten beim »Hochziehen« des Modells im Windkanal auf Herstellungenauigkeiten zurückführen, die bei dem in Blech getriebenen Flügel 3 vor allem im Bereiche der schwierig zu formenden Flügelnase größer als beim Flügel 1 sein dürften.

Von den Messungsergebnissen des drehenden Tragflügels 3 möge folgendes hervorgehoben werden:

Bei $\alpha_0 = 15°$ (Bild 22, 23, 24) ist für $\lambda = 0{,}1$ und 0,2 noch positive Rolldämpfung vorhanden. Bei $\lambda = 0{,}1$ zeigt sich jedoch in der Tiefenverteilung der Drücke über den äußeren Schnitten der Oberseite der rechten Tragflügelhälfte eine gewisse Unruhe an, die sich bei $\lambda = 0{,}2$ verstärkt. Bei $\lambda = 0{,}4$ trägt die Oberseitenströmung zwar den Charakter einer zur Autorotation führenden Verteilung, da die Strömung auf der linken, d. i. die nach oben gehende Flügelhälfte, anliegt, auf der rechten hingegen abgerissen ist. Die Autorotation kommt jedoch, wie später an Hand von Bild 35 gezeigt wird, nicht mehr zustande, da die Belastung der Oberseite der linken Flügelhälfte infolge des

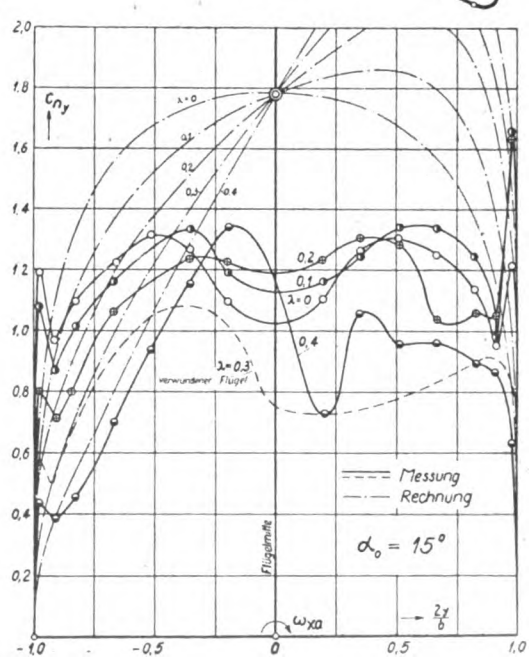


Bild 24. Normalkraftverteilung über dem Tragflügel 3 beim Anstellwinkel $\alpha_0 = 15°$ für verschiedene Drehwerte und Versuch eines Vergleichs mit rechnerisch ermittelten Werten.

Digitized by Google

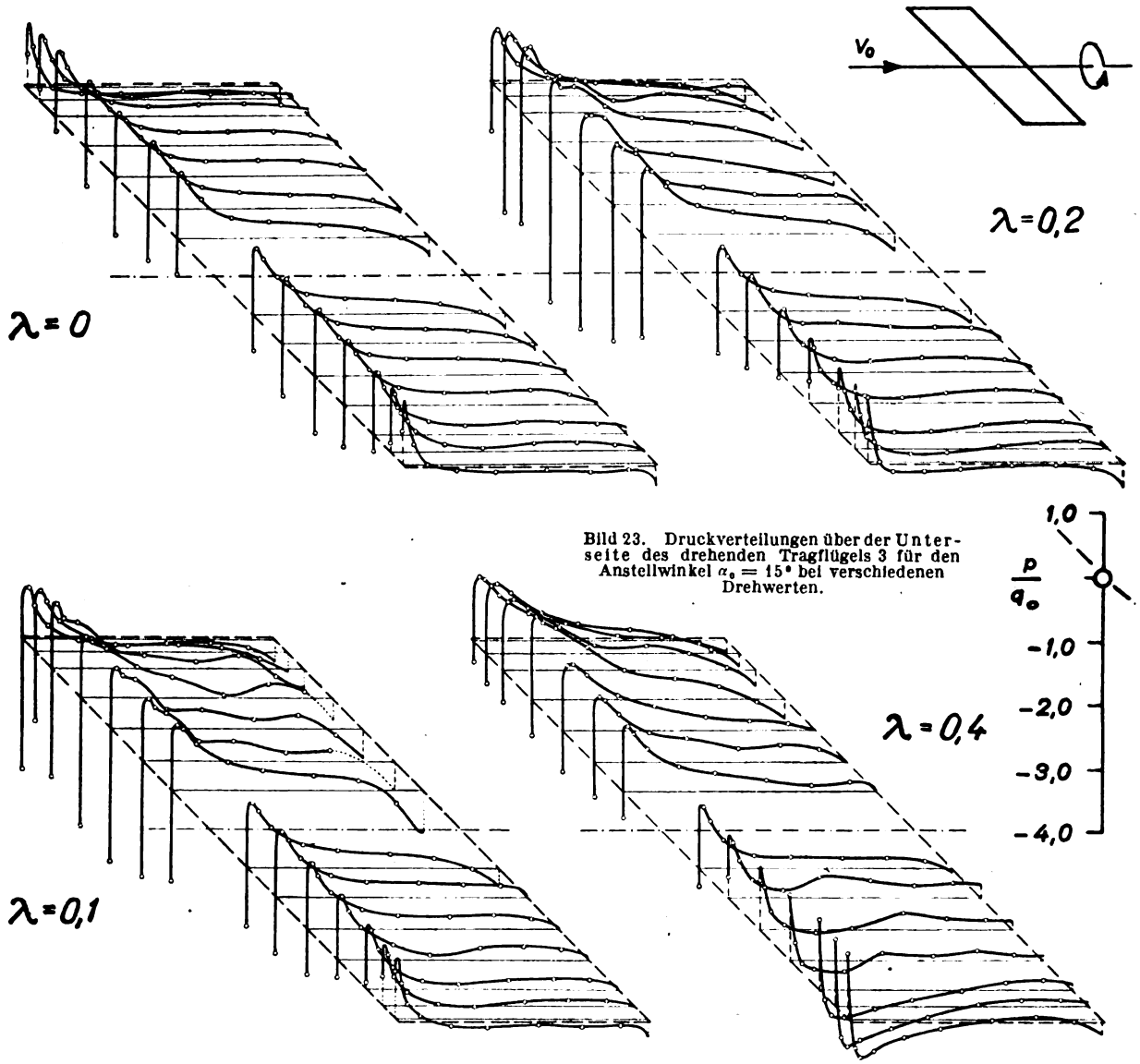


Bild 23. Druckverteilungen über der Unterseite des drehenden Tragflügels 3 für den Anstellwinkel $\alpha_0 = 15°$ bei verschiedenen Drehwerten.

verhältnismäßig hohen Drehwertes schon erheblich abgemindert ist und der Einfluß der Unterseite, die stets einen Anteil zum rückdrehenden Moment liefert, zugenommen hat.

Für $\alpha_0 = 15°$ wurde auch versuchsweise die Auftriebsverteilung für mehrere Drehwerte gerechnet, Bild 24. Dabei wurde angenommen, daß die Strömung noch vollständig anliegt und $\frac{d\overline{c_a}}{d\alpha}$ den für anliegende Strömung gültigen Betrag beibehalten hat. Die Verteilungskurve wurde wie bei Tragflügel 2 vom Wert $c_{n_{y_0}}$ aus entwickelt, der aus dem durch geradliniges Extrapolieren der $\overline{c_a}$, α-Kurve, Bild 14, auf den mit der Windkanalkorrektur versehenen Anstellwinkel ermittelten $\overline{c_a}$ entstanden ist. Bei kleinerem Drehwert ist die Übereinstimmung erwartungsgemäß schlecht. Erst bei größerem λ wird sie auf der linken Flügelhälfte mit anliegender Strömung besser, während sie sich auf der rechten Flügelhälfte noch weiter verschlechtert.

Bei $\alpha_0 = 20°$, Bild 25, 26, 27, herrscht für $\lambda = 0{,}1$ und 0,2 die Druckverteilung und damit die Normalkraftverteilung, wie sie am selbstdrehenden Tragflügel zu Beginn der Drehung anzutreffen ist. Die Oberseite weist die im Sinne des Antreibens starke Asymmetrie der Verteilung auf. Die an sich im rückdrehenden Sinne ausgebildete Verteilung der Unterseite vermag hier keinen vollen Ausgleich herbeizuführen. Es liegt der Fall vor, daß die Autorotation aus dem Zustand völlig abgerissener Oberseitenströmung durch Wiederanliegen auf der nach

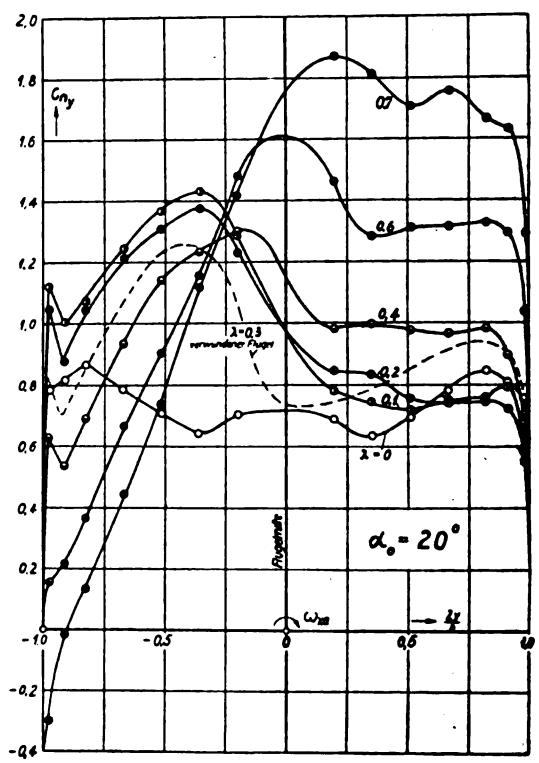


Bild 27. Normalkraftverteilung über dem Tragflügel 3 beim Anstellwinkel $\alpha_0 = 20°$ für verschiedene Drehwerte.

Digitized by Google

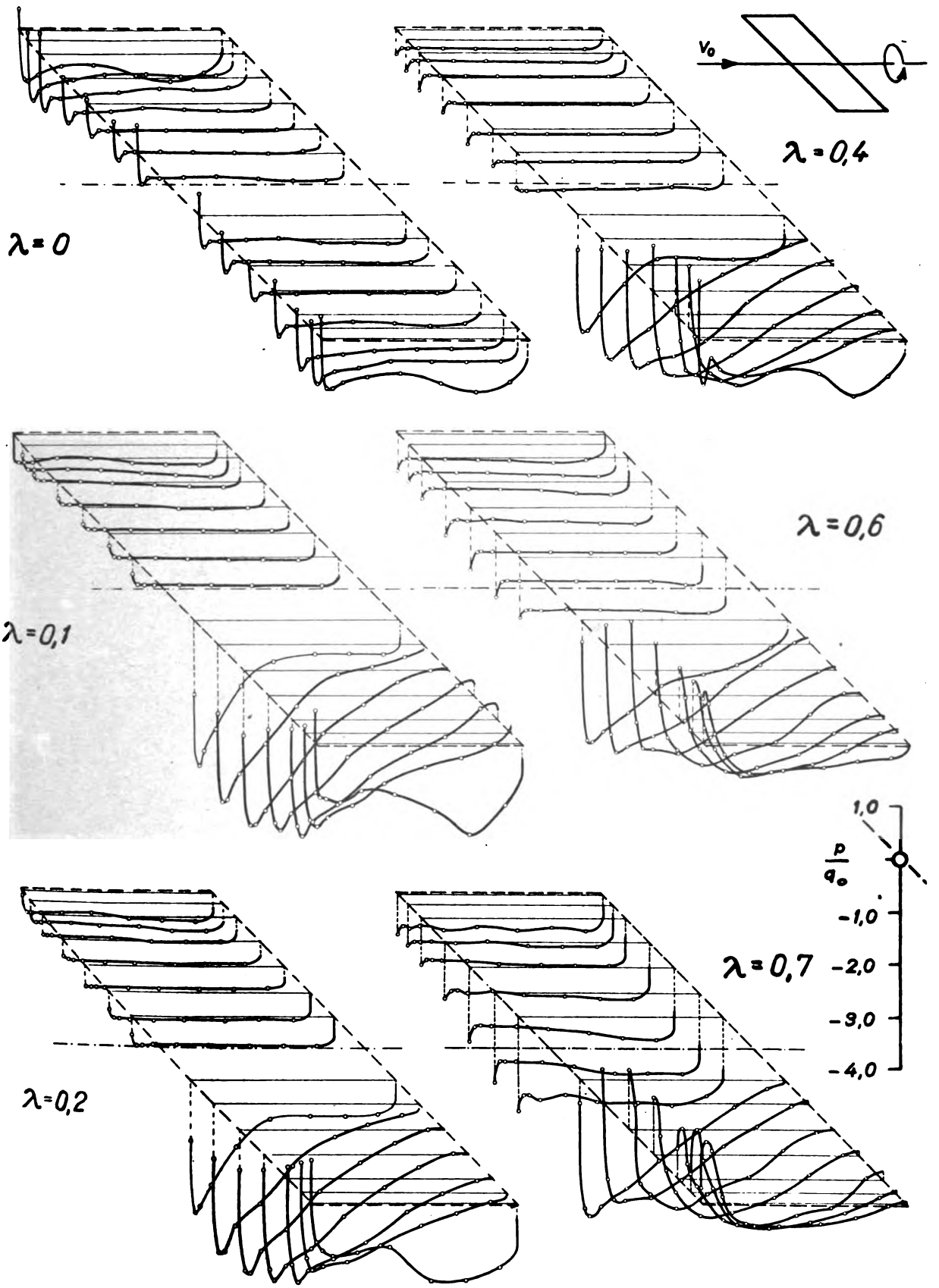


Bild 25. Druckverteilungen über der Oberseite des drehenden Tragflügels 3 für den Anstellwinkel $\alpha_0 = 20°$ bei verschiedenen Drehwerten.

Digitized by Google

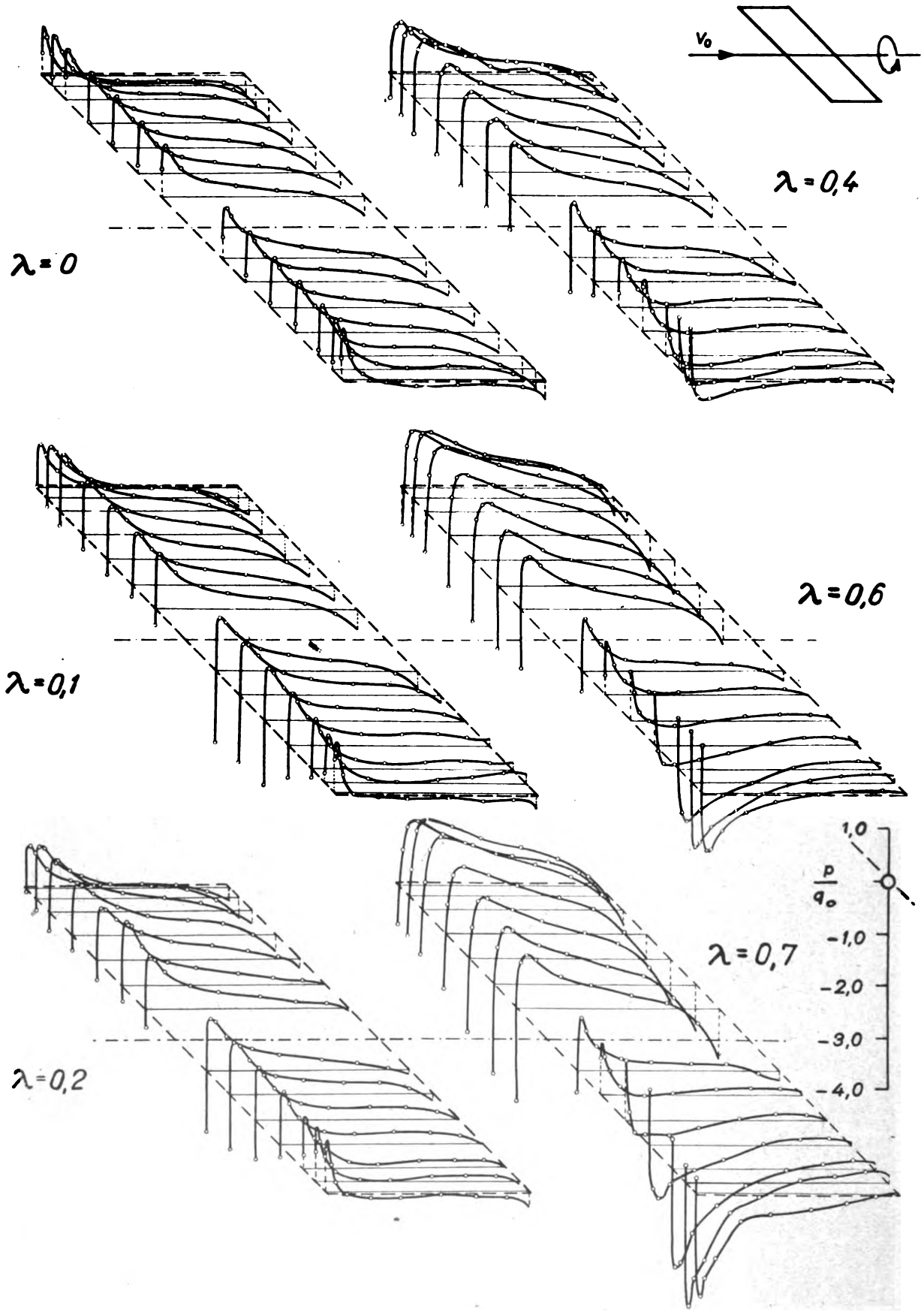


Bild 26. Druckverteilungen über der Unterseite des drehenden Tragflügels 3 für den Anstellwinkel $\alpha_0 = 20°$ bei verschiedenen Drehwerten.

Digitized by Google

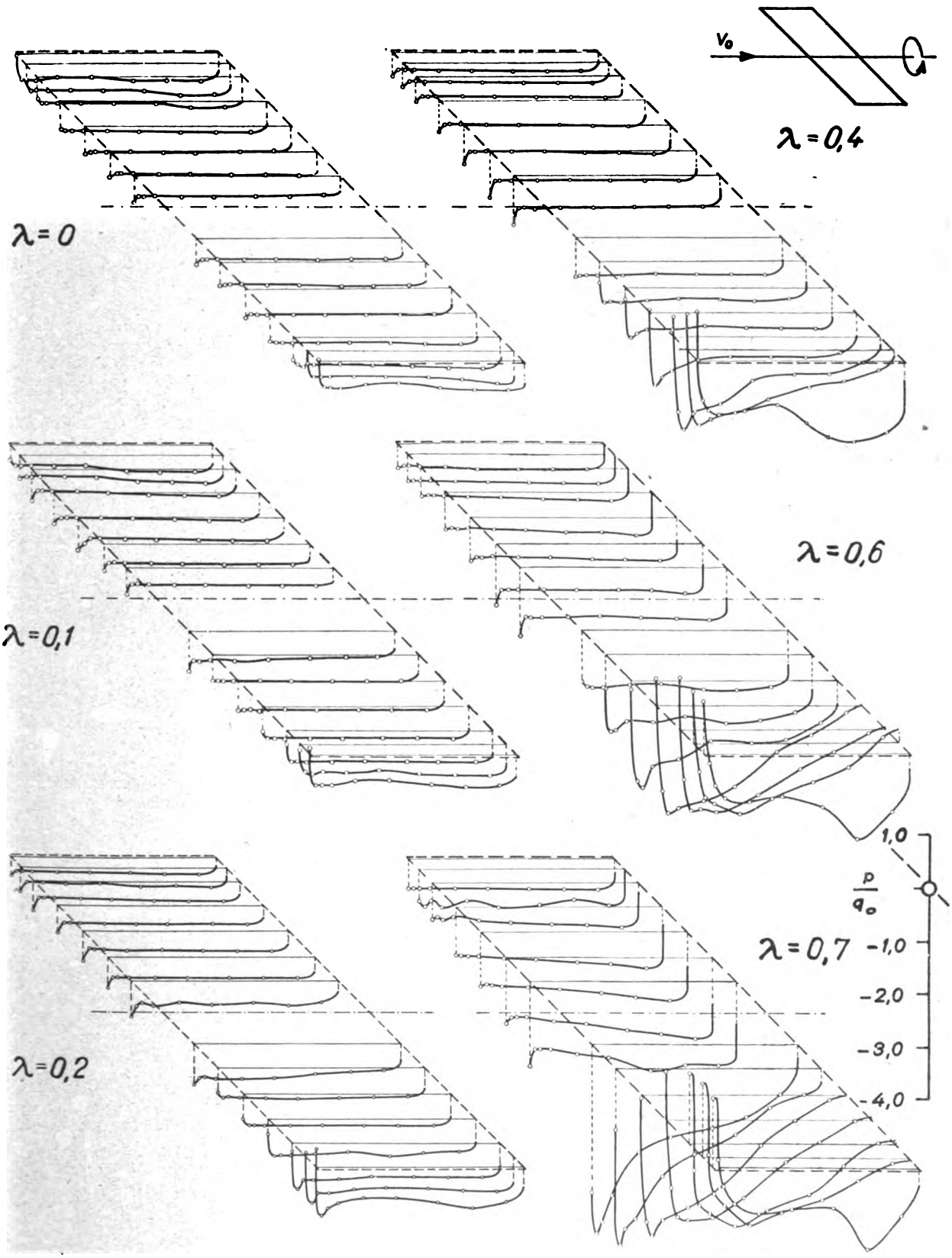


Bild 28. Druckverteilungen über der Oberseite des drehenden Tragflügels 3 für den Anstellwinkel $\alpha_0 = 30°$ bei verschiedenen Drehwerten.

Digitized by Google

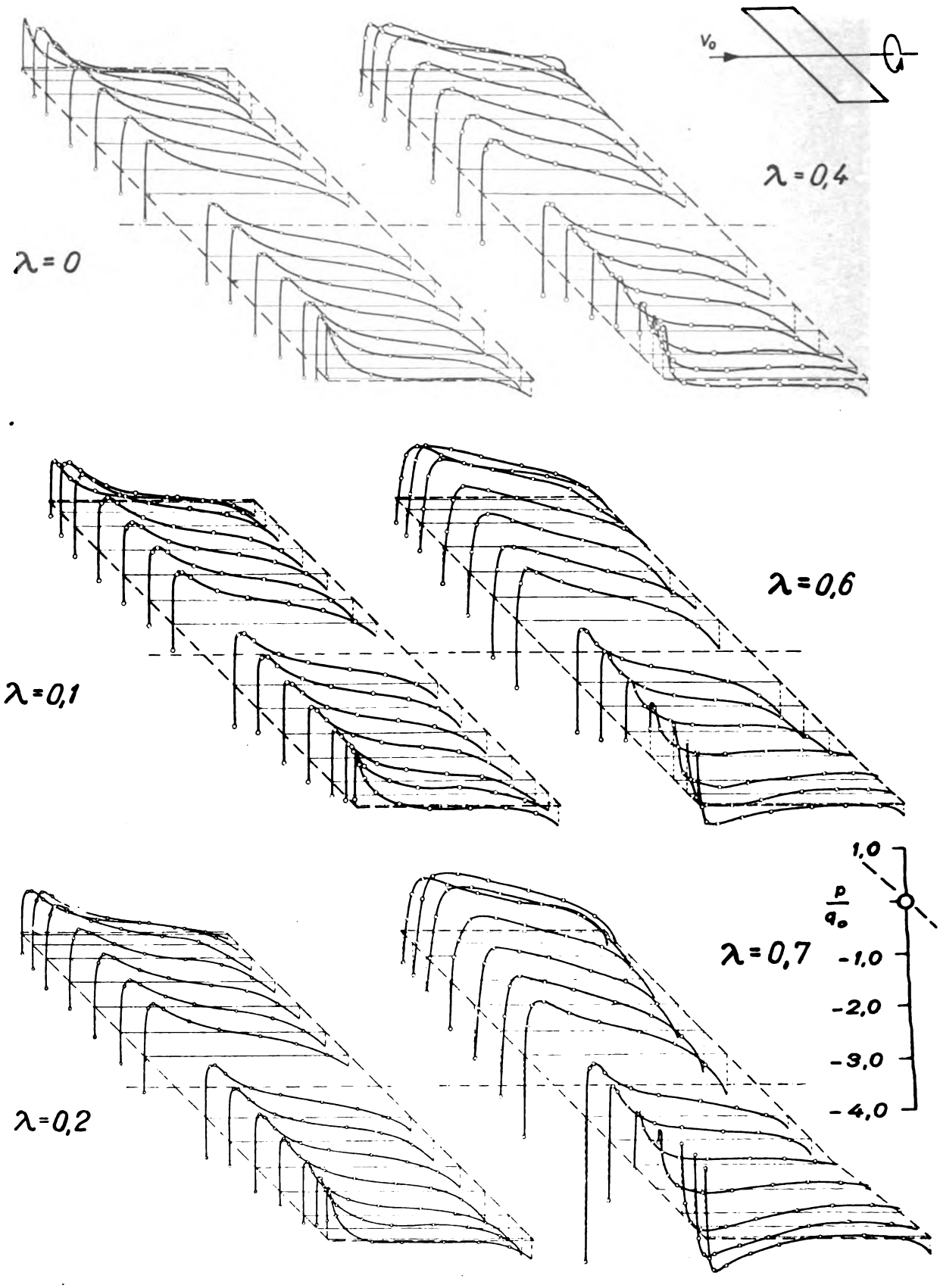


Bild 29. Druckverteilungen über der Unterseite des drehenden Tragflügels 3 für den Anstellwinkel $\alpha_0 = 30°$ bei verschiedenen Drehwerten.

Digitized by Google

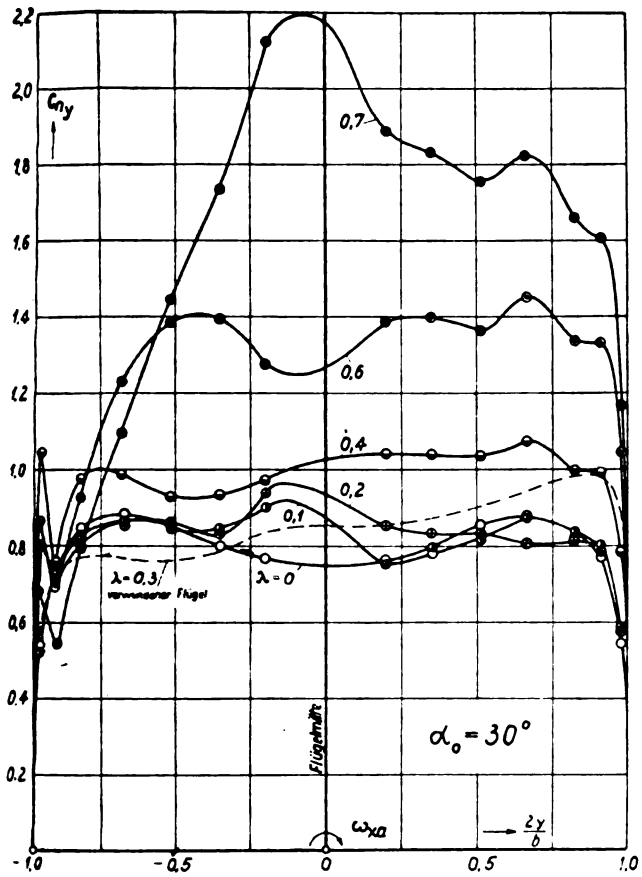


Bild 30. Normalkraftverteilung über dem Tragflügel 3 beim Anstellwinkel $\alpha_0 = 30°$ und bei verschiedenen Drehwerten.

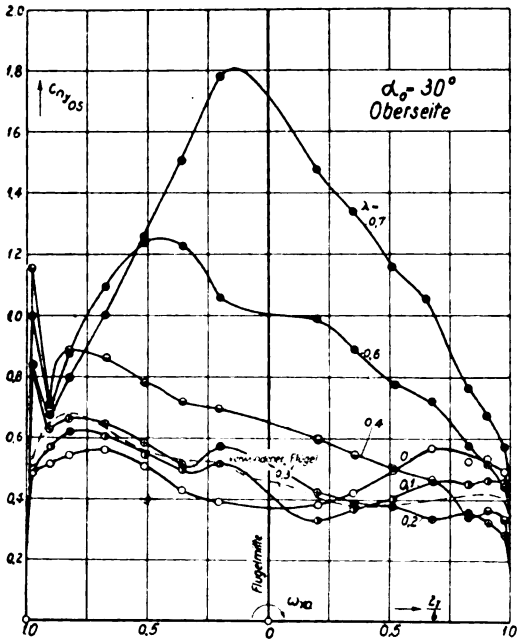


Bild 31. Anteil der Oberseite an der Normalkraftverteilung über dem Tragflügel 3 beim Anstellwinkel $\alpha_0 = 30°$ und bei verschiedenen Drehwerten.

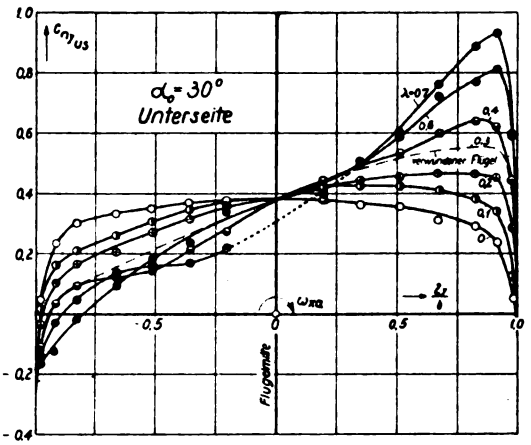


Bild 32. Anteil der Unterseite an der Normalkraftverteilung über dem Tragflügel 3 beim Anstellwinkel $\alpha_0 = 30°$ und bei verschiedenen Drehwerten.

oben gehenden Flügelhälfte eintritt. Häufiger aber erfolgt die Autorotation aus dem Zustand nur teilweise, aber symmetrisch abgerissener Oberseitenströmung durch weiteres Abreißen auf der nach unten gehenden Flügelhälfte. Dieser Vorgang kann bei dem vorliegenden Flügel zwischen $\alpha_0 = 15°$ und 20° erwartet werden und vollzieht sich oberseitig etwa wie bei $\alpha_0 = 15°$ und $\lambda = 0{,}4$.

Bei $\alpha_0 = 30°$, Bild 28, 29 bis 32, ist die Strömung am ruhenden Flügel naturgemäß über der ganzen Flügeloberseite abgerissen. Kleinere Drehwerte ändern diese Verteilung nur unwesentlich. Erst bei höheren Drehwerten sind Erscheinungen festzustellen, die eine eingehendere Betrachtung erforderlich machen.

Diese Erscheinungen treten auch bei $\alpha_0 = 20°$ auf, und zwar bei Drehwerten $\lambda > 0{,}3$. Sie bestehen darin,

1. daß im anliegenden Teil der Strömung c_{ny}-Werte auftreten, die mitunter erheblich größer sind als der größte gemessene c_{ny_0}-Wert für $\lambda = 0$,
2. daß im abgerissenen Teil der Strömung die c_{ny}-Werte auf der nach unten gehenden Tragflügelhälfte ziemlich hohe und nach außenhin nahezu gleichbleibende Beträge annehmen.

Hierzu sei ausgeführt:

1. Läge die Strömung allseitig an, so wären bei den in Betracht kommenden Drehwerten der Theorie gemäß ziemlich hohe c_{ny}-Werte zu erwarten, wie dies beispielsweise Bild 24 für $\alpha_0 = 15°$ erkennen läßt. Es muß als sicher angenommen werden, daß die oben geschilderten Auswirkungen der Trägheitskräfte, insbesondere der Zentrifugalkraft, ein Wiederanliegen der Strömung über den weiter innen liegenden Schnitten der nach oben gehenden Flügeloberseite zur Folge haben und damit ein Annähern an die theoretisch zu erwartenden c_{ny}-Werte ermöglichen. Zugleich scheint der relativ hohe Unterdruck über dem benachbarten Gebiet mit abgerissener Strömung auf die anliegende Strömung Einfluß zu nehmen und die Druckverteilung in ihrem rückwärtigen Teil völliger zu gestalten. — Mit $\lambda = 0{,}7$ liegt der größte gemessene c_{ny}-Wert für $\alpha_0 = 20°$ bei 1,85, für $\alpha_0 = 30°$ bei 2,2, während er für den geraden nicht drehenden Flügel 1,55 beträgt.
2. Die für $\lambda > 0{,}3$ zu beobachtende Steigerung von c_{ny} auf der nach unten gehenden Flügelhälfte kommt durch ein mit λ fortschreitendes Absinken des Unterdrucks auf der Oberseite und durch eine Zunahme des Überdrucks auf der Unterseite zustande. Die Vorgänge auf der Oberseite dürften durch die Unterdrücke über dem vorderen Teil des angrenzenden Gebietes anliegender Strömung bestimmt werden, während die Drucksteigerung über der Unterseite auf die mit der örtlichen Anstellwinkelzunahme verbundene Staupunktwanderung gegen die Flügelhinterkante hin zurückzuführen ist. Um die Anteile beider Flügelseiten besser in Erscheinung treten zu lassen, wurden für $\alpha_0 = 30°$ — als Beispiel — die c_{ny}-Werte der Oberseite und Unterseite getrennt dargestellt, Bild 31 und 32.

Digitized by Google

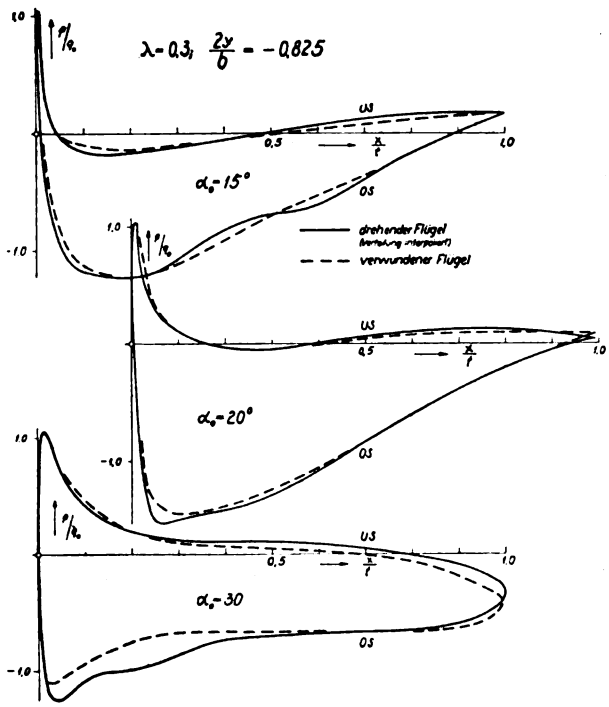


Bild 33. Vergleich der Druckverteilung in Tiefenrichtung über einem auf der linken, d. i. auf der nach oben gehenden Flügelhälfte liegenden Schnitt
a) für den verwundenen Tragflügel 2,
b) für den drehenden Tragflügel 3,
bei verschiedenen Anstellwinkeln α_0.

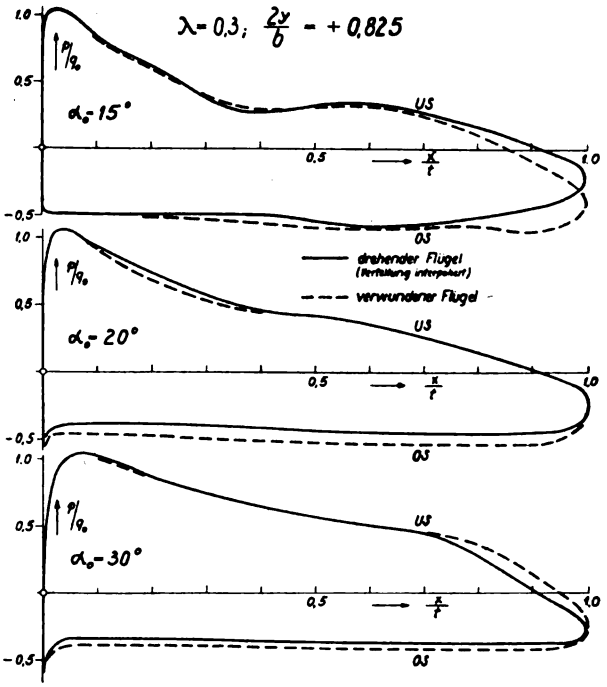


Bild 34. Vergleich wie bei Bild 33, aber für einen auf der rechten, d. i. auf der nach unten gehenden Flügelhälfte liegenden Schnitt bei verschiedenen Anstellwinkeln α_0.

Die mit $\frac{q_y}{q_0}$ berichtigten Kurven der Normalkraftbeiwerte c_{n_y} des verwundenen Tragflügels 2 fügen sich, wie Bild 24, 27, 30 bis 32 zu entnehmen ist, bei anliegender Strömung gut und bei abgerissener noch einigermaßen befriedigend in die zum drehenden Flügel gehörige Kurvenschar ein. Ähnliches zeigen auch die Druckverteilungsmessungen, Bild 33 und 34, die zum Vergleich aus der Vielzahl der gemessenen Verteilungen herausgegriffen wurden.

In den Übergangsgebieten von anliegender zu abgerissener Strömung gilt die Übereinstimmung mitunter nur noch für den grundsätzlichen Verlauf der Kurven $c_{n_y} = f\left(\frac{2y}{b}\right)$, aber kaum mehr für die örtlichen Beträge.

Auf Bild 35 sind schließlich die Beiwerte $c_{L_{xa}}$ des Drehmomentes um die Drehachse x_a des Systems abhängig vom Anstellwinkel α_0 aufgetragen. Die Werte sind durch Differenzbildung der Teilmomente der linken und rechten Flügelhälfte entstanden.

Da die Beträge dieser Teilmomente nur wenig voneinander verschieden sind, darf hier die Anforderung an die Ergebnisgenauigkeit nicht allzu hoch angesetzt werden. Immerhin läßt diese Abbildung den für den untersuchten Tragflügel in Betracht kommenden Autorotationsbereich erkennen, dessen Ausdehnung mit der aus früheren Versuchen[13]) bekannten befriedigend übereinstimmt.

9. Zusammenfassung.

1. Solange die Strömung am Tragflügel allseitig und fest anliegt, liefert die Tragflügeltheorie Ergebnisse, die auch noch bei verhältnismäßig hohen Auftriebsbeiwerten mit den gemessenen in guter Übereinstimmung stehen. Dies konnte für den geraden parallel zu sich selbst bewegten Tragflügel und den für einen bestimmten Drehwert verwundenen Tragflügel gezeigt werden und dürfte — wie sich aus dem Vergleich von Druckverteilungen folgern läßt — auch für den drehenden Tragflügel bei allen praktisch vorkommenden Drehwerten zutreffen.

2. Befindet sich aber die Strömung im Übergang vom anliegenden zum abgerissenen Zustand, dann steigert sich — wie das auch die Erfahrung lehrt — ihre Empfindlichkeit gegenüber störenden Einflüssen. In diesem Falle gewinnen die Wirkungen in Spannweitenrichtung an Bedeutung, sei es infolge von Druckgradientkräften, sei es beim drehenden Flügel infolge der Trägheitskräfte. Für

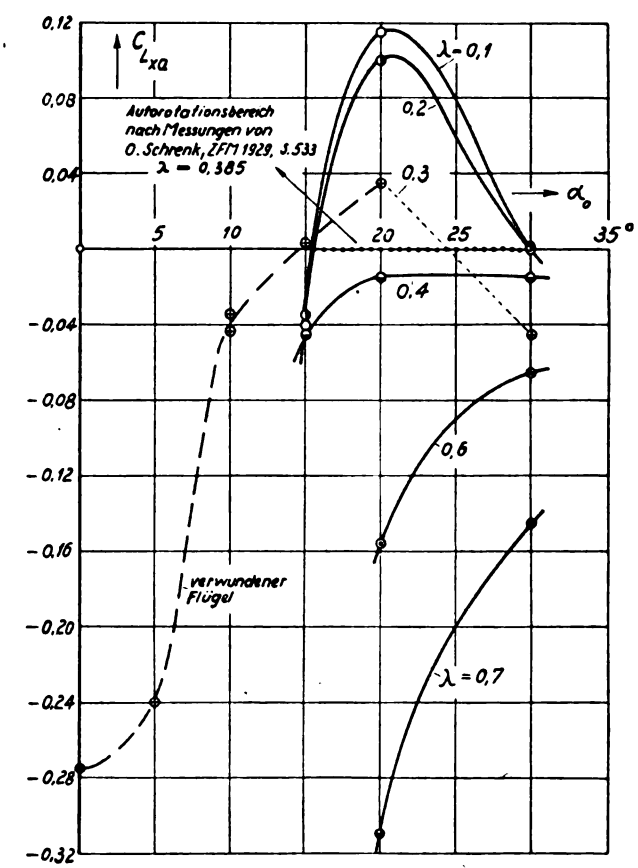


Bild 35. Beiwerte $c_{L_{xa}}$ des Drehmomentes von Tragflügel 3 um die strömungsfeste Längsachse x_a für verschiedene Drehwerte λ abhängig vom Anstellwinkel α_0. Vergleichsweise sind die Werte des verwundenen Tragflügels 2 eingefügt.

[13]) Siehe Fußnote 3b).

Digitized by Google

Drehwerte $\lambda > 0{,}3$ treten beachtliche Steigerungen der Beträge der örtlichen Normalkraftbeiwerte auf, die auf eine besondere Einflußnahme der Trägheitskräfte schließen lassen. Infolge der Zentrifugalbeschleunigung werden Teilchen der Reibungsschichten der inneren Flügelschnitte nach außen befördert. Dadurch wird das Anliegen der Strömung über dem Flügel begünstigt. Bei größeren Anstellwinkeln dürfte unter gewissen Bedingungen auch die Coriolisbeschleunigung einen das Anliegen begünstigenden Einfluß auf die Strömung ausüben, insbesondere dann, wenn sich die Strömung im erwähnten Übergangszustand befindet. Zur weiteren Klärung dieser Zusammenhänge ist ein eingehendes Studium der allerdings sehr verwickelten räumlichen Vorgänge in der Reibungsschicht notwendig.

3. Bei völlig abgerissener Strömung scheint die Drehung ohne besondere Wirkung auf die Strömungsvorgänge am Flügel zu sein, solange die Drehwerte klein bleiben. Für $\lambda = 0{,}3$ sind die Unterschiede zwischen dem unverwundenen und drehenden Tragflügel mitunter noch tragbar groß. Bei größeren Drehwerten aber ist eine wesentliche Zunahme der örtlichen Normalkraftbeiwerte festzustellen, die den Trägheitskräften zuzuschreiben ist.

4. Die vorliegenden Druckverteilungen vermitteln einen tieferen Einblick in die Strömungsvorgänge an Rechteckflügeln bei Parallelbewegung und Drehung. Sie sind daher auch zum Beurteilen von Vorrichtungen geeignet, die auf Unterschiede in der Druckverteilung ansprechen. Es sei beispielsweise an die »Betz-Schlitze«[14]) erinnert, die für die Flügeloberseite und den äußeren Teil der Flügelhälften vorgesehen sind und zum Abmindern der Drehschnelle im Trudelflug dienen.

5. Schließlich möge noch erwähnt werden, daß die mitgeteilten Messungsergebnisse zur Klärung der Frage beitragen können, wieweit der wegen seiner versuchstechnischen Vorzüge beachtliche Vorschlag erfolgreich sein kann, die Vorgänge an dem im freien Raume drehenden Flugzeug mit einem im drehenden Versuchsstrahl festgehaltenen Modell[15]) zu studieren. Nach den vorliegenden Ergebnissen wird das Verfahren bei fest und allseitig anliegender Strömung und bei allen praktisch in Betracht kommenden Drehwerten einwandfreie, bei völlig abgerissener Strömung und kleineren Drehwerten auch noch hinreichend brauchbare Ergebnisse liefern. Bei einer im Übergang vom anliegenden in den abgerissenen Zustand befindlichen Strömung oder bei völlig abgerissener Strömung und höheren Drehwerten aber dürfte die Zuverlässigkeit des Verfahrens in Frage gestellt sein.

[14]) Siehe Fußnote 3b).

[15]) M. Kramer und K. B. Krüger, Eine neue Trudelmeßeinrichtung. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 475–479.

Digitized by Google

Kräfte und Momente schrägangeströmter Tragflügel.

Von S. Hoerner, Kassel.

Der Verfasser bearbeitet innerhalb des durch die Preisausschreibung 1938 der Lilienthalgesellschaft für Luftfahrtforschung festgelegten Rahmens der Aufgabe 1 (Flugzeugbau) die Strömungserscheinungen, die Kräfte und die Momente schräg angeströmter Tragflügel. Die vorhandenen Messungen an geraden, V-gestellten und pfeilförmigen Flügeln sind im Bereich der gesunden Anstellwinkel ausgewertet und durch Rechnungen erklärt und allgemeingültig erweitert worden.

Gliederung.

I. Beeinflussung der Gesamtkräfte durch Schräganströmung.
II. Schieberollmomente gerader Flügel.
III. Schiebegiermomente gerader Flügel.
IV. Durch V-Stellung verursachte Schiebemomente.
V. Durch Pfeilform verursachte Schiebemomente.
VI. Zusammenfassung.
VII. Schrifttum.

I. Beeinflussung der Gesamtkräfte durch Schräganströmung.

Die Flügelkräfte (Gesamtkräfte) werden durch Schräganströmung im allgemeinen sehr wenig geändert. So ist bei Schiebewinkeln bis zu $\tau = 8^0$ nach den Feststellungen in [4][1]) Auftrieb und Widerstand eines Rechteckflügels praktisch ganz unbeeinflußt. Hier wie in Quelle [13], Fig. 4, zeigt sich außerdem, daß das Längsmoment (um Querachse) bis zu Schiebewinkeln von $\tau \approx 35^0$ praktisch ungeändert bleibt.

Nach [10] verringert sich bei gleichbleibendem Anstellwinkel der Auftrieb c_a bei Flügeln großer Spannweite näherungsweise wie $\cos^2 \tau$. Im obigen Fall würde nach dieser Rechnung bei $\tau = 8^0$ der Auftrieb verringert sein um 2,5%. Bei einem Rechteckflügel ist aber dadurch, daß die Flügeldiagonale quer zur Anströmrichtung gedreht wird, die dem Winde entgegengestellte Spannweite zunächst etwas vergrößert. Die berechnete Abminderung mit $\cos^2 \tau$ ist daher bei Rechteckflügeln um so kleiner, je größer die Flügeltiefe ist. Bei einem Seitenverhältnis $\lambda = 1$ (Kreisscheibe) tritt eine Verkleinerung der dem Winde entgegengestellten Spannweite nicht mehr ein. Es ändert sich lediglich der Anstellwinkel α; und zwar $\sim \cos \tau$. Für Flügel mit Seitenverhältnissen zwischen 1 und schätzungsweise 5 ist also der Auftrieb proportional $\cos \tau$ bis $\cos^2 \tau$. Messungen, die hierüber nähere Auskunft geben könnten, sind nicht bekannt.

Zusätzlich tritt bei Schräganströmung eine Kraft quer zur Windrichtung auf. Diese Kraft darf nach der in Bild 1 enthaltenen Skizze als ein Teil des induzierten Widerstandes aufgefaßt werden; es ist $c_{si} = c_{wi} \sin \tau$. Die Kraft c_{si} ist nach der Seite hin gerichtet, auf der die vornliegende Flügelspitze sich befindet; sie sei deshalb als positiv bezeichnet. Anders geschrieben ist

$$c_{si} = + \frac{c_a^2 \sin \tau}{\pi \lambda} ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

diese Seitenkraft ist also von c_a^2 und vom Seitenverhältnis abhängig.

In Bild 1 sind Messungen aus [6] mit der Rechnung verglichen. Bei Blenk [4] ist die Seitenkraft im Gegensatz zu [6] in Richtung der Flügelquerachse gemessen. Mit Hilfe der gleichzeitig gemessenen Widerstandskräfte lassen sich die Messungen von einer Bezugsrichtung auf die andere umrechnen. Die Übereinstimmung zwischen den Messungen

[1]) Siehe Abschnitt VII, Schrifttum.

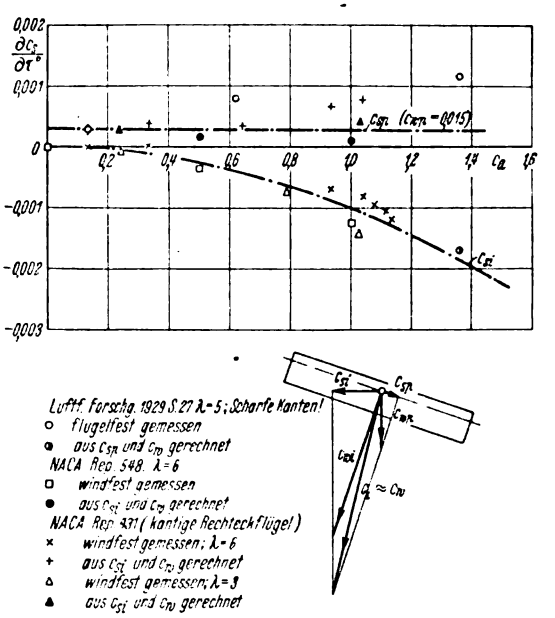


Bild 1. Seitenkräfte schräg angeströmter Flügel.

und der Rechnung ist befriedigend, wenn man die Kleinheit der behandelten Kräfte berücksichtigt. So wird ein Wert $c_{si} = 0{,}01$, wie er dem Profilwiderstandsbetrag eines guten Tragflügels entspricht, erst etwa bei $\tau = 10^0$ und $c_a = 1{,}0$ erreicht.

In Richtung der Flügelspannweite kann im wesentlichen nur eine Komponente des Oberflächenreibungs- oder Profilwiderstandes angreifen. Diese Seitenkraft

$$c_{sp} = - c_{wp} \cdot \sin \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ist daher wie der Profilwiderstand von c_a näherungsweise unabhängig, sie ist zur hintenliegenden Flügelspitze hin gerichtet (negativ).

Im oberen Teil des Bildes 1 sind die c_{sp}-Kräfte aufgetragen. Bei den Rechteckflügeln von [4] ergeben die stumpf abgeschnittenen Seitenkanten bei Schräganströmung erklärlicherweise vergrößerte c_{sp}-Werte. Die Meßwerte [4] sind daher etwa dreimal so groß, wie der aus $c_{wp} = 0{,}015$ gerechnete Wert $\partial c_{sp}/\partial \tau^0 = 0{,}00026$.

Durch Pfeilform wird an Bild 1 nichts wesentliches geändert. Die aus [4] zu entnehmenden Meßpunkte bestätigen das. Durch V-Stellung kommt dagegen ein weiterer (zur hintenliegenden Flügelspitze hin gerichteter) Schiebe-Seitenkraftbetrag hinzu. Nach der in Bild 2 enthaltenen Skizze beträgt $S_v = 2\, \Delta A\, \varphi$ oder $c_{sv} = \Delta c_a\, \varphi$. Für Δc_a wird der später abgeleitete Betrag $\tau\, \varphi\, (\partial c_a/\partial \alpha)$ eingesetzt:

$$c_{sv} = - \tau\, \varphi^2 \frac{\partial\, c_a}{\partial\, \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Diese Seitenkraft wirkt zur hintenliegenden Flügelspitze hin (negativ).

In Bild 2 ist die Rechnung mit Messungen verglichen. Bei der Berechnung der Kurve $\frac{\partial c_{sv}}{\partial \tau^0} = \frac{\pi^2}{180^2}\, \varphi^{0^2}\, \frac{\partial c_a}{\partial \alpha^0}$ wurde für

Digitized by Google

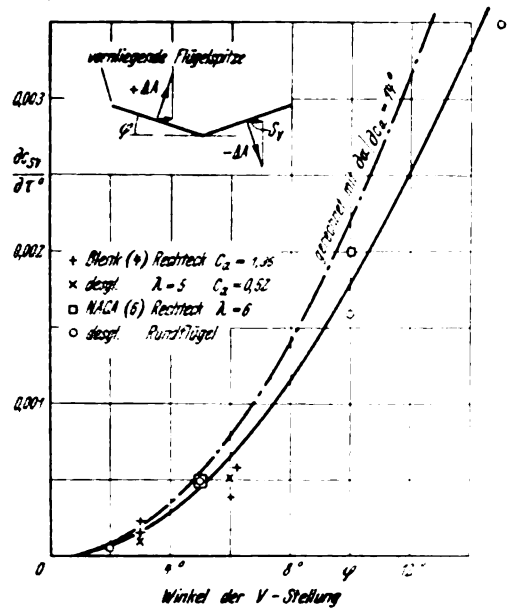


Bild 2. Durch V-Stellung verursachte zusätzliche Seitenkraft.

die bei den Messungen vorliegenden Seitenverhältnisse $\lambda = 5$ und 6 ein mittlerer Wert $\partial\alpha/\partial c_a = 14°$ eingesetzt. — Die Messungen zeigen etwa 82% der gerechneten Werte; die Übereinstimmung im Verlauf (quadratischer Anstieg mit der V-Stellung) ist gut. Die Messungen bestätigen außerdem die Unabhängigkeit von c_a (vgl. [6]).

II. Schieberollmomente gerader Flügel.

Blenk [1] und Weinig [2] haben versucht, das Schieberollmoment (Rollmoment bei Schräganströmung) eines geraden Tragflügels zu berechnen. Ihre Rechnung besagt physikalisch, daß durch den Auftrieb der vornliegenden Flügelhälfte nach Bild 3 am Orte der hintenliegenden bei 1 ein gewisser Aufwind (verringerter Abwind) induziert wird. An der vornliegenden Flügelhälfte bei 2 wird anderseits die Strömung stärker nach unten abgelenkt, weil die Induktion seitens der hintenliegenden Flügelhälfte gering ist. Aus der entsprechenden Verteilung des induzierten Winkels über die Spannweite des Flügels folgt ein Rollmoment, welches den Flügel nach der vornliegenden Seite 2 hin abwärts zu drehen sucht. — Dieses fliegerisch unerwünschte Rollmoment tritt glücklicherweise in der Wirklichkeit nicht auf. Die später erörterten Windkanalmessungen zeigen — im Gegensatz zu der alleinstehenden Angabe in [3] — übereinstimmend positive Schieberollmomente, wobei die Bezeichnung »positiv« für den fliegerisch erwünschten aufrichtenden Drehsinn gesetzt ist.

Im Bereich der gesunden Anstellwinkel (bis $\alpha \approx 15°$) zeigen die Rollmomenten-Messungen [4] bis [7] über dem Auftriebsbeiwert (oder Anstellwinkel) einen Anstieg, der zumindest für praktische Bedürfnisse durch eine Gerade mitgeteilt werden kann. In Bild 4 ist daher der Anstieg $\partial c_L/\partial c_a$ aufgetragen. Bis zu etwa 25° Schiebewinkel zeigen die Messungen auch über dem Schiebewinkel praktisch geradlinigen Verlauf. Die spätere Auftragung des Wertes $\partial c_L/\partial\tau \cdot {}^1/\partial c_a$ nach Bild 5 ist daher gerechtfertigt.

Für einen Kreisflügel (Seitenverhältnis $\lambda = 1$) läßt sich das Schieberollmoment rechnerisch feststellen. — Der Anstellwinkel der in Bild 4 skizzierten Kreisscheibe würde bei $\tau = 90°$ Null werden. Für die fliegerische Praxis ist für den Schiebeflug die Festlegung, daß c_a gleich groß bleibt, passender. Die Kreisscheibe soll daher so gedreht werden, daß sie bei allen Schiebewinkeln zur Anströmrichtung gleichbleibenden Anstellwinkel hat. Der Auftrieb greift nach dieser Festlegung immer auf der Mittelachse der Kreisscheibe an; das Schieberollmoment ist damit Null, wenn es auf die windfeste x-Achse bezogen wird. Wird das Moment, wie es fliegerisch naheliegender ist, auf die flügelfeste x'-Achse bezogen, so ergibt sich ein positiver Momentenwert. Der

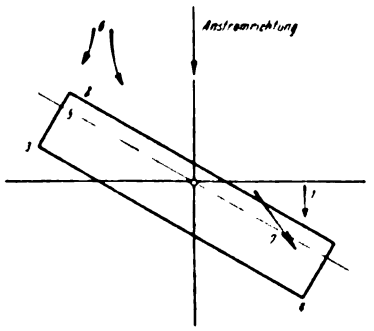
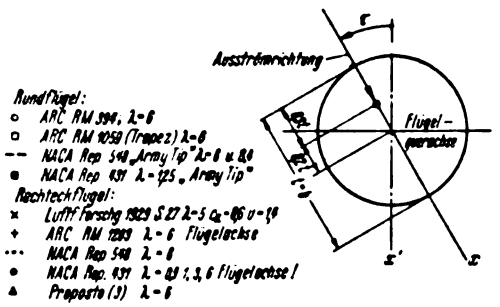


Bild 3. Skizze zur Erörterung der Strömungsvorgänge am schrägangeströmten geraden Flügel.



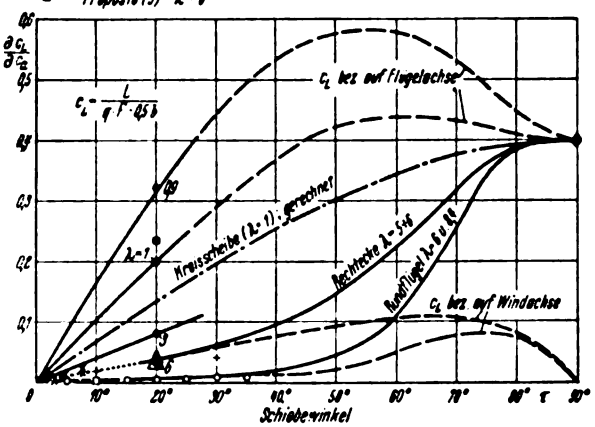


Bild 4. Schieberollmomente gerader Flügel.

Auftrieb greift nach Bild 4 etwa $t/3$ (vgl. J. aer. Sci. Bd. 4 (1937) S. 499) vom jeweiligen Flügelvorderpunkt entfernt an. Das auf die flügelfeste x'-Achse bezogene Rollmoment beträgt demnach $L = A \cdot 0{,}2\, t \sin\tau$; sein Beiwert $c_L = L/q\,F \cdot 0{,}5\, b = 0{,}4\, c_a \sin\tau$ und die in Bild 4 eingetragene Ableitung

$$\frac{\partial c_L}{\partial c_a} = 0{,}4 \sin\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieses Rollmoment ist positiv, d. h. aufrichtend. Für $\tau = 90°$ läßt sich das Rollmoment auch für andere Seitenverhältnisse rechnerisch angeben. Bei Bezug auf die windfeste x-Achse ist es wiederum Null. Bei Bezug auf die flügelfeste x-Achse ist es gleich dem Längsmoment eines mit $\tau = 0°$ angeströmten Tragflügels vom reziproken Seitenverhältnis $1/\lambda$. Als Angriffspunkt der Luftkraft wird auch hier wiederum 0,3 der in Windrichtung liegenden Abmessung, in diesem Falle der Spannweite b, angenommen. Es ergibt sich wie für den Kreisflügel $c_L = 0{,}4\, c_a$; $\partial c_L/\partial c_a = 0{,}4$. Für andere Schiebewinkel läßt sich außer für den Kreisflügel leider eine einfache Rechnung nicht durchführen. Die gewonnenen Punkte sind aber in Bild 4 zum Zwecke der Extrapolation sehr brauchbar. Die steile Aufbiegung der Kurven bei $\tau = 60$ bis 70° bedeutet, daß hier der hintenliegende Halbflügel sozusagen aus dem Randwirbelaufwind des vornliegenden heraus in dessen Abwindbereich eintritt.

Die Rechteckflügel zeigen durchweg wesentlich größere Schieberollmomente als abgerundete Flügel. Das ist nach Bild 3 zu erklären: An der vornliegenden Flügelspitze wird die Flügelspannweite durch die hintere Ecke 3 vergrößert. An der hintenliegenden Spitze werden den vorderen Profil-

Digitized by Google

teilen die zur Erzeugung der Zirkulation notwendigen rückwärtigen Teile 4 genommen. Besonders stark tritt diese Eckenwirkung bei kleinen Seitenverhältnissen auf. Die durch die Kreisflügelberechnung gegebene Kurve für $\lambda = 1$ wird daher in Bild 4 durch die gemessenen Rechteckflügel um etwa 60% überschritten. Bei $\lambda = \infty$ wird die Eckenwirkung anteilmäßig Null. Die Extrapolation der beiden Kurven in Bild 5 auf $1/\lambda = 0$ führt daher auf ein und denselben Punkt.

Die geschilderte Eckenwirkung ist nicht allein verantwortlich für das positive Vorzeichen der Schieberollmomente. Der Beweis wurde an einem Flügel erbracht, dessen Ränder in Richtung eines Schiebewinkels von 20° abgeschrägt waren [3].

Die in Bild 4 eingetragenen Windkanalmessungen sind, so wie die Meßwerte im Windkanal gewonnen wurden, meist auf windfeste x-Achse bezogen. Diese Werte lassen sich näherungsweise auf die flügelfeste x'-Achse umrechnen; es ist $c_{L,f} = c_{L,w}/\cos\tau$. Hierbei bezeichnet f flügelfest und w windfest. Bis zu etwa 20° Schiebewinkel ist der Unterschied der beiden Bezugsarten nach Bild 4 bei den gemessenen Seitenverhältnissen $\lambda \geqq 5$ nebensächlich. Für $\lambda = 1$ läßt sich diese Umrechnung, auch näherungsweise, nicht mehr anwenden.

In Bild 5 sind die für kleine Schiebewinkel ($\tau \leqq 25°$) aus Bild 4 zu entnehmenden Werte $\partial c_L/\partial c_a \cdot {}^1/\partial\tau$ in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis aufgetragen. Die bei $\lambda = 5$ und 6 ausgeführten Messungen zeigen in den Bildern wesentlich kleinere Rollmomente, als sie für den Kreisflügel berechnet wurden. Hier zeigt sich offenbar der Einfluß des von Blenk und Weinig gemachten Ansatzes, wonach man bei Schräganströmung durch die Verteilung des örtlichen Anstellwinkels ein negatives Rollmoment erwarten wird. Bei Seitenverhältnissen von $\lambda \sim 20$ sind — soweit die vorgenommene Extrapolation als ein Beweis angesehen werden darf — die Rollmomente sogar wirklich negativ.

Bei Schräganströmung ist die Auftriebsverteilung merklich zur vornliegenden Flügelspitze hin verschoben. Aus den Druckverteilungsmessungen von [7], bei $\tau = 20°$, ist bei $c_a = 0{,}1$ der Auftrieb symmetrisch über die Spannweite verteilt. Bei $c_a = 0{,}3$ ist an dem vornliegenden Flügelende eine Auftriebshäufung, am hintenliegenden eine Auftriebsminderung vorhanden. Bei $c_a = 1$ zeigt der Rand der vornliegenden Flügelspitze eine ausgesprochene durch Randumströmung verursachte Auftriebshäufung; siehe bei 5 (Bild 3). Das vornliegende Flügelende wird also nicht nur von seiner Vorderkante aus, sondern auch seitlich umströmt. Die Formgebung der Flügelspitze und der Seitenkante hat daher erklärlicherweise merklichen Einfluß auf die Größe der Schieberollmomente. — Verständlicherweise tritt auch diese Randwirkung bei kleinen Seitenverhältnissen stärker hervor; die Randwirkung ist anteilmäßig um so kleiner, je größer die Spannweite ist. Bild 5 erfährt also eine weitere Erklärung.

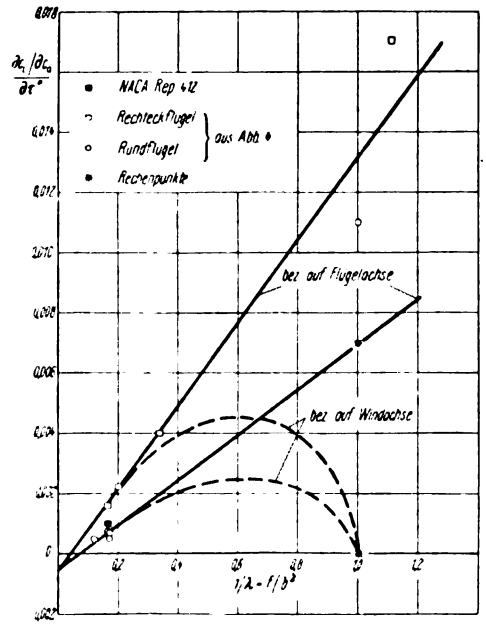


Bild 5. Abhängigkeit der Schieberollmomente vom Seitenverhältnis. Gültig für $\tau \approx 0$ bis 25°.

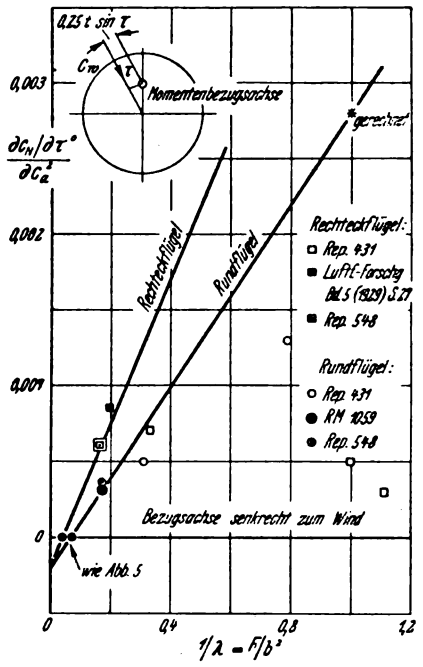


Bild 6. Schiebegiermomente gerader Flügel.

Ein weiterer Grund für die Entstehung der positiven Rollmomente kann schließlich darin gefunden werden, daß das Strömungsfeld nicht nur in Anstellwinkelrichtung, sondern auch seitlich verformt wird. Nach Bild 3 wird die Strömung vor dem vornliegenden Halbflügel *6* nach beiden Seiten seitlich abgelenkt. Die Flügelprofile des vornliegenden Halbflügels werden daher etwas weniger, die des hintenliegenden Halbflügels etwas mehr schräg *7* angeströmt. Der Auftrieb ist entsprechend am vornliegenden Flügel vergrößert, am hintenliegenden verringert. — Das Schieberollmoment stammt also aus mehreren Quellen; aus der rechnerisch bekannten Induktionswirkung, aus der vom Flügelgrundriß abhängigen Eckenwirkung, aus der vom Seitenverhältnis abhängigen Randumströmung und aus der seitlichen Verschiedenheit der Schräganströmung. Schließlich kann die verschiedenartige Ausbildung der Grenzschicht auch noch Ursache für eine Änderung des Rollmomentes sein. Nur der induzierte Betrag ist negativ. Die übrigen positiven überwiegen bis zu Seitenverhältnissen von $\lambda \approx 20$.

III. Schiebegiermomente gerader Flügel.

Das Rollmoment entsteht durch einen Auftriebsunterschied zwischen linker und rechter Flügelhälfte. Da sich mit dem örtlichen Auftrieb auch der örtliche induzierte Widerstand ändert, ist mit einem Rollmoment immer ein Giermoment ursächlich verbunden. Als positives Schiebegiermoment wird in dieser Arbeit das im Sinne der Seitenflosse eines Flugzeuges aus einem Schiebewinkel zurückdrehende Moment bezeichnet.

Für Größe und Verlauf eines Giermomentes ist im Gegensatz zum Rollmomentenfall wesentlich das Bezugssystem. Während in einem windfesten Achsenkreuz ausschließlich Widerstandskräfte das Giermoment erzeugen, trägt in einem flugzeugfesten Kreuz außerdem die tangentiale Komponente des Auftriebs stark bei. Quelle [3] zeigt dieserhalb als einzige positive Giermomente. Alle übrigen bekannten Windkanalmessungen sind in einem windfesten Achsenkreuz mitgeteilt.

Bei Änderung des Schiebewinkels ändert sich das Rollmoment durch Verlagerung des Auftriebs bzw. durch Ände-

Digitized by Google

rung der Auftriebsverteilung. In diesem Falle (c_a gleichbleibend) ändert sich daher nach den vorliegenden Messungen das Giermoment wie das Rollmoment (im Bereich mäßiger Schiebewinkel; $\tau \leqq 25^0$) proportional dem Schiebewinkel.

Für den Kreisflügel läßt sich auch das Giermoment einfach berechnen. Es ist für alle c_a-Werte Null, wenn die Bezugsachse durch den Mittelpunkt des Flügelgrundrisses, also auf $t/2$ gelegt wird. Bei der oben zugrunde gelegten Annahme (c_a gleichbleibend) greift nämlich die Luftkraft immer symmetrisch, d. h. also durch den Kreismittelpunkt gehend, an. Wird die Bezugsachse durch den flügelfesten Punkt $t/4$ gelegt, wie das bei Windkanalmessungen öfter üblich ist, so entsteht nach der in Bild 6 enthaltenen Skizze ein positives Giermoment. Mit dem Hebelarm $0{,}25 \sin\tau$ ergibt sich $c_N = N/qF\,0{,}5\,b = 0{,}5\,c_w \sin\tau$. Setzt man für c_w der rechnerischen Einfachheit halber nur den induzierten Betrag ${c_a}^2/\pi\lambda$ ein, so ergibt sich für $\lambda = 1$:

$$c_{Ni} = \frac{0{,}5\,{c_a}^2 \sin\tau}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Auch bei anderen Seitenverhältnissen hat das Schiebegiermoment (bei gleichbleibendem τ) die Tendenz, mit ${c_a}^2$ zuzunehmen, weil es durch Änderung des mit dem örtlichen c_a verbundenen örtlichen induzierten Widerstandes entsteht. Abweichungen von diesem quadratischen Verlauf entstehen u. a. durch den Einfluß des Profilwiderstandes. So hat das Schiebegiermoment bei $c_a = 0$ nach verschiedenen Messungen einen kleinen positiven Wert. Nach [5] ist z. B. in diesem Falle $\partial c_N/\partial\tau^0 \approx 0{,}0001$. Vergleichsweise beträgt das durch ein übliches Seitenleitwerk bei 10^0 Schiebewinkel erzeugte rückdrehende Giermoment $c_{Ns} \approx 0{,}7$ und $\partial c_{Ns}/\partial\tau^0 \approx 0{,}07$. Demgemäß darf der obige durch Profilwiderstand verursachte Betrag vernachlässigt werden.

Aus den Messungen [4] bis [6] sind die Werte $\partial c_N/\partial\tau \cdot {}^1/\partial {c_a}^2$ ermittelt und in Bild 6 aufgetragen worden. Der Durchgang der gezogenen Kurven durch die waagerechte Achse entspricht dem in Bild 5. Wenn das Rollmoment Null ist, muß auch das Giermoment Null sein — wenn man von dem geringen Profilwiderstandsteil absieht.

Fast alle Messungen sind auf die in $0{,}25\,t$ der Flügelmittelachse durchgehende windfeste Hochachse bezogen. Es darf daher für $\lambda = 1$ ein nach Gl. (5) gerechneter Punkt eingetragen werden. Zwei Meßpunkte der Quelle [5] stimmen mit diesem gerechneten wenig überein. Weitere Messungen bei kleinen Seitenverhältnissen werden entscheiden müssen, ob die Rechnung oder die genannten Meßpunkte zu bevorzugen sind. Kritisch ist diese Frage nicht, da die Flügelgiermomente allgemein sehr gering sind. Sie bewegen sich in der Größenordnung von 1% des oben bereits einmal genannten Seitenleitwerksbetrages.

IV. Durch V-Stellung verursachte Schiebemomente.

Die Berechnung der durch V-Stellung verursachten Schieberollmomente ist bekannt [8] und [9]. Bei Schräganströmung eines V-gestellten Flügels wird der Anstellwinkel der vornliegenden Flügelhälfte geometrisch vergrößert, der der hintenliegenden entsprechend verkleinert, je um den Betrag $\Delta\alpha = \tau\varphi$; worin φ den Winkel der V-Stellung bezeichnet. Dem $\Delta\alpha$ entspricht ein

$$\Delta c_a = \pm\,\tau\varphi\,\frac{\partial c_a}{\partial\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Als Hebelarm der Δc_a-Beträge wird $b/4$ gesetzt. Es ergibt sich dann allgemeingültig das Rollmoment

$$c_L = \frac{L}{qF\,0{,}5\,b} = \frac{\Delta c_a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Das durch V-Stellung verursachte Schieberollmoment beträgt demnach

$$c_{L\,v} = \frac{\tau\varphi}{2}\,\frac{\partial c_a}{\partial\alpha}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

worin die Winkel in Bogenmaß einzusetzen sind.

Die vorhandenen Messungen [4] und [5] bestätigen den aus der Ableitung folgenden Umstand, daß das durch V-Stellung verursachte Schieberollmoment von c_a unabhängig

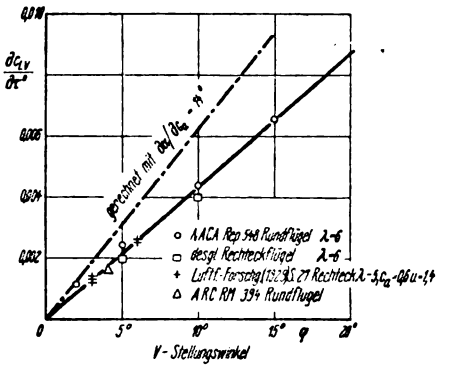


Bild 7. Durch V-Stellung verursachte Schieberollmomente.

ist. In Bild 7 sind die durch V-Stellung verursachten Rollmomentenunterschiede $c_{L\,v}$ bzw. deren Anstieg $\partial c_{L\,v}/\partial\tau$ über dem V-Winkel aufgetragen. Die gerechnete Kurve wurde mit einem für die bei den Messungen vorliegenden beiden Seitenverhältnisse $\lambda = 5$ und 6 geltenden mittleren Wert $\partial\alpha^0/\partial c_a = 14^0$ gewonnen. Die gemessenen Werte erreichen nur etwa 70% der Kurvenwerte. Der Grund dazu liegt teilweise darin, daß in der Rechnung für $\partial\alpha/\partial c_a$ der Wert des gerade angeströmten Flügels gesetzt wurde. Betrachtet man als entgegengesetztes Extrem die Halbflügel als einzeln fliegend und setzt deren halb so großes Seitenverhältnis ein, so verringert sich die gerechnete Kurve in Bild 7 um 19%. Daß der Hebelarm mit $b/4$ zu groß angesetzt wurde, ist unwahrscheinlich, weil Rand- und Eckeneinfluß an großen Hebelarmen wirken. Der verbleibende Unterschied zwischen Rechnung und Experiment ist demnach auch hier durch die in der Rechnung nicht berücksichtigte gegenseitige Beeinflussung (Induktion) der beiden Halbflügel bedingt.

Mit dem Rollmoment ist durch Änderung des induzierten Widerstandes ein Giermoment ursächlich verbunden. Die unter dem Einfluß eines positiven Rollmomentes aufwärts gedrückte Flügelseite wird durch ihren größeren induzierten Widerstand das Bestreben haben, zurückzubleiben.

Das durch V-Stellung verursachte zusätzliche Schieberollmoment kann nach Diehl [9] berechnet werden. Es ist auf jedem Halbflügel

$$c_{wi} = \frac{(c_a \pm \Delta c_a)^2}{\pi\lambda} = \frac{{c_a}^2 \pm 2\,c_a\,\Delta c_a + (\Delta c_a)^2}{\pi\lambda} \quad \ldots \quad (9)$$

Durch Subtraktion ergibt sich der Widerstandsunterschied zwischen der einen und der anderen Flügelhälfte zu

$$\Delta c_{wi} = \frac{2\,c_a\,\Delta c_a}{\pi\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Mit einem zu $b/4$ angenommenen Hebelarm beträgt allgemeingültig das Giermoment

$$c_N = \frac{N}{qF\,0{,}5\,b} = \frac{\Delta c_w}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Das durch V-Stellung verursachte Schiebegiermoment ergibt sich demnach aus (10) und (11) zu

$$c_{N\,v} = \frac{c_a\,\tau\varphi}{\pi\lambda}\,\frac{\partial c_a}{\partial\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Dieses Giermoment ist also c_a verhältig; es ist nach Bild 8 vom Seitenverhältnis stark abhängig. Leider bestätigen die erreichbaren Messungen dieses Moment weder quantitativ noch überhaupt dem Vorzeichen nach. Die Quellen [4] und [6] zeigen beide durch V-Stellung eine der Vorstellung zuwiderlaufende geringe Verkleinerung des Schiebegiermomentes durch die V-Stellung. Auch hier muß auf die Kleinheit der Momente hingewiesen werden. Sie bewegen sich in gleicher Größenordnung wie die Schiebegiermomente gerader Flügel. — Weitere Messungen sind erforderlich.

V. Durch Pfeilform verursachte Schiebemomente.

Wie im Kapitel I dieser Arbeit mitgeteilt, ist der Auftrieb eines schräg angeblasenen geraden Flügels näherungsweise proportional $\cos^2\tau$. Betrachtet man die beiden Halbflügel eines schräg angeströmten Pfeilflügels näherungs-

Digitized by Google

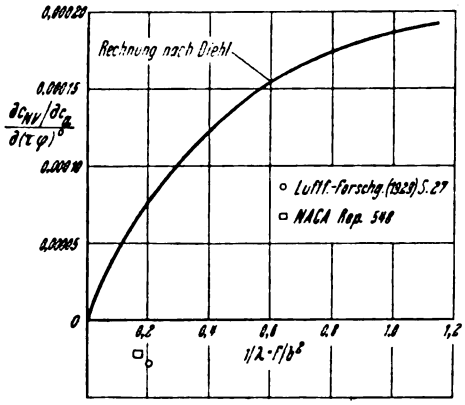


Bild 8. Durch V-Stellung verursachte zusätzliche Schiebegiermomente.

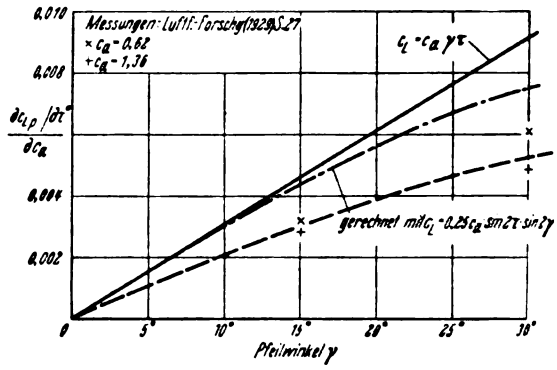


Bild 9. Schieberollmomente infolge von Pfeilform.

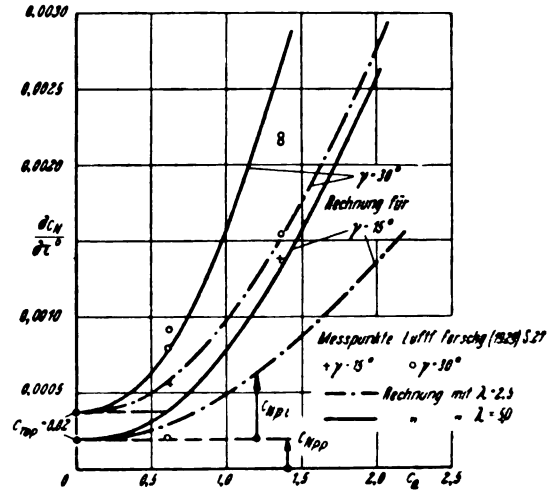


Bild 10. Durch Pfeilform verursachte Schiebegiermomente.

weise nach Betz [10] als voneinander unabhängig fliegend, so betragen ihre Auftriebe $c_a \cdot \cos^2(\tau \mp \gamma) = c_a(\cos\tau \cdot \cos\gamma \pm \sin\tau \cdot \sin\gamma)^2$, wobei γ den Pfeilwinkel bezeichnet. Hieraus ergibt sich durch Subtraktion der Auftriebsunterschied zwischen den beiden Halbflügeln zu

$$\Delta c_a = 2\,c_a \cdot \cos\tau \cdot \cos\gamma \cdot \sin\tau \cdot \sin\gamma = c_a \frac{\sin 2\tau \cdot \sin 2\gamma}{2} \quad (13)$$

Aus Gl. (7) und (13) ergibt sich das durch Pfeilform zusätzlich verursachte Schieberollmoment zu

$$c_{l\,p} = c_a \frac{\sin 2\tau \cdot \sin 2\gamma}{4} \approx c_a \tau\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dieses Schieberollmoment ist im Gegensatz zu dem durch V-Stellung erzeugten von c_a abhängig, vom Seitenverhältnis dagegen unabhängig. Die Meßwerte betragen nach Bild 9 etwa 70% der gerechneten Kurve. Offenbar ist auch hier die gegenseitige Beeinflussung der beiden Flügelhälften der einfachen Rechnung überlagert.

Das Schiebegiermoment eines Pfeilflügels rührt her aus der Änderung sowohl des induzierten wie des Profilwiderstandes der beiden Flügelhälften. Der Unterschied des induzierten Widerstandes des einen zu dem des anderen Halbflügels ergibt sich wie bei der V-Stellung nach Gl. (10). Aus dieser und aus Gl. (11) und (13) ergibt sich das induzierte Giermoment eines Pfeilflügels

$$c_{N\,pi} = \frac{c_a^2 \operatorname{tg}\tau \operatorname{tg}\gamma}{\pi\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Dieses Moment ändert sich also mit c_a^2; es ist außerdem abhängig vom Seitenverhältnis.

Für den Profilwiderstand eines schrägangeströmten geraden Flügels wird die einfache Annahme gemacht, daß er sich proportional der dem Wind entgegengesetzten Spannweite ändert. Es ist also $c_{wp} \sim \cos\tau$. Für jede der beiden Hälften eines Pfeilflügels ändert sich entsprechend der Profilwiderstand. Für die vornliegende beträgt er $c_{wp} \cdot \cos(\tau - \gamma)$, für die hintenliegende $c_{wp} \cdot \cos(\tau + \gamma)$. Der Widerstandsunterschied ergibt sich durch Subtraktion zu $\Delta c_{wp} = 2\,c_{wp} \sin\tau \cdot \sin\gamma$. Unter Benutzung von Gl. (7) ergibt sich das durch Profilwiderstand verursachte Schiebegiermoment des Pfeilflügels zu

$$c_{N\,pp} = c_{w\,p} \sin\tau \cdot \sin\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

In Bild 10 sind die Schiebegiermomente der Blenkschen Pfeilflügel [4] aufgetragen und mit der Rechnung verglichen. Dabei wurde für c_{wp} der gemessene Wert 0,02 und für das Seitenverhältnis zunächst das des ganzen Flügels $\lambda = 5$ eingesetzt. Die stark streuenden Meßpunkte liegen im Mittel oberhalb dieser berechneten Kurven.

In die Berechnung des induzierten Giermomentes geht das Seitenverhältnis unmittelbar ein; es wurde unbesehen gleich dem des ganzen Flügels gesetzt. Etwa mit gleicher Berechtigung kann man auch das Seitenverhältnis der ohne gegenseitige Beeinflussung frei fliegend gedachten Halbflügel ($\lambda = 2{,}5$) einsetzen. Die so gerechneten c_{N_p}-Kurven liegen z. T. oberhalb der Meßpunkte, wie das analog zu den Schieberollmomenten nach Bild 9 auch zu erwarten ist. Auch hier muß an die Kleinheit der Giermomentenbeträge und die daraus rührende geringere Meßgenauigkeit erinnert werden.

Zusammenstellung der zur Berechnung von Schiebekräften und -Momenten abgeleiteten Gleichungen.

Kraft oder Moment	Näherungsberechnung	Bestätigung durch Messungen
Seitenkraft quer zum Wind	$c_{si} = + \frac{c_a^2 \sin\tau}{\pi\lambda}$.	~100%
Seitenkraft in Spannweiterichtung	$c_{sp} = - c_{wp} \cdot \sin\tau$	~100%
Seitenkraft durch V-Stellung	$c_{sV} = - \tau\varphi^2 \frac{\partial c_a}{\partial\alpha}$	80%
Rollmoment durch V-Stellung	$c_{lV} = + \frac{\tau\varphi}{2} \frac{\partial c_a}{\partial\alpha}$	70%
Giermoment durch V-Stellung	$c_{NV} = + \frac{c_a \tau\varphi}{\pi\lambda} \frac{\partial c_a}{\partial\alpha}$	nicht bestätigt
Rollmoment durch Pfeilform	$c_{l\,p} = + c_a \frac{\sin 2\tau \cdot \sin 2\gamma}{4} \approx c_a \tau\gamma$	70%
Giermoment durch Pfeilform	$c_{N\,pi} = + \frac{c_a^2 \tau\gamma}{\pi\lambda}$	~70%
Giermoment durch Pfeilform	$c_{N\,pp} = + c_{wp} \tau\gamma$	~80%

Digitized by Google

VI. Zusammenfassung.

1. Die Gesamtkräfte (c_a und c_w) sind durch Schräganströmung (bis $\tau \approx 25^0$) praktisch nicht beeinflußt. Die neu in Erscheinung tretende Seitenkraft ist für den geraden und den V-gestellten Flügel abgeleitet.

2. Die im Widerspruch zur bisherigen Berechnung aufrichtenden Schieberollmomente gerader Flügel sind erklärt aus einer Eckenwirkung, aus einer Randwirkung und aus der verschieden schrägen Anströmung der beiden Halbflügel. Die bekannten Windkanalmessungen sind planmäßig ausgewertet, so daß Rollmomente und Giermomente aus Bild 5 und 6 entnommen werden können.

3. Durch V-Stellung werden zusätzliche Schieberoll- und -giermomente hervorgerufen. Die Berechnung der Rollmomente wird durch Messungen gut bestätigt.

4. Die durch Pfeilform verursachten Schiebemomente sind berechnet worden. Sowohl die Rollmomente, wie auch die Giermomente werden durch Messungen bestätigt.

5. Die Schiebegiermomente sind in mehreren Fällen sehr klein. Um Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung herbeizuführen, ist daher wesentlich größere Meßgenauigkeit erforderlich.

VII. Schrifttum.

[1] H. Blenk, Der Eindecker als tragende Wirbelfläche. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) S. 36.

[2] F. Weinig, Schiebende und gepfeilte Tragflügel. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1937) S. 45.

[3] S. del Proposto, Verhalten von Tragflächen bei Seitenwind. Diss. Aachen 1932; vgl. [8].

[4] H. Blenk, Sechskomponentenmessungen an Flügeln mit V-Form, Pfeilform und Verwindung. Luftf.-Forschg. Bd. 5 (1929) S. 27.

[5] Zimmermann, Characteristics of Airfoils of small Aspect Ratios. NACA Rep. 431 (1932).

[6] Shortal, Effect of Tip Shape and Dihedral on Lateral-Stability Characteristics. NACA Rep. 548 (1935).

[7] Williams, Pressure Distribution over a jawed Airfoil. ARC RM 1203.

[8] Fuchs, Hopf, Seewald, 2. Aufl. Berlin 1934 Bd. I S. 266.

[9] W. S. Diehl, Engeneering Aerodynamics. Aufl. 1936 S. 211.

[10] A. Betz, Applied Airfoil Theory; Durand, Aerodynamic Theory. Berlin 1935 Bd. IV S. 97.

[11] Schieberollmomente eines V-gestellten Flügels. ARC RM 394 (RM 152, 1914).

[12] Schiebemomente eines Fokker F VII-Flügels. ARC RM 1059.

[13] Messungen an einem Fairay-Flugboot-Modell bei Schräganströmung. ARC RM 933.

Digitized by Google

Auftriebsberechnung und Strömungsvorgänge beim Überschreiten des Maximalauftriebes.

Von Peter Jordan.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen e. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften*).

Bei Prüfung der Unterlagen für die Berechnung von Auftriebsverteilungen mit teilweise (unsymmetrisch) abgerissener Strömung, wie sie u. a. bei unsymmetrischer Anströmung infolge von Rollbewegungen des Flugzeugs entstehen, und beim Vergleich mit Messungen an Flügeln mit linear über der Spannweite verteiltem Anstellwinkel stellt sich die Notwendigkeit einer näheren Kenntnis der Strömungsvorgänge an Tragflügeln beim Überschreiten des Maximalauftriebes heraus. Diese Kenntnis wird durch Strömungsbeobachtung und Aufzeichnung instationärer Druckvorgänge an einem geraden und einem verwundenen Flügel zunächst für ein Profil (Gö 409) und eine Reynoldssche Zahl ($Re = 2 \cdot 10^5$) gewonnen. Es ergeben sich Grundlagen für die Berechnung der gesuchten Auftriebsverteilungen, die noch durch systematische Messungen zu ergänzen sind.

Gliederung.

I. Bezeichnungen.
II. Einleitung.
III. Die Auftriebsverteilung am verwundenen Tragflügel.
1. Theoretische Überlegungen.
2. Messungen.
3. Vergleich.
IV. Der Abreißvorgang als ebenes Problem.
1. Strömungsbeobachtungen.
2. Druckaufzeichnungen.
3. Folgerungen.
V. Die Vorgänge am verwundenen Tragflügel.
1. Anbohrungen längs der Flügelnase.
2. Anbohrungen in Tiefenrichtung.
3. Deutung der Ergebnisse,
4. Aufgesetzte Scheibe.
VI. Zusammenfassung.
VII. Schrifttum.

I. Bezeichnungen.

v Fluggeschwindigkeit,
l Flügeltiefe,
x Koordinate in Richtung der Flügeltiefe,
b Flügelspannweite,
y Koordinate längs der Spannweite,
Λ Seitenverhältnis $\frac{b^2}{F}$ des Tragflügels,
α geometrischer Anstellwinkel,
α_∞ geometrischer Anstellwinkel bei $\Lambda \to \infty$,
α_i induzierter Anstellwinkel,
α_{eff} effektiver Anstellwinkel,
c_a Auftriebsbeiwert,
c_n Normalkraftbeiwert,
c_t Tangentialkraftbeiwert,
$c = \frac{1}{2}\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\Lambda \to \infty}$ Profilkonstante,
Γ Zirkulation um einen Profilschnitt des Flügels,
$\varepsilon = \frac{d\alpha}{dy} \cdot l$ Verwindungsgröße,
p gemessener Druck,
q Staudruck,
$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$ Reynoldssche Kennzahl.

*) Von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen genehmigte Dissertation. D 7.

II. Einleitung.

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Tragflügel Auftrieb und Widerstand zu berechnen, ist durch die Prandtlsche Tragflügeltheorie [1][1]), bzw. die auf ihr aufbauenden Verfahren bei bekannten Profileigenschaften für kleine Anstellwinkel gelöst, bei denen die (Potential-) Strömung am Tragflügel anliegt. Die von der vollständig abgerissenen Strömung, also bei großen Anstellwinkeln ausgeübten Kräfte sind vom Anstellwinkel nur in weit geringerem Maße abhängig und für die Anwendungen ausreichend genau angebbar. Im Gegensatz zu dieser befriedigenden Lage stehen unsere geringen Kenntnisse von dem Zwischengebiet, d. h. der Umgebung des Größtauftriebs bzw. des »kritischen« Anstellwinkels, insbesondere in den Fällen, wo der Abreißvorgang nicht gleichzeitig über der ganzen Spannweite des Flügels einsetzt, also Gebiete abgerissener und anliegender Strömung aneinandergrenzen.

Derartige nur örtliche Abreißvorgänge treten am Flugzeug nicht nur beim Übergang in den überzogenen Flugzustand auf, sondern insbesondere auch infolge unsymmetrischer Anströmverhältnisse bei Rollbewegungen. Aus ihnen entstehen leicht kritische Flugzustände, zu deren rechnerischer Beherrschung man die Lage der »Abreißgrenze« zwischen anliegender und abgerissener Strömung und die somit auf den Tragflügel wirkenden Kräfte kennen muß.

Als Beitrag zur Bearbeitung der damit gestellten Aufgabe wurden Untersuchungen über das Übergangsgebiet zwischen ungestört anliegender und voll abgerissener Strömung bei Tragflügeln mit über der Spannweite linear veränderlichem Anstellwinkel angestellt. Die mit dieser Anstellwinkelverteilung erhaltenen Ergebnisse lassen sich in allen praktischen Fällen zugrunde legen; so bildet z. B. die bei Rollbewegungen resultierende Anströmgeschwindigkeit mit der Flugrichtung einen Winkel, der über die Spannweite in erster Näherung linear verteilt ist. Bei Rollbewegungen wirken allerdings auf die Tragflügelströmung zusätzliche Drehkräfte, von denen im vorliegenden Bericht abgesehen ist; er setzt ruhende, von vorneherein verwundene Tragflügel voraus.

Im einzelnen lauteten die zu beantwortenden Fragen:

Wie groß ist der Auftrieb in jedem Profilschnitt des Überganges zwischen diesen Gebieten verschiedener Strömungsformen (im folgenden kurz »Übergangsgebiet« genannt)?

Durch welche Wechselwirkungen zwischen der stabil anliegenden und der voll abgerissenen Strömung kommt diese Auftriebsverteilung zustande, und wie hängen diese Wechselwirkungen ab von der Größe der Verwindung, dem Profil, der Reynoldsschen Kennzahl Re, bzw. auf welchem rechnerischen Wege sind aus gegebenen Daten die entstehenden Kräfte im voraus bestimmbar?

Der vorliegende Bericht beschränkt sich auf eine mehr grundsätzliche Klärung der Vorgänge bei einem Profil (Göttingen 409) und einer Kennzahl ($Re = 2 \cdot 10^5$).

[1]) Die eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumsverzeichnis am Schlusse des Berichtes.

Digitized by Google

III. Die Auftriebsverteilung am verwundenen Tragflügel.

1. Theoretische Überlegungen.

Es ist bekannt, daß Wechselwirkungen zwischen Gebieten anliegender und abgerissener Strömung auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen entstehen. Einmal durch Induktion: Nach der Prandtlschen Theorie der tragenden Linie ergibt das Nebeneinander von hohem und geringem Auftrieb große, in einem kritischen Anstellwinkelbereich besonders zu beachtende Unterschiede im induzierten Anstellwinkel. Zum anderen durch Querströmungen: Dadurch, daß leicht verschiebliches Totwasser an Gebiete hohen Unterdrucks angrenzt, entstehen ausgleichende Strömungen, die einem labilen Zustand beeinflussen könnten. — Wir betrachten anschließend zunächst die Aussagen, die sich aus der Theorie der tragenden Linie allein ergeben.

Dazu sei der linear verwundene Tragflügel zugrunde gelegt und einfach, d. h. von konstanter Tiefe und konstantem Profil, vorausgesetzt; ferner von so großem Seitenverhältnis, daß das von uns betrachtete Übergangsgebiet zwischen anliegender und abgerissener Strömung sich voll entwickeln könne und frei sei von äußeren, von den Tragflügelenden herrührenden Einflüssen. Die Verwindung ε ist die Anstellwinkeländerung über der Spannweite, die mit der Flügeltiefe l dimensionslos gemacht wird:

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{dy} l.$$

ε ist also bei linearer Verwindung die Anstellwinkeländerung $\Delta\alpha$ auf einem Flügelabschnitt der Länge l.

Die für die Anwendung der Tragflügeltheorie, zunächst im Bereich kleiner Anstellwinkel, benötigte Profileigenschaft, der Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $c_a(\alpha)$, wird der Einfachheit halber und mit gutem Erfolg allgemein den üblichen Kraftmessungen an Normalflügeln entnommen. Man pflegt diese Kraftmessungen mangels besserer Unterlagen mit mehr oder weniger Bedenken auch dort zugrunde zu legen, wo $c_a(\alpha)$ nicht mehr linear ist [2]. Ihre Brauchbarkeit ist jedoch im kritischen Anstellwinkelbereich, d. h. in der Umgebung des Maximalauftriebes, dadurch eingeschränkt, daß der Abreißvorgang bei Normalflügeln nicht gleichzeitig über der Spannweite einsetzt. Die Kraftmessung gibt dann einen Mittelwert über verschiedene Zustände, sagt also nichts aus über das Verhalten eines einzelnen Profilschnittes. Diese Einschränkung gilt, wenn auch in geringerem Maße, auch für elliptische Flügel wegen der an diesen auftretenden Unterschiede in der Kennzahl *Re*. Setzt der Abreißvorgang aber einigermaßen gleichzeitig ein, so steigt zugleich α_{eff} unstetig und überspringt so den eigentlich interessierenden Anstellwinkelbereich. Der für das Verhalten des einzelnen Profilschnittes maßgebliche Zusammenhang $c_a(\alpha)$ ist daher aus diesen »Integral-Messungen« keineswegs zu entnehmen.

Störend ist vor allem, daß nach diesen Normalflügelmessungen oberhalb des Maximalauftriebes ein Bereich auftritt, in dem $\frac{dc_a}{d\alpha} < 0$ ist. Da die Integralgleichung der Tragflügeltheorie [1] unter dieser Voraussetzung keine Lösungen hat, wäre es grundsätzlich wichtig, zu entscheiden, ob auch bei dem der Rechnung eigentlich zugrunde zu legenden »ebenen Problem«, d. h. für ein infinitesimales Tragflügelstück, und beim Fehlen der oben erwähnten seitlichen Beeinflussungen, $\frac{dc_a}{d\alpha}$ negativ werden kann. Einige Aussagen dazu werden unten in Kapitel IV gemacht.

Praktisch ist diese Entscheidung allerdings nicht ganz so wichtig, wie es zunächst wohl scheinen mag. Um das einzusehen, legen wir unserer Überlegung vorläufig ein $c_a(\alpha)$ mit einer diskreten Unstetigkeitsstelle bei einem kritischen Anstellwinkel α_{krit} nach Bild 1 (schematisch) zugrunde, das der Anwendung der Theorie zugänglich ist (und übrigens mit manchen Messungen an elliptischen Flügeln recht gut übereinstimmt). Aus der Tragflügelgleichung

$$\Gamma = vcl \cdot \alpha_{eff} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Bild 1. $c_a(\alpha)$ mit einer diskreten Unstetigkeitsstelle (schematisch).

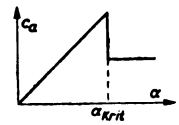


Bild 2. Zwei Flügel gleicher Auftriebsverteilung.
a) l = const.
b) c = const.

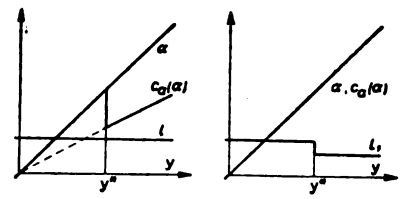
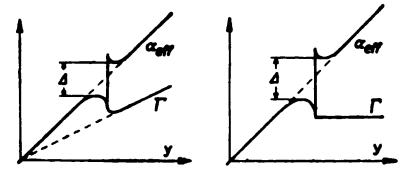


Bild 3. α_{eff} und Γ an Flügeln mit einer diskreten Unstetigkeitsstelle.
a) (zu Bild 2).
b) (zu Bild 1).



mit

$$\alpha_{eff} = \alpha - \frac{1}{4\pi v} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \cdot \frac{dy'}{y - y'}$$

ergibt sich, daß sich eine bestimmte Form der Unstetigkeitsstelle in $c_a(\alpha)$ bzw. in c durch einen Sprung in der Tiefenverteilung $l(y)$ gleichwertig für die entstehende Auftriebsverteilung $\Gamma(y)$ ersetzen läßt, wofern nur überall das Produkt $c \cdot l = c_1 \cdot l_1$ bleibt; dieser Zusammenhang ist in Bild 2 wiedergegeben. Er sei hier herangezogen, weil die Verhältnisse bei c_1 = const. einfach zu überlegen sind.

Für den Flügel nach Bild 2b, also für c_1 = const., gilt aber, daß zu dem Sprung in l_1 ein umgekehrt entsprechender in α_{eff} gehören muß, derart, daß $\Gamma(y)$, wie bei jedem Tragflügel, stetig ist. Bedenkt man dies und vergegenwärtigt sich dabei den Drehsinn der abgehenden Wirbel, so übersieht man leicht, daß an dem Flügel nach Bild 2b — und damit auch an dem nach Bild 2a! — eine Verteilung von α_{eff} entsteht, wie sie in Bild 3a wiedergegeben ist[2]). Ferner ist offensichtlich, daß diese Verteilung für ähnliche Unstetigkeiten in $c_a(\alpha)$ nicht grundsätzlich anders sein wird, daß also z. B. zu Bild 1 eine Verteilung nach Bild 3b gehört.

Der Verlauf von α_{eff} nach Bild 3 zeigt nun eine für unsere Fragestellung äußerst wichtige Eigenart: Ein bestimmter Bereich von α_{eff}, der in Bild 3 mit Δ bezeichnet ist, tritt am verwundenen Tragflügel überhaupt nicht auf! Der Verlauf von c_a in Δ — also gerade in der Umgebung des kritischen Anstellwinkels — ist somit für die Auftriebsverteilung bzw. für ihre Berechnung gleichgültig.

Daß wir unseren Überlegungen ein $c_a(\alpha)$ nach Bild 1 zugrunde gelegt haben, ist also nicht so einschneidend, wie man zunächst annehmen konnte; innerhalb des Δ-Bereiches ist vielmehr jede Vereinfachung des Überganges zwischen anliegender und abgerissener Strömung erlaubt!

Über die Größe von Δ gibt Bild 4 Auskunft. Der Berechnung, die nach Multhopp [2] für einzelne Beispiele durchgeführt wurde, ist dort ein Flügel nach Bild 2a zugrunde gelegt, unter folgenden Annahmen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } c_a = 0$$

kritischer Anstellwinkel $\alpha^* = \alpha(y^*)$,

$$\begin{aligned} c_1 &= \pi \quad \text{für } |y| < y^* \\ c_2 &= \mu \cdot c_1 \text{ für } |y| > y^*. \end{aligned}$$

[2]) In Bild 3a nähern sich die beiden Äste der Funktion $\alpha_{eff}(y)$ asymptotisch der Geraden $\alpha(y)$, d. h. es sind lediglich die von der Sprungstelle selbst bedingten induzierten Anstellwinkel berücksichtigt. Das Integral in Gleichung (1) wächst aber bei dem hier vorausgesetzten unendlich langen Flügel mit $\log b/2$ über alle Grenzen, solange nicht $d\Gamma/dy$ an beiden »Enden« des Flügels den gleichen Wert annimmt. Die betrachtete Sprungstelle muß daher durch eine zweite, entgegengesetzt gleiche wieder rückgängig gemacht werden. Diese zweite Sprungstelle ist bei $-y^*$ vorausgesetzt.

Digitized by Google

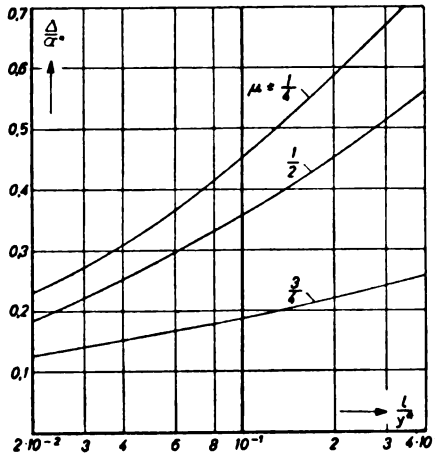


Bild 4 (links). Δ-Bereich.

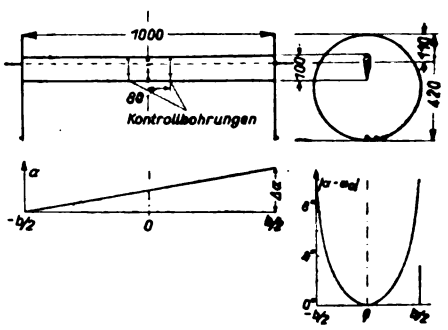


Bild 5 (rechts). Rechteckflügel mit Endscheiben, Profil Göttingen 409.

Flügel I $\varepsilon = 0°$ $\Delta\alpha = 0°$
Flügel II $\varepsilon = 0{,}5°$ $\Delta\alpha = 5°$
Flügel III $\varepsilon = 2{,}0°$ $\Delta\alpha = 20°$
Flügel IV $\varepsilon = 4{,}5°$ $\Delta\alpha = 45°$
Flügel V $|\alpha - \alpha_0| = 40° \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^2$.

Δ/α^* ist in Bild 4 über l/y^* ($= \varepsilon/\alpha^*$) für verschiedene μ aufgetragen. In einem vorgegebenen Falle wird nun $c_1 \neq \pi$ sein, etwa $c_1 = \lambda\pi$. Dann kann man in Gl. (1) das Produkt $vcl = v\,(\lambda\pi)l$ auch $v\pi\,(\lambda\,l)$ schreiben; in Bild 4 hat man also den gesuchten Wert Δ/α^* über $\lambda\,l/y^*$ abzulesen.

Für einzelne allgemeinere Beispiele ist Δ in Bild 9 angegeben.

Die Anwendung der Gl. (1) auch im kritischen Anstellwinkelbereich ist durch das Auftreten des Δ-Bereiches ermöglicht. Dennoch genügt Gl. (1) nicht zur Berechnung der Auftriebsverteilung im Übergangsgebiet, da sie die Lage der Abreißgrenze offen läßt. Bei der Berechnung einer Auftriebsverteilung muß man nämlich zunächst die Abreißgrenze irgendwo annehmen. Dadurch ist zugleich ein Δ-Bereich festgelegt; es gilt lediglich die Bedingung, daß dieser den kritischen Anstellwinkel enthalten muß. Innerhalb dieser Bedingung ist jede der so erhaltenen Auftriebsverteilungen, von denen einzelne Beispiele unten in Bild 9 enthalten sind, zunächst gleichberechtigt. Man bedarf also noch einer zusätzlichen Aussage, z. B. über die Größe des auftretenden Maximalauftriebes; diese ist nur aus Messungen zu erhalten.

Zu Bedenken gibt die Forderung der Theorie nach einer Sprungstelle im effektiven Anstellwinkel Anlaß, weil dort stabil anliegende Strömung direkt neben voll abgerissener liegen soll (Bild 3). Dieses Nebeneinander ist schon der verlangten Drucksprünge wegen nicht möglich; die eingangs erwähnten Querströmungen werden also sicher auftreten. Auch über diese Querströmungen, ebenso wie über die Größe des Maximalauftriebes, wollen wir durch einen Vergleich der theoretischen Auftriebsverteilungen mit gemessenen Aufschluß zu gewinnen suchen.

2. Messungen.

Die Messung der Auftriebsverteilungen an Tragflügeln mit linear veränderlichem Anstellwinkel wurde zunächst an einem nichtverwundenen elliptischen Tragflügelmodell des Profils Göttingen 409 (Bild 14) durchgeführt, bei dem durch Rotation um die Windkanalachse verschiedene ε erzeugt werden konnten[3]). An diesem wurden aus Druckverteilungsmessungen die Auftriebsverteilungen bestimmt.

Die Ergebnisse mußten leider als unbrauchbar ausgeschieden werden, weil sich in der Achse des benutzten Windkanals eine Stelle erhöhter Turbulenz (infolge zu enger Retuschiersiebe am Gleichrichter) fand, die in einem schmalen Bereich in der Mitte des Modellflügels die Strömung unverhältnismäßig lange anliegend erhielt, und damit die Meßergebnisse wertlos machte.

Die benutzte Versuchsanordnung, die in verbesserter Form für die Fortführung der Untersuchungen vorgesehen ist, ist daher an dieser Stelle nicht näher beschrieben. Die Versuche selbst werden hier erwähnt, um zu zeigen, wie vorsichtig man bei allen derartigen Untersuchungen über Abreißvorgänge sein muß.

Noch eine andere Schwierigkeit ergab sich bei diesen Messungen: Bei Änderung der Drehrichtung trat eine eindeutige Verschiebung der Abreißgrenze auf. Zufolge der Symmetrie des Systems konnte diese Verschiebung nur durch Ungenauigkeiten in der Modellherstellung verursacht sein. Das Modell wurde daher in dem photographischen Profil-Aufmeßgerät der AVA geprüft. Die festgestellten Fehler waren kaum merklich und lagen durchaus innerhalb der durch die Fertigung bedingten. Man muß sich damit abfinden, daß die Abreißvorgänge labil sind, insbesondere gegenüber kleinsten Ungenauigkeiten der Profilnasenform. Das ist ja bekannt und wird unten in Kapitel IV 2 noch näher begründet.

Um bei den weiteren Messungen derartige Störungen nach Möglichkeit auszuschalten, wurde einmal die einfacher und sauberer herstellbare rechteckige Flügelform an Stelle der elliptischen gewählt, die außerdem von vornherein verwunden wurde, also nicht zu rotieren brauchte. Zum anderen wurden Druckmeßbohrungen (bis auf Kontrollbohrungen) nur an dem mittleren Profilschnitt jedes Flügelmodells angebracht, so daß sich die zufälligen Herstellungsungenauigkeiten wenigstens für die Messungen an einem Flügel gleich blieben. Insgesamt wurden fünf Modellflügel angefertigt, die sich nur durch ihre Verwindungen unterschieden, und deren Daten aus Bild 5 zu entnehmen sind. Die Flügel waren in der üblichen Anfertigung aus einem Metallskelett mit Gipsfüllung hergestellt. Ihr Seitenverhältnis war $\Lambda = 10$; dazu waren sie mit Endscheiben versehen. Die Bohrungen seitlich des Mittelschnitts dienten lediglich zur Kontrolle für das Einsetzen der Abreißvorgänge. — Die Verwindung war bei vier Flügeln linear mit $\varepsilon = 0$ bzw. 0,5°, 2,0° und 4,5°. Die Anstellwinkelverteilung des fünften Modells war quadratisch in y,

$$|\alpha - \alpha_0| = \frac{4\,\alpha_1}{b^2}\,y^2$$

mit einer größten Anstellwinkeldifferenz $\alpha_1 = 10°$.

Diese fünf Modellflügel wurden im Windkanal I der AVA-Göttingen bei einer Windgeschwindigkeit von 30 m/s, also bei $Re \approx 2 \cdot 10^5$, untersucht. Mit Flügel I, $\varepsilon = 0$, der keine Druckanbohrungen hatte, wurde eine Kraftmessung durchgeführt; dabei wurde der Widerstand der Aufhängung und der Endscheiben durch eine Impulsmessung bei Nullauftrieb bestimmt. Die übrigen Flügel wurden fest, lediglich um die Flügelachse bei 0,3 l drehbar, im Windkanal eingebaut. Die Druckmeßleitungen wurden bei der Drehachse durch die Endscheiben herausgeführt und an ein Vielfachmanometer angeschlossen. Die bei Abreißvorgängen zu erwartenden Druckschwankungen wurden durch ausreichend lange Leitungen gedämpft.

Da das benutzte Profil symmetrisch war, konnte jede Messung zur Kontrolle für die Genauigkeit der Werkstattarbeit mit umgekehrtem Anstellwinkelvorzeichen durchgeführt werden. Sieht man vom Vorzeichen ab und vergleicht, wie es in den folgenden Auftragungen geschehen ist, nur die Absolutwerte von Anstellwinkeln und Auftriebsbeiwerten, so darf sich bei Flügel I bis IV theoretisch zwischen beiden Messungen keine Differenz ergeben. In den

[3]) Die Ergebnisse am rotierenden Modell sind auf ein ruhendes, entsprechend verwundenes übertragbar, und umgekehrt, solange von den Zentrifugal- und Corioliskräften abzusehen ist.

Digitized by Google

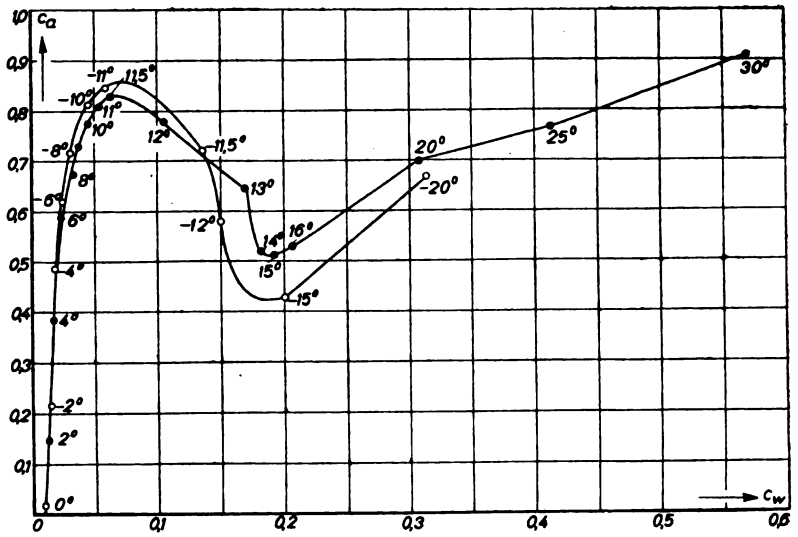


Bild 6. Polare (Flügel *I*).

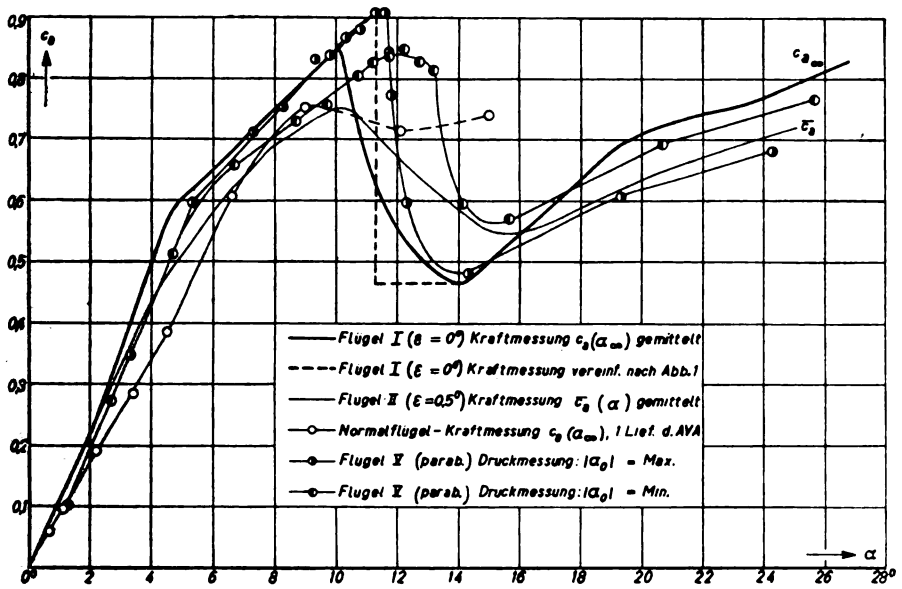


Bild 7. $c_a(\alpha_\infty)$ und Vergleichsmessungen.

Ergebnissen, Bild 6 bis 9, sind jeweils beide Messungen — oder doch das Mittel aus beiden — eingetragen. Die einzelnen Kurven sind dort in den Nullpunkt verschoben, die Ungenauigkeiten der Modelleinstellung also ausgemerzt, ebenso — bei Flügel *V* — der induzierte Anstellwinkel bei $\alpha = 0°$.

Die Korrektur infolge der Endlichkeit des benutzten Strahles, die sich nicht immer brauchbar abschätzen ließ, betrug höchstens 0,15° — Strahldurchmesser 2,25 m — und wurde vernachlässigt.

Bild 6 zeigt die mit Flügel *I* ($\varepsilon = 0°$) erhaltene Profilpolare. Bild 7 zeigt dazu $c_a(\alpha_\infty)$; für die Umrechnung ist der Flügel gleichen induzierten Widerstandes ohne Endscheiben nach Nagel [3] mit $\Lambda = 13$ zugrunde gelegt.

Neben der — der Auftriebsberechnung zugrunde zu legenden — Profilfunktion $c_a(\alpha_\infty)$ enthält Bild 7 einige Vergleichsmessungen. Zunächst aus einer Kraftmessung $\bar{c}_a(\alpha)$ an Flügel *II* ($\varepsilon = 0{,}5°$), das unten für eine Korrektur gebraucht wird. Ferner ist in Bild 7 die Messung an einem Normalflügel des gleichen Profils Göttingen 409 wiedergegeben (aus den »Ergebnissen der AVA«, I. Lieferung). Die Abweichungen dieser Messung von der unsrigen mag mit auf die höhere Kennzahl ($Re = 4 \cdot 10^5$) zurückzuführen sein. Zu beachten ist für die vorliegende Fragestellung, daß bei älteren Messungen oft die Zahl der Meßpunkte im Bereich des $c_{a\,max}$ nicht ausreicht.

Für die an $c_a(\alpha_\infty)$ entsprechend Bild 1 bei Auftriebsberechnungen anzubringende Vereinfachung, die in Bild 7 gestrichelt eingetragen wurde, ist die Kenntnis des größten bei ungestörter Strömung möglichen Maximalauftriebes notwendig. Dieser wurde aus der Messung an Flügel *V* (parabolische Verwindung) entnommen, die in Bild 7 mit eingetragen ist. Bei diesem Flügel sollte je nach der Aufhängung — Anstellwinkel im Mittelschnitt α_0 Maximum oder Minimum — der Höchstauftrieb im Mittelschnitt entweder zuerst, und unbeeinflußt von seitlichen Störungen, erreicht werden, oder zuletzt, und unter dem Einfluß der schon abgerissenen Nachbarströmung. Dieses Ziel wurde nicht ganz erreicht; der Abreißvorgang trat nicht vollständig symmetrisch ein, wie aus den Anzeigen der Kontrollbohrungen und aus Fadensondenbeobachtungen hervorging. Immerhin blieb, wie die Messungen zeigen, trotz dieser Störung die erwartete Erscheinung noch deutlich erkennbar: zwischen beiden Messungen zeigt sich ein merklicher Unterschied im Maximalauftrieb.

Bei der Anordnung, bei welcher der Anstellwinkel im Mittelschnitt ein Maximum bildete, wurde anscheinend, wie aus dem Kurvenverlauf zu schließen ist, der theoretisch beste $c_{a\,max}$-Wert fast verwirklicht; der erreichte Wert wurde der Vereinfachung an $c_a(\alpha_\infty)$ zugrunde gelegt. Der zwischen beiden Messungen aufgetretene Unterschied zeigt, daß der an irgendeinem Profilschnitt des Flügels entstehende Maximalauftrieb von dem Verhalten seiner Nachbarschaft abhängig ist — darin ist schon ein Beweis für die oben erwähnten Querströmungen zu erblicken!

Digitized by Google

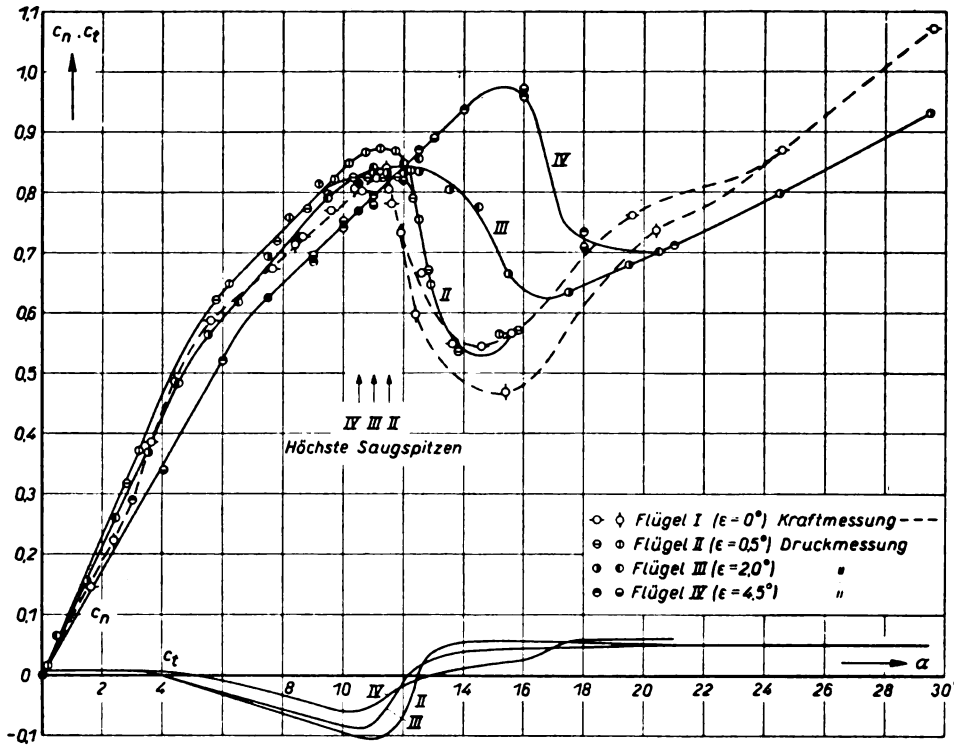


Bild 8. $c_n(\alpha)$ und $c_t(\alpha)$ an Flügel *I* bis *IV*.

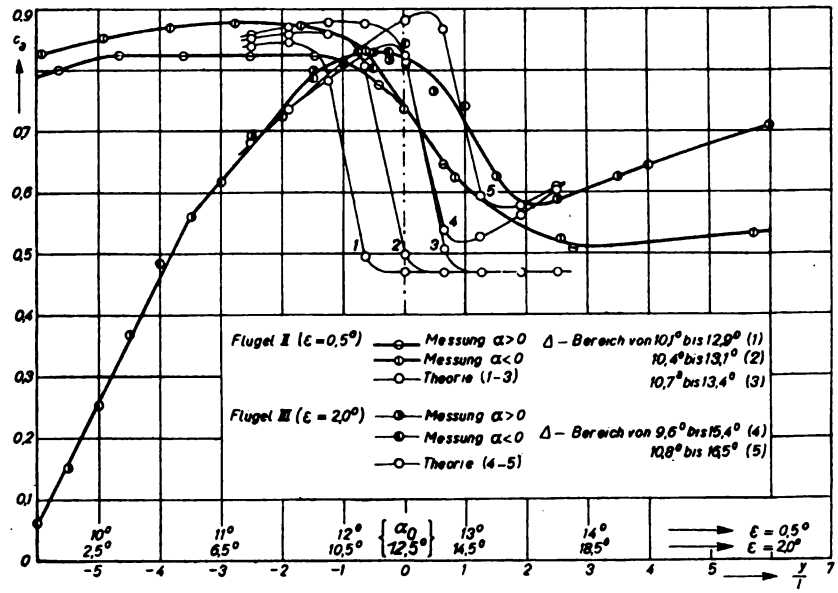


Bild 9. $c_a(y/l)$ an Flügel *II* und *III*. Vergleich zwischen Rechnung und Messung.

In Bild 8 sind über dem Anstellwinkel α des Mittelschnittes die mit den linear verwundenen Flügeln erhaltenen Normal- und Tangentialkraftbeiwerte c_n und c_t wiedergegeben; c_n an Stelle von c_a deshalb, weil man die Resultierende, deren Größe vielfach interessiert, auch bei großen Anstellwinkeln der Normalkraft in erster Näherung gleichsetzen kann.

Die Abreißgrenze wandert bei den verwundenen Flügelmodellen mit der Anstellwinkeländerung entlang der Spannweite; sie wandert dabei auch über den Mittelschnitt, d. h. die Meßstelle, hinweg. Solange der Einfluß der Tragflügelenden zu vernachlässigen ist, kann man umgekehrt eine Anstellwinkeländerung des linear verwundenen Flügels auch auffassen als Verschiebung eines Abschnittes, z. B. der Meßstelle eines feststehenden, unendlich langen, verwundenen Tragflügels auf diesem, d. h. man erhält durch entsprechende Auftragung die Auftriebsverteilung über der Spannweite, wobei zu setzen ist

$$y/l = (\alpha - \alpha_0)/\varepsilon;\ (y = 0 \text{ für } \alpha = \alpha_0).$$

Diese Auftragung ist für Flügel *II* und *III* mit $\alpha_0 = 12{,}5^0$ in Bild 9 durchgeführt.

Entsprechend kann man auch Bild 8 so auffassen, daß die Abszisse die Spannweitenrichtung darstellt. Der Unterschied zwischen beiden Auftragungen ist dann anschaulich der, daß in Bild 8 Flügel gleicher Anstellwinkelverteilung, aber verschiedener Tiefe miteinander verglichen werden, in Bild 9 solche gleicher Tiefe, aber verschiedener Anstellwinkelverteilung.

Bei Flügel *II* ($\varepsilon = 0{,}5^0$) zeigten Kontrollbohrungen und Fadensondenbeobachtungen, daß auf einer Flügelseite isolierte Abreißstellen auftraten, der Vorgang sich also nicht in der erwünschten gleichmäßigen Weise mit α über y fortpflanzte. Entsprechend ergaben die Messungen verschiedene Maximalauftriebe je nach dem Vorzeichen von α. Man muß sich jedoch klarmachen, daß derartige Ungleichmäßigkeiten bei kleinem ε besonders leicht auftreten können, weil der kritische, also empfindliche Anstellwinkelbereich dort einen großen Spannweitenbereich umfaßt, auf dem leicht

Digitized by Google

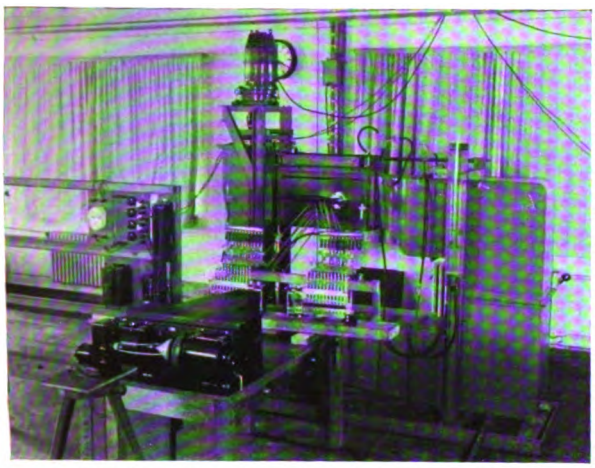


Bild 12. Wasserkanal und Druckschreibegerät.

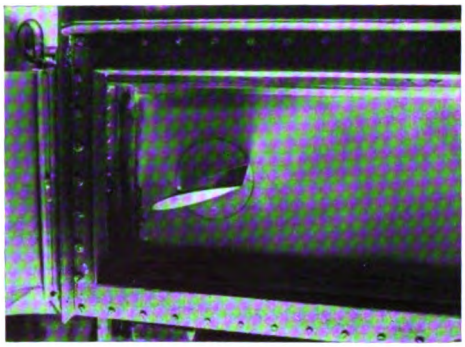
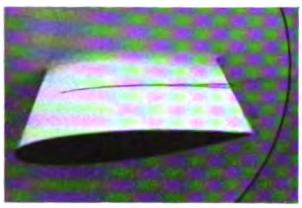
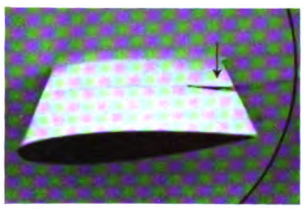


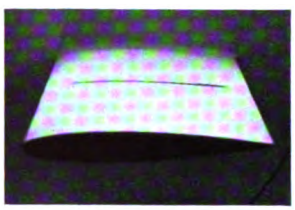
Bild 13. Wasserkanal, Meßstrecke mit verwundenem Rechteckflügel (siehe Kapitel V).



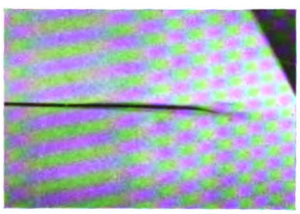
a) $\alpha = -3°$; Bohrung 3.



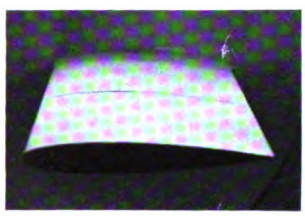
b) $\alpha = -3°$; Bohrung 6.



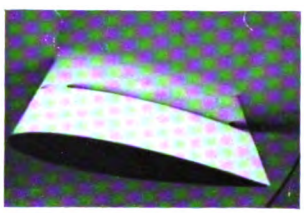
c) $\alpha = +1°$.



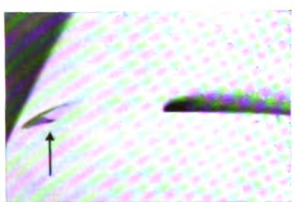
d) Vergrößerung aus c),



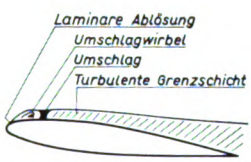
e) $\alpha = 4{,}5°$,



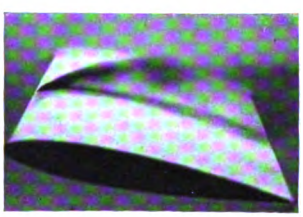
f) $\alpha = 10{,}5°$,



g) Vergrößerung aus f),



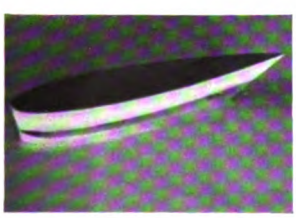
h) Schema zu f).



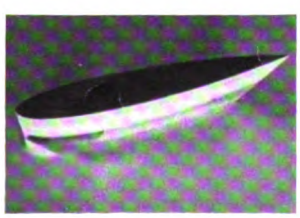
i) $\alpha = 12{,}5°$; Bohrung 3,

k) $\alpha = 13°$; Bohrung 6.

Bild 15. Strömungsaufnahmen im Wasserkanal am geraden Rechteckflügel.



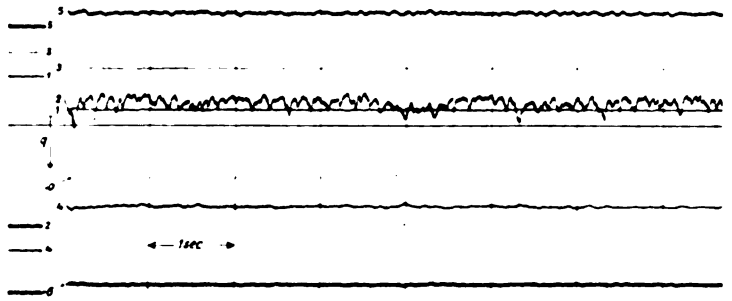
»anliegend«



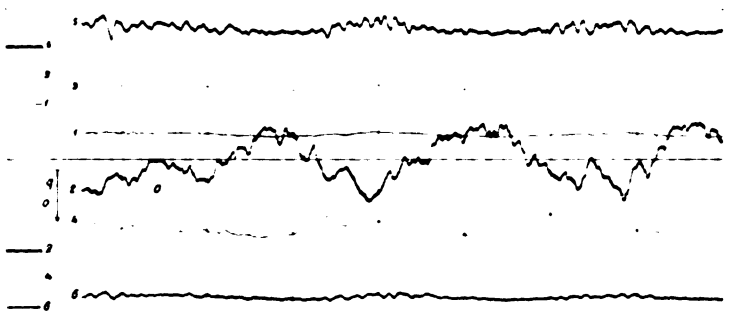
»abgerissen«

Bild 16. Strömungszustände am geraden Rechteckflügel bei $\alpha = 11{,}5°$ (aus Lauffilm; *B 2*, *B 4* und *B 5*).

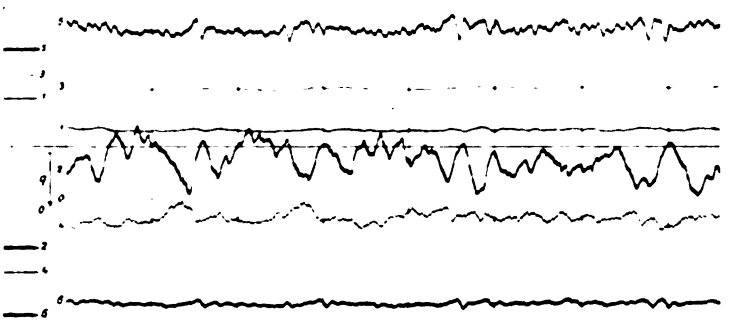
Digitized by Google



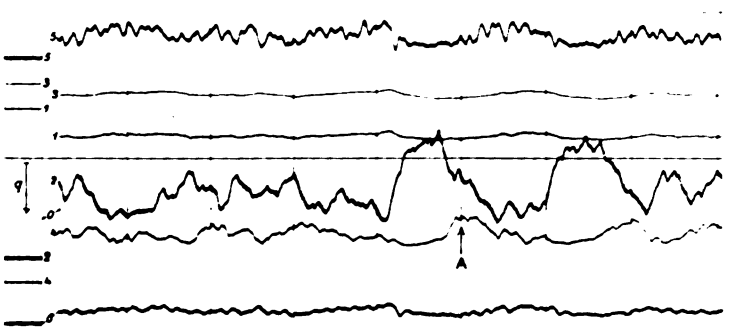
a) $\alpha = 11{,}25°$,



b) $\alpha = 11{,}5°$,



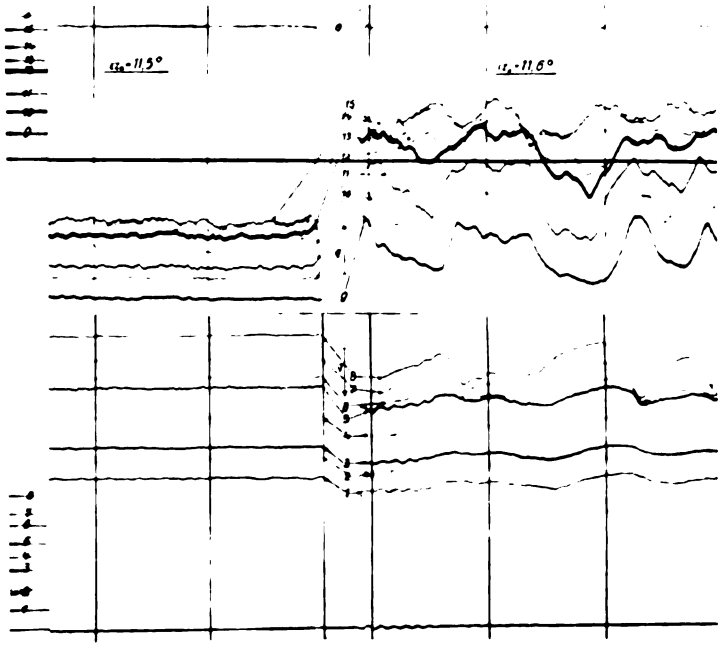
c) $\alpha = 11{,}75°$,



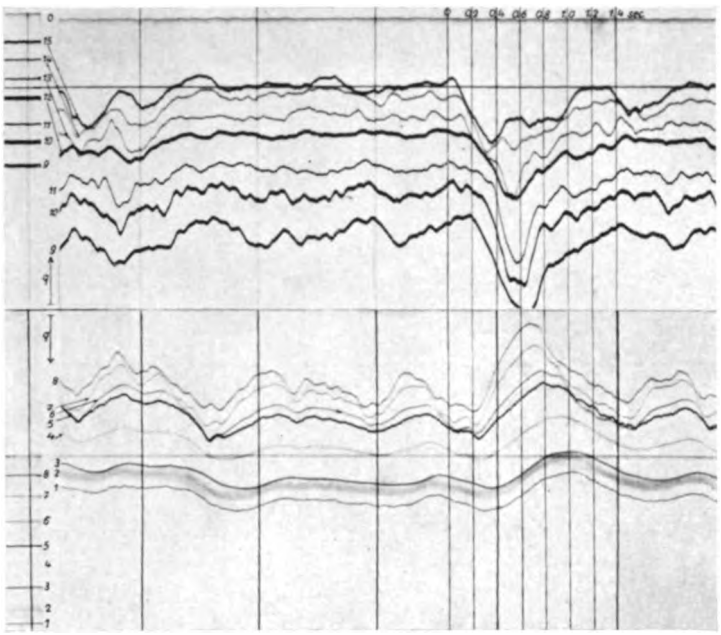
d) $\alpha = 12{,}0°$.

Bild 17. Druckaufzeichnungen am geraden Rechteckflügel.

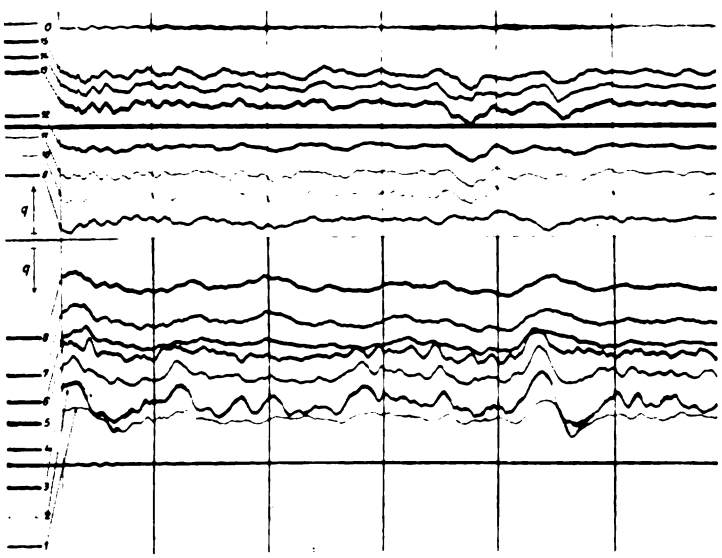
Digitized by Google



a) $\alpha_0 = 11{,}5°$ und $11{,}6°$,



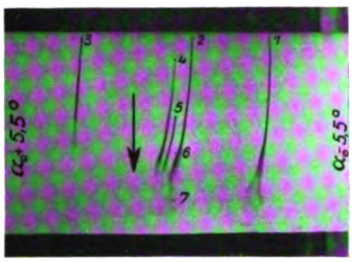
b) $\alpha_0 = 12{,}5°$,



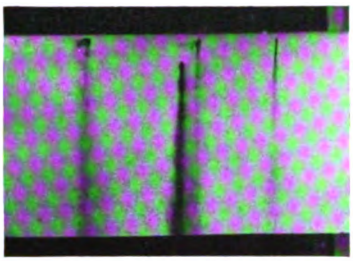
c) $\alpha_0 = 15{,}5°$.

Bild 20. Druckaufzeichnungen am verwundenen Rechteckflügel. Anordnung der Bohrungen nach Bild 19a.

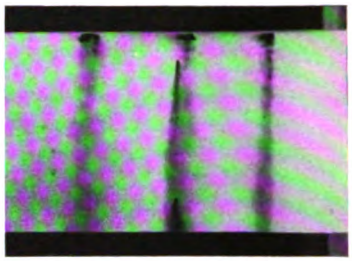
Digitized by Google



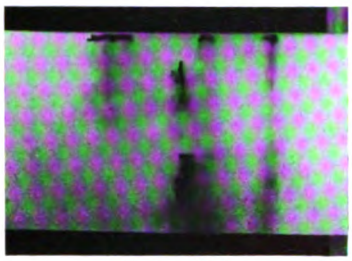
a) $\alpha_0 = 0°$,



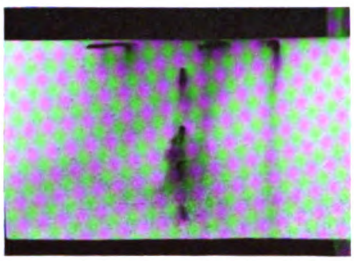
b) $\alpha_0 = 5°$,



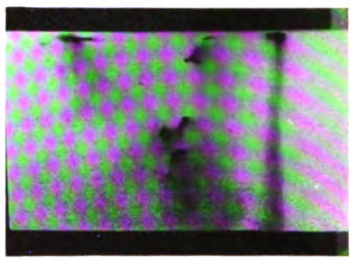
c) $\alpha_0 = 8°$,



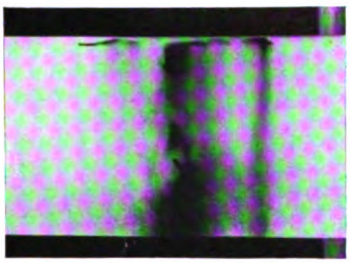
d) $\alpha_0 = 9{,}5°$,



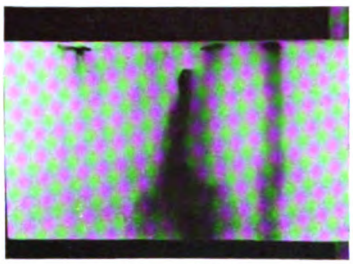
e) $\alpha_0 = 10°$,



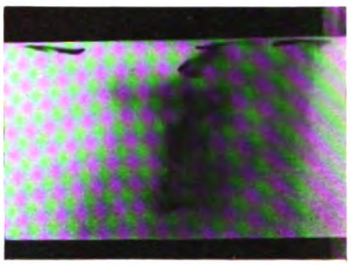
f) $\alpha_0 = 10°$,



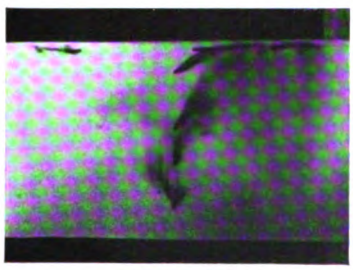
g) $\alpha_0 = 10{,}5°$,



h) $\alpha_0 = 10{,}5°$,

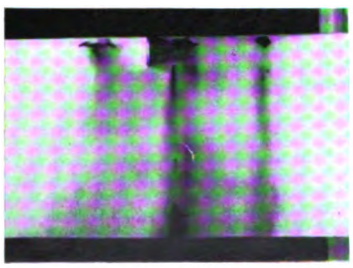


i) $\alpha_0 = 13°$,

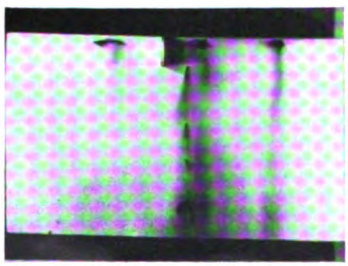


k) $\alpha_0 = 15°$.

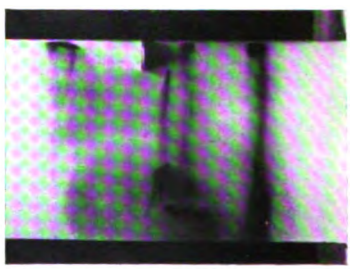
Bild 24. Strömungsaufnahmen im Wasserkanal am verwundenen Rechteckflügel. Anordnung der Bohrungen nach Bild 19b.



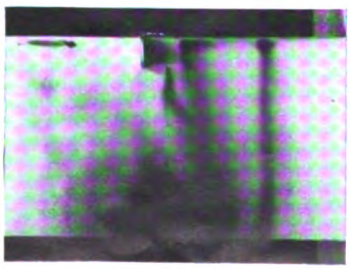
a) $\alpha_0 = 9{,}5°$,



b) $\alpha_0 = 10°$,



c) $\alpha_0 = 10{,}5°$,



d) $\alpha_0 = 11{,}5°$.

Bild 27. Strömungsaufnahmen im Wasserkanal am verwundenen Rechteckflügel mit aufgesetzter Scheibe. Anordnung der Bohrungen nach Bild 19b.

Digitized by Google

Störungen möglich sind. Die Unsicherheit, die allen Vorausberechnungen für Abreißvorgänge anhaftet, ist also bei kleinem ε besonders groß.

3. Vergleich.

Wir vergleichen zunächst die Messungen an den Flügeln *II*, *III* und *IV* nach Bild 8 und 9. Die Kraftmessung an Flügel *I* ist als Integral über den Gesamtflügel mit den örtlichen Druckmessungen nicht vollständig vergleichbar und enthält ferner, im Gegensatz zu den Druckmessungen, auch die auf den Flügel wirkenden Reibungskräfte.

Es fällt auf, daß das Auftriebsmaximum beim Flügel *IV* ($\varepsilon = 4{,}5^0$) sehr groß ist, erheblich größer sogar als der größte an Flügel *V* gemessene Wert (vgl. Bild 7), der doch der größtmögliche sein sollte. Der Abfall nach dem Auftriebsmaximum ist bei Flügel *II* und *III* etwa gleich steil in der Auftragung nach Bild 9, entsprechend in Bild 8 bei Flügel *III* flacher. Zu erwarten wäre danach, daß er in Bild 8 bei Flügel *IV* noch flacher erschiene. Er ist dort aber wieder recht steil.

Die Messung an Flügel *IV* weicht also in zunächst unerklärlicher Weise von den übrigen Messungen ab. Da kein genügender Anlaß besteht, das der Rechnung zugrunde zu legende c_a (α_∞) bzw. die an diesem nach Bild 7 angebrachte Vereinfachung bis zu dem an Flügel *IV* gemessenen Auftriebsmaximum zu erhöhen, ist der Vergleich zwischen Messung und Rechnung in Bild 9 nur für Flügel *II* und *III* durchgeführt. Auf Flügel *IV* kommen wir unten noch zurück.

Der Auftriebsberechnung, deren Ergebnis in Bild 9 zum Vergleich aufgetragen ist, wurden die Modellflügel *II* und *III* zugrunde gelegt; als gleichwertiges Seitenverhältnis wurde — wie oben bei Modell *I* — $\Lambda = 13$ angenommen. Als Anstellwinkel α_0 im Mittelschnitt wurde 12,5° gewählt. Die Berechnung der Auftriebsverteilungen geschah nach dem von Multhopp [2] angegebenen Verfahren unter Zugrundelegung von c_a (α_∞) nach Bild 7. Dabei wurde noch die Korrektur $\Delta c_a = -c_{wp} \cdot \alpha_i$ angebracht; der Profilwiderstandsbeiwert c_{wp} wurde der 3-Komponentenmessung an Flügel *I* entnommen. Die hier mit $m = 31$ Stellen, an denen die Zirkulation bestimmt wurde[4]), erzielte Genauigkeit reicht für den vorgesehenen Vergleich aus. Die eigentliche Abreißgrenze, die nach dem oben in Kapitel III 1 Gesagten innerhalb gewisser Grenzen willkürlich blieb, wurde für die Rechnung jeweils an mehreren verschiedenen Stellen angenommen; die errechneten Kurven in Bild 9 enthalten daher im kritischen Bereich je 2 bzw. 3 verschiedene Äste. Der auftretende Λ-Bereich ist jedesmal angegeben und bei $\varepsilon = 2{,}0^0$ recht groß, größer als der kritische Anstellwinkelbereich, in dem c_a (α_∞) nach Bild 7 vereinfacht werden mußte. Selbst bei der kleinen Verwindung $\varepsilon = 0{,}5^0$ überdeckt er fast vollständig den Abfall in dem gemessenen c_a (α_∞) — dessen Verlauf in diesem Bereich also gleichgültig ist.

Die errechneten Kurven geben für je einen feststehenden Flügel die c_a-Verteilungen über der Spannweite wieder; die Messungen dagegen den Auftrieb im Mittelschnitt dieser Flügel, jedoch bei verschiedenen Flügelstellungen. Da aber das vorliegende Seitenverhältnis Λ recht groß ist, kommt im betrachteten Übergangsgebiet die Verteilung des induzierten Anstellwinkels, und somit auch die des effektiven, im wesentlichen durch die örtliche Auftriebsverteilung zustande. Daher entsprechen sich in Bild 9 Rechnung und Messung soweit, daß wenigstens in der Umgebung des Mittelschnittes ($y/l = 0$) ein Vergleich möglich ist.

Diese Übereinstimmung gilt insbesondere für $\varepsilon = 2{,}0^0$, da dort der Anstellwinkelbereich des Übergangsgebietes nur einen kleinen Teil der Spannweite einnimmt. — Wie Bild 7 zeigt, ändert sich dagegen an Flügel *II* ($\varepsilon = 0{,}5^0$) im Übergangsgebiet der mittlere Auftriebsbeiwert $\overline{c_a}$ merklich, und damit auch der mittlere effektive Anstellwinkel $\overline{\alpha}_i$. Dadurch tritt — außer der am unendlich langen Flügel bei einer Anstellwinkeländerung gegebenen Verschiebung des Übergangsgebietes — am endlich langen Flügel noch eine zusätzliche Verschiebung ein. Man kann die letztere aber einfach berücksichtigen, wenn man, was für diese Korrektur sicher genügt, konstanten Abwind annimmt. Dann ist

$$\Delta \overline{\alpha}_i = (\overline{c_a}\,(\alpha) - \overline{c_a}\,(\alpha_0))/\Lambda\pi.$$

Diese Korrektur ist in Bild 9 berücksichtigt[5]).

Der Vergleich von Rechnung und Messung nach Bild 9 zeigt, daß der Abfall der Auftriebsbeiwerte nach dem Auftriebsmaximum bei der Rechnung sowohl wie bei der Messung für beide ε gleich steil ist, daß sich aber Rechnung und Messung untereinander stark unterscheiden. Dies ist dadurch zu erklären, daß der theoretische Sprung in α_{eff} (vgl. oben Kapitel III 1, Bild 3) für alle ε gleich ist — daher die Übereinstimmung bei der Rechnung — und daß sich die dadurch bedingten Querströmungen auch in erster Näherung entsprechen —, daher die Übereinstimmung bei der Messung. Wie der Unterschied zwischen Rechnung und Messung zeigt, haben diese Querströmungen einen durchaus wesentlichen Einfluß: der Übergang erfaßt bei der Rechnung einen Bereich $\Delta y \approx 1\,l$ bzw. $2\,l$, bei der Messung einen Bereich $\Delta y \approx 3\,l$ bzw. $5\,l$.

Über die Auswirkung dieser ausgleichenden Querströmungen kann man anschaulich etwa Folgendes vermuten: Wie eben erwähnt, sollte der Ausgleich des Sprunges in α_{eff} bei allen Verwindungen ε in erster Näherung gleich sein. Bedenkt man nun, daß man von einem Flügel gegebener Verwindung dadurch zu kleinerem ε übergehen kann, daß man lediglich die Tiefe verringert, also die im Bereich der Tiefe sich abspielenden ausgleichenden Querströmungen hemmt, so erwartet man, daß in einer Auftragung über α das Übergangsgebiet einen um so kleineren Bereich einnehme, je kleiner ε ist. — Man kann von einem gegebenen Flügel anderseits auch dadurch zu kleinerem ε übergehen, daß man bei konstanter Tiefe die Anstellwinkelverteilung auseinanderzieht; man wird erwarten, daß dabei das Übergangsgebiet mit gedehnt werde, daß es also in einer Auftragung über y/l bei kleinerem ε einen größeren Bereich einnehme. Diese beiden Erwartungen — mit abnehmendem ε kleineres Übergangsgebiet in Bild 8, größeres in Bild 9 — werden durch die Messungen bestätigt.

Entsprechend ist das Auftriebsmaximum bei $\varepsilon = 0{,}5^0$ hoch, bei $\varepsilon = 2{,}0^0$ geringer. Für gleiche Flügeltiefe betrachtet (Bild 9) liegt es bei $\varepsilon = 2{,}0^0$ erheblich näher am kritischen bzw. abgerissenen Bereich, und wird durch ausgleichende Strömung von diesem her geschwächt.

Soweit Flügel *II* und *III*. — Um einen Einblick in das Zustandekommen der unerwarteten Erscheinungen bei Flügel *IV*, den hohen Auftrieb und den steilen Übergang, zu geben, sind in Bild 10 die an Flügel *II*, *III* und *IV* gemessenen Druckverteilungen aufgetragen, und zwar in perspektivischer Auftragung — wobei wieder $y/l = (\alpha - \alpha_0)/\varepsilon$ und $\alpha_0 = 12{,}5^0$ gesetzt wurde. Zu jeder Druckverteilung ist ferner ihr Integral, der Normalkraftbeiwert c_n, angegeben. Zum Vergleich sind in Bild 11 die beim Flügel *V* (parabol. Verwindung) aufgetretenen Druckverteilungen wiedergegeben.

Die Betrachtung zunächst der an der Profilnase auftretenden Saugspitzen zeigt, daß ein Übergang zur abgerissenen Strömung bei größeren ε schon wesentlich vor dem Erreichen des Maximalauftriebes eintritt. Die Anstellwinkel mit den höchsten Saugspitzen sind darum in Bild 8 angegeben worden; man erkennt, daß sie, ebenso wie der zugehörige Auftriebsbeiwert, mit wachsendem ε monoton abnehmen. Bei einer Auftragung über y/l entsprechend Bild 9 und 10, also bei Flügeln gleicher Tiefe, rückt die höchste Saugspitze natürlich dennoch mit wachsendem ε näher an die abgerissene Strömung heran.

[4]) Die einzelnen errechneten Punkte sind in Bild 9 angegeben; zwischen ihnen sind die Kurven vereinfacht gezeichnet, ohne Rücksicht auf den genauen theoretischen Verlauf an der Übergangsstelle.

[5]) Bei Flügel *III* ist $\overline{\alpha}_i$ so klein, daß es in der Auftragung über y/l nicht bemerkbar wird.

Digitized by Google

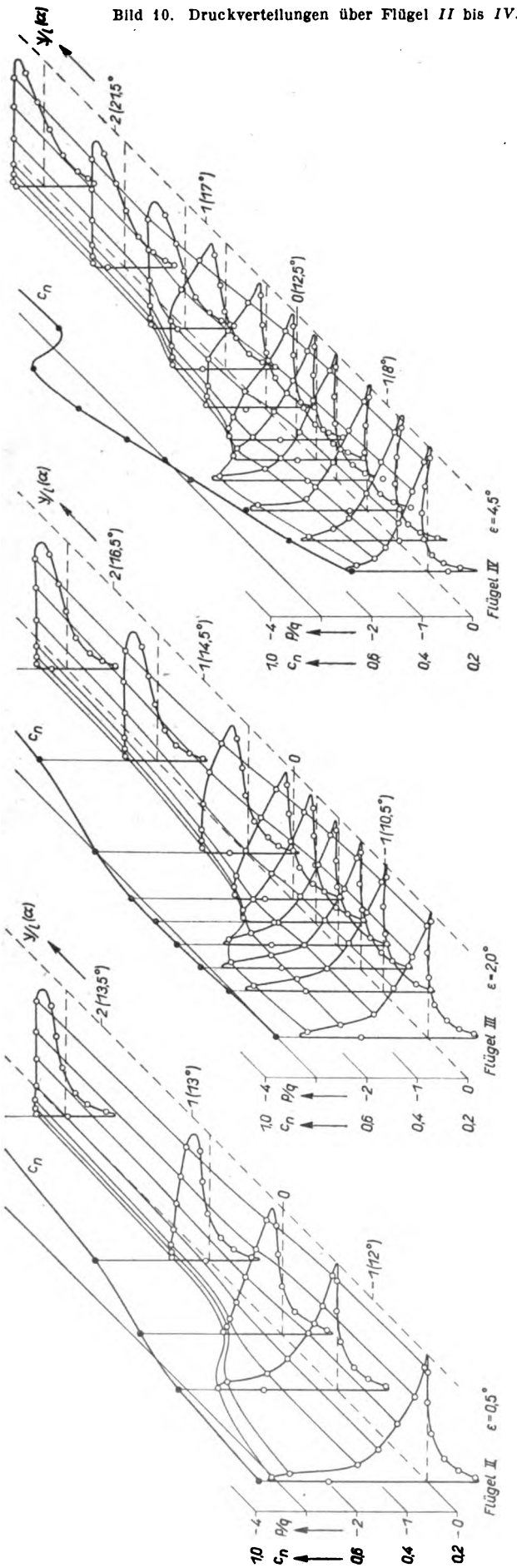


Bild 10. Druckverteilungen über Flügel *II* bis *IV*.

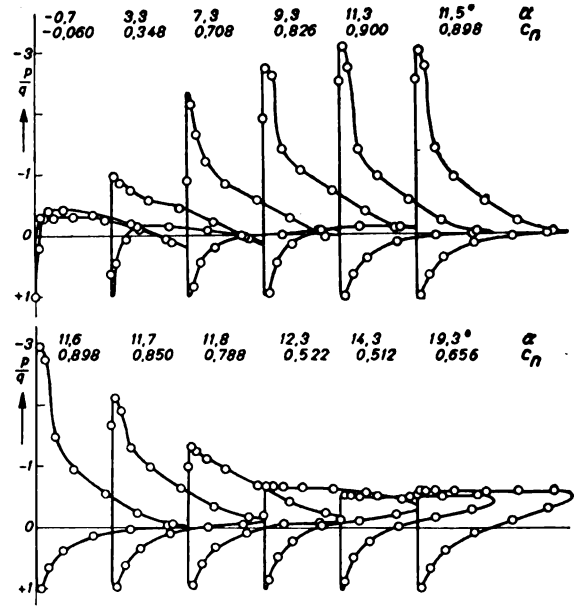


Bild 11. Druckverteilungen im Mittelschnitt (α_s Maximum) bei Flügel *V* (parabolische Verwindung).

Die an Flügel *IV* im Übergangsbereich entstehende große Normalkraft beruht nach Bild 10 auf wesentlich völligeren Druckverteilungen ohne ausgesprochene Saugspitzen. Der Hinweis, daß diese Druckverteilungen durch Absaugung von der voll anliegenden Strömung her zustande kommen mögen, befriedigt nicht recht, weil dort die Saugspitzen recht schmal sind, während im weitaus größeren Teil der Tiefe der Druck zum Übergangsgebiet hin abfällt! Demnach wäre im Übergangsgebiet zum mindesten ein in der Spannweite begrenzterer Ausgleich und ein wesentlich flacherer Verlauf der c_n-Kurven zu erwarten. Erklärt wird so auch nicht, warum die übergroßen c_n-Werte gerade bei $\varepsilon = 4{,}5°$ entstehen, wo doch die Saugspitzen (nach Bild 10) am kleinsten sind. Die Grenzbedingungen des Übergangsgebietes, soweit sie aus den in Bild 10 wiedergegebenen Druckverteilungen hervorgehen, sind vielmehr bei allen drei Flügeln so ähnlich — auch in ihrer gegenseitigen Entfernung — daß die erheblichen Unterschiede der Übergänge selbst mit ihnen nicht zu erklären sind. Da auch die Tragflügeltheorie zu dieser Erklärung nicht ausreicht, erscheint es notwendig, den Abreißvorgang selbst und die Strömung im Übergangsgebiet näher kennenzulernen. Es ist bekannt, daß dort instationäre Vorgänge auftreten. Darauf ist in der folgenden Untersuchung Rücksicht genommen. Wir werden sehen, daß der Schlüssel für die bemerkten Eigenarten eben in solchen instationären Vorgängen liegt.

IV. Der Abreißvorgang als ebenes Problem.

Wir haben gesehen, daß sich der Übergang zwischen anliegender und abgerissener Strömung am verwundenen Flügel nicht mit der Theorie der tragenden Linie allein wiedergeben läßt. Daraus ergab sich, daß es nötig ist, die im Bereich der Tragflügeltiefe sich abspielenden Vorgänge kennenzulernen, das heißt aber, auf den Abreißvorgang als solchen einzugehen. Wir untersuchen dazu zuerst den einfachsten Fall, das ebene Problem; d. h. wir fragen danach, wie c_a (α_∞) wirklich verläuft, und wie es zustande kommt.

Damit ist auch die Frage verbunden, ob die Vereinfachung nach Bild 1, die wir in Bild 7 an c_a (α_∞) vorgenommen haben, berechtigt war. Sie ist allerdings bei der Auftriebsberechnung (Bild 9) wenigstens für größere ε gar nicht in Erscheinung getreten, da sie dort vollständig vom Δ-Bereich überdeckt wird. Hält man Bild 1 für richtig, so kann man auch irgendwelche gemessenen c_a (α) wenigstens qualitativ deuten, wenn man sich wieder vergegenwärtigt, daß bei allen Meßflügeln der Abreißvorgang nicht gleichzeitig über der Spannweite einsetzt. Durch Bild 1 werden jedoch

Digitized by Google

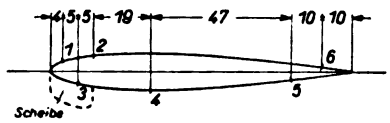


Bild 14. Lage der Anbohrungen im Mittelschnitt beim geraden Rechteckflügel (Wasserkanal).
Profil Göttingen 409; $b \times l = 250 \times 100$ mm. Scheibe s. Kapitel V 3 (Verwundener Rechteckflügel).

nicht die im kritischen Anstellwinkelbereich bekanntlich auftretenden heftigen Schwankungen erklärt. Ferner ist nicht klar, wodurch der Abreißvorgang nach Bild 1 bei einer beliebig kleinen Änderung von α unvorbereitet voll einsetzen soll. Diesen Einwänden ist nachzugehen.

Aus Beobachtungen und aus Deutungen von Kraftmessungen ist bekannt, daß es verschiedene, mehr oder weniger schroffe Arten des Abreißvorganges gibt. Im Hinblick auf das nachfolgende Kapitel erscheint es notwendig, die besonderen Eigenschaften gerade des benutzten Profils ausführlich zu besprechen. Dies geschieht im folgenden an Hand von Strömungsbeobachtungen und Aufzeichnungen instationärer Druckvorgänge.

1. Strömungsbeobachtungen.

Die in diesem und dem folgenden Kapitel behandelten Versuche, die der Klärung von Strömungsvorgängen am geraden und am verwundenen Flügel dienen, wurden in einem Wasserkanal geschlossener Bauart, mit rechteckiger Meßstrecke vom Querschnitt 250 × 333 mm, durchgeführt. Wasser an Stelle von Luft als Flüssigkeit wurde für diese Versuche deshalb gewählt, weil sich in ihm die Strömung besser sichtbar machen läßt. Ferner kann man die inkompressible Flüssigkeit unbedenklich zur Fortleitung auch schwankender Drücke benutzen. Messungen stationärer Art lassen sich dagegen bequemer und genauer in Luft durchführen.

Der benutzte Wasserkanal ebenso wie das zur Aufzeichnung der rasch erfolgenden Druckschwankungen benutzte mechanisch-optische Gerät war von Dipl.-Ing. H. Drescher entwickelt worden und wird demnächst an anderer Stelle ausführlich beschrieben; wir beschränken uns daher hier darauf, in Bild 12 und 13 zwei Ansichten des Kanals und der Meßstrecke lediglich zur Orientierung zu zeigen.

Die ebene Strömung ließ sich technisch am besten an einem geraden Rechteckflügel zwischen ebenen Wänden verwirklichen. Benutzt wurde ein Ganzmetall-Modell vom Seitenverhältnis $\Lambda = 2{,}5$, mit Anbohrungen im Mittelschnitt; vgl. Bild 14[6]). Profil wieder Göttingen 409. Wassergeschwindigkeit $v \approx 1{,}5$ m/s, also $Re \approx 1{,}5 \cdot 10^5$, etwas kleiner als bei den Windkanalmessungen.

Zunächst wurden Strömungsbeobachtungen durchgeführt, wobei der Grenzschicht zu ihrer Sichtbarmachung Farbflüssigkeit (»Grün für Dunkelkammerlicht« der I. G. Farben, 1:100 in Wasser gelöst) durch die Anbohrungen des Modells zugeführt wurde. Durch stetiges Abdrosseln wurde dabei eine Eintrittsgeschwindigkeit eingestellt, bei der sicher keine Störung des jeweils zu beobachtenden Vorganges mehr eintrat. — Der Gang der kennzeichnenden Grenzschichterscheinungen über einen größeren Anstellwinkelbereich wurde photographisch festgehalten, Bild 15. Die dort sichtbare Oberseite des Flügels ist bei positivem α Saugseite. Zur Deutung der Vorgänge möge man die in Bild 11 dargestellten Druckverteilungen mit heranziehen.

Bei $\alpha = -3^0$ tritt nach Bild 15a lediglich laminare Ablösung auf; Bild 15b zeigt den keilförmigen Wirbel, der sich zwischen Flügel und abgelöste Strömung einschiebt. Die Austrittsstelle der Farbflüssigkeit ist dort durch einen Pfeil angegeben. — Die laminar abgelöste Reibungsschicht wird turbulent. Die turbulente Reibungsschicht neigt aber in weit geringerem Maße als die laminare zur Ablösung. Bei $\alpha = 1^0$ legt sich daher die beim Ablösen turbulent werdende Grenzschicht nach der Ablösestelle wieder an, Bild 15c. In Bild 15d ist dieser Abschnitt aus Bild 15c vergrößert wiedergegeben. Die nur örtliche Ablösung ist an ihrem Schatten gut zu erkennen.

Diese zunächst durch die laminare Ablösung verursachte, in Bild 15d noch klar gegliederte Umschlagstelle zieht sich mit wachsendem Anstellwinkel zusammen und wandert zur Flügelnase hin; in Bild 15e, bei $\alpha = 4{,}5^0$, ist eine laminare Ablösung nicht mehr zu erkennen. In Bild 15f, bei $\alpha = 10{,}5^0$, ist die Umschlagstelle bis fast zur Flügelvorderkante gelangt. Dort sind laminare Ablösung und turbulenter Umschlag wieder deutlich getrennt, wie Bild 15g zeigt; denn die Farbflüssigkeit strömt aus Bohrung *1* — Pfeil — am Flügel entlang entgegen der Richtung der äußeren Strömung bis zu der Stelle, wo sich diese laminar ablöst, und weiter in die Trennungsschicht zwischen Totwasser und Potentialströmung. Auch diese Ablösung ist, ebenso wie die in Bild 15d bei $\alpha = 1^0$, nur örtlich, wie die Farbflüssigkeit aus *B 3* und *B 6* in Bild 15f und g zeigt. Zwischen Flügel und Potentialströmung ist also an dieser Stelle ein Wirbel eingeschoben. Dieser Wirbel wird in Bild 15g nicht vollständig sichtbar, weil dort aus *B 1* nur sehr wenig Farbe ausgelassen ist, um die labilen Grenzschichtvorgänge nicht zu stören und den Weg der Flüssigkeitsteilchen von der Austrittsstelle an sauber zu zeigen. Bild 15h gibt die Zusammenhänge schematisch wieder. Wir werden noch sehen, daß dieser beim Maximalauftrieb an der Vorderkante des Flügels liegende »Umschlagwirbel«, wie wir ihn im folgenden nennen wollen, für die zu untersuchende Strömung entscheidende Bedeutung hat[7]).

Bild 15i und 15k zeigen Augenblickszustände der abgerissenen Strömung. Von $\alpha = 11{,}5^0$ an riß die Strömung über der ganzen Flügeltiefe ab, und zwar schien sie in einem bestimmten, kritischen α-Bereich bei festgehaltenem α stetig zwischen der anliegenden und der abgerissenen Extremform zu pendeln. Für eine nähere Betrachtung der zeitlichen Zusammenhänge wurde die Unterseite des (symmetrischen) Flügels, bei der die Anbohrungen (Bild 14) mehr im mittleren Teil der Flügeltiefe lagen, zur Saugseite gemacht. Der Augenschein ergab, daß der Abreißvorgang an der Vorderkante zu entstehen und sich in Strömungsrichtung fortzupflanzen schien. Daraus wäre aber zu schließen, daß er bei diesem Profil und dieser Reynoldsschen Zahl durch eine Aufweitung des Umschlagwirbels zustande kommt, und ohne Zusammenhang mit einem Ablösepunkt der turbulenten Grenzschicht, der unter diesen Versuchsbedingungen gar nicht bemerkbar wurde. — Ein von diesem Vorgange aufgenommener Lauffilm bestätigte diese Vermutung nicht mit der erwarteten Eindeutigkeit, weil überlagerte Schwankungen schwierig abzutrennen waren; es seien daher aus ihm in Bild 16 nur Einzelaufnahmen gezeigt, die deutlich den Unterschied zwischen »anliegendem« und »abgerissenen« Zustand, zwischen Grenzschicht- und Totwasserdicke erkennen lassen.

2. Druckaufzeichnungen.

Einen klareren Einblick in den zeitlichen Ablauf der Vorgänge im kritischen Anstellwinkelbereich gewinnt man aus den Aufzeichnungen der Drücke an dem gleichen geraden Rechteckflügel im Wasserkanal, die (gekürzt) in Bild 17 wiedergegeben und deren Extremwerte in Bild 18 ausgewertet sind. — In Bild 17 ebenso wie in den unten

[6]) Dieser Flügel war von Dipl.-Ing. H. Drescher für eigene Untersuchungen konstruiert und wurde mir von ihm freundlicherweise zur Verfügung gestellt. Ferner hat Herr Drescher im Anschluß an meine unten erwähnten Laufbildaufnahmen (Bild 16) die unten besprochenen Druckaufzeichnungen zur Vervollständigung der von ihm mit diesem Flügel schon aufgenommenen angeregt, und mir nachträglich für die in diesem Kapitel gemachten Überlegungen überlassen. Ihm sei dafür an dieser Stelle besonders gedankt. — Eine ausführliche Übersicht über die Strömungsvorgänge an diesem Flügel über den ganzen Anstellwinkelbereich folgt in einem Bericht von Drescher und Jordan.

[7]) Im Aeronautics Laboratory, Cambridge, wurde der vorn liegende Umschlagwirbel beobachtet [4], aber in seiner Natur anscheinend nicht näher erkannt; er ist a. a. O. als »local turbulence« bezeichnet.
Hier sei betont, daß abgelöste Strömung sich auch aus anderen Gründen wieder anlegen kann, nicht nur infolge turbulenten Umschlags der Grenzschicht. Bildet z. B. die Wand eine einspringende Ecke, so entsteht in dieser ein örtliches, von Wirbeln durchsetztes Totwasser. An der Stelle, wo sich hinter diesem Totwasser die Strömung etwa wieder anlegt, entsteht ein Staupunkt. Die von diesem Staupunkt ausgehende neue Grenzschicht beginnt dann laminar.

Digitized by Google

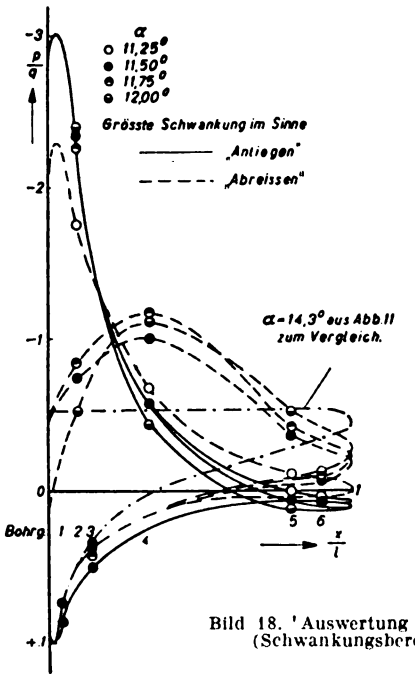


Bild 18. Auswertung zu Bild 17 (Schwankungsbereiche).

folgenden Druckschrieben sind die an den Bohrungen $B\,n$ entstehenden Drücke p_n über der Zeit als Abszisse aufgezeichnet, ferner der statische Druck p_0 in der Meßstrecke. Die Nullagen — bei stillstehendem Kanal — der einzelnen Druckschriebe sind links angegeben, ferner durch einen Pfeil Größe und Richtung des dem Staudruck q der Anströmgeschwindigkeit entsprechenden Ausschlages. Eine durchgehende Gerade dient lediglich der Auswertung. Die Zeitkoordinate ist durch zu ihr senkrechte Striche in Sekunden eingeteilt.

In Bild 17 liegen die Bohrungen *B 2*, *B 4* und *B 5* auf der Saugseite. Zu beachten ist, daß beim Abreißvorgang der Unterdruck bei *B 2* sinkt, bei *B 5* dagegen steigt, und umgekehrt (vgl. Bild 11).

Wir betrachten zunächst die Aufzeichnung für $\alpha = 11{,}25°$, Bild 17a. Bei *B 2* ist schon eine gewisse Schwankung vorhanden. Abreißen setzt aber noch nicht ein. Die Unruhe bei *B 5* entspricht der dort recht dicken (vgl. Bild 15f) turbulenten Grenzschicht. — Bei $\alpha = 11{,}5°$, Bild 17b, tritt eine verhältnismäßig langsame Pendelung zwischen der anliegenden und der abgerissenen Strömungsform auf; diese wird bei $\alpha = 11{,}75°$, Bild 17c, rascher und weniger ausgeprägt. Bei $\alpha = 12°$, Bild 17d, herrscht schon die abgerissene Strömungsform vor.

Vergleicht man Bild 18 mit Bild 11, so ist bemerkenswert, daß der anliegende Zustand bei jedem der vorliegenden Anstellwinkel zeitweise verwirklicht wird. Der zum voll abgerissenen Zustand gehörende Unterdruck — in Bild 18 strichpunktiert eingetragen — wird jeweils bei *B 5* nicht ganz erreicht, bei *B 4* dagegen überschritten. Die große Schwankung bei *B 4* erscheint merkwürdig, weil an dieser Stelle beide Strömungsformen nach Bild 18 den gleichen Druck erzeugen. Der zeitweise erhöhte Unterdruck bei *B 4* muß also während des Überganges zwischen beiden Strömungsformen entstehen — wie auch aus Bild 17 hervorgeht.

Dazu ist zu berichten, daß Farren [5] rein gedanklich, ohne sich auf direkte Beobachtungen zu stützen, die Entstehung des Abreißvorganges an der Vorderkante fordert, um die bei seinen Kraftmessungen an Flügeln mit rasch vergrößertem Anstellwinkel nach einem ersten c_a-max-Werte auftretenden überhöhten c_a-Spitzen zu erklären. In dem Augenblick nämlich, wo der etwa sich aufweitende Umschlagwirbel gerade die ganze Flügeltiefe bedecken würde, würde die äußere Potentialströmung der um einen stark gewölbten Flügel ähneln, also erhöhten Auftrieb erzeugen. Aus dieser Überlegung heraus fordert Farren, daß die ihm aus [4][7]) bekannte »local turbulence« dadurch bedingt sei, daß sich die Strömung an der Profilnase ablöst, und danach an einer Stelle x_1 wieder an den Flügel anlegt. Er nimmt dann an, daß x_1 mit wachsendem α gegen l gehe, womit seine Messungen erklärt sind. — Darauf, daß die in Bild 18 eingetragenen hohen Druckminima bei *B 4* auf eine ähnliche Erscheinung zurückzuführen sind, weist etwa ihr Auftreten im Zeitpunkt *A* bei Bild 17d, in dem der Druckanstieg bei *B 2*, also der Abreißvorgang, noch keineswegs vollendet ist. Bei näherer Auswertung, die wegen der zu geringen Zahl der Meßbohrungen nicht quantitativ durchgeführt wurde, ist festzustellen, daß in Übereinstimmung mit der von Farren gemachten Beobachtung der Auftrieb nach Einsetzen des Abreißvorganges zunächst ansteigt, daß aber anschließend die abgerissene Strömungsform bei jedem der betrachteten Anstellwinkel nahezu erreicht wird.

Benutzt man die oben für die Vorgänge bei *B 4* vorweggenommene Deutung, so scheint nach Bild 17b die Pendelung zeitlich von *B 2* auszugehen, was diese Deutung bestätigt. — Man kann auch die Anzeige von *B 4* außer acht lassen und einfach schließen, daß der Abreißvorgang, da er sich jeweils an der Hinterkante, bei *B 5*, zuletzt bemerkbar macht, nicht von einem (etwa neu auftretenden) turbulenten Ablösepunkt herrühren kann, womit seine Entstehung am Umschlagwirbel bewiesen ist.

Dieser Befund betont die wichtige Rolle der Flügelnase und jeder Störung in ihrem Bereich.

3. Folgerungen.

Von den zu Anfang dieses Kapitels gegen Bild 1 gemachten Einwänden ist damit der das plötzliche Entstehen des Abreißvorganges betreffende geklärt. Man wird anschaulich etwa so sagen: Die laminar abgelöste Grenzschicht kann nur bis zu einem bestimmten Unterdruck das Wiederanlegen hinter dem Umschlagwirbel erzwingen. Wird die — bei anliegender Strömung entstehende — Saugspitze zu hoch, so bleibt die Grenzschicht laminar abgelöst, die Strömungsform »abgerissen« — bzw. es tritt das beobachtete Pendeln ein. Dementsprechend erreicht der Unterdruck in der Saugspitze, bei Bohrung *B 2*, in Bild 18 bei allen Anstellwinkeln den gleichen Höchstwert.

Dagegen scheint das auftretende Pendeln zu zeigen, daß die an $c_a\,(\alpha_\infty)$ nach Bild 1 vorgenommene Vereinfachung nicht ganz richtig ist. Eine Strömungsform zwischen den beiden Extremen tritt zwar nicht stationär auf, aber im zeitlichen Mittel wird doch $\frac{dc\alpha}{\alpha} > 0$. — Zu dieser Aussage muß man jedoch den Vorbehalt machen, daß bei der benutzten Versuchsanordnung das ebene Problem nicht vollständig verwirklicht war. Es ist nicht ausgeschlossen, daß an dem beobachteten Pendeln zwischen beiden Extremformen Schwankungen quer zur Strömungsrichtung wesentlich beteiligt sind, da ja die Strömung an irgendeiner Stelle abhängig ist von ihrem Verhalten in der Nachbarschaft. Daß nach Bild 17 das Pendeln unregelmäßig ist, könnte darauf, etwa in Verbindung mit Störungen in der Anströmung, zurückzuführen sein. Die besprochenen Versuche sagen also nicht sicher aus, ob nicht doch in beliebig wenig gestörter, rein ebener Strömung bei jedem Anstellwinkel wenigstens eine Strömungsform stabil ist.

Trotz des eben gemachten Einwandes würde der zeitliche Verlauf der Tragflügelkräfte unter den gegebenen Versuchsbedingungen interessieren. Ihn festzustellen, reichte die Zahl der am benutzten Modell vorhandenen Bohrungen nicht aus. — Wichtig wäre ferner die genauere Kenntnis des Abreißvorganges auch bei stärker gewölbten Profilen, anderen Profilnasen, und höheren Reynoldsschen Zahlen, insbesondere dann, wenn auch turbulente Ablösung eintritt. Es ist z. B. zu erwarten, daß an dem benutzten Profil der Umschlagwirbel mit wachsender Kennzahl *Re* kleiner werden und schließlich verschwinden wird. Diese Fragen bleiben einer gesonderten Untersuchung überlassen.

Für die vorliegende Fragestellung ist, wie in Kapitel III gezeigt wurde, der genaue kritische Verlauf von $c_a\,(\alpha_\infty)$ nicht

Digitized by Google

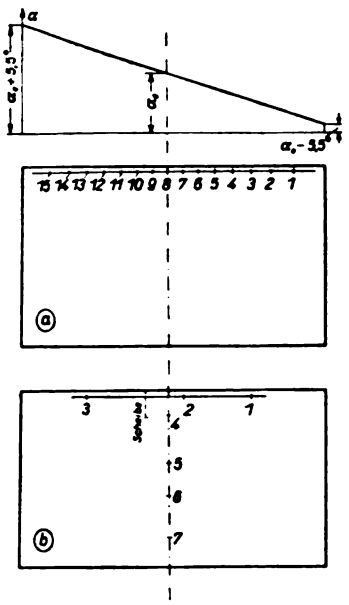


Bild 19. Verwundener Rechteckflügel (Wasserkanal). Verwindung und Anordnungen a) und b) der Bohrungen; Profil Göttingen 409; $b \times l = 250 \times 143$ mm.

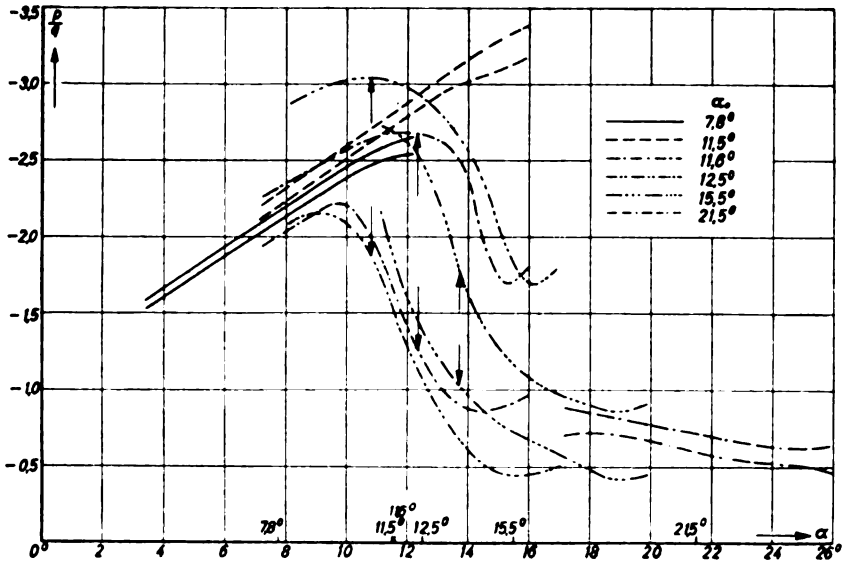


Bild 21. Auswertung zu Bild 20 (Schwankungsbereiche). Die einzelnen Kurven umfassen nur den mit Bohrungen versehenen mittleren Teil (⅘) der Spannweite!

sehr wesentlich. Für die in Kapitel V folgenden Beobachtungen am verwundenen Flügel brauchen wir dagegen als Ergebnis dieses Kapitels, daß unter den gegebenen Bedingungen beim geraden Flügel der Abreißvorgang von einem Umschlagwirbel an der Flügelvorderkante ausgeht, daß durch dessen Aufweitung erhöhte Auftriebsbeiwerte kurzzeitig auftreten, und daß, innerhalb des kritischen Anstellwinkelbereichs, beide Extremformen der Strömung zeitweilig erreicht werden, dagegen keine Zwischenform stationär auftritt.

V. Die Vorgänge am verwundenen Tragflügel.

Für die Strömungsbeobachtungen am linear verwundenen Tragflügel wurde eine ähnliche Versuchsanordnung benutzt, Bild 13. Die Verwindung wurde recht stark gewählt, $\varepsilon = 6{,}3°$, um die Vorgänge, die zu den in Kapitel III bei $\varepsilon = 4{,}5°$ vermerkten Erscheinungen — hohe Auftriebsbeiwerte, danach steiler Abfall — führten, deutlich hervortreten zu lassen. Gegenüber dem in Kapitel IV untersuchten geraden Flügel wurde zur Erleichterung der Beobachtung die Tiefe vergrößert, vgl. Bild 19. Damit wurde $A = 1{,}75$, und $Re \approx 2 \cdot 10^5$ wie bei den Versuchen im Windkanal.

1. Anbohrungen längs der Flügelnase.

Nachdem am unverwundenen Flügel — Kapitel IV — die Vorgänge in der ebenen Strömung ausreichend geklärt schienen, sollte am verwundenen Flügel nach den Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Strömungsformen in Spannweitenrichtung gefragt werden; mit anderen Worten, es sollte untersucht werden, wie die im Windkanal gemessene Auftriebsverteilung im Übergangsgebiet — Bild 8 — zustande kommt. Dazu wurde die Tatsache benutzt, daß nach Bild 11 und Bild 18 der Druck in der Saugspitze an der Flügelnase charakteristisch ist für den Strömungszustand des zugehörigen Profilschnittes. Die Anbohrungen des Modellflügels wurden daher zunächst längs der Flügelvorderkante über der Spannweite verteilt (Bild 19a).

Bei den in Bild 20 wiedergegebenen Beispielen für die mit dieser Versuchsanordnung gewonnenen Druckaufzeichnungen, über deren Deutung in Kapitel IV 2 bei Bild 17 berichtet wurde, ist zu beachten, daß sie aus je zwei Blättern zusammengesetzt sind, auf denen zur gleichen Druckänderung Ausschläge in verschiedenen Richtungen gehören. Die positive Richtung und der Maßstab ist wieder jeweils durch einen Pfeil angegeben.

Im folgenden bezeichnen wir mit α den Anstellwinkel eines beliebigen Profilschnittes, mit α_0 den Anstellwinkel des Mittelschnittes, durch den wir die einzelnen Stellungen des Modellflügels kennzeichnen. Ein gegebener Anstellwinkel α wandert bei Änderung von α_0 über die Spannweite. Trägt man die aus Bild 20 abzulesenden Drücke über α auf, so ergibt sich, im Zusammenhang gesehen, der Druckverlauf an einem feststehenden, unendlich langen Tragflügel, an dem entlang das Modell als eine Art Sonde verschoben wird.

Diese Auftragung ist in Bild 21, wieder für die Extremwerte der einzelnen Druckaufzeichnungen, durchgeführt. Die zu einer Stellung des Modellflügels, also einem α_0, gehörigen Meßpunkte sind untereinander verbunden (kleinere, durch die Meßmethode bedingte Streuungen wurden interpoliert). In den Differenzen zwischen zwei zu verschiedenen α_0 gehörigen Extremkurven zeigt sich der Einfluß der endlichen Spannweite des untersuchten Modells.

Erstaunlich ist gegenüber den oben besprochenen Messungen am geraden Flügel das große, im anliegenden Zustande erreichte α, und entsprechend die Höhe der Saugspitzen. Man muß annehmen, daß die Modellausführung besonders geglückt war (vgl. auch unten Kapitel V 2).

Bild 21 gibt schon einigen Aufschluß über die Ausgleichsvorgänge am verwundenen Flügel. Bis zu $\alpha_0 = 11{,}5°$ steigt der Unterdruck an allen Meßbohrungen stetig und fast linear mit α. Bei $\alpha_0 = 11{,}6°$ setzt der Abreißvorgang unvermittelt ein; eine Gegenüberstellung gibt Bild 20a. Es ist bemerkenswert, daß diese kritische Modellstellung bei steigendem wie bei fallendem Anstellwinkel genau die gleiche war.

Der Abreißvorgang macht sich bis weit in das Gebiet vorher anliegender Strömung hinein bemerkbar. Aus den Kurven kleinsten Unterdrucks tritt $\alpha \approx 10°$ als Grenze eines Übergangsgebietes hervor, dessen Breite ungefähr gleich der Flügeltiefe ist. Auch noch unterhalb von $\alpha = 10°$ treten Stoßeinflüsse, Schwankungen um die Mittellage auf; doch ist deren Verlauf nach Bild 20 glatt — vgl. z. B. Bild 20b, Bohrungen 1 bis 4. Man wird daher dort von zwar gestörtem aber stabilem Anliegen der Strömung sprechen. — Bei großem α tritt relative Ruhe ein.

Das Übergangsgebiet ist dadurch charakterisiert, daß in ihm weder eine der beiden Grenzformen der Strömung stabil ist, noch beide zeitweise erreicht werden, im Gegensatz zu dem oben in Kapitel IV behandelten Fall $\varepsilon = 0°$! Der Druckverlauf ist stark von seiner Nachbarschaft und den

Digitized by Google

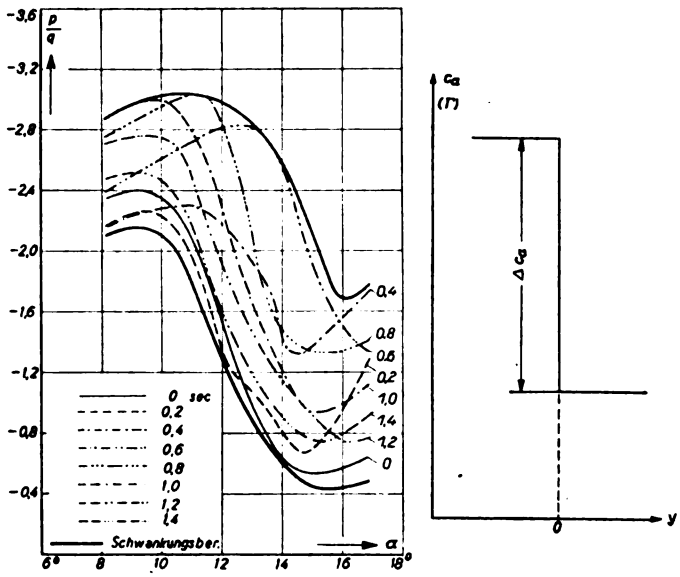


Bild 22. Anlegestoß aus Bild 20b ($\alpha_0 = 12{,}5°$). Druckverlauf über der Spannweite.

Bild 23. Vereinfachte Zirkulationverteilung zu Bild 22, Zeitpunkt 0.

dort stabilen eindeutigen Strömungszuständen beeinflußt; er ist grundsätzlich von dem bei der ebenen Strömung festgestellten verschieden. Mithin können die im Übergangsgebiet auf den Flügel wirkenden Kräfte nicht durch α_{eff} allein gegeben sein; die Grundgleichung (1) der Tragflügeltheorie ist dort also nicht ausreichend.

Diese grundsätzliche Feststellung, die die in Bild 9 gefundenen Unterschiede zwischen Theorie und Messung bestätigt, ist durch die Druckauftragung in Bild 21 eindeutig begründet.

Bild 21 gibt zwar einen Überblick über den Schwankungsbereich, sagt aber nichts aus über den zeitlichen Verlauf, der aus Bild 20 direkt zu ersehen ist. Man könnte noch den durch Planimetrieren der einzelnen Druckschriebe gewonnenen zeitlichen Mittelwert in Bild 21 eintragen. Das ist nicht geschehen, um das Bild nicht zu verwirren; man sieht auch aus Bild 20, daß er in Bild 21 näher an den Kurven kleinsten Unterdruckes verlaufen würde. Der höchste Unterdruck wird nur kurzzeitig, stoßweise erreicht — Bild 20b und Bild 20c. Wir wollen einen derartigen negativen Druckstoß im folgenden als Anlegestoß bezeichnen, da er ja durch einen Anlegevorgang in der Strömung hervorgerufen sein muß.

Ein besonders kräftiger Anlegestoß aus Bild 20b ist, von $^1/_5$ zu $^1/_5$ s ausgewertet, in Bild 22 wiedergegeben, um den Einblick in seinen zeitlichen Ablauf über der Spannweite zu erleichtern. Er entsteht im Bereich der voll abgerissenen Strömung und pflanzt sich zur anliegenden Strömung hin fort. Diese Beobachtung wird — zwar nicht hinsichtlich des genauen Ausgangspunktes, wohl aber hinsichtlich der Fortpflanzungsrichtung — von allen größeren Schwankungen bestätigt. Das überrascht zunächst; man würde Störungen im Sinne Anlegen von der anliegenden, solche im Sinne Abreißen von der abgerissenen Strömung her erwarten. Zur Erklärung schätzen wir den Ort des kleinsten effektiven Anstellwinkels außerhalb der anliegenden Strömung ab — vgl. Bild 3 — d. h. die Stelle, an der ein Anlegestoß am ehesten zu erwarten ist. Die Zirkulationsverteilung im Augenblick 0 sei dazu vereinfacht nach Bild 23 angenommen. Zu ihr gehört ein diskreter abgehender Wirbel

$$\Delta \Gamma = \tfrac{1}{2} \Delta c_a \, l \, v$$

bei $y = 0$. Dann ist

$$\alpha_{eff}(y) = \left(\alpha_0 + \varepsilon \frac{y}{l}\right) + \frac{1}{8\pi} \frac{\Delta c_a \, l}{y} \quad \ldots \quad (2)$$

Das gesuchte Minimum von α_{eff} liegt bei

$$y_1 = l \sqrt{\frac{\Delta c_a}{8 \pi \varepsilon}}.$$

$\Delta c_a \approx 0{,}3$
$\varepsilon = 0{,}11$ ergibt $y_1 \approx 0{,}33\, l$.

Der Anstoß zum örtlichen Wiederanlegen der Strömung geht nun bei dem in Bild 22 ausgewerteten besonders heftigen Anlegestoß nicht von y_1 aus, sondern von der begrenzenden Kanalwand. Die endliche Spannweite des benutzten Modellflügels macht sich dort störend bemerkbar.

Die Mehrzahl der in Bild 20 auftretenden Anlegestöße dagegen geht von der Gegend des kleinsten α_{eff} aus. Dieses $\alpha_{eff}(y_1)$ beträgt etwa 15°, ist somit doch recht groß; man muß zur Erklärung des Anlegestoßes noch eine Absaugung von der anliegenden Strömung her voraussetzen.

Während im Verlauf des eben betrachteten Anlegestoßes die Zirkulation bei y_1 wächst, steigt α_{eff} im Gebiet $0 < y < y_1$. Dennoch wandert der Anlegevorgang in Richtung fallender y! Man kann dazu vermuten, daß irgendwelche Querströmungen aus dem voll abgerissenen Gebiet durch die bei y_1 sich anlegende Strömung für kurze Zeit abgeschnitten werden, so daß ein Zustand ähnlich dem bei $\alpha_0 = 11{,}5°$ — vgl. Bild 21 — beobachteten sich am Hauptteil des Flügels einstellen möchte. Wir haben diesen Ausweg, von »Querströmungen« zu sprechen, schon mehrfach benutzt. Wir wollen uns nunmehr über deren Natur Klarheit verschaffen.

2. Anbohrungen in Tiefenrichtung.

Zur Beobachtung der Querströmungen wurden an dem gleichen verwundenen Modellflügel die alten Druckanbohrungen verschlossen, und neue gebohrt, deren Anordnung in Bild 19b wiedergegeben ist[8]). Bohrung *B 1* bis *B 3* geben den Anschluß an die vorangegangenen, oben in Kapitel V 1 behandelten Messungen; *B 4* bis *B 7* im Mittelschnitt erfassen die Vorgänge in Tiefenrichtung. Die Druckseite wurde also nicht betrachtet; der Druckgradient in Spannweitenrichtung ist auf ihr nach Bild 10 geringfügig.

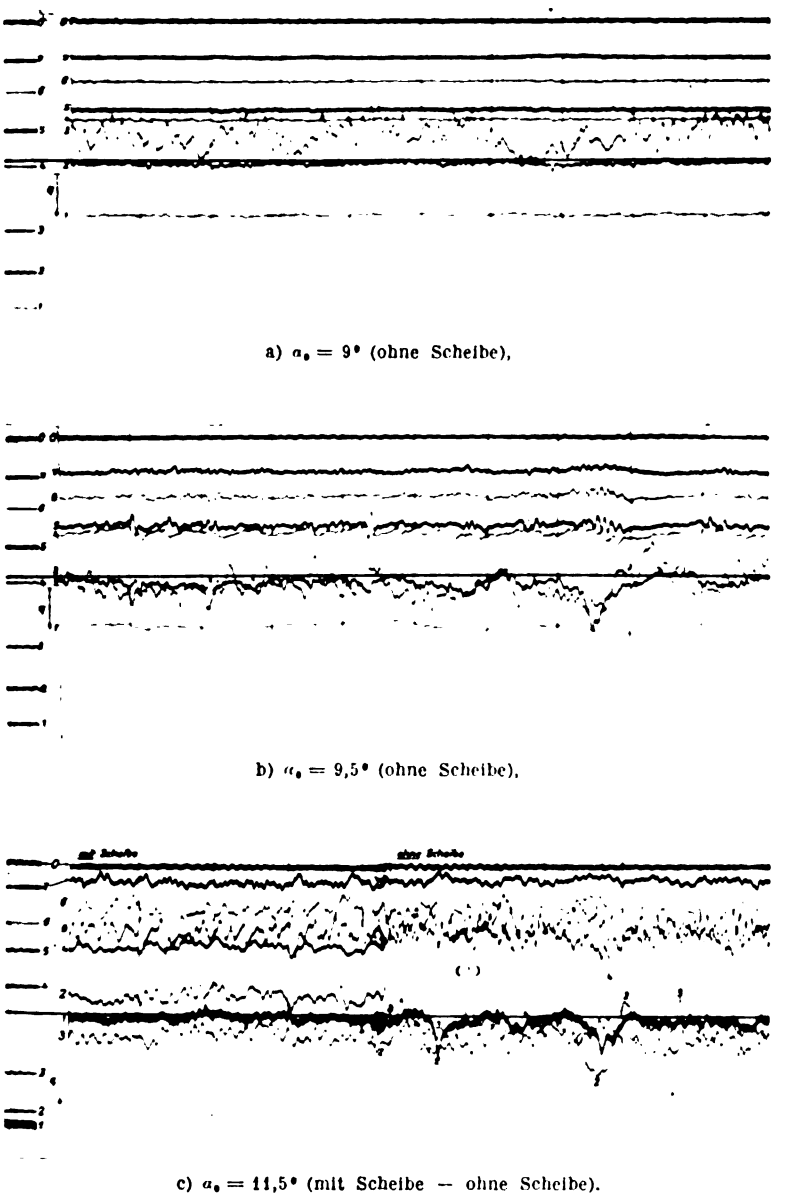
Mit dieser Anordnung wurden wieder Strömungs- (Bild 24) und Druckaufnahmen (Bild 25) gemacht. Die letzteren sind in Bild 26 ausgewertet, und zwar sind dort die Druckdifferenzen für die einzelnen Bohrungen getrennt über α_0, dem zugehörigen Anstellwinkel des Mittelschnittes, aufgetragen! Für die vorliegende Anordnung kommen nur die Kurven »ohne Scheibe« in Betracht; die Kurven »mit Scheibe« aus Bild 25 und 26 entsprechen einem unten in Kapitel V 3 behandelten Fall. Die Strömungsaufnahmen (Bild 24) zeigen die Aufsicht auf die Saugseite des verwundenen Flügels. Verwindung, Anströmrichtung und Nummern der Bohrungen sind in Bild 24a angegeben. Die Aufnahmen sind mit kurzen Belichtungszeiten — $^1/_{500}$ bis $^1/_{50}$ s — hergestellt und aus einer größeren Anzahl ausgesucht mit der Absicht, charakteristische Zustände darzustellen.

Ein Vergleich von Bild 26, *B 3*, mit Bild 21 zeigt, daß der Abreißvorgang bei dieser umgekehrten Anordnung des Flügels — Druck- und Saugseite vertauscht — nicht in der gleich schroffen Form einsetzte, ferner bei einem um $\sim 2{,}5°$ kleineren α_0. Es kam an dem Flügelende mit größerem α zu vorzeitigem, von der Nachbarströmung zunächst noch etwas aufgehaltenem Abreißen.

Bild 24a und b zeigen zunächst für die anliegende Strömung den Einfluß des Druckgefälles in Spannweitenrichtung auf die Grenzschichtströmung. Die laminare Grenzschicht wird ebenso wie die voll turbulente nur wenig gestört; dagegen wird bei kleinen Anstellwinkeln die wandnächste Flüssigkeitsschicht des Umschlagsgebietes stark abgelenkt (Bild 24a, vgl. dazu Bild 15c). Bei mittleren Anstellwinkeln ist die Umschlagstelle zum stabilen »Umschlagpunkt« geworden (Bild 24a, Bohrung *B 3*, und Bild 24b, *B 1*; vgl. dazu Bild 15e). Erst wenn mit wachsendem Anstellwinkel ein Umschlagwirbel an der Flügelnase auftritt, macht sich wieder leicht verschiebliches »Totwasser« bemerkbar; vgl.

[8]) Diese Anordnung war durch die vorhandenen Druckleitungen weitgehend vorbestimmt.

Digitized by Google



a) $\alpha_0 = 9°$ (ohne Scheibe),

b) $\alpha_0 = 9{,}5°$ (ohne Scheibe),

c) $\alpha_0 = 11{,}5°$ (mit Scheibe — ohne Scheibe).

Bild 25. Druckaufzeichnungen am verwundenen Rechteckflügel. Anordnung der Bohrungen nach Bild 19b.

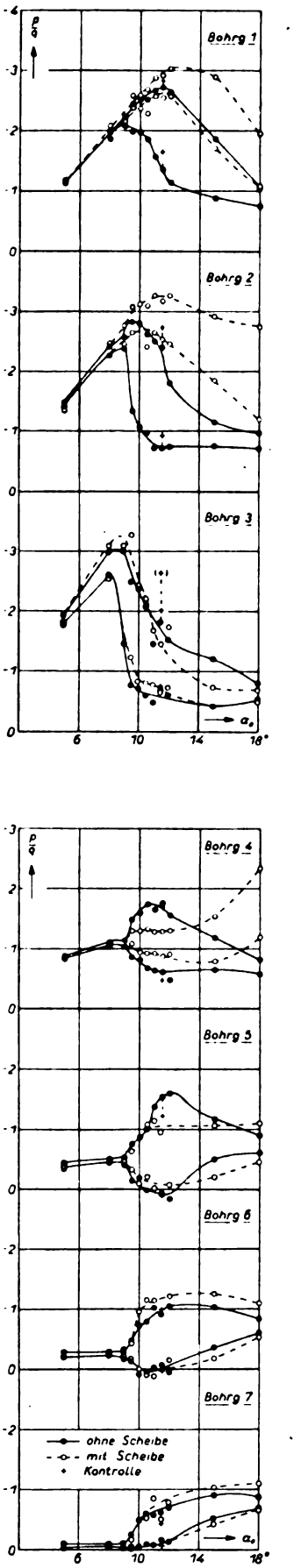


Bild 26. Auswertung zu Bild 25.

Bild 24b, *B 2* und *B 3*. Dort ist das Totwasser natürlich durch die als Quelle im Umschlagwirbel ausströmende Farbflüssigkeit etwas vergrößert. Immerhin muß es (vgl. Bild 15g) auch ungestört vorhanden sein, und durch den entlang der Flügelnase bestehenden Druckgradienten im Umschlagwirbel wie in einem Tunnel entlanggeführt werden.

Da die turbulente Grenzschicht nicht merklich beeinflußt wird, ist anzunehmen, daß die Druckunterschiede zwischen anliegender und abgerissener Strömung wesentlichen Einfluß nur im Bereich des Umschlagwirbels gewinnen können!

Bei den weiteren Aufnahmen, Bild 24c bis k, spielen schon Abreißvorgänge eine Rolle. Wir betrachten diese vergleichend nach den Bildern 24, 25 und 26.

Bei $\alpha_0 = 8°$ beginnt an *B 3* schon die Saugspitze abzusinken. Das »Umschlagstotwasser« strömt — kurzzeitig — nach rechts. Bei $\alpha_0 = 9{,}5°$ werden alle Bohrungen im Mittelschnitt gleichzeitig vom Übergangsgebiet erfaßt. Der weitere Druckverlauf mit wachsendem α ist an der Flügelnase, *B 1* bis *B 3*, dem in Bild 21 aufgetragenen vergleichbar. Die Strömungsaufnahmen zeigen im Mittelschnitt zunächst nur große Unruhe, von $\alpha_0 = 13°$ an dagegen einheitliche Ausrichtung auf die Saugspitze — Umschlagwirbel! — der noch anliegenden Strömung zu. Druckverlauf und Schwankungsweite sind entsprechend; besonders hohe

Digitized by Google

Unterdrücke treten bei *B 4* und *B 5* auf, wie auch nach den Windkanalmessungen mit $\varepsilon = 4{,}5^0$, Bild 10, zu erwarten war. Sie sind nach Bild 26 sogar noch merklich höher als die größten Unterdrücke, die an der gleichen Stelle beim geraden Flügel nach Bild 18 — bei kleinerem Anstellwinkel — beobachtet wurden, und die dort auf die durch den sich aufweitenden Umschlagwirbel erhöhte Wölbung des Flügels zurückgeführt wurden!

3. Deutung der Ergebnisse.

Mit diesen Beobachtungen wird man die vorliegenden Ergebnisse etwa so deuten: Nach Bild 9 und 21 steht fest, daß sich das Übergangsgebiet nicht der üblichen Tragflügeltheorie fügt. Es bestehen dort ausgleichende Vorgänge, die zunächst durch einen Sprung in α_{eff} bedingt sind, den die Theorie verlangt (Bild 3). Dieser theoretische Sprung in α_{eff} ist unter einfachen Voraussetzungen (Bild 2) für alle ε gleich. Dennoch bestehen bei verschiedenen Verwindungen Unterschiede in den Ausgleichsvorgängen und dem dadurch entstehenden Übergang, wie Bild 8 und 10 zeigen.

In Kapitel V 1 hatten wir gesehen, daß bei großem ε im Übergangsgebiet ein dauernder Wechsel zwischen den verschiedenen Strömungsformen stattfindet. Innerhalb der abgerissenen Strömung, im Minimum des effektiven Anstellwinkels — Bild 3 — entstehen periodisch Anlegestöße, die auf die anliegende Strömung zuwandern. Zur Entstehung dieser Anlegestöße ist eine Absaugung von der anliegenden Strömung her erforderlich; daß eine solche, und zwar in den Umschlagwirbel hinein, wirklich besteht, daß aber im übrigen Bereich der Flügeltiefe das auch dort bestehende, z. T. entgegengesetzte Druckgefälle zwischen beiden Strömungsformen nicht entscheidend wirksam werden kann, hatten wir in Kapitel V 2 — Bild 24 — gesehen. Der so im Übergangsgebiet entstehende, in Bild 26 wiedergegebene Druckverlauf über der Tiefe ähnelt dem beim ebenen Flügel — Bild 18 — im kritischen Anstellwinkelbereich beobachteten. Die bei dem letzteren kurzzeitig auftretenden, überhöhten Auftriebsbeiwerte waren auf den sich aufweitenden Umschlagwirbel, der dem Flügelprofil eine größere Wölbung verleiht, zurückgeführt worden. Es ist anzunehmen, daß die beim stark verwundenen Flügel gemessenen, entsprechend überhöhten Auftriebsbeiwerte — Bild 8, Flügel IV — eine ähnliche Ursache haben: durch den ständigen Wechsel der Strömungsformen ist der Umschlagwirbel im zeitlichen Mittel so groß, daß der Flügel eine merkliche effektive Wölbung erhält!

Der im Windkanal gemessene steile Abfall der c_n-Kurve nach dem Höchstwert bei Flügel IV in Bild 8 verlangt, daß der Anlegestoß immer an der gleichen Stelle neu entsteht.

Läßt sich so die Auftriebsverteilung des stark verwundenen Flügels deuten, so bleibt merkwürdig, daß der gleiche Mechanismus nicht auch bei kleinem ε in Erscheinung tritt. Das ist vielleicht so zu erklären: Die an der Entstehung des Anlegestoßes beteiligte Absaugung ist am stärksten in der Nähe der Abreißgrenze. Daß die Anlegestöße dennoch erst in einer gewissen Entfernung von der Abreißgrenze entstehen, setzt voraus, daß im Zwischengebiet starker Aufwind das Anlegen der Strömung verhindert; d. h. aber, daß — kurzzeitig — ein schroffer Übergang zwischen abgerissener und anliegender Strömung besteht. Betrachten wir Flügel gleicher Tiefe — Bild 9 und 10 — so liegen bei großer Verwindung die Anstellwinkel fest anliegender und die sicher abgerissener Strömung dicht beieinander; ein schroffer Übergang ist wahrscheinlich. Bei schwacher Verwindung dagegen nimmt der Übergang einen großen Bereich der Spannweite ein; verläuft er in diesem Bereich gleichmäßig, so treten keine großen induzierten Anstellwinkel auf, und der Anlaß für das Entstehen diskreter Anlegestöße entfällt.

Der Übergang mag dann so aussehen: Während die anliegende Strömung durch den Druckgradienten in Spannweitenrichtung kaum beeinflußt wird, kann das Totwasser der abgerissenen Strömung in den Umschlagwirbel eindringen, und wird dort zu turbulenter Grenzschicht »verarbeitet«, wie Bild 24 — allerdings bei großem ε — anschaulich zeigt. Dadurch wird diese Grenzschicht verdickt, die Zirkulation gehemmt.

Die eigentliche Ablösung beginnt wahrscheinlich an der Hinterkante und nimmt in Spannweitenrichtung nur allmählich zu. So entsteht ein flacher Abfall der Auftriebsbeiwerte.

Man wird diese Überlegung mit Recht heuristisch nennen. Sie war mit den gegebenen Mitteln nicht direkt nachzuprüfen, weil der Wasserkanal für den Kontrollversuch mit kleinem ε nicht ausreichte; sie hat aber den Vorteil für sich, den grundsätzlichen Unterschied zwischen den bei verschiedenen ε gemessenen Auftriebsverteilungen (Bild 8) plausibel zu machen.

Dagegen wurde ein weiterer Versuch bei großem ε durchgeführt, zur Erhärtung der Beobachtung, daß die Wechselwirkungen zwischen anliegender und abgerissener Strömung wesentlich durch den Umschlagwirbel vor sich gehen.

4. Aufgesetzte Scheibe.

Bei diesem Versuch wurde auf den oben benutzten verwundenen Modellflügel im Bereich des Umschlagwirbels zwischen Bohrung *B 2* und *B 3* eine kleine, auf dem Flügel senkrecht stehende Scheibe — Grundriß Bild 19b, Aufriß Bild 14 — in Strömungsrichtung aufgesetzt. Nach dieser Änderung wurden die Strömungs- und Druckaufnahmen wiederholt. Beim Vergleich beider Anordnungen nach Bild 26 ist zu beachten, daß die Druckaufnahmen »ohne Scheibe« vor einer Erneuerung des — für die photographischen Aufnahmen notwendigen — sorgfältig geschliffenen Farbanstriches des Flügels gemacht wurden, die »mit Scheibe« nach dieser Erneuerung. Zur Kontrolle wurde bei $\alpha_0 = 11{,}5^0$ ein Vergleich beider Anordnungen mit erneutem Anstrich durchgeführt, dessen Ergebnis in Bild 25c dargestellt ist. Die aus Bild 25c entnommenen Drücke »ohne Scheibe« sind in Bild 26 gesondert eingetragen. Sie zeigen, daß die Messungsergebnisse »ohne Scheibe« (vor der Anstricherneuerung) das Abreißen etwas — aber nicht wesentlich! — zu früh anzeigten. Interessant ist immerhin, welchen Einfluß auf den Abreißvorgang allein der Anstrich des Modells hat. — Die Strömungsaufnahmen mit Scheibe sind in Bild 27 wiedergegeben.

Bei aufgesetzter Scheibe reißt an *B 3* die Strömung bei gleichem α_0 — nach der Kontrolle sogar eher — ab, als ohne Scheibe (die Absaugung von der anliegenden Strömung her ist etwas geringer). Bei *B 2* sind die Unterschiede zwischen beiden Anordnungen sehr groß. Sie liegt gewissermaßen im »Windschatten« der Scheibe. Nicht direkt beeinflußt, und darum maßgeblich, ist *B 1*: Der Abreißvorgang kommt dort mit Scheibe rd. 3° später zur Auswirkung, und die erreichten Unterdruckspitzen sind entsprechend erheblich höher. — Im Mittelschnitt setzt der Vorgang nicht später ein, hält aber länger vor, was darauf hindeutet, daß das Übergangsgebiet von der Scheibe festgehalten wird. *B 4* in direkter Nachbarschaft der Scheibe zeigt zunächst kleinere Schwankungen, später mit hohem Unterdruck starkes Umströmen der Scheibe an.

Damit, daß diese kleine Trennscheibe die Strömungsverhältnisse bei *B 1* so stark beeinflußt, ist gezeigt, daß die sich im Umschlagwirbel längs der Flügelnase abspielenden Vorgänge entscheidend für die Wechselwirkungen zwischen anliegender und abgerissener Strömung sind. Die oben in Kapitel V 3 versuchte Deutung wird somit bestätigt.

In Bild 27, also »mit Scheibe«, treten die im Bereich der Hinterkante sich abspielenden Vorgänge, die von der Scheibe nicht behindert sind, stärker hervor. In Bild 27d ist eine augenblickliche »Abreißgrenze« sichtbar, die in Strömungsrichtung schräg auf die anliegende Strömung zu verläuft. Diese Wirkungsrichtung erscheint zunächst merkwürdig, weil ja auf der hinteren Flügelhälfte der Druck von der abgerissenen zur anliegenden Strömung hin ansteigt; vgl. Bild 10. Zu erklären ist sie, wie Bild 27d anschaulich

Digitized by Google

macht, aus der Dynamik der Stoßvorgänge im Übergangsgebiet, die sich, wie wir in Bild 22 sahen, auf die anliegende Strömung zu fortpflanzen. Das querbeschleunigte Totwasser wird dort am weitesten in die Grenzschicht der anliegenden Strömung eindringen können, wo diese am wenigsten widerstandsfähig ist, also an der Hinterkante.

Wenn man z. B. Fadensondenuntersuchungen von Abreißvorgängen beurteilt, muß man diese Dynamik mit heranziehen. Ferner ist dann zu beachten, daß das in den Umschlagwirbel eindringende Totwasser die von diesem ausgehende Grenzschicht verdickt. Dadurch wird auch ein gegebenenfalls vorhandener turbulenter Ablösepunkt nach vorne rücken, und zwar am weitesten in der Nähe des eigentlichen Übergangsgebietes. Die so entstehende Ablösegrenze erweckt den Eindruck, daß sich die abgerissene Strömung an der Hinterkante des Flügels seitlich ausbreitet.

VI. Zusammenfassung.

Theoretische Überlegungen zeigen, daß sich die Auftriebsverteilung verwundener bzw. bei Rollbewegungen eines Flugzeugs unsymmetrisch angeströmter Tragflügel auf Grund der Theorie der tragenden Linie berechnen läßt, auch dann, wenn ein Bereich mit $\frac{d c_a}{d \alpha} < 0$ auftritt. Dieser wird nämlich von der am Flügel entstehenden Verteilung des effektiven Anstellwinkels übersprungen. Doch bleibt eine Unbestimmtheit: Die Größe des Maximalauftriebes wird nur innerhalb einer gewissen Grenze festgelegt. — Ein Vergleich von gerechneten Auftriebsverteilungen mit im Windkanal an verwundenen Modellflügeln mit Endscheiben gemessenen zeigt jedoch keine befriedigende Übereinstimmung. Der Übergang vom Maximum des Auftriebs (»anliegende Strömung«) zum Minimum (»abgerissene Strömung«) nimmt das 2- bis 3fache der Flügellänge ein, die die Rechnung ergibt. Der Maximalauftrieb ist bei sehr schwacher Verwindung ($\varepsilon = 0{,}5^0$) recht hoch — allerdings ist hier die Gefahr, daß sich in der Praxis Ungenauigkeiten der Flügelherstellung bemerkbar machen, besonders groß. Bei mittlerer Verwindung ($\varepsilon = 2{,}0^0$) ist der Maximalauftrieb etwas geringer; bei starker Verwindung ($\varepsilon = 4{,}5^0$) ist er dagegen sehr hoch und übersteigt wesentlich die an geraden Flügeln gemessenen Werte; und zwar in einem Gebiet, wo die Strömung nicht mehr als anliegend bezeichnet werden kann.

Zur Klärung dieses Ergebnisses ist eine gewisse Kenntnis der zum Abreißen führenden Vorgänge nötig. In einem Wasserkanal wurden daher Strömungsbeobachtungen an einem unverwundenen Tragflügelmodell zwischen Wänden, d. h. beim »ebenen Problem«, gemacht, sowie bei einigen kritischen Anstellwinkeln die Druckverteilung über der Zeit aufgenommen. Das gewählte symmetrische Tragflügelprofil (Göttingen 409) ergibt bei der erreichten Reynoldsschen Zahl ($Re \approx 2 \cdot 10^5$) besonders durchsichtige Vorgänge, da ein turbulenter Ablösepunkt der Strömung nicht auftritt. Es zeigte sich, daß in einem kritischen Bereich die Strömung bei festgehaltenem Anstellwinkel zwischen einer anliegenden und einer abgerissenen Form pendelt. Dabei ist das eigentliche Abreißen gleichbedeutend damit, daß ein »Umschlagwirbel«, der bei den Anstellwinkeln des Maximalauftriebes entlang der Flügelvorderkante liegt, sich aufweitet. Dieser Umschlagwirbel wird vom laminaren Ablösepunkt sowie der — infolge ihres turbulenten Umschlags — anschließend sich wieder anlegenden Potentialströmung begrenzt. Der Abreißvorgang entsteht also an der Flügelvorderkante und pflanzt sich zur Hinterkante hin fort.

Aus entsprechenden Versuchen an einem verwundenen Flügel ergab sich zunächst, daß hier, anders als beim geraden Flügel, Zwischenformen der Strömung bestehen, daß die auftretenden Flügelkräfte demnach nicht durch den auftretenden effektiven Anstellwinkel, sondern durch Wechselwirkungen zwischen anliegender und abgerissener Strömung bestimmt sind. — Merkwürdig ist dabei, daß kräftige Störungen im Sinne »Anliegen« im Grenzgebiet der voll abgerissenen Strömung entstehen und sich auf die anliegende Strömung zu fortpflanzen. Deutungsversuche weisen auf einen eigentümlichen, von der Größe der Verwindung abhängigen Mechanismus hin. An diesem ist die Absaugung des Totwassers durch den hohen Unterdruck in der anliegenden Strömung beteiligt. Beobachtungen zeigen, daß diese Absaugung im wesentlichen durch den tunnelartig zwischen Flügel und stabiler Potentialströmung liegenden Umschlagwirbel vor sich geht. Eine kleine, lediglich im Bereich des Umschlagwirbels in Strömungsrichtung angebrachte Trennscheibe kann daher die Störung der anliegenden Strömung durch die abgerissene merklich abschwächen.

Die hohen Auftriebsbeiwerte bei starker Verwindung scheinen dadurch zu entstehen, daß bei dieser in einem Übergangsgebiet der Umschlagwirbel im zeitlichen Mittel so stark aufgeweitet ist — infolge des oben erwähnten eigentümlichen Mechanismus — daß er das Flügelprofil zu einem solchen vergrößerter Wölbung mit erhöhtem Auftrieb ergänzt.

Die angeführten Messungen und Beobachtungen erstrecken sich nur auf ein symmetrisches Profil und eine recht niedrige Reynoldssche Zahl, können jedoch als Anhalt dienen. Um systematische Unterlagen zu gewinnen, sind erweiterte Versuchsreihen in Angriff genommen mit dem Ziel, die im Übergangsbereich an den Ergebnissen der Tragflügelrechnung anzubringenden Korrekturen allgemein anzugeben.

Außer acht gelassen sind in diesem Bericht die zusätzlichen Kräfte, die auftreten werden, sobald die Verwindung durch Rotation des Flügels (unsymmetrische Anströmung) verwirklicht wird.

Die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. Betz. Außer ihm haben Frau Dr.-Ing. I. Flügge-Lotz und Herr Dr.-Ing. M. Kohler ihren Fortgang mannigfach gefördert.

VII. Schrifttum.

[1] Prandtl-Betz, 4 Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik.
[2] Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luft-Forschg. Bd. 15 (1938) Lfg. 4.
[3] Nagel, Vorläufige Mitteilungen der AVA, Heft 2.
[4] Aeronautics Laboratory, Cambridge, An experimental study of the stalling of wings. Rep. a. Mem. 1588.
[5] Farren, The reaction on a wing whose angle of incidence is changing rapidily. Rep. a. Mem. 1648.

Digitized by Google

Zur Berechnung der symmetrischen Längsbewegung eines Flugzeugs.

Von Karl Solf.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Die Gleichungen für die symmetrische Längsbewegung eines Flugzeugs werden in anschaulicher Weise abgeleitet und diskutiert. Frequenz und Dämpfung der langsamen Höhen- und Drehschwingung werden unter Benutzung des Diagramms von C. Runge für erzwungene Schwingungen berechnet.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Ausführung.
1. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.
2. Berechnung der Schwingungskonstanten.
3. Beispiele.
III. Zusammenfassung.

Bezeichnungen.

g	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Schwerebeschleunigung,
ϱ	$\left[\frac{kg \cdot s^2}{m^4}\right]$	Dichte der Luft,
G	[kg]	Gewicht des Flugzeugs,
I_y	[kg·m·s²]	Trägheitsmoment um die y-Achse,
F	[m²]	Flügelfläche,
l	[m]	Flügeltiefe,
F_H	[m²]	Fläche des Höhenleitwerks,
r_H	[m]	Abstand des Schwerpunktes von ¼ der Leitwerkstiefe,
v_0	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Fluggeschwindigkeit } im stationären Flugzustand,
q_0	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$	Flugstaudruck } im stationären Flugzustand,
v_H	$\left[\frac{m}{s}\right]$	mittlere Anströmgeschwindigkeit am Höhenleitwerk,
q_H	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$	mittlerer Staudruck am Höhenleitwerk,
α_0		Flügelanstellwinkel, bezogen auf Nullauftriebsrichtung, } im stationären Flugzustand,
γ_0		Winkel zwischen Flugrichtung und Horizontalebene } im stationären Flugzustand,
ϑ_0		Winkel zwischen Nullauftriebsrichtung und Horizontalebene } im stationären Flugzustand,
τ_0		Winkel zwischen Propellerachse und Flugrichtung } im stationären Flugzustand,
$\alpha, \gamma, \vartheta, \tau = \alpha$		Abweichungen vom stationären Flugzustand,
z	[m]	Abstand des Flugzeugschwerpunktes von der stationären Flugbahn[1]),
A	[kg]	Auftrieb,
W	[kg]	Widerstand,
c_a, c_w, c_a', c_w'		Auftriebs- und Widerstandsbeizahlen bzw. deren Ableitungen nach α, bezogen auf F und q,
S	[kg]	Luftschraubenschub,
$-\sigma = \frac{\partial S_0}{\partial q_0}$	[m²]	Steigung der Schubkurve für stationären Flug,
$c_w^* = c_w + \frac{\sigma}{F}$		
M	[kg · m]	Gesamtkippmoment,
M_H	[kg · m]	Anteil des Höhenleitwerksmoments an M.
$c_M = \frac{M}{F\, q_0\, l}$		Beizahl des Kippmomentes,
$c_{MH} = \frac{M_H}{F\, q_H\, l}$		Beizahl des Höhenleitwerksmomentes,
ω	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Kreisfrequenz } einer Schwingung $z = z(0)\, e^{(\lambda + i\omega)\, t}$
λ	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Dämpfungsziffer } einer Schwingung $z = z(0)\, e^{(\lambda + i\omega)\, t}$
T	[s]	Dauer einer ganzen Schwingung,
$T_{1/2}$	[s]	Halbwertszeit = Zeit bis zum Abklingen der Amplitude auf die Hälfte des Ausgangswertes.

[1]) Um Vorzeichen zu sparen, wird z nach oben positiv gerechnet.

I. Einleitung.

Bei der symmetrischen Längsbewegung eines Flugzeuges treten nach einer Störung des stationären Geradeausfluges zwei miteinander gekoppelte Höhen- und Drehschwingungen auf. Die eine davon besitzt, verglichen mit der anderen, hohe Frequenz und eine so starke Dämpfung, daß für den Bewegungsablauf nur die schwach gedämpfte Schwingung maßgebend ist.

Stellt man die Bewegungsgleichungen in der üblichen formalen Weise auf[2]), so überblickt man die für das Flugzeug charakteristischen Bewegungsverhältnisse nicht ohne weiteres. Einer Anregung von Prof. Betz folgend, wollen wir demgegenüber die Gleichungen in möglichst anschaulicher Weise ableiten und ihnen eine solche Form geben, daß die wesentlichen Eigenschaften der Flugzeugbewegung klar hervortreten.

Da man so auf zwei Gleichungen geführt wird, die erzwungene Schwingungen darstellen, kann man das Diagramm von Runge für erzwungene Schwingungen anwenden[3]). Für die praktisch wichtigen Flugzustände ergibt sich ein Verfahren, das unter Benutzung einiger Kurvenscharen die Schwingungsdauer und die Halbwertszeit der schwach gedämpften Schwingung schnell zu berechnen gestattet.

II. Ausführung.

1. Die Bewegungsgleichungen.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen wählen wir als die Größen, mit denen wir die Bewegung des Flugzeugs beschreiben, die Flughöhe z, den Anstellwinkel α, den Längsneigungswinkel der Rumpfachse gegen den Horizont ϑ, den Bahnneigungswinkel γ und die Geschwindigkeit v.

Wir fragen, welche Bewegung das Flugzeug nach einer Störung des stationären Geradeausfluges ausführt.

Dabei genügt es, die Abweichungen der genannten Größen von ihren Werten für den stationären Zustand zu kennen. Die Bewegungsgleichungen lassen sich bequemer schreiben, wenn man die Abweichungen in z, α, ϑ, γ nicht

[2]) Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik Bd. 1, 2. Aufl., S. 204ff. Durand, Aerodynamic Theory Bd. V, S. 121ff.

[3]) H. v. Sanden, Das Diagramm von Carl Runge für erzwungene Schwingungen. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930), S. 645.

Digitized by Google

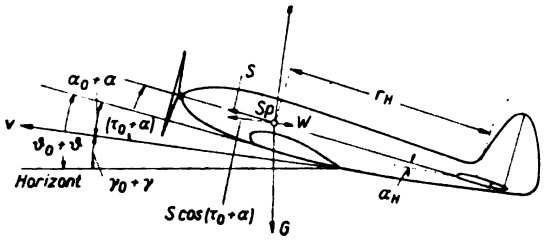


Bild 1. Bezeichnungen.

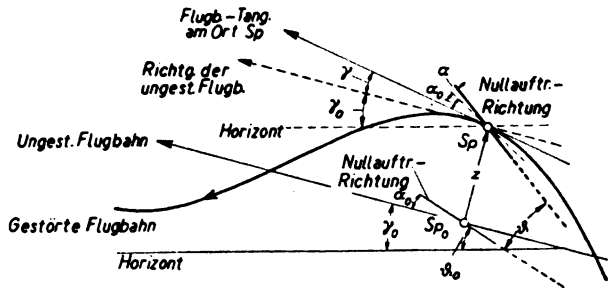


Bild 2. Längsneigungswinkel ϑ_0, Steigwinkel γ_0 und Anstellwinkel α_0 beim stationären Flugzustand und Abweichungen z, ϑ, γ, α bei der gestörten Bewegung. Sp_0 und Sp einander entsprechende Orte des Flugzeugschwerpunktes.

mit δz usw. bezeichnet, sondern mit z, α, ϑ, γ selbst. Die entsprechenden Größen für den stationären Zustand seien z_0, α_0, ϑ_0, γ_0, v_0. Dagegen soll δv die Abweichung von v_0 bedeuten (s. Bild 1). Die Beiwerte c_a, c_w usw. beziehen sich stets auf den stationären Zustand.

Um die Bewegungsgleichungen aufzustellen, gehen wir von einem sehr vereinfachten Bewegungstyp aus und erweitern die zugehörigen Gleichungen schrittweise, bis wir die verschiedenen auf das Flugzeug wirkenden Kräfte möglichst weitgehend erfaßt haben. Wir beschränken uns jedoch auf den Fall des festen Ruders und konstanter Drosselstellung. Dabei wollen wir charakteristische Eigenschaften der jeweilig sich ergebenden Flugzeugbewegung kurz hervorheben.

Zwischen den genannten Variabeln bestehen zunächst einmal für alle Flugzustände die Beziehungen

$$\vartheta = \alpha + \gamma \text{ (Bild 2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und bis auf höhere Glieder

$$v_0 \cdot \gamma = \dot{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wir nehmen zunächst an, es sei $\gamma_0 = 0$; d. h. die ungestörte Bahn verlaufe horizontal. Das bedingt, daß die Änderungen der Schwerkraftkomponente, die proportional zu γ_0 sind, wegfallen. Weiterhin lassen wir zunächst Änderungen des Anstellwinkels unberücksichtigt und setzen voraus, daß Schub und Widerstand im Gleichgewicht bleiben. Das Flugzeug bewegt sich dann wie ein Massenpunkt ohne Reibung, auf den eine dem Geschwindigkeitsquadrat proportionale Auftriebskraft wirkt. Da dann die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant bleiben muß, ist

$$\left.\begin{aligned} G \cdot z + \frac{G}{2g} \cdot \delta v^2 = 0 \\ 2g \cdot z + \delta v^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die von der Störung in v herrührende Änderung der Normalkraft ist

$$\delta A = c_a \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot F \cdot \delta v^2 = \frac{G}{v_0^2} \cdot \delta v^2$$

die der Trägkeitskraft $\frac{G}{g} \cdot \ddot{z}$ gleich sein muß. So erhält man

$$\ddot{z} = \frac{g}{v_0^2} \cdot \delta v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Setzt man (4) in (3) ein, so bekommt man

$$\ddot{z} + \frac{2g^2}{v_0^2} \cdot z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dies stellt die Gleichung einer ungedämpften Schwingung dar. Unter den gemachten Voraussetzungen würde demnach das Flugzeug eine ungedämpfte Höhenschwingung mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{g}{v_0}\sqrt{2}$ ausführen.

Als erste Erweiterung unserer Annahmen berücksichtigen wir, daß Schub und Widerstand bei einer Änderung von v nicht im Gleichgewicht bleiben. Das bedingt einen Energieverlust

$$v_0 \int_0^t \delta (W - S)\, dt$$

an die Strömung, der auf Kosten der potentiellen bzw. kinetischen Energie geht; dadurch wird die Schwingung gedämpft. Bezeichnen wir mit $-\sigma$ die Steigung der Schubkurve S_0 über q_0, so ist

$$\delta (W - S) = \left(c_w + \frac{\sigma}{F}\right) \frac{\varrho}{2} \cdot F \cdot \delta v^2 = c_w^* \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot F \cdot \delta v^2 \quad (6)$$

und wir erhalten die erweiterte Energiebeziehung

$$2gz + \delta v^2 + \frac{2g}{v_0} \frac{c_w^*}{c_a} \int_0^t \delta v^2\, dt = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Da sich an den Normalkräften nichts ändert, ergibt sich aus (4) und (7) die Gleichung

$$\ddot{z} + \frac{2g}{v_0} \frac{c_w^*}{c_a} \cdot \dot{z} + \frac{2g^2}{v_0^2} z = \ddot{z} + d_1 \dot{z} + k_1 z = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

Dies ist die Gleichung einer gedämpften, freien Schwingung mit der Dämpfung $d_1 = \frac{2g}{v_0} \frac{c_w^*}{c_a}$ und der Direktionskraft $k_1 = \frac{2g^2}{v_0^2}$. Sie ergibt die Schwingung

$$z = z(0) \cdot e^{(\lambda + i\omega)t},$$

wobei die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{k_1 - \frac{d_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{2g^2}{v_0^2} - \left(\frac{g}{v_0} \frac{c_w^*}{c_a}\right)^2}$$

und die Dämpfungsziffer

$$\lambda = -\frac{d_1}{2} = -\frac{g}{v_0} \frac{c_w^*}{c_a}$$

ist.

Lassen wir nun weiter zu, daß die ungestörte Flugbahn mit der Horizontalen den Winkel γ_0 bildet, so ändert das am Auftrieb nichts, da er senkrecht zur Bahn steht; die Gewichtskomponente der Nomalkraft $-G\cos\gamma_0$ ändert sich jedoch jetzt bei einer Schwingung um $G\sin\gamma_0 \cdot \gamma \approx G \cdot \gamma_0 \cdot \gamma$. Für die Gleichung der Normalbeschleunigungen haben wir daher jetzt an Stelle von (4)

$$\ddot{z} = \frac{g}{v_0^2} \delta v^2 + g\gamma_0 \cdot \gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Da alle Winkel, auch γ_0, nur klein sein sollen, können wir $2g \cdot z \cdot \cos\gamma_0$ durch $2g \cdot z$ ersetzen, und die Energiebeziehung (7) ändert sich nicht. Setzt man δv^2 aus (9) in (7) ein, so erhalten wir statt (8) eine Gleichung, in der zwei Glieder mit γ_0 auftreten:

$$\ddot{z} + d_1 \cdot \dot{z} + k_1 \cdot z = g\gamma_0 \cdot \gamma + \frac{2g^2}{v_0} \cdot \frac{c_w^*}{c_a} \gamma_0 \int_0^t \gamma\, dt \quad (10)$$

In dieser Form stellt die Gleichung eine von γ erzwungene Höhenschwingung dar. $d_1 = \frac{2g}{v_0} \frac{c_w^*}{c_a}$ ist wieder die Dämpfungskonstante, $k_1 = \frac{2g^2}{v_0^2}$ die Direktionskraft des schwingenden Systems. Die rechte Seite ist die erregende Kraft.

Da aber $\gamma = \frac{\dot{z}}{v_0}$ ist, können wir ihr ohne weiteres die Form einer freien Höhenschwingung geben. Wir erhalten:

$$\ddot{z} + \frac{2g}{v_0}\left(\frac{c_w^*}{c_a} - \frac{\gamma_0}{2}\right) \cdot \dot{z} + \frac{2g^2}{v_0^2}\left(1 - \gamma_0 \cdot \frac{c_w^*}{c_a}\right) \cdot z = 0 \quad (11)$$

Als Kreisfrequenz ergibt sich hierbei

Digitized by Google

$$\omega = \sqrt{\frac{2g^2}{v_0^2}\left(1-\gamma_0\frac{c_w^*}{c_a}\right)-\left[\frac{g}{v_0}\left(\frac{c_w^*}{c_a}-\frac{\gamma_0}{2}\right)\right]^2}$$

und als Dämpfungsziffer $\lambda = -\frac{g}{v_0}\left(\frac{c_w^*}{c_a}-\frac{\gamma_0}{2}\right)$.

Der Bahnwinkel γ_0 modifiziert also Dämpfung und Frequenz der Höhenschwingung, und zwar die Dämpfung relativ viel stärker als die Frequenz, da γ_0 und $\frac{c_w^*}{c_a}$ etwa von derselben Größenordnung, bei normalen Flugzuständen aber klein gegen 1 sind. Durch Gl. (11) wird die Bewegung eines Flugzeuges beschrieben, das seine Lage zur Bahn dauernd beibehält.

Unsere bisher gebrauchte Voraussetzung, daß $\alpha = 0$, d. h. der Anstellwinkel während der Schwingung konstant sein soll, bedeutet physikalisch, daß jede Änderung des Anstellwinkels ein unendlich großes, der Änderung entgegenwirkendes Moment M erzeugen müßte, d. h. $\frac{\delta M}{\delta \alpha}$ bzw. $\frac{\delta c_M}{\delta \alpha}$ müßte unendlich groß sein.

Da aber $\frac{\delta c_M}{\delta \alpha}$ durchaus endlich ist (der Wert schwankt etwa zwischen 0 und -1), ändert auch α seinen Wert. Diese Änderungen in α, d. h. Drehungen des Flugzeugs gegenüber der Flugbahn, wollen wir nun ebenfalls berücksichtigen.

In der Energiegleichung tritt, von $\delta(W-S)$ her, das Glied $c_w'\frac{\varrho}{2}F v_0^2\alpha$ auf, so daß wir an Stelle von (7) erhalten:

$$2gz+\delta v^2+\frac{2g}{v_0}\cdot\frac{c_w^*}{c_a}\int_0^t \delta v^2\,dt+2g v_0\frac{c_w'}{c_a}\int_0^t \alpha\,dt=0 \quad (12)$$

Zu den Normalkräften kommt von δA her zusätzlich $c_a'\frac{\varrho}{2}F v_0^2\alpha$, von der Schubkomponente (s. Bild 1) das Glied $\delta(S\sin\tau)=S_0\cos\tau_0\cdot\alpha$ hinzu. Um den Ausdruck $S_0\cos\tau_0\cdot\alpha$ zu vermeiden, benutzen wir eine Beziehung des stationären Fluges: $S_0\cos\tau_0 - G\sin\gamma_0 = W$ und können die Normalkräfte in der Form schreiben

$$\begin{aligned}&\delta A+G\gamma_0\cdot\gamma+(S\cos\tau_0-G\sin\gamma_0)\cdot\alpha+G\sin\gamma\cdot\alpha\\ &\approx\delta A+G\cdot\gamma_0\cdot\gamma+(W+G\gamma_0)\cdot\alpha.\end{aligned}$$

Die Gleichung der Normalbeschleunigung (9) erweitert sich also zu

$$\ddot z=\frac{g}{v_0^2}\delta v^2+g\gamma_0\cdot\gamma+g\left(\frac{c_a'+c_w}{c_a}+\gamma_0\right)\alpha \quad (13)$$

und an Stelle der Schwingungsgleichung (11) erhalten wir

$$\begin{aligned}&\ddot z+\frac{2g}{v_0}\left(\frac{c_w^*}{c_a}-\frac{\gamma_0}{2}\right)\cdot\dot z+\frac{2g^2}{v_0^2}\left(1-\frac{c_w^*}{c_a}\gamma_0\right)\cdot z\\ &=\ddot z+\left(d_1-\frac{g}{v_0}\gamma_0\right)\cdot\dot z+k_1\left(1-\frac{c_w^*}{c_a}\gamma_0\right)z=\\ &=g\left(\frac{c_a'+c_w}{c_a}+\gamma_0\right)\alpha+\\ &+\frac{2g^2}{v_0^2}\left[\frac{c_w^*}{c_a}\left(\frac{c_a'+c_w}{c_a}+\gamma_0\right)-\frac{c_w'}{c_a}\right]\int_0^t\alpha\,dt \quad (14)\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu (11), die die Gleichung der freien Höhenschwingung eines Flugzeuges ist, das seine Lage zur Bahn dauernd beibehält, stehen hier auf der rechten Seite die erregenden Kräfte, die davon herrühren, daß das Flugzeug seine Lage gegenüber der Bahn ändert.

Mit der Beziehung $\alpha=\vartheta-\gamma=\vartheta-\frac{\dot z}{v_0}$ können wir statt des Anstellwinkels α auch den Neigungswinkel ϑ des Flugzeugs gegenüber dem Horizont in die Schwingungsgleichung (14) einführen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}&\ddot z+\left[d_1+\frac{g}{v_0}\frac{c_a'+c_w}{c_a}\right]\cdot\dot z+k_1\left[1+\frac{c_w^*}{c_a}\frac{c_a'+c_w}{c_a}-\frac{c_w'}{c_a}\right]\cdot z\\ &=g\left[\frac{c_a'+c_w}{c_a}+\gamma_0\right]\vartheta+\frac{2g^2}{v_0}\left[\frac{c_w^*}{c_a}\left(\frac{c_a'+c_w}{c_a}+\gamma_0\right)-\frac{c_w'}{c_a}\right]\int_0^t\vartheta\,dt\end{aligned}$$

oder, wenn wir $\frac{c_w}{c_a}=\varepsilon$ und genügend weit von $c_{a\max}$ entfernt $c_a=c_a'\cdot\alpha_0$ setzen,

$$\begin{aligned}&\ddot z+\left[d_1+\frac{g}{\alpha_0 v_0}(1+\alpha_0\varepsilon)\right]\dot z+\\ &+k_1\left[1+\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{c_w^*}{c_a}(1+\alpha_0\varepsilon)-\frac{c_w'}{c_a'}\right)\right]\cdot z=\\ &=\ddot z+\bar d_1\dot z+\bar k_1 z=\\ &=\frac{g}{\alpha_0}[1+\alpha_0(\gamma_0+\varepsilon)]\cdot\vartheta+\\ &+\frac{k_1 v_0}{\alpha_0}\left[\frac{c_w^*}{c_a}(1+\alpha_0(\gamma_0+\varepsilon))-\frac{c_w'}{c_a'}\right]\int_0^t\vartheta\,dt. \quad (15)\end{aligned}$$

Würden wir die linke Seite dieser Gleichung gleich Null setzen, so würde das die Gleichung der freien Höhenschwingung eines Flugzeugs sein, das dauernd seine Lage zum Horizont beibehält ($\vartheta=0$!). Da bei einer solchen Bewegung während einer Schwingung große Anstellwinkeländerungen auftreten, erklären sich die großen Abweichungen in den Konstanten der Direktionskraft und vor allem der Dämpfung gegenüber Gleichung (11).

Bislang haben wir nur die auf das Flugzeug in z- und x-Richtung wirkenden Kräfte, jedoch nicht die Momente um die Querachse gebraucht. Insbesondere konnten wir die durch die Gleichungen (8) bzw. (10) und (11) beschriebenen Bewegungen als freie Höhenschwingungen darstellen, ohne die wirkenden Momente heranzuziehen. Das Flugzeug erscheint dabei als Körper mit zwei Freiheitsgraden.

Insofern also die Momente und die von ihnen herrührende Drehbewegung um die Querachse nicht explizit in den genannten Gleichungen auftreten, können wir die durch sie beschriebene Bewegung als ungekoppelte (d. h. nicht von den Momenten abhängende) Höhenschwingung ansehen.

Bei dem letzten, durch die Gleichungen (14) oder (15) dargestellten Bewegungstyp tritt ein weiterer Freiheitsgrad, die Änderung des Anstellwinkels α auf. Zur vollständigen Beschreibung der Bewegung brauchen wir mithin eine neue Beziehung zwischen α oder ϑ und z; diese wird von der Gleichung der um die Querachse wirkenden Momente geliefert. Die entstehende Bewegung wird man darum als gekoppelte Höhen- und Drehschwingungen anzusehen haben.

Daß durch die Koppelung Dämpfung und Schwingungszeit merklich geändert werden können, mag folgendes Beispiel zeigen. Man erhält aus Gleichung (11) für das Flugzeug Do 17 bei einer Fluggeschwindigkeit von 270 km/h. zu der bei Vollgas die Werte $c_a=0{,}40$, $c_w^*=0{,}066$, $\gamma_0=4{,}6^\circ$ gehören, für die Dämpfungsziffer λ die Schwingungszeit T_z und die Halbwertszeit $T_{z^1/_2}$

$$\lambda=-0{,}016 \qquad T_z=34\,\mathrm{s} \qquad T_{z^1/_2}=43\,\mathrm{s},$$

während man bei Berücksichtigung der Koppelung erhält (s. Zahlentafel 1)

$$\lambda=-0{,}019 \qquad T_z=82\,\mathrm{s} \qquad T_{z^1/_2}=36\,\mathrm{s}.$$

Wir wollen versuchen, auch die Gleichung (15) so umzuformen, daß sie eine freie Höhenschwingung darstellt, also die Form hat:

$$\ddot z+D\cdot\dot z+K\cdot z=0,$$

weil man vermuten kann, daß dann die Berechnung der Schwingungsfrequenz und -dämpfung ziemlich einfach wird.

Wir müssen zunächst die Gleichung der Momente um die Querachse aufstellen. Auch hier betrachten wir nur die Abweichungen der Momente vom stationären Zustand. Wenn wir das Trägheitsmoment um die Querachse mit J_y bezeichnen, lautet die Momentengleichung

Digitized by Google

$$J_y \ddot{\vartheta} = + \delta M \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Das ausgeübte Moment rührt vom Flügel (mit Rumpf), dem Leitwerk und der Schraube her. Das Moment des Flügels hängt praktisch nur vom Anstellwinkel ab. Das Moment der Schraube hängt bei konstanter Stellung der Gasdrossel außer vom Anstellwinkel noch vom Fortschrittsgrad ab. Da dieser Einfluß jedoch für normale Flugzustände ziemlich klein ist, wollen wir hier ganz davon absehen. Der Momentenanteil des Leitwerks hängt außer vom Anstellwinkel insbesondere von der Drehgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ ab (Leitwerksdämpfung). Darum teilen wir δM nach α und $\dot{\vartheta}$ auf

$$J_y \ddot{\vartheta} = + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \cdot \alpha + \frac{\partial M}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta} \quad \ldots\ldots (17)$$

Diese Gleichung wird besonders anschaulich, wenn wir $\dot{z}$ statt α einführen. Dazu benutzen wir wieder die Beziehung

$$\alpha = \vartheta - \gamma = \vartheta - \frac{\dot{z}}{v_0}.$$

Die Ableitung des Momentes nach $\dot{\vartheta}$ können wir auf die Ableitung nach α_H zurückführen. Dreht sich nämlich das Flugzeug mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ um die Querachse, so induziert diese Drehung einen Anstellwinkel des Leitwerks $\alpha_H = \frac{\dot{\vartheta} r_H}{v_H}$, wo r_H der Abstand Schwerpunkt-Leitwerk und v_H die Anströmgeschwindigkeit am Leitwerk ist; also ist $\frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{r_H}{v_H} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_H}$. Machen wir die Momente mit der Flügelfläche und -tiefe dimensionslos und bedenken, daß $\frac{\partial c_M}{\partial \alpha_H} = \frac{\partial c_{M_H}}{\partial \alpha_H}$ ist (c_{M_H} = Momentenbeiwert des Leitwerks), so nimmt Gleichung (17) die Form an:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{\partial c_{M_H}}{\partial \alpha_H} \cdot \frac{F \cdot l \cdot r_H}{J_y} \cdot \frac{q_H}{v_H} \dot{\vartheta} - \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \cdot \frac{F \cdot q \cdot l}{J_y} \vartheta = - \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \cdot \frac{F \cdot q \cdot l}{J_y} \cdot \frac{\dot{z}}{v_0}$$

oder mit Abkürzungen

$$\ddot{\vartheta} + d_2 \dot{\vartheta} + k_2 \vartheta = \frac{k_2}{v_0} \dot{z} \quad \ldots\ldots (18)$$

(d_2 und k_2 sind stets positiv!).

Setzt man die linke Seite dieser Gleichung gleich Null, so stellt sie die Gleichung einer freien Drehschwingung dar. Es ist die obenerwähnte Drehschwingung ohne Berücksichtigung der Koppelung. Sie besitzt große Dämpfung und normalerweise hohe Frequenz gegenüber der freien Höhenschwingung, bei der der Anstellwinkel konstant bleibt. Für das Seite 22 genannte Beispiel erhält man für die Schwingungsdauer, Dämpfungsziffer und Halbwertszeit:

$$T_{\vartheta} = 2{,}7\,\text{s} \qquad \lambda_{\vartheta} = -2{,}4\,\text{s} \qquad T_{\vartheta^1/_2} = 0{,}29\,\text{s}.$$

(Immerhin ist ihre Frequenz in erster Linie abhängig vom $\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}$, und bei Flugzeugen, die statisch nahezu ausgeglichen sind $\left(\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}\right.$ sehr klein$\left.\right)$, kann die freie Drehschwingung sogar aperiodisch gedämpft sein.) Die wirkliche Bewegung besteht, wie die Gleichungen (15) und (18) zeigen, in zwei miteinander gekoppelten Schwingungen in z und ϑ, von denen die eine durch die Höhenschwingung, die andere durch die Drehschwingung erzwungen wird.

Infolge der großen Dämpfung ist die letztere im Bewegungsablauf kaum beobachtbar. Es resultiert letztlich nur eine Schwingung in z und ϑ, deren Frequenz ω und Dämpfungsziffer λ in der Größenordnung durch k_1 und d_1 bestimmt sein werden, jedoch durch die Koppelung modifiziert sind. Diese Schwingung ist darum für die Beurteilung der Längsbewegung eines Flugzeuges, insbesondere für die dynamische Längsstabilität ($\lambda < 0$) in erster Linie maßgebend.

2. Berechnung der Schwingungskonstanten.

Zur Berechnung von λ und ω kann man in üblicher Weise die Gleichungen (15) und (18) mit den Ansätzen $z = A e^{\varrho t}$, $\vartheta = B e^{\varrho t}$ integrieren und die charakteristische Gleichung 4. Grades in ϱ auflösen.

Wir wollen hier einen anderen Weg gehen. Ähnlich wie wir die Gleichung (10), die auch eine erzwungene Höhenschwingung darstellt, in die Gleichung einer freien Höhenschwingung (11) umformten, wollen wir, wie oben schon bemerkt, die Gleichungen (15) und (18) zu einer einzigen Gleichung einer freien Schwingung zusammenfassen.

Zu dem Zweck müssen wir etwa aus Gleichung (18) ϑ als Funktion von z darstellen und in Gleichung (15) einsetzen.

Da jede der beiden Gleichungen für sich erzwungene Schwingungen darstellen, liegt es nahe, das Diagramm von C. Runge für erzwungene Schwingungen zu benutzen, das es ermöglicht, zu einer nach Amplitude, Frequenz und Dämpfung gegebenen erregenden Schwingung die Amplitude und den Phasenwinkel der erzwungenen Schwingung leicht anzugeben.

Zunächst werde das Runge-Diagramm[4]) kurz erläutert. Eine erzwungene Schwingung sei durch die Gleichung dargestellt:

$$\ddot{\vartheta} + d \dot{\vartheta} + k \vartheta = a_0 e^{(\lambda + i\omega) t}.$$

Nimmt man als lösenden Ansatz

$$\vartheta = p e^{(\lambda + i\omega) t},$$

so erhält man zur Bestimmung von p

$$p = \frac{a_0}{(\lambda + i\omega)^2 + d(\lambda + i\omega) + k} = \frac{a_0}{N}$$

und

$$N = \lambda^2 - \omega^2 + d \cdot \lambda + k + (2\lambda + d)\,\omega\, i = |N| e^{i\varphi},$$

dabei ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(2\lambda + d)}{\lambda^2 - \omega^2 + d \cdot \lambda + k}.$$

N ist ein Vektor. Sein Betrag $|N|$ gibt das Verhältnis der Amplituden der erregenden und der erzwungenen Schwingung an, φ ist die Phasenverschiebung zwischen den Schwingungen. Statt mit N wollen wir mit dem mit $k = \omega_0^2$ (ω_0 = Frequenz der ungedämpften Eigenschwingung) dimensionslos gemachten Vektor N' rechnen.

Es ist

$$N' = \frac{N}{\omega_0^2} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{\lambda(\lambda + d)}{\omega_0^2} + \frac{2\lambda + d}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot i = x + iy.$$

Der Anfangspunkt dieses Vektors liegt in $x = 0$, $y = 0$, sein Endpunkt beschreibt für festes λ als Funktion von $\frac{\omega}{\omega_0}$ eine Parabel:

$$x = 1 + \frac{\lambda(\lambda + d)}{\omega_0^2} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad y = \frac{2\lambda + d}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \quad \ldots (19)$$

Wir nennen sie »Runge-Parabel« (Bild 3)[5]).

Die Richtung von N' schließt mit der positiven x-Richtung wieder den Winkel φ ein. Hat die erregende Schwingung die Form

$$a = a_0 e^{(\lambda + i\omega) t},$$

so hat die erzwungene Schwingung die Form

$$\vartheta = \frac{a_0}{|N'| \cdot \omega_0^2} e^{(\lambda + i\omega) t - i\varphi}, \quad \ldots\ldots (20)$$

wo der Winkel φ direkt die Phasenverschiebung der erzwungenen gegenüber der erregenden Schwingung angibt. Daß wir N' an Stelle von N betrachten, hat den Vorteil, daß das

[4]) Das ursprüngliche, von C. Runge angegebene Diagramm (siehe Fußnote auf S. 198) bezog sich nur auf den Fall $\lambda = 0$ und war nicht wie im folgenden mit ω_0^2 dimensionslos gemacht. Der Einfachheit halber wollen wir auch diese Erweiterung mit Runge-Diagramm bezeichnen.

[5]) In Bild 3 und 5 ist der Vektor mit seinem Betrage N^* bezeichnet, da in den späteren Formeln stets N^* benutzt wird.

Digitized by Google

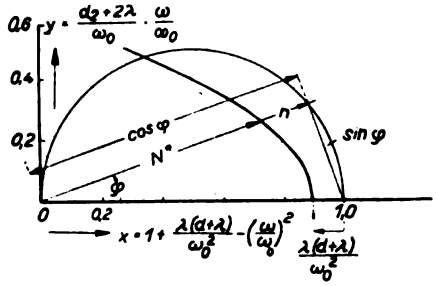


Bild 3. Zur Erläuterung des Rungediagrammes und der Bezeichnungen N^*, φ, n.

Diagramm einfacher wird. Wie nämlich weiter unten bemerkt wird, braucht man nur die Parabel mit $\lambda = 0$. Für diesen Fall stellt Gleichung (19) eine einparametrige Kurvenschar mit dem Parameter $\frac{d}{\omega_0} = \frac{d}{\sqrt{k}}$ dar, Bild 4.

Wir wenden nun diesen Gedankengang auf unsere vorliegenden Gleichungen (15) und (18) an.

Wir haben etwa eine Schwingung $\dot{z} = \dot{z}(0)\, e^{(\lambda_1 + \omega_1 i)\, t}$ anzunehmen und aus dem zur Schwingungsgleichung (18) gehörenden Diagramm (»ϑ-Diagramm«) $|N'|$ und φ zu bestimmen, womit man

$$\vartheta = \frac{k^2}{v_0\, |N'|}\, e^{(\lambda_1 + i\,\omega_1)\, t - i\,\varphi}$$

erhält. Setzt man diesen Ausdruck in (15) ein, und drückt ϑ durch z, $\dot{z}$, λ_1 und ω_1 aus, so erhält man eine Gleichung

$$\ddot{z} + D \cdot \dot{z} + K \cdot z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

in z allein. Aus ihr kann man zwei Werte

$$\lambda_2 = -\frac{D}{2} \qquad \omega_2 = \sqrt{K - \frac{D^2}{4}}$$

berechnen und damit die angenommenen Werte durch Interpolation verbessern, bis die angenommenen mit den auf diese Weise errechneten übereinstimmen, womit man offenbar die richtigen Werte gefunden hat.

Diese Interpolation nach zwei Variabeln würde aber zeitraubend sein, besonders weil man zu jedem Wert von λ eine neue Runge-Parabel zeichnen müßte.

Jedoch ist bei der uns interessierenden schwach gedämpften Schwingung einerseits λ^2 gegen ω^2 zu vernachlässigen, so daß man mit der Gleichung

$$\omega_2 = \sqrt{k}$$

rechnen kann. Andererseits liegen für die fraglichen kleinen Werte von λ die zugehörigen Runge-Parabeln sehr dicht bei der Parabel für $\lambda = 0$. Zur Bestimmung von ω genügt es darum, $|N'|$ und φ aus der Parabel für $\lambda = 0$ zu entnehmen (siehe spätere Ausführung der Rechnung). Das heißt, man kommt mit einer einfachen Interpolation nach ω aus.

Mit dem richtigen Wert von ω kann man dann λ ebenfalls leicht erhalten, wie unten gezeigt wird.

Es ist grundsätzlich gleichgültig, ob man zur Berechnung von ω das ϑ-Diagramm oder das Diagramm der erzwungenen z-Schwingung (»z-Diagramm«) nach Gleichung (15) benutzt. Es zeigt sich aber, daß die Benutzung des z-Diagrammes unzweckmäßig ist, weil man nicht mit den Parabeln $\lambda = 0$ auskommt. Denn der Wert von $\frac{\lambda(\lambda + d)}{\omega_0^2}$ der nach Gleichung (19), s. auch Bild 3, die Verschiebung der Parabel $\lambda \neq 0$ gegenüber der Parabal $\lambda = 0$ angibt, wird schon für kleine Werte von λ ziemlich groß, da $\frac{d}{\omega_0^2}$ das nach Gleichung (15) gleich $\frac{\bar{d}_1}{\bar{k}_1}$ ist, recht große Werte annimmt (etwa 10 und mehr), während die entsprechende Größe $\frac{d_2}{k_2}$ aus Gleichung (18) beim ϑ-Diagramm, wenn $\frac{\partial\, c_M}{\partial\, \alpha}$ nicht zu klein ist, von der Größenordnung 1 ist.

Bei großem Abstand der Parabeln erhält man aber den Phasenwinkel φ und damit auch ω aus der Parabel $\lambda = 0$ nicht mehr genau genug. Bei einer zweiten Näherung, vom errechneten λ ausgehend, auf die wir später noch zu

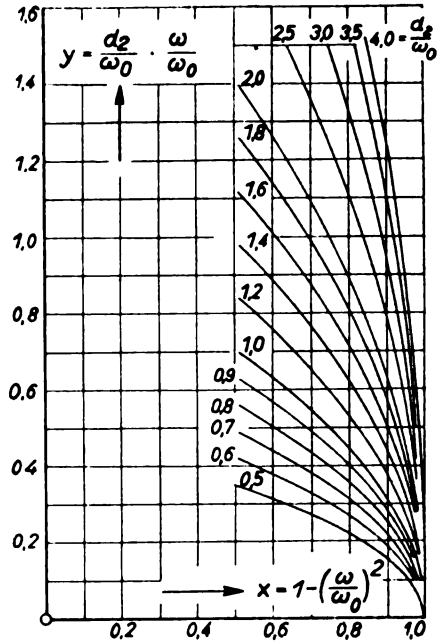


Bild 4. Das Rungediagramm für verschiedene Werte von $\frac{d_2}{\omega_0}$.

sprechen kommen, würde in diesem Falle der Rechenaufwand zur Berechnung von ω zu groß sein. Aus diesen Gründen werden wir nur Gleichung (18), d. h. das ϑ-Diagramm benutzen.

Den oben skizzierten Gedankengang führen wir nun rechnerisch durch. Wir nehmen als z-Schwingung an

$$z = z(0)\, e^{(\lambda + i\,\omega)\, t}.$$

Die erregende Schwingung ist nach Gleichung (18)

$$\frac{k_2}{v_0} \cdot \dot{z} = \frac{k_2}{v_0} \cdot z(0)\ (\lambda + i\,\omega)\, e^{(\lambda + i\,\omega)\, t}.$$

Nach dem Runge-Diagramm erhält man für ϑ

$$\vartheta = \frac{k_2}{v_0} \cdot \frac{1}{N} \cdot \dot{z} = \frac{1}{v_0\, N^*}\, \dot{z}\, e^{-i\varphi},$$

wobei $\frac{|N|}{k_2} = \frac{|N|}{\omega_0^2} = N^*$ gesetzt ist. Diesen Wert setzen wir in (15) ein und erhalten für die rechte Seite

$$\frac{g}{\alpha_0\, v_0}\,(1 + \alpha_0\,(\gamma_0 + \varepsilon))\, \frac{\dot{z}}{N^*}\, e^{-i\varphi} + \\ + \frac{2\,g^2}{\alpha_0\, v_0^2}\left[\frac{c_w^*}{c_a}\,(1 + \alpha_0\,(\gamma_0 + \varepsilon)) - \frac{c_w'}{c_a'}\right] z\, e^{-i\varphi} = \\ = a \cdot \frac{\dot{z}}{N^*}\, e^{-i\varphi} + b \cdot z\, e^{-i\varphi}.$$

Um in die Rechnung die Größen λ und ω selbst einzuführen, nehmen wir die Realteile $R\,(z e^{-i\varphi})$ und $R\,(\dot{z} e^{-i\varphi})$ der entsprechenden komplexen Schwingungen. Es ist

$$R\,(z\, e^{-i\varphi}) = \left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{\omega}\sin\varphi\right) z - \frac{\sin\varphi}{\omega} \cdot \dot{z}$$

$$R\,(\dot{z}\, e^{-i\varphi}) = \left(\cos\varphi - \frac{\lambda}{\omega}\sin\varphi\right)\dot{z} + (\lambda^2 + \omega^2)\,\frac{\sin\varphi}{\omega} \cdot z.$$

Damit erhalten wir für die rechte Seite von (15)

$$\left\{a\left(\frac{\cos\varphi}{N^*} - \frac{\sin\varphi}{N^*} \cdot \frac{\lambda}{\omega}\right) - b\,\frac{\sin\varphi}{N^*\,\omega}\right\}\dot{z} + \\ + \left\{a\,(\lambda^2 + \omega^2)\,\frac{\sin\varphi}{N^*\,\omega} + b\left(\frac{\cos\varphi}{N^*} + \frac{\sin\varphi}{N^*}\,\frac{\lambda}{\omega}\right)\right\} \cdot z.$$

Setzen wir noch $N^* - \cos\varphi = n$, s. Bild 3, so erhalten wir nach Zusammenfassung entsprechender Glieder

$$\ddot{z} + \left\{\frac{2\,g}{v_0}\left(\frac{c_w^*}{c_a} - \frac{\gamma_0}{2}\right) + a\left(\frac{n}{N^*} + \frac{\sin\varphi}{N^*} \cdot \frac{\lambda}{\omega}\right) + b\,\frac{\sin\varphi}{N^*\,\omega}\right\}\dot{z} \\ + \left\{\frac{2\,g^2}{v_0^2}\left(1 - \frac{c_w^*}{c_a}\,\gamma_0\right) - a\,(\lambda^2 + \omega^2)\,\frac{\sin\varphi}{N^*\,\omega} \right. \\ \left. + b\left(\frac{n}{N^*} - \frac{\sin\varphi}{N^*}\,\frac{\lambda}{\omega}\right)\right\} z = \ddot{z} + D\,\dot{z} + K\,z = 0 \quad (22)$$

Digitized by Google

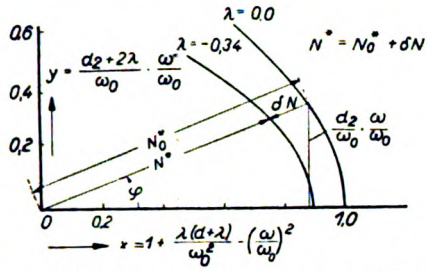


Bild 5. Zur Erläuterung der Bezeichnungen N_0^*, N^*, δN.

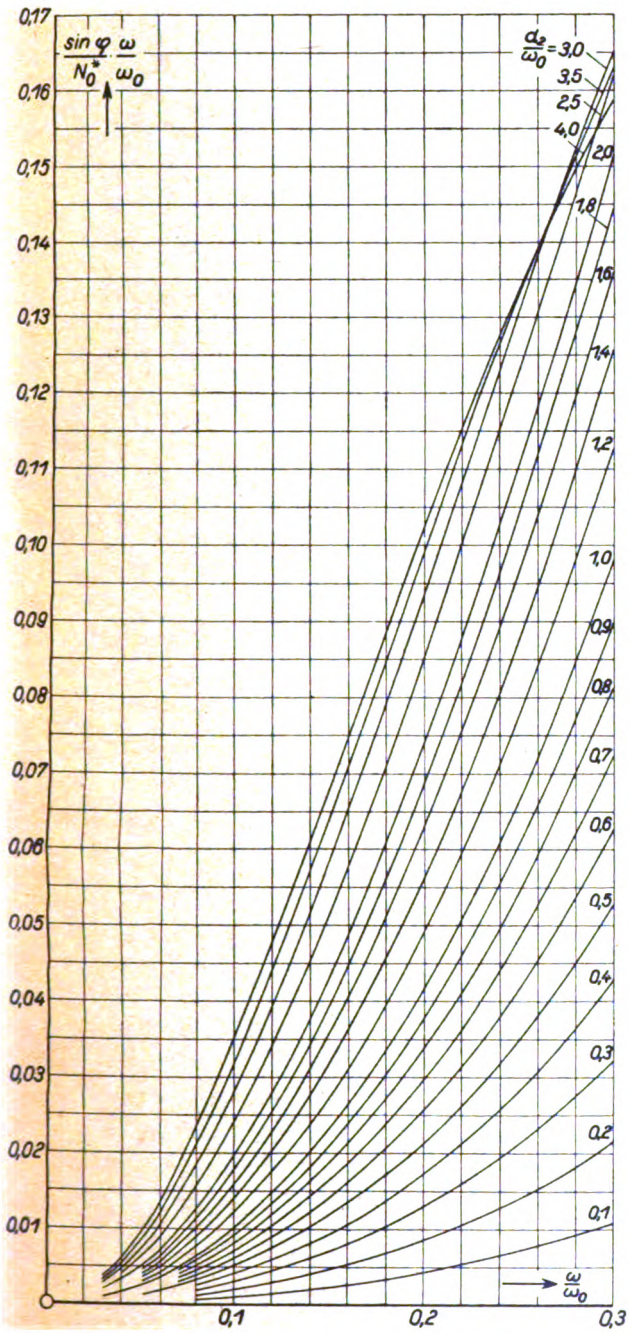


Bild 6. Diagramm zur Bestimmung von $\frac{\sin\varphi}{N_0^*} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$.

Damit haben wir die Größen D und K in Gleichung (21) bestimmt. Außer den Konstanten der stationären Bewegung stehen in Gleichung (22) nur λ und ω und solche Größen, die aus dem Runge-Diagramm ablesbar bzw. berechenbar sind, nämlich N^*, $\sin\varphi$ und n, Bild 3. Die beiden letzteren erhält man sofort, wenn man zu der Runge-Parabel noch den Halbkreis über die Strecke 0;0...1;0 beschreibt. n ist das Stück von N^*, das von Halbkreis und Parabel begrenzt

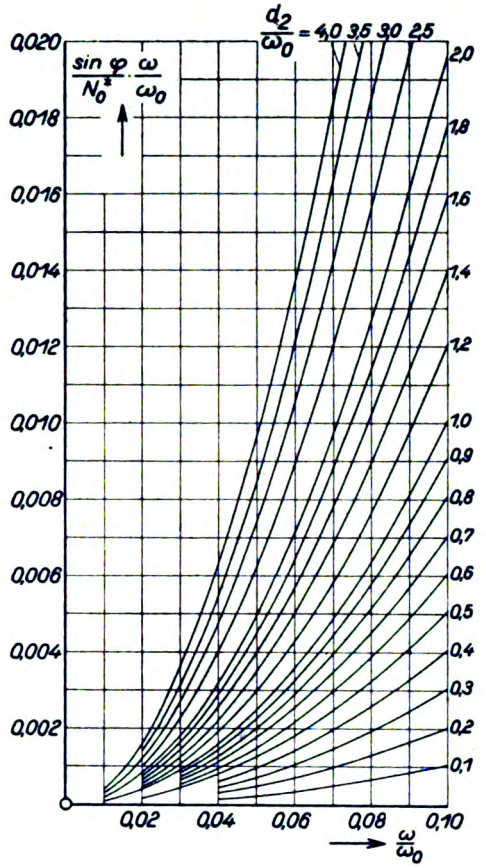


Bild 7. Diagramm zur Bestimmung von $\frac{\sin\varphi}{N_0^*} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$. (Ausschnitt aus Bild 6 in größerem Maßstab.)

wird; $\sin\varphi$ die Strecke vom Punkte 1;0 zum Schnittpunkt des Halbkreises mit N^*.

Es handelt sich nun darum, die Ausdrücke für K und D so zu vereinfachen, daß sie zur zahlenmäßigen Berechnung von ω und λ brauchbar werden.

Wie oben bemerkt, braucht man bei der langsamen Schwingung nur die Parabeln $\lambda = 0$. Den durch diese gegebenen Wert von N^* wollen wir mit N_0^* bezeichnen, Bild 5. Da $\frac{\sin\varphi}{N_0^*} \cdot \omega$ und $\frac{n}{N_0^*}$ von gleicher Größenordnung, b aber klein gegen a ist, kann man ohne merklichen Fehler $b\frac{n}{N_0^*}$ zur Berechnung von ω vernachlässigen; auch $\frac{c_w^*}{c_a}\gamma_0$ darf gegen 1 vernachlässigt werden.

Zur Bestimmung von ω hat man dann die Gleichung

$$\omega = \sqrt{\frac{2g^2}{v_0^2} - a\frac{\sin\varphi}{N_0^*} \cdot \omega}.$$

Wie bei den Runge-Parabeln rechnen wir zur Vereinfachung statt mit ω mit $\frac{\omega}{\omega_0}$, da wir dann die Werte $\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\frac{\omega}{\omega_0}$ ebenfalls aus einer einparametrigen Kurvenschar mit dem Parameter $\frac{d_2}{\omega_0}$ entnehmen können, Bild 6 und 7.

Wir benutzen also die Gleichung:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2g^2}{v_0^2} - a\cdot\omega_0\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{k_1 - a^*\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \ldots\ldots (23)$$

wo $a\cdot\omega_0 = a^*$ gesetzt ist.

Man braucht die Werte des Parameters $\frac{d_2}{\omega_0}$ nicht einmal sehr dicht zu nehmen, um eine ausreichende Genauigkeit zu erzielen.

Hat man auf die angegebene Weise ω bestimmt, so kann man auch λ aus der Gleichung

$$D = -2\lambda$$

Digitized by Google

berechnen. Zu diesem Zweck wollen wir den Ausdruck für D aus Gleichung (22) nach λ entwickeln. Dabei beachten wir zweierlei: erstens ist $\frac{\omega}{\omega_0}$, wie oben bemerkt, in erster Näherung unabhängig von λ; zweitens können wir außer $\frac{\omega}{\omega_0}$ auch $\varphi = \text{konst.}$ setzen ($\varphi = \text{konst.}$ bedeutet an $\frac{\omega}{\omega_0}$ nur einen relativen Fehler der Größenordnung λ). Wir brauchen also nur die Änderung von N mit λ zu berücksichtigen und setzen $N^* = N_0^* + \delta N = N_0^* + \varkappa\lambda$, wo $\varkappa$ noch zu bestimmen bleibt, s. Bild 5. Für $\lambda = 0$ erhält man nach Gleichung (22) für D den Wert

$$D_0 = d_1 + a\frac{n}{N_0^*} + b\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Wenn wir D nach λ entwickeln, ergibt sich mithin

$$-2\lambda D = D_0 + \frac{a\cos\varphi}{N_0^*}\cdot\frac{\delta N}{N_0^*} - b\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\cdot\frac{\delta N}{N_0^*} + a\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\lambda\left(1-\frac{\delta N}{N_0^*}\right).$$

Setzt man $\delta N = \varkappa\lambda$ ein, so ist, da $\frac{\lambda\delta N}{N_0^*}$ von 2. Ordnung ist,

$$-2\lambda = D_0 + \lambda\left[a\left(\frac{\cos\varphi}{N_0^*}\cdot\frac{\varkappa}{N_0^*} + \frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\right) - b\frac{\varkappa}{N_0^*}\cdot\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\right]$$

oder

$$\lambda = -\frac{D_0}{2 + \frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\left(a - b\frac{\varkappa}{N_0^*}\right) + a\frac{\varkappa}{N_0^*}\cdot\frac{\cos\varphi}{N_0^*}} \quad (25)$$

Nun berechnen wir zunächst $\varkappa$. Aus Bild 5 erhält man für δN:

$$\delta N = \lambda\sqrt{\left(\frac{d_2+\lambda}{k_2}\right)^2 + \frac{4}{k_2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

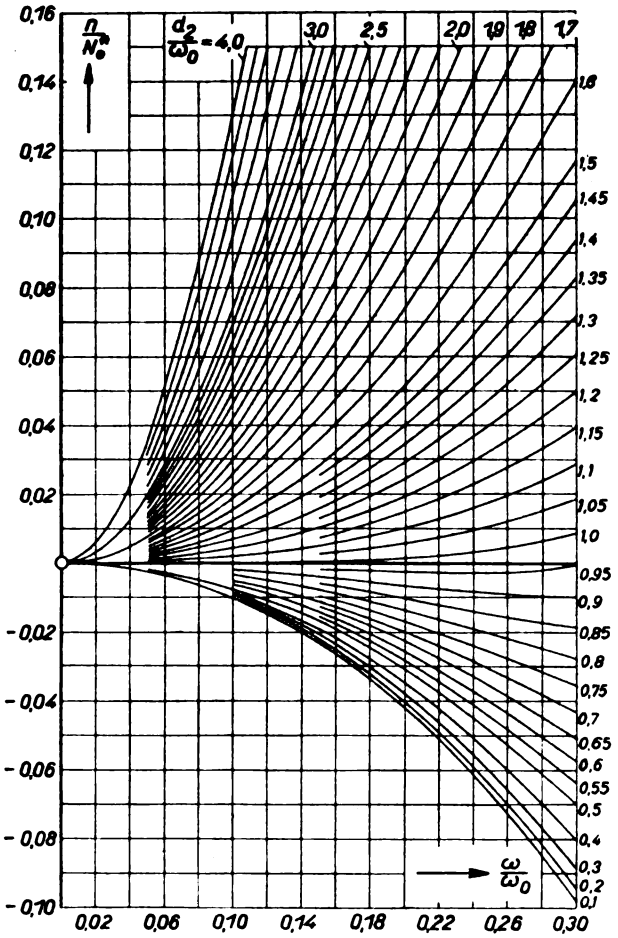


Bild 8. Diagramm zur Bestimmung von $\frac{n}{N_0^*}$.

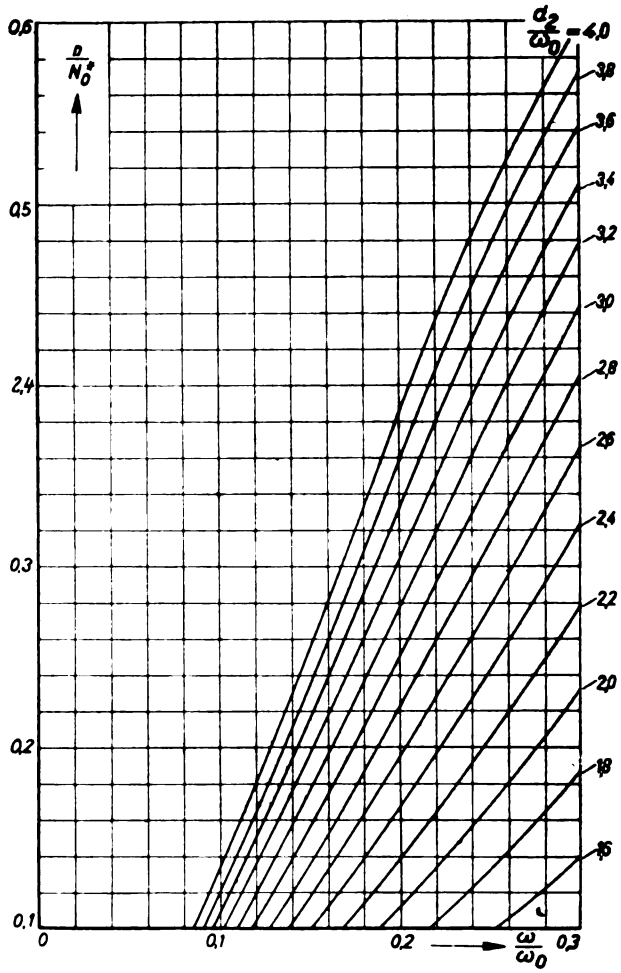


Bild 9. Diagramm zur Bestimmung von $\frac{n}{N_0^*}$.
(Ergänzung zu Bild 8 in kleinerem Maßstab.)

Da stets nur kleine Werte von $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ in Frage kommen, genügt die Näherung

$$\delta N = \lambda\cdot\frac{d_2}{k_2} \text{ d. h. } \varkappa = \frac{d_2}{k_2}.$$

Damit sind alle Größen zur Berechnung von λ bekannt. Wir können (25) aber noch vereinfachen. Wir setzen dort für $\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}$ ein:

$$\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega} = \frac{d_2}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{N_0^{*2}\cdot\omega} = \frac{d_2}{k_2}\cdot\frac{1}{N_0^{*2}}.$$

Da nun b immer klein gegen a ist, kann man also, solange N_0^{*2} einen Wert in der Nähe von 1 hat, zur Berechnung von λ die Formel verwenden:

$$\lambda = -\frac{D_0}{2\left(1 + a\frac{d_2}{k_2}\right)} = -\frac{d_1 + a\frac{n}{N_0^*} + b\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}}{2\left(1 + a\frac{d_2}{k_2}\right)} \quad (26)$$

Die Werte von $\frac{n}{N_0^*}$ und $\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}$ sind aus den Bildern 8 u. 9 bzw. 10 zu entnehmen. (In Bild 10 ist $\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}$ aufgetragen, um, wie in den übrigen Kurvenscharen, mit einem Parameter auszukommen!)

Für große Werte von $\frac{d_2}{\omega_0}$ kann N_0^* merklich größer als 1 werden, s. Bild 4; dann muß man die Formel nehmen:

$$\lambda = -\frac{D_0}{2 + a\left(\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega} + \frac{\varkappa}{N_0^{*2}}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Digitized by Google

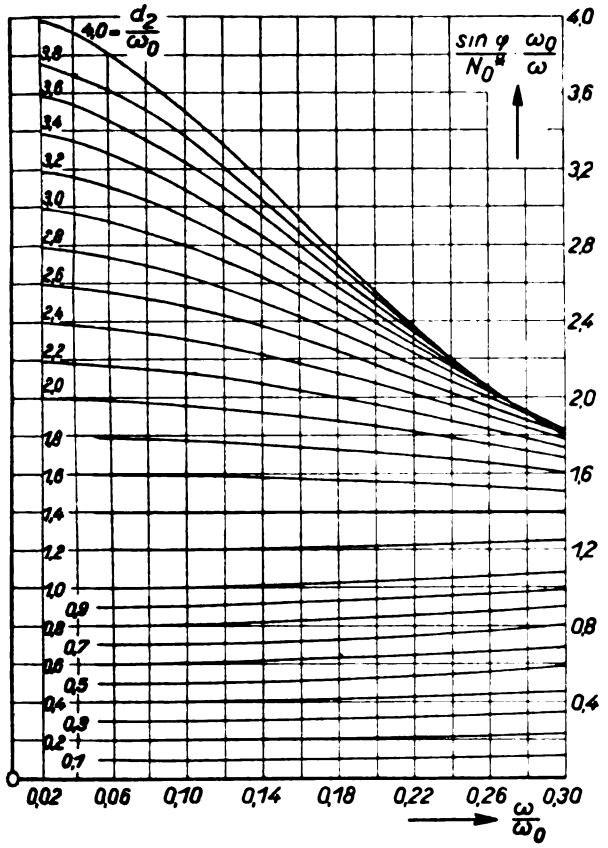


Bild 10. Diagramm zur Bestimmung von $\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}$.

Welche von den beiden Formeln (26) und (27) man zu nehmen hat, zeigt ein Blick auf die zu $\frac{d_2}{\omega_0}$ gehörende Runge-Parabel auf Bild 4.

Praktisch verfährt man zur numerischen Berechnung von ω und λ in folgender Weise:

Für den zu untersuchenden Flugzustand, der durch v_0, c_a, c_w^*, c_w, γ_0 gegeben ist, berechnet man zunächst den Parameter $\frac{d_2}{\omega_0}$ und die Konstanten der Gleichungen (23), (26), (27), nämlich k_1, a, a^*, b, d_1, $\varkappa$.

Man wählt nun probeweise einen Wert $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1$, entnimmt aus dem Diagramm Bild 6 bzw. 7 das zugehörige $\frac{\sin\varphi}{N^*}\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1$ und rechnet aus der Gleichung

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1' = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{k_1 - a^*\,\frac{\sin\varphi}{N^*}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1}$$

$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1'$ aus. Im allgemeinen wird $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1' \neq \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1$ sein. Man wählt dann einen neuen Wert zwischen $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1$ und $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_1'$ und rechnet wie oben $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_2'$ aus. Diese 4 Werte genügen in den meisten Fällen schon, um den richtigen Wert $\frac{\omega}{\omega_0}$ zu bestimmen, was man nach Bild 11 schnell ausführen kann. Hat man so $\frac{\omega}{\omega_0}$ und damit ω bestimmt, so entnimmt man aus den Bildern 8 und 9 bzw. 10 die zugehörigen Werte $\frac{n}{N_0^*}$ und $\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}$, womit man nach Gleichung (24) D_0 und dann aus Gleichung (26) oder (27) auch λ ausrechnen kann.

Zeigen die errechneten Werte ω und λ, daß man λ^2 nicht gegen ω^2 vernachlässigen darf, was aber nur selten der Fall sein wird, so kann man mit dem erhaltenen Wert von λ eine zweite Näherung für ω errechnen, indem man den Einfluß

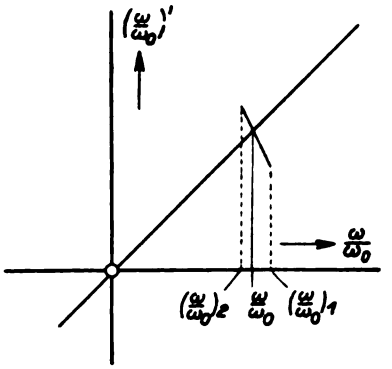


Bild 11. Interpolation zwischen angenommenen und errechneten Werten von $\frac{\omega}{\omega_0}$.

von λ auf den Koeffizienten K von z in Gleichung (22) berücksichtigt. Bezeichnen wir diese Änderung von K mit ΔK, so haben wir zur Bestimmung $\frac{\omega}{\omega_0}$ die Gleichung

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{K + \Delta K - \lambda^2}.$$

Setzen wir wieder $N^* = N_0^* + \delta N = N_0^* + \varkappa\lambda$, so erhalten wir für ΔK

$$\Delta K = \left(-b\,\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega} + a^*\,\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\,\frac{\omega}{\omega_0}\,\frac{\varkappa}{N_0^*} + b\,\frac{\cos\varphi}{N_0^*}\,\frac{\varkappa}{N_0^*}\right)\lambda + \left(b\,\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\,\frac{\varkappa}{N_0^*} - a\,\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\right)\lambda^2.$$

Wenn N_0^* und $\cos\varphi$ nahezu 1 sind, ist auch $\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega} \approx \varkappa$, dann vereinfacht sich der Ausdruck für ΔK zu

$$\Delta K = a^*\varkappa\,\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\,\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\lambda - \varkappa(a - b\varkappa)\,\lambda^2.$$

Wie schon früher erwähnt, ist b auch klein gegen a. Man darf also mit der Gleichung rechnen:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{K + a^*\,\frac{\sin\varphi}{N_0^*}\,\frac{\omega}{\omega_0}\,\varkappa\lambda - (1 + a\varkappa)\,\lambda^2};$$

den hiernach errechneten Wert von $\frac{\omega}{\omega_0}$ wollen wir mit $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_2$ bezeichnen.

Hat man $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_2$ bestimmt, so kann man auch eine 2. Näherung für λ berechnen. Man setzt $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_2$ in den Ausdruck für D (Gleichung (22)) ein und kann dann aus der Gleichung

$$\lambda = -\frac{D}{2}$$

durch Probieren λ ebenso bestimmen, wie es für $\frac{\omega}{\omega_0}$ angegeben wurde. Entsprechend der Entwicklung von D nach λ auf Seite 204 erhält man hier, wenn man jetzt das Glied mit λ^2 mitnimmt, und den Wert von D für $\lambda = 0$ und $\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_2$ mit $(D_0)_2$ bezeichnet:

$$\lambda = -\frac{(D_0)_2}{2} - a\,\frac{\lambda}{2}\left\{\frac{\sin\varphi}{N_0^*\omega}\left[1 - \varkappa\left(\frac{b}{a} + \lambda\right)\right] + \frac{\cos\varphi}{N_0^*}\varkappa\right\}.$$

Daraus kann man λ leicht bestimmen.

Wenn jedoch $\frac{\partial c_M}{\partial\alpha}$ und damit k_2 und ω_0 sehr klein sind, kann $\frac{d_2}{\omega_0}$ sehr groß werden. Dann tritt auch bei Benutzung des Runge-Diagrammes der „schnellen" Drehschwingung nach Gleichung (18) dieselbe Schwierigkeit auf, die wir auf Seite 202 für die Benutzung der Gleichung (15) aufgezeigt haben. Aber für diesen Fall ist die genaue Kenntnis der Schwingungen auch nicht mehr von besonderem Interesse. Denn für die Flugzeugbewegung bedeutet sehr kleines $\frac{\partial c_M}{\partial\alpha}$, daß die Schwingungen sehr langsam, schließlich

Digitized by Google

aperiodisch werden. Für diesen Fall kann man in einiger Annäherung $\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}$ gleich Null setzen. Dadurch werden die Gleichungen (15) und (18) voneinander unabhängig. ϑ wird Null, d. h. das Flugzeug behält seine Lage im Raum bei, und die Dämpfung der Schwingung erhält man aus der Gleichung

$$\lambda = -\frac{\bar{d}_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{d}_1}{2}\right)^2 - k_1},$$

da normalerweise $\bar{k}_1 < \left(\frac{\bar{d}_1}{2}\right)^2$ ist.

3. Rechenbeispiele.

An einigen Beispielen soll die Berechnung von ω und λ praktisch durchgeführt werden (siehe Rechenschema). Gewählt sind die Flugzeugtypen Do 17, Klemm Kl. 25 und Segelflugzeug Bussard.

Es besteht die grundsätzliche Schwierigkeit, daß nicht alle Rechnungsgrundlagen mit wünschenswerter Genauigkeit zu erhalten sind. Die Polaren, insbesondere die Momentenkurve aus der man $\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}$ entnimmt, und der Staudruck q_H am Leitwerk sollten durch Flugversuche bestimmt sein. Wenn man jedoch für ein Flugzeug seine Flugeigenschaften voraussagen will, so muß man sich auf Modellmessungen stützen. Hat man auch diese nicht, so muß man $\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}$ auf Grund der zu erwartenden Luftkräfte am Leitwerk berechnen. Dabei besteht die größte Schwierigkeit darin, den Einfluß des Schraubenstrahles auf den Abwindwinkel und den Staudruck am Leitwerk abzuschätzen. Die Annahmen über den Gütegrad des Leitwerks

$$\frac{q_H}{q_0}\left(1 - \frac{\partial \alpha_w}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{q_H}{q_0}\right)\alpha_H$$

sind vorläufig meist noch recht unsicher.

Zur Bestimmung von $-\sigma = \frac{\partial S_0}{\partial q_0}$ braucht man die Schubkurve S_0 über q_0. Hat man die Leerlaufpolare und die Polare konstanter Drosselstellung, woraus man eine Schubkurve zeichnen kann, nicht, so muß man sie aus der Propellercharakteristik und der Motorenkennlinie (Drehmoment über Drehzahl) berechnen. Man kann dann den Einfluß, den die Schraube durch den Einbau in das Flugzeug erleidet, kaum berücksichtigen.

Auch das Trägheitsmoment ist nicht einfach zu erhalten. Bei der experimentellen Bestimmung aus Schwingungen ist bei großen Flugzeugen — ganz abgesehen von der Schwierigkeit der Aufhängung — der Einfluß der mitschwingenden Luftmassen nur schlecht zu berücksichtigen. Jedoch hat das Trägheitsmoment auf die langsame Schwingung keinen großen Einfluß, so daß man mit dem aus den Konstruktionsdaten gerechneten Wert auskommen dürfte.

Dieser ganzen Schwierigkeiten sind wir uns wohl bewußt. Doch sollen die Beispiele in erster Linie zur Erläuterung des Rechenverfahrens dienen, das von den genannten grundsätzlichen Schwierigkeiten nicht berührt wird. Bei den drei genannten Flugzeugtypen sind zwei bzw. drei Flugzustände, gekennzeichnet durch *a*, *b*, *c* durchgerechnet.

Im Rechenschema der Zahlentafel 1 sind außer den Größen des Flugzustandes v_0, γ_0, c_a, c_m' nur solche Zahlen angegeben, die bei der Berechnung von ω und λ als Konstante zu den »Rechnungsvariablen« $\frac{\sin\varphi}{N_0^*}$, $\frac{\omega}{\omega_0}$, $\frac{n}{N_0^*}$ usw. hinzutreten. Zur Vollständigkeit sollen alle zur Rechnung nötigen Zahlenwerte hier zusammengestellt werden. Dabei sind auch die errechnete Schwingungsdauer, Dämpfungskonstante λ und die Halbwertszeit $T_{1/2}$ angegeben.

I. Do 17. — Die Daten stammen z. T. aus Modellmessungen, z. T., insbesondere die Momentenkurve $c_m(\alpha)$ und $\frac{q_H}{q_0}$ aus Flugversuchen der Dornier-Werke. *l* ist die maximale Flügeltiefe. Alle Angaben beziehen sich auf den Flug mit Vollgas.

$G = 6200$ kg $F = 55$ m² $l = 4{,}1$ m $c_a' = 4{,}9$
$J_y = 4960$ kgm/s² $F_H = 9{,}1$ m² $r_H = 9{,}35$ m $c_{a\,H}' = 2{,}9$
Schwerpunktrücklage: 1,15 m von Flügelvorderkante
Flughöhe 1850 m 2 Motoren

	$\alpha_0°$	$\gamma_0°$	q_0 [kg/m²]	v_0 [m/s]	q_H [kg/m²]	v_H [m/s]	c_a	c_w (Vollgas)	c_w (Leerlauf)
a)	12,2	7,3	106	45,2	166	56	1,05	— 0,134	0,098
b)	4,65	4,6	282	75	276	73	0,40	— 0,032	0,038

	σ/F	c_w'	c_m'	T [s]	λ [1/s]	$T_{1/2}$ [s]
a)	0,034	0,39	0,43	27	—0,011	63
b)	0,028	0,32	0,049	82	—0,019	36

II. Klemm Kl 25. — Den Daten liegen Leerlaufpolare und Momentenkurve zugrunde, die aus den Polaren der verschiedenen Flügelprofile unter Abschätzung des Leitwerksgütegrades errechnet waren. Die Schubkurve wurde aus Motorkennlinie und Propellercharakteristik berechnet. Die Polare ist mit einer erflogenen Leerlaufpolare verglichen und in ziemlich guter Übereinstimmung gefunden. *l* ist die mittlere Flügeltiefe. Die Werte q_H sind aus dem Belastungsgrade nach der einfachen Strahltheorie gerechnet und wohl etwas zu hoch angenommen. Alle Angaben, außer denen für Gleitflug (siehe unten unter *c*), beziehen sich auf den Flug mit Vollgas. Die Ergebnisse der Rechnung sind auch in Flugversuchen geprüft. Soweit die wenigen Versuche eine Beurteilung gestatten, weichen die experimentellen und rechnerischen Werte nicht weit voneinander ab.

$G = 660$ kg $F = 20$ m² $l = 1{,}54$ m $c_a' = 4{,}44$
$J_y = 59$ kgm/s² $F_H = 2{,}8$ m² $r_H = 3{,}92$ m $c_{a\,H}' = 3{,}70$
Schwerpunktrücklage: 0,508 m von Flügelvorderkante
Flughöhe: 1000 m.

	$\alpha_0°$	$\gamma_0°$	q_0 [kg/m²]	v_0 [m/s]	q_H [kg/m²]	v_H [m/s]	c_a	c_w
a)	16,9	5,35	25	21	63	33	1,3	0,11
b)	5,62	0	81	37,6	109	44	0,41	0,052
c)	3,15	— 11,2	135	49	135	49	0,24	0,047

	σ/F	c_w'	c_m'	T [s]	λ [1/s]	$T_{1/2}$ [s]
a)	0,045	0,45	0,85	13	—0,036	19
b)	0,018	0,13	0,24	27	—0,046	15
c)		0,08	0,20	37	—0,047	15

c entspricht einem Gleitflug ohne Schraube.

III. Bussard. — Die den Daten zugrunde liegende Polare und Momentenkurve sind wie bei der Klemm Kl 25 errechnet. *l* ist die mittlere Flügeltiefe.

$G = 215$ kg $F = 14{,}26$ m² $l = 1{,}01$ m $c_a' = 4{,}93$
$J_y = 37$ kgm/s² $F_n = 1{,}98$ m² $r_H = 2{,}8$ m $c_{a\,H}' = 3{,}60$
Schwerpunktrücklage: 0,37 m von Flügelvorderkante.
Flughöhe: Erdbodennähe.

	$\alpha_0°$	$\gamma_0°$	q_0 [kg/m²]	v_0 [m/s]	c_a	c_w	c_w'	c_m'
a)	9,95	— 3,3	18	16,8	0,85	0,049	0,26	0,33
b)	4,65	— 4,6	37,5	24,5	0,40	0,032	0,072	0,33

	T [s]	λ [1/s]	$T_{1/2}$ [s]
a)	14	—0,027	26
b)	20	—0,035	20

Digitized by Google

Zahlentafel 1. Rechenschema.

		v_0	γ_0	c_a	c_m	v_H	ω_0	$\omega_0 p_2$	$k_1 = \frac{2}{p_2} \frac{\varrho}{\varrho_2}$	$a^* = \omega_0 \frac{\varepsilon}{\alpha_0 v_0} (1 + \alpha_0 (\gamma_0 + \varepsilon))$	$b = \frac{2 k^2}{\alpha_0 v_0^2} \left[\frac{c_w^*}{c_a} (1 + \alpha_0 (\gamma_0 + \varepsilon)) - \frac{c_w'}{c_a} \right]$	$\frac{\omega_0}{\omega} =$ angenommener Wert	$\frac{\sin \varphi}{N_0^*} \frac{\omega}{\omega_0}$	$a^* \cdot \frac{\sin \varphi}{N_0^*} \frac{\omega}{\omega_0} = A$	$k_1 - A$	$\frac{1}{\omega_0} \sqrt{k_1^* - A} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)'$ erhaltener Wert	$d_1 = \frac{2 \varepsilon}{v_0} \left(\frac{c_w^*}{c_a} - \frac{\gamma_0}{2} \right)$	a	$\frac{n}{N_0^*}$	$\frac{\sin \varphi}{N_0^*} \omega$	$d_1 + a \frac{n}{N_0^*} + b \frac{\sin \varphi}{N_0^*} \omega = D_0$	$a \cdot k$	$2 (1 + a x) = B$	$q \cdot k$	$2 + \frac{\sin \varphi}{N_0^* \omega} (a - b x) + a x = B'$	$\lambda = -\frac{D_0}{B}$; bzw. $= \frac{D_0}{B'}$	ω
Do 17	a)	45,2	0,128	1,05	0,43	56	1,44	0,95	0,094	1,54	0,022	0,20	0,04	0,062	0,032	0,124	0,026	1,07	—0,002	0,67	0,039	0,71	3,4			—0,011	0,23
	b)	75,0	0,080	0,40	0,049	73	0,79	2,20	0,034	1,30	0,043	0,10	0,0215	0,028	0,006	0,098	0,033		0,037	2,71	0,21	4,56		0,12	10,7	—0,020	0,079
Ki 25	a)	21,0	0,093	1,31	0,85	31	3,34	1,44	0,436	5,55	0,033	0,16	0,037	0,205	0,231	0,144	0,068	1,66	0,025	0,43	0,124	0,71	3,42			—0,036	0,50
	b)	37,6	0,000	0,406	0,24	41	3,19	2,00	0,136	8,60	0,193	0,080	0,0126	0,108	0,028	0,052			0,015	0,63	0,25	1,70	5,40			—0,046	0,23
	c)	49,0	—0,195	0,244	0,20	49	3,76	2,0	0,080	13,7	0,257	0,050	0,005	0,068	0,012	0,029			0,0061	0,53	0,28	1,92	5,8			—0,047	0,16
Bussard	a)	16,8	—0 057	0,85	0,33	16,8	1,50	1,07	0,68	5,00	0,016	0,20	0,045	0,225	0,455	0,45			0,021	0,77	0,182	2,40	6,80			—0,027	0,44
	b)	24,5	—0,080	0,40	0,33	24,5	2,16	1,06	0,320	10,7	0,26	0,14	0,0213	0,228	0,092	0,140	0,100	3,35	0,003	0,49	0,24	2,41	6,82			—0,035	0,31

Digitized by Google

III. Zusammenfassung.

Um die Bewegungsgleichungen des Flugzeugs aufzustellen, wird von einem sehr vereinfachten Bewegungstyp ausgegangen. Die zugehörigen Gleichungen werden schrittweise erweitert, bis die wirkenden Kräfte und Momente bei festem Ruder und konstanter Drosselstellung möglichst weitgehend erfaßt werden.

Die auf diese Weise sich ergebenden Bewegungsgleichungen stellen erzwungene Höhen- und Drehschwingungen in z und ϑ dar, die miteinander gekoppelt sind. Mit Hilfe des Runge-Diagrammes kann man ϑ eliminieren und erhält die Gleichung einer freien Höhenschwingung. Nach einem einfachen Interpolationsverfahren kann man aus ihr Frequenz und Dämpfung der langsamen Schwingung berechnen. An drei Beispielen wird die Rechnung zahlenmäßig durchgeführt.

Herrn Prof. Betz und Frau Dr. Flügge-Lotz bin ich für viele gute Ratschläge dankbar.

(Abgeschlossen Oktober 1938.)

Digitized by Google

Das Geschwindigkeitsfeld eines beliebigen dünnen und schwach gewölbten Tragflügelprofils.

Von Karl Jaeckel, Breslau.

Die Aufgabe, die induzierten Geschwindigkeiten in der Umgebung eines Tragflügelprofils zu berechnen, ist schon verschiedentlich behandelt worden. So beschäftigt sich Kleinwächter [1] mit der Frage nach den Geschwindigkeiten, die in Punkten der verlängerten Sehne erzeugt werden, um den Einfluß eines Flügels auf das Höhenleitwerk genauer zu berücksichtigen. Um allgemeinere Aufgaben behandeln zu können, unterzieht sich Kurt Jaeckel [2] der Mühe, für einen großen Bereich in der Umgebung eines dünnen Profils punktweise die zugehörigen induzierten Geschwindigkeiten zu berechnen; es gelingt auf diese Weise z. B. Doppeldeckerprofile beliebiger Staffelung und Schränkung und insbesondere Profile mit Spalt in Angriff zu nehmen. Weiterhin sind die Untersuchungen von Weinig [3] über das Geschwindigkeitsfeld spezieller Profilformen als bemerkenswert zu nennen.

Das Geschwindigkeitsfeld eines dünnen schwach gewölbten Profils ist somit punktweise überall als bekannt anzusehen, jedoch ist es meines Wissens bisher noch nicht allgemein gelungen, die vorliegenden Geschwindigkeiten durch Funktionen explizit anzugeben. Im folgenden soll daher der Zusammenhang zwischen der Wirbelbelegung eines dünnen Profils und seines Geschwindigkeitsfeldes durch einfache Funktionen entwickelt und dargestellt werden, wobei wir uns auf den Fall verschwindender Wölbung beschränken wollen.

Gliederung.

I. Aufstellung und Umformung der Formeln für die induzierten Geschwindigkeiten.
II. Auswertung eines komplexen Integrals.
III. Berechnung der Geschwindigkeiten und der Potentialfunktion des Feldes.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Aufstellung und Umformung der Formeln für die induzierten Geschwindigkeiten.

Aus Bild 1 erkennt man leicht, daß für verschwindende Profilwölbung die induzierten Geschwindigkeiten an einer Stelle (x, y) durch die Wirbelbelegung $\gamma(s)$ des Profils wie folgt dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{aligned} w_x(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(s)\,ds}{(x-s)^2+y^2}\cdot y, \\ w_y(x,y) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(s)\,ds}{(x-s)^2+y^2}\cdot (x-s) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

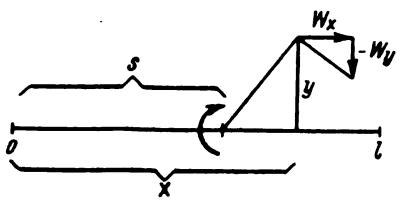


Bild 1.

Faßt man diese beiden Gleichungen in komplexer Schreibweise zusammen, so findet man zunächst

$$w_x(x,y) - i\,w_y(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(s)\,ds}{(x-s)^2+y^2}\,(y + i\,(x-s))$$

und schließlich die Beziehung

$$w_x(x,y) - i\,w_y(x,y) = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(s)\,ds}{(x-s)+i\,y}, \quad . \; . \; (2)$$

die wir im folgenden weiter entwickeln wollen.

Wir denken uns wie üblich auf der Profillinie eine Wirbelverteilung von der Form

$$\gamma(s)\frac{ds}{d\varphi} = l\cdot V\cdot\left(a_0 \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + \sum_1^\infty a_n \sin n\varphi\right)\sin\varphi =$$

$$l\cdot V\cdot\left\{a_0(1+\cos\varphi) + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}(\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi)\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

wobei die Veränderliche φ durch die Gleichung

$$s = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

gegeben ist, und erhalten damit

$$w_x(x,y) - i\,w_y(x,y) =$$

$$\frac{i}{2\pi}\cdot l\cdot V\cdot\left\{a_0\int_0^\pi \frac{1+\cos\varphi}{(x-l/2+i\,y)+l/2\cos\varphi}\,d\varphi + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi}{(x-l/2+i\,y)+l/2\cos\varphi}\,d\varphi\right\}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{x-l/2}{l/2} = \xi, \quad \frac{y}{l/2} = \eta, \quad \xi + i\,\eta = \zeta \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

und sodann

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\zeta+\cos\varphi}\,d\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

so gewinnen wir die folgende Darstellung:

$$w_\xi(\xi,\eta) - i\,w_\eta(\xi,\eta) =$$

$$i\cdot V\cdot\left\{a_0(K_0(\zeta)+K_1(\zeta)) + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}(K_{n-1}(\zeta) - K_{n+1}(\zeta))\right\},$$

die wir mit

$$K_n = R_n + i\,J_n$$

in Realteil und Imaginärteil zerlegen können. Für die gesuchten Geschwindigkeiten finden wir demnach endgültig:

$$\left.\begin{aligned} w_\xi(\xi,\eta) &= -V\cdot\left\{a_0(J_0+J_1) + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}(J_{n-1}-J_{n+1})\right\}, \\ w_\eta(\xi,\eta) &= -V\cdot\left\{a_0(R_0+R_1) + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}(R_{n-1}-R_{n+1})\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Unsere Aufgabe ist somit als gelöst zu betrachten, wenn es nur gelingt, die komplexe Funktion $K_n(\zeta)$ explizit anzugeben. Wir erkennen im besonderen in (6) eine Verallgemeinerung der in einer früheren Arbeit berechneten Funktion [5]; der hier einzuschlagende Weg wird sich jedoch wesentlich von dem früheren unterscheiden.

Digitized by Google

II. Auswertung eines komplexen Integrals.

Für die Auswertung formen wir das Integral (6) nach dem Vorgange von Hamel [4] wie folgt um, wobei wir berücksichtigen, daß der Integrand eine gerade Funktion der Variablen φ ist, so daß wir schreiben können

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\zeta + \cos\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n\varphi}{\zeta + \cos\varphi}\, d\varphi.$$

Mit $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ und $\cos n\varphi = \frac{1}{2}(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi})$

erhalten wir zunächst

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2\zeta + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}\, d\varphi$$

und nach Einführung einer neuen Veränderlichen

$$e^{i\varphi} = z \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

schließlich das Integral über den Einheitskreis

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{z^{2n}+1}{z^n(z^2 + 2\zeta z + 1)}\, dz.$$

Mit den Nullstellen des Nenners

$$z_{1,2} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad z_3 = 0, \quad \ldots\ldots (9)$$

wobei

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ist, finden wir

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{(z^{2n}+1)\, dz}{z^n (z - z_1(\zeta))(z - z_1(\zeta))} \quad \ldots (11)$$

Wir bestimmen den Wert dieses Integrals durch die Residuen in den Nullstellen des Nenners, wobei wir wegen (10) die Stelle z_2 sogleich außer acht lassen dürfen, wenn z_1 im Innern des Einheitskreises angenommen wird. Der Fall, daß z_1 und z_2 beide auf dem Rande liegen, kann auch beiseite gelassen werden, da er sich durch die Sprungbedingungen von K_n am Rande berücksichtigen läßt. Es genügt also, sich auf

$$|z_1| < |z_2| \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

zu beschränken. Wir bestimmen zunächst das Residuum an der Stelle z_1 und finden nach den üblichen Zwischenrechnungen

$$Res_{(z=z_1)} = \frac{z_1^{2n}+1}{z_1^n (z_1 - z_2)}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für das Residuum an der Stelle $z_3 = 0$

$$Res_{(z=z_3)} = \frac{z_2^n - z_1^n}{z_2 - z_1}.$$

Der Wert des gesuchten Integrals wird somit

$$K_n = \frac{z_1^n + z_1^{-n}}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^n - z_1^n}{z_2 - z_1} = \frac{2z_1^n - z_2^n + z_1^{-n}}{z_1 - z_2}. \quad (13)$$

Führen wir unter Berücksichtigung von (10) eine komplexe Funktion w ein durch die Gleichungen

$$z_1 = e^{-w}, \; z_2 = e^{+w}, \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

so erhalten wir für K_n den folgenden einfachen Ausdruck:

$$K_n(\zeta) = -\frac{e^{-nw}}{\mathfrak{Sin}\, w}, \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

wobei der Zusammenhang zwischen ζ und w durch die Gleichungen (9) und (14) hergestellt wird.

Es gilt

$$\zeta = -\mathfrak{Cof}\, w \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

mit

$$\zeta = \xi + i\eta, \; w = u - iv,$$

wobei wegen (12) $u > 0$ vorausgesetzt werden muß.

III. Berechnung der Geschwindigkeiten und der Potentialfunktion des Feldes.

Für die Verwendung der Funktionen (15) in den Gl. (7) berechnen wir zunächst $K_{n-1} - K_{n+1}$ für $n \geq 1$

$$K_{n-1} - K_{n+1} = -2e^{-nw} = -2e^{-n(u-iv)}$$

und finden für den Realteil und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned} R_{n-1} - R_{n+1} &= -2e^{-nu}\cos nv, \\ J_{n-1} - J_{n+1} &= -2e^{-nu}\sin nv \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17)$$

Weiterhin ergibt sich

$$K_0 + K_1 = -\frac{1+e^{-w}}{\mathfrak{Sin}\, w} = -\frac{1+e^{-(u-iv)}}{\mathfrak{Sin}\,(u-iv)}$$
$$= -\frac{1+e^{-u}\cos v + ie^{-u}\sin v}{\cos v \cdot \mathfrak{Sin}\, u - i\,\mathfrak{Cof}\, u \cdot \sin v}$$

und schließlich für die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} R_0 + R_1 &= -\frac{\mathfrak{Sin}\, u\cos v + e^{-u}\,\mathfrak{Sin}\, u - \sin^2 v}{\mathfrak{Sin}^2 u\cos^2 v + \mathfrak{Cof}^2 u \sin^2 v}, \\ J_0 + J_1 &= -\frac{\mathfrak{Cof}\, u\sin v + \sin v\cos v}{\mathfrak{Sin}^2 u\cos^2 v + \mathfrak{Cof}^2 u\sin^2 v}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Nach (7) erhalten somit die Gleichungen für die induzierten Geschwindigkeiten die folgende einfache Form:

$$\left.\begin{aligned} &w_\xi(\xi,\eta) = \\ &\quad V\cdot\left\{a_0 \frac{\mathfrak{Cof}\, u\sin v + \sin v\cos v}{\mathfrak{Sin}^2 u + \sin^2 v} + \sum_1^\infty a_n e^{-nu}\sin nv\right\}, \\ &w_\eta(\xi,\eta) = \\ &\quad V\cdot\left\{a_0 \frac{\mathfrak{Sin}\, u\cos v + e^{-u}\,\mathfrak{Sin}\, u - \sin^2 v}{\mathfrak{Sin}^2 u + \sin^2 v}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum_1^\infty a_n e^{-nu}\cos nv\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Wir bemerken, daß die Geschwindigkeiten längs der Kurven u = konst. und v = konst. besonders einfach zu berechnen sind. Wegen (16) sind die Beziehungen zwischen (ξ, η) und (u, v) gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\mathfrak{Cof}\, u\cdot\cos v, \quad 0 \leqq v \leqq 2\pi \\ \eta &= +\mathfrak{Sin}\, u\cdot\sin v, \quad\quad u \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (20)$$

aus denen man erkennt, daß die genannten Kurvenscharen das Netz der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln liefern.

Als Sonderfälle mit $v = 0$ bzw. $v = \pi$ finden wir die Formeln für die Geschwindigkeiten auf der verlängerten Sehne [5] und mit $u = 0$ die bekannten Beziehungen für die Geschwindigkeiten am Profil selbst wieder. Auf die Eintragung von Zahlenwerten in das Feld der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln glaube ich wegen der Einfachheit der Funktionen verzichten zu können.

Mit Hilfe der Gl. (19) können wir somit in jedem Punkte der Umgebung des Profils die induzierten Geschwindigkeiten angeben, die für die Berechnung etwa eines Doppelprofils von Bedeutung sind. Bezüglich der Ausführung der Rechnung selbst, für die sich die gute Konvergenz der Reihen (19) vorteilhaft auswirken dürfte, möchte ich auf die Arbeit von Kurt Jaeckel [2] verweisen.

Die übersichtliche Form der Ausdrücke für die induzierten Geschwindigkeiten erlaubt es auch die Potentialfunktion selbst zu berechnen. Wir bestimmen zunächst die Geschwindigkeiten in u- und v-Richtung durch die Gleichungen

$$w_u = w_\xi \frac{\partial\xi}{\partial u} + w_\eta \frac{\partial\eta}{\partial u}, \quad w_v = w_\xi \cdot \frac{\partial\xi}{\partial v} + w_\eta \frac{\partial\eta}{\partial v}$$

und erhalten nach einigen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} w_u &= \frac{\partial\Phi}{\partial u} = V\cdot\left\{-a_0 e^{-u}\sin v\right. \\ &\quad - \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}\left(e^{-(n-1)u}\sin(n-1)v\right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-(n+1)u}\sin(n+1)v\right)\right\}, \\ w_v &= \frac{\partial\Phi}{\partial v} = V\cdot\left\{a_0(1+e^{-u}\cos v)\right. \\ &\quad + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2}\left(e^{-(n-1)u}\cos(n-1)v\right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-(n+1)u}\cos(n+1)v\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (21)$$

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich leicht die Potentialfunktion in den Koordinaten (u, v) mit $\left(\frac{\sin r v}{r}\right)_{r=0} = v$

$$\Phi(u,v) = V \cdot \Big\{ a_0 (v + e^{-u} \sin v) + \sum_1^\infty \frac{a_n}{2} \Big(\frac{e^{-(n-1)u}}{n-1} \sin (n-1) v - \frac{e^{-(n+1)u}}{n+1} \sin (n+1) v \Big) \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

durch die die allgemeinste Strömung um ein Streckenprofil beschrieben wird, die einer Wirbelverteilung der Gl. (3) zugeordnet ist.

Insbesondere ist mit $a_n = 0$ außer für $n = 0$ in dieser Form die Potentialfunktion der schief angeströmten ebenen Platte enthalten, die man aus der bekannten Potentialfunktion für den elliptischen Zylinder erhält, wenn man die Nebenachse des elliptischen Profils gegen Null gehen läßt.

IV. Zusammenfassung.

Unter der Voraussetzung, daß das dünne Profil durch eine Wirbelverteilung in der Glauertschen Form zu ersetzen ist, wird das Geschwindigkeitsfeld um das Profil berechnet. Die das Feld kennzeichnenden Funktionen sind gut konvergierende Reihen, deren Koeffizienten sich aus denen der Wirbelverteilung unmittelbar ergeben.

Durch eine geeignete Umformung der Ausdrücke für die induzierten Geschwindigkeiten reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung einer Funktion, die in einer komplexen Integraldarstellung gegeben ist. Es gelingt mit Hilfe des Residuumsatzes diese Funktion und damit die gesuchten Geschwindigkeiten explizit zu berechnen. In den erhaltenen Formeln sind zwei schon bekannte Sonderfälle richtig enthalten. Die übersichtliche Form der Ergebnisse gestattet unter Benutzung von elliptischen Koordinaten eine einfache Auswertung und ermöglicht die Darstellung der zugehörigen Potentialfunktion.

V. Schrifttum.

[1] J. Kleinwächter, Beitrag zur ebenen Leitwerkstheorie. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 127.

[2] Kurt Jaeckel, Beitrag zur Berechnung der Auftriebsverteilung in Tiefenrichtung bei Doppelflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 598.

[3] F. Weinig, Die Strömungsverhältnisse im Feld dünner, schwach gewölbter Tragflügelprofile. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938) S. 107.

[4] H. Hamel, Integralgleichungen. Springer 1937, S. 145.

[5] Karl Jaeckel, Eine Formel für die von einem dünnen Tragflügelprofil induzierte Geschwindigkeit usw. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939) S. 53.

Digitized by Google

Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen.

Von M. Richter.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Berlin-Adlershof, Institut für Betriebstofforschung.

Gliederung.

A. Anlaß zur Untersuchung.
B. Versuchsapparatur.
C. Versuchsanordnung und Durchführung.
D. Versuchsergebnisse
1. Reproduzierbarkeit der Destillationsergebnisse.
2. Siedeverhalten der untersuchten Flugmotorenöle.
3. Fraktionierung.
4. Alterungsverhalten der Fraktionen.
5. Ringanalyse der Fraktionen.
E. Zusammenfassung.

A. Anlaß zur Untersuchung.

Die fortschreitende Entwicklung der Schmierstoffe für den Flugbetrieb erfordert neben einer eingehenden motorischen Erprobung auch ein besonderes Studium der laboratoriumsmäßigen Eignung. Wenn man einen Schmierstoff auf Grund seiner laboratoriumsmäßigen Prüfung für die motorische Verwendung für brauchbar hält, so ist dabei zu beachten, welcher Analysenwert für den Motorenbetrieb Bedeutung hat. Von allen chemisch-physikalischen Daten, die für die Gütebewertung eines Schmierstoffes herangezogen werden, sind nur wenige in der Lage, bestimmte praktische Voraussagen zu machen.

In der vorliegenden Arbeit soll ein Destillationsverfahren beschrieben und erörtert werden, daß bei sachgemäßer Anwendung und Auswertung aufschlußreiche Möglichkeiten für die Identifizierung, sowie für die praktische Verwendung von Flugmotorenölen eröffnen dürfte. Das Verfahren ermöglicht Destillationen im Kathodenvakuum und scharfe Trennung in Fraktionen. Es soll versucht werden, durch Anwendung neuer Prüfverfahren, wie Alterungsverhalten und Ringanalyse auf die Untersuchung der Fraktionen eine Ergänzung der bisher üblichen Grundlagen für die Beurteilung der Schmierstoffe zu schaffen.

Es würde im Rahmen dieser Arbeit zu weit führen, die in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten auf dem Gebiete der Kathodenvakuumdestillation von Schmierstoffen aufzuzählen bzw. zu erörtern. Vielmehr sei an dieser Stelle auf eine neuere zusammenfassende Arbeit von Spausta[1]) über Vakuumdestillation von Autoölen hingewiesen, in welcher der Verfasser eine ausführliche Literaturangabe der bekanntesten Arbeiten dieses Gebietes angeführt hat.

B. Versuchsapparatur.

In Bild 1 ist die Versuchsapparatur dargestellt, die im hiesigen Institut von Philippovich in gemeinsamer Arbeit mit Hoenow entwickelt worden ist und deren Brauchbarkeit auch bereits in einem DVL-Bericht unter Beweis gestellt werden konnte. Die Versuchsapparatur hat in der Zwischenzeit noch einige Verbesserungen erhalten, ohne aber dabei die Versuchsdurchführung im wesentlichen zu verändern. Zum besseren Verständnis wird die Apparatur nochmals kurz beschrieben:

Die Versuchsapparatur entspricht in groben Zügen den Angaben von Chmelewsky und Louis[2]). Zur Aufnahme des zu destillierenden bzw. fraktionierenden Schmierstoffes dient der Kupferkolben *a* (200 cm³ Inh.), der zur Messung der Öltemperatur mit einer Thermometerbuchse *b* versehen ist. Zur Messung der Öldampftemperatur ist am Kolbenhals ein

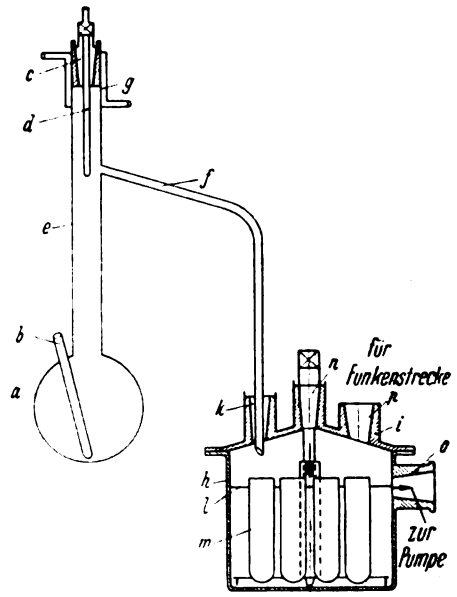


Bild 1. Gerät für Vakuumdestillation von Ölen.

a Kupferkolben,
b Thermometerbüchse,
c Verschlußstopfen,
d Meßbuchse,
e Kolbenhals,
f Kupferrohr,
g Kühlmantel,
h Brühlsche Vorlage,
i Messingdeckel,
k Schliff,
l drehbares Gestell,
m Auffanggläschen,
n Schliff,
o Evakuierungsvorrichtung,
p Schliff.

eingeschliffener Verschlußstopfen *c* angebracht, der auch die Meßbuchse *d* trägt, die in ihrem unteren Teil aus Kupfer und in ihrem oberen Teil aus Neusilber besteht. Zur Abdichtung des Stopfens wird der jeweils zu untersuchende Schmierstoff verwendet. Um ein Verdampfen des zur Abdichtung verwendeten Schmierstoffes zu verhindern, ist das Kolbenhalsende *e* mit einem Kühlmantel *g* für Wasserkühlung umschlossen. Zum besseren Wärmeschutz ist der Kolbenhals *e* außerdem mit einer Asbestschicht isoliert. Die gebildeten Dämpfe werden durch ein gebogenes Kupferrohr *f* zur Kondensation gebracht. Dieses Kupferrohr führt in eine Brühlsche Vorlage *h*, in dessen Messingdeckel *i* es mittels Schliff *k* eingepaßt ist. Die Vorlage enthält ein drehbares Gestell *l* mit mehreren in $^1/_{10}$ cm³ geteilten Auffanggläschen *m* von je 25 cm³ Inhalt. Das Gestell kann durch einen Schliff *n* bewegt werden. Der Anschluß für die Evakuierungsvorrichtung *o* ist seitlich als Tubus angebracht. Der Messingdeckel enthält außerdem noch den Schliff *p* für ein Geißler-Rohr. Die Evakuierungsvorrichtung besteht aus einer Kapselpumpe nach Pfeiffer für das Vorvakuum und aus einer dreistufigen Quecksilberpumpe nach Leybold für das Hochvakuum. Die Verbindungsstücke zu den einzelnen Aggregaten sind aus Glas und durch Langschliffe miteinander verbunden. Die Erwärmung des Kupferkolbens erfolgt mittels eines fein regulierbaren Brenners, und zwar indirekt, da der Destillationskolben zur Verhütung von Zersetzungen in eine 15 mm starke Kupferschale eingepaßt ist.

[1]) Spausta, Brennstoffchemie Bd. 18 (1937), S. 153/160.

[2]) Weiß, Louis u. Chmelewsky, Distillation des Hulles du Graissage dans le Vide Cathodique. Chimie et Industrie Bd 20 (1926), Nr. 3.

Digitized by Google

C. Versuchsanordnung und Durchführung.

Die jeweilige Destillationsmenge beträgt, entsprechend dem Fassungsvermögen der Kupferblase, 200 cm³. Das Evakuierungsaggregat gestattet ein Vakuum bis zu 0,001 mm Hg (gemessen nach Mc. Leod). Die Güte des Vakuums kann während des Versuches auch an einer eingeschalteten Funkenstrecke (Geißler-Röhre) durch das dabei auftretende grüne Kathodenlicht beobachtet werden. Die vorliegenden Destillationen wurden mit einem Vakuum von 0,04 mm Hg durchgeführt, und zwar wurde die Versuchsapparatur bei jeder Destillation zunächst unter langsamer Erwärmung auf das gewünschte Vakuum gebracht, gleichzeitig damit wurde auch die Kühlung des oberen Kolbenhalses angestellt.

Die Destillationsgeschwindigkeit, die als ein wesentlicher Faktor einer jeden Destillation anzusprechen ist, beträgt bei den hier durchgeführten Versuchen etwa 15 Tropfen in 1 min, so daß für jeden Versuch mit einer Destillationsdauer von etwa 120 min zu rechnen ist, einschließlich der langsamen Vorwärmung der Versuchsapparatur. Die Ablesung der Destillatmenge erfolgt, ähnlich wie bei der Benzin-Analyse, in Abständen von 10 zu 10° C.

Entsprechend der vorgenannten Versuchsanordnung wurden die nachfolgenden Schmierstoffe einer Destillation im Kathodenvakuum unterzogen:

a) Schmierstoff 1 (paraffinbasisch),
b) » 2 »
c) » 3 » -bright stocks),
d) » 4 (gefettet),
e) » 6 (naphthenbasisch).

D. Versuchsergebnisse.

1. Reproduzierbarkeit der Destillationsergebnisse:

Die Brauchbarkeit eines Verfahrens hat eine gute Reproduzierbarkeit seiner Versuchsergebnisse zur Voraussetzung. In Bild 2 wird zunächst an einem Beispiel gezeigt, welchen Einfluß ein ungenügendes Vakuum und ein gutes Vakuum auf den Destillationsverlauf haben kann. Die Destillationen wurden unter Verwendung des gleichen Schmiermittels mit einem Vakuum von 0,1 bzw. 0,01 mm Hg durchgeführt. Der unregelmäßige Verlauf der Destillationskurve mit 0,1 mm Hg ist durch eintretende Zersetzung von gebildeten Öldämpfen

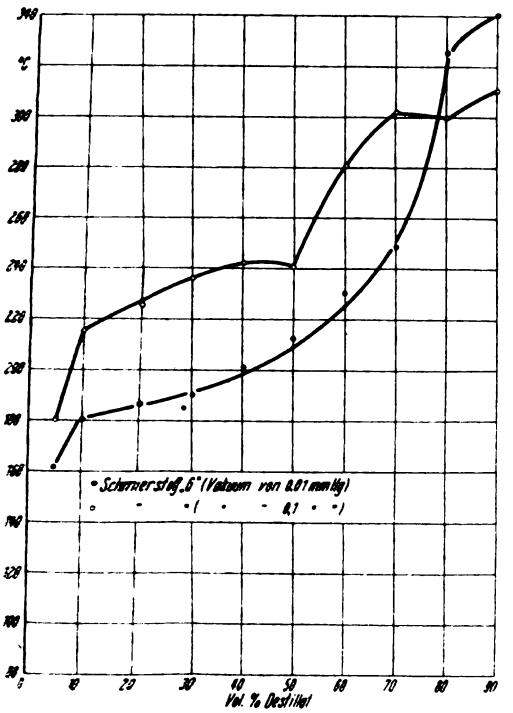


Bild 2. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Beeinflussung des Destillationsverlaufes durch die Höhe des Vakuums.
×——× Schmierstoff *G* (Vakuum von 0,01 mm Hg),
○——○ » » (» » 0,1 » »).

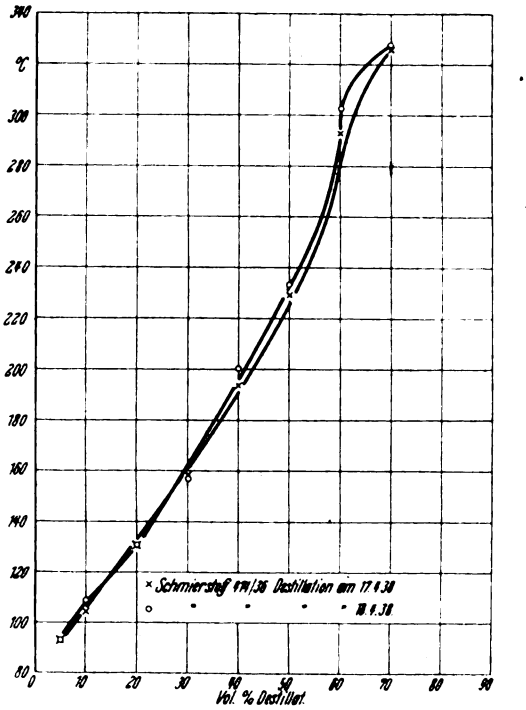


Bild 3. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Reproduzierbarkeit der Destillationsergebnisse.
×——× Schmierstoff 414/36, Destillation am 17. 4. 38,
○——○ » 414/36, » » 18. 4. 38.

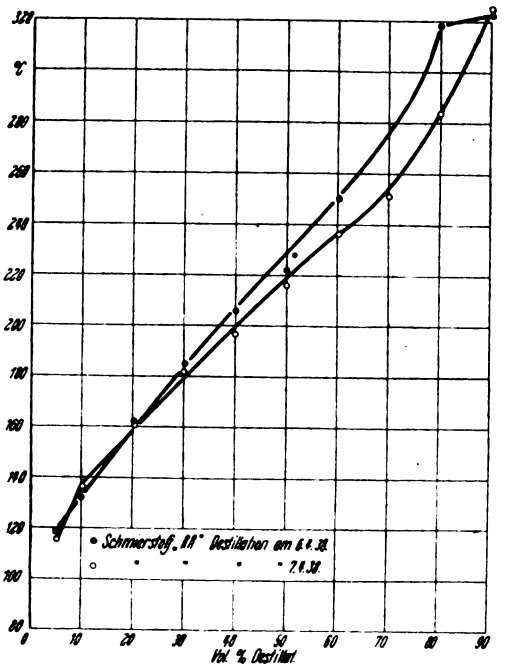


Bild 4. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Reproduzierbarkeit der Destillationsergebnisse.
×——× Schmierstoff *R R*, Destillation am 6. 4. 38,
○——○ » » , » » 7. 4. 38.

zu erklären. In Bild 3 und 4 sind die Destillationsergebnisse von je zwei gleichen Schmierstoffen zu ersehen, die zu verschiedenen Zeiten mit einem Vakuum von 0,01 mm Hg erhalten wurden. Diese Bilder lassen erkennen, daß mit einem solchen Vakuum unter Einhaltung einer gleichmäßigen Destillationsgeschwindigkeit reproduzierbare Destillationsergebnisse zu erhalten sind.

2. Siedeverhalten der untersuchten Flugmotorenöle.

In Bild 5 und 6 sowie in Zahlentafel 1 sind die Destillationsergebnisse der untersuchten Schmierstoffe zu ersehen.

Digitized by Google

Zahlentafel 1. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen.

Schmier-Stoff	Visk. b. 50°C/°E	Spez. Gew. b. 20° C kg/Ltr.	Refraktion n_D 20	mittl. Mol.-Gew.	Siede-anfang °C	Es gehen über Volumprozent bis °C										Rückstand	
						160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	V-%	b. °C
1	23,2	0,882	1,4878	691	158	—	10	43	60	67,5	74	77,5	81	—	—	15	306
2	17,0	0,887	1,4900	635	124	7,5	27,5	49	64	73	76	79,5	66	—	—	10	308
3	28,1	0,893	1,4969	665	169	—	17,5	36	46,5	54	61	68,5	72	83	—	12,5	325
4	22,0	0,902	1,4978	567	112	6	16	24	44	60	69	75,5	80,5	86	—	12,2	325
6	21,9	0,906	1,5004	569	84	11	27,5	47	56	74	79	85	—	—	—	10	293

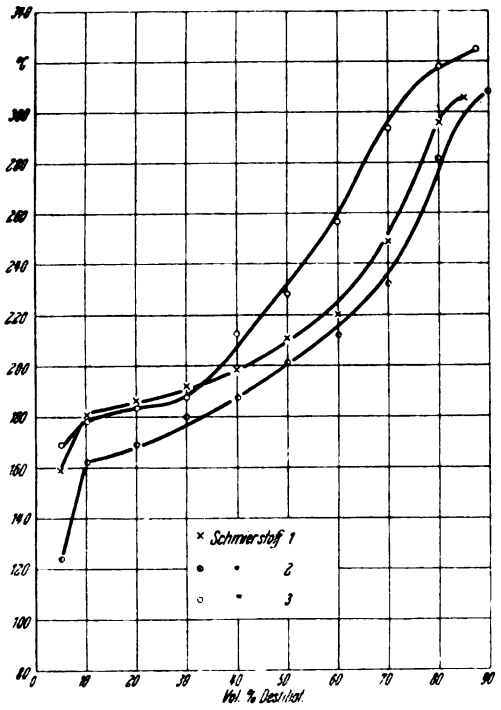


Bild 5. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Destillationsergebnisse.
×——× Schmierstoff 1,
○——○ " 2,
●——● " 3.

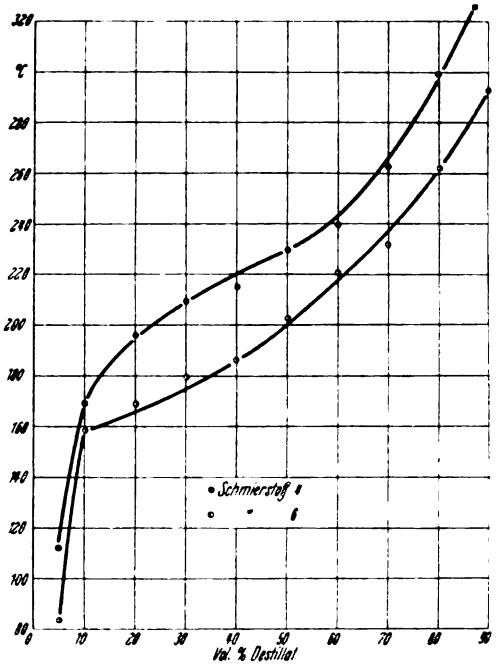


Bild 6. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Destillationsergebnisse.
×——× Schmierstoff 4, ○——○ Schmierstoff 6.

Bereits der Siedeverlauf (s. graphische Darstellungen Bild 5 und 6) läßt die Verschiedenheit der untersuchten Schmierstoffe erkennen. Den niedrigsten Siedebeginn (84° C) und auch gleichzeitig den niedrigsten Endpunkt 293° C (wobei als Endpunkt in diesem Falle die Temperatur angenommen wird, bei der 90 Vol.-% Destillat übergegangen sind), hat der naphthenische Schmierstoff 6. Den höchsten Siedeanfang von allen destillierten Schmierstoffen hat das Öl 3 (bright-stocks) mit 169° C, während die restlichen Öle mit ihrem Siedeanfang bzw. Endpunkt entsprechend dazwischen liegen. Bemerkenswert erscheinen in diesem Zusammenhang auch noch die Destillationsergebnisse der Schmierstoffe 4 und 6 untereinander, die trotz fast gleicher Viskosität bei 50° C (21,9 und 22,0° E) mit ungefähr gleichem spezifischen Gewicht bei 20° C (0,902 und 0,906), sowie gleichem mittleren Molekulargewicht (567 bzw. 569) einen derartig unterschiedlichen Siedeverlauf erkennen lassen. Die gute Übereinstimmung in den chemisch-physikalischen Eigenschaften hätte bei diesen Schmierstoffen ein ähnliches Siedeverhalten erwarten lassen. Die Rückstandsmenge ergibt bei den destillierten Schmierstoffen Unterschiede, die bei weiterer Untersuchung gleichfalls wertvolle Anhaltspunkte hinsichtlich der motorischen Rückstandsbildung zeigen dürfte. Im allgemeinen ist bei den untersuchten Schmierstoffen ein enger Siedebereich zu erkennen.

3. Fraktionierung.

Während der Siedeverlauf eines Schmierstoffes nur eine allgemeine Beurteilung zuläßt, ist durch die Untersuchung der Fraktionen die Möglichkeit gegeben, einen tieferen Einblick in den Aufbau der Schmierstoffe zu gewinnen. Die Fraktionierung wird bei der Destillation vorgenommen, und zwar wurde im vorliegenden Falle von einer Feinfraktionierung abgesehen und die jeweilige Destillatmenge — ohne Rücksicht auf den Siedebeginn des entsprechenden Schmierstoffes — in Fraktionen von: 0 bis 12,5, 12,5 bis 25,0, 25,0 bis 37,5, 37,5 bis 50,0, 50,0 bis 62,5, 62,5 bis 75,0 und 75,0 bis 87,5 Vol.-% unterteilt. Bei der angewendeten Menge von nur 200 cm³ Schmierstoff für jede Destillation standen volumenmäßig nur sehr kleine Versuchsmengen für die weiteren Untersuchungen zur Verfügung. Von den untersuchten Schmierstoffen wurden folgende Fraktionen ausgewählt: 12,5 bis 25,0 Vol.-%, 37,5 bis 50,0 Vol.-%, 50,0 bis 62,5 Vol.-%, 75,0 bis 87,5 Vol.-%, sowie der jeweilige Rückstand einer jeden Destillation. (Als Rückstand wurde in jedem Falle die Menge angesehen, die bei beginnender Zersetzung im Destillationskolben zurückblieb.) Von den vorgenannten Fraktionen wurde das spezifische Gewicht bei 20° C, die Refraktion, sowie das mittlere Molekulargewicht bestimmt. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt und auch aus Bild 7 zu ersehen. Die graphische Darstellung der spezifischen Gewichte der verschiedenen Fraktionen der untersuchten Schmierstoffe in Bild 7 läßt erkennen, daß der Schmierstoff 6 überwiegend naphthenbasischer Natur ist, während dagegen die Schmierstoffe 1 und 3 mehr paraffinbasischen Charakter tragen. Der Schmierstoff 4 ist auf Grund seiner Fraktionsergebnisse mehr naphthenischer als paraffinischer Natur. Die spezifischen Gewichte der Destillationsrückstände liegen bei allen Schmierstoffen über 0,900. Den höchsten Wert mit 0,922 erreicht der Destillationsrückstand des Schmierstoffes 6. Die Refraktionen der Fraktionen zeigen ein ähnliches Verhalten. Die Molekulargewichte der Fraktionen lassen allgemein eine gleichmäßige Zunahme erkennen. Erst in den Destillationsrückständen zeigen sie

Digitized by Google

Zahlentafel 2. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Versuchsergebnisse der fraktionierten Destillation.

Öl-Nr.	Eing.-Nr.	Spez. Gew. bei 20° C	Refraktion n_{D20}	mittl. Mol.-Gewicht
1	136/37			
	Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	0,869	1,4814	586
	» 37,5—50,0 »	0,875	1,4836	662
	» 50,0—62,5 »	0,879	1,4856	701
	» 75,0—87,5 »	0,898	1,4930	895
	Rückstand	0,904	1,4990	1277
3	Lg/5			
	Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	0,884	1,4904	555
	» 37,5—50,0 »	0,888	1,4940	665
	» 50,0—62,5 »	0,893	1,4970	732
	» 75,0—87,5 »	0,902	1,5010	908
	Rückstand	0,915	1,5130	1295
4	183/34			
	Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	0,900	1,4956	485
	» 37,5—50,0 »	0,900	1,4978	531
	» 50,0—62,5 »	0,900	1,4974	547
	» 75,0—87,5 »	0,903	1,4990	727
	Rückstand	0,917	1,5036	1878
6	192/34			
	Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	0,897	1,4970	484
	» 37,5—50,0 »	0,901	1,4972	568
	» 50,0—62,5 »	0,911	1,5020	637
	» 75,0—87,5 »	0,908	1,5004	819
	Rückstand	0,922	1,5104	1623

einen steilen Anstieg bis zu etwa 1800 (s. Schmierstoff 4). Die Steigerung der Molekulargewichte in den Destillationsrückständen findet auch Ausdruck in der bereits festgestellten Zunahme der spezifischen Gewichte.

4. Alterungsverhalten der Fraktionen.

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse, die sich bei der Untersuchung der Fraktionen zunächst nur auf die Bestimmung einiger chemisch physikalischer Daten stützen, sollen durch die Bestimmung des Alterungsverhaltens ergänzt werden. Derartige Versuche, mit den bei einer Vakuumdestillation mengenmäßig kleinen Fraktionen quantitativ durchzuführen, war bisher infolge eines geeigneten Oxydationsverfahrens nur sehr schwer zu ermöglichen. Durch die Entwicklung des DVL-Oxydationsverfahrens, das vorzugsweise die Anwendung kleiner Versuchsmengen gestattet (10 g), war es erst möglich, ohne besondere Schwierigkeiten quantitative Bestimmungen der Flüchtigkeit und Asphaltbildung in den Fraktionen der Schmierstoffe durchzuführen. Aus jeder Destillation wurden für die Alterungsbestimmung nur jeweils drei entsprechende Fraktionen herausgenommen, deren Ergebnisse in Zahlentafel 3 zusammengestellt sind. Bei allen Ergebnissen ist eine Abnahme der Flüchtigkeit und eine Zunahme der Asphaltwerte in den aufeinanderfolgenden Fraktionen festzustellen. Günstig anzusprechende

Zahlentafel 3. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Alterungsverhalten der Fraktionen.

Öl-Nr.	Fraktion Vol.-%	Spez. Gew. bei 20° C kg/l	Flüchtigkeit %	Bi-Lösl. %	Alk.-Lösl. %	Benzol-Lösl. %	Benzol-Unlösl. %
1	12,5—25,0	0,869	88,3	1,9	0,3	1,2	8,1
	37,5—50,0	0,875	65,1	15,0	0,6	3,8	15,5
	50,0—62,5	0,879	20,0	60,4	0,5	3,2	15,9
3	12,5—25,0	0,884	84,5	3,2	0,2	1,9	10,2
	37,5—50,0	0,888	61,2	18,8	0,2	6,8	13,1
	50,0—62,5	0,893	29,9	45,2	0,5	7,5	16,9
4	12,5—25,0	0,900	77,4	6,1	0,5	1,8	14,2
	37,5—50,0	0,900	51,0	21,4	0,7	5,4	21,5
	50,0—62,5	0,900	49,5	15,0	0,9	5,0	29,6
6	12,5—25,0	0,897	90,3	3,0	0,1	1,3	5,3
	37,5—50,0	0,901	64,4	10,1	0,2	6,2	10,9
	50,0—62,5	0,911	60,8	18,3	1,6	7,3	20,2

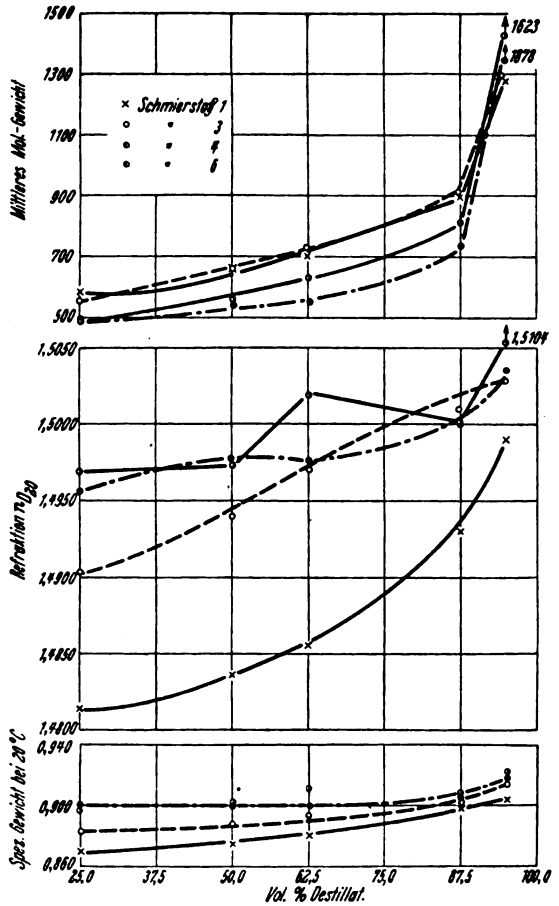


Bild 7. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen.
×———× Schmierstoff 1, ●—·—·—● Schmierstoff 4,
○– – –○ » 3, △———△ » 6.

Flüchtigkeitsabnahmen zeigen die Fraktionen der Schmierstoffe 1 und 3, dagegen sind die Flüchtigkeitsabnahmen innerhalb der betreffenden Fraktionen der Schmierstoffe 4 und 6 für die praktische Bewertung schon erheblich ungünstiger, d. h. es ergeben sich in der dritten Fraktion noch Abnahmen der Flüchtigkeit von 49,5 bzw. 60,8% im Gegensatz zu den Schmierstoffen 1 und 3, die in der gleichen Fraktion nur Abnahmen bis zu 20,0 bzw. 29,9% aufweisen. Bei den zugehörigen Asphaltwerten sind z. T. gänzlich andere Verhältnisse zu erkennen. Die größten Zunahmen in den Asphaltgehalten erfahren hier die Fraktionen der Schmierstoffe 3 und 6, ohne aber bereits in den untersuchten Fraktionen den Mittelwert der oxydierten Ausgangsöle von 13,0 bzw. 14,2% zu erreichen. Die günstigsten Asphaltwerte zeigen die Fraktionen des Schmierstoffes 1, die gleichzeitig auch ein günstiges Flüchtigkeitsverhalten haben.

Würde man das motorische Verhalten der hier untersuchten Schmierstoffe einer Klassifizierung unterziehen und dem Alterungsverhalten (mittlerer Asphaltgehalt) ihrer Fraktionen gegenüberstellen, so würde man nachfolgende Reihenfolge in der Gütebewertung erhalten:

Gütebewertung n. motorischer Eignung (n. Laufzeit im Siemens-Prüfmotor)	Gütebewertung n. Alterungsverh. (DVL-Oxydation) mittl. Asphaltgehalt der Fraktionen
1. Schmierstoff 1	Schmierstoff 1
2. » 3	» 4
3. » 4	» 6
4. » 6	» 3

Die Reihenfolge der Gütebewertung wird nur einmal unterbrochen, und zwar von dem Schmierstoff 3. Auf Grund der in seinen Fraktionen gefundenen Asphaltwerte nach der Alterung nimmt dieser Schmierstoff den vierten Platz in der Gütebewertung ein. Sofern man aber das Flüchtigkeitsverhalten mit in das Alterungsverhalten ein-

Digitized by Google

bezieht, wie es normalerweise für die praktische Beurteilung auch vorgesehen ist, so würde der Schmierstoff 3 auf Platz 2 der Gütebewertung aufrücken. Diese Gegenüberstellung dürfte damit zeigen, daß auch die Fraktionen in ihrem Alterungsverhalten eine einigermaßen gültige Beziehung zur motorischen Eignung haben. Praktische Schlüsse sollen aber aus den Untersuchungsergebnissen der hier untersuchten Fraktionen zunächst nicht gezogen werden, da die zugehörigen Destillationsrückstände der verschiedenen Schmierstoffe, die für die Gesamtbeurteilung unbedingt erforderlich sind, in dieser Zusammenstellung infolge unzureichender Versuchsmengen nicht untersucht werden konnten. Es ist zu erwarten, daß gerade durch die Untersuchung der höheren Fraktionen — einschließlich der Destillationsrückstände — hinsichtlich Asphaltbildung bei der Alterungsprüfung — noch aufschlußreiche Ergebnisse zu erhalten sind. Es kann an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, daß derartige Versuche bereits in der DVL in Angriff genommen wurden.

Beachtenswert erscheint im gleichen Zusammenhang auch die Menge des Benzolunlöslichen (Ölkohle), das bei der Alterung der Fraktionen erhalten wird. Auch hier ergeben sich noch Möglichkeiten, die bei entsprechender Bearbeitung Anhaltspunkte über die praktische Beurteilung der Schmierstoffe ergeben dürften.

5. Ringanalyse der Fraktionen.

Die in Zahlentafel 4 angeführten Ergebnisse der Ringanalyse nach Waterman[3]) jeweils gleicher Fraktionen von verschiedenen Schmierstoffen führen, trotz der beschränkten Anzahl der untersuchten Fraktionen eines jeden Schmierstoffes, zu immerhin recht bemerkenswerten Erkenntnissen über den Aufbau von nieder- und höhersiedenden Anteilen dieser Öle. Der Schmierstoff 6 erfährt bis zur Fraktion 50,0 bis 62,5 Vol.-% Destillat eine Zunahme seines spezifischen Gewichtes bis auf 0,911, dementsprechend steigt auch der Ringgehalt bis zu 30% an naphthenischen und bis zu 11% an aromatischen Ringen in diesen Fraktionen an. Bei dem Schmierstoff 4 ist hingegen bei einem gleichbleibenden spezifischen Gewicht von 0,900 in allen drei Fraktionen eine Abnahme des Ringgehaltes festzustellen (s. Zahlentafel 4). Bemerkenswert ist auch die Zunahme der naphthenischen Ringe des Schmierstoffes 6 mit steigender Fraktion und damit die Abnahme der paraffinischen Seitenketten. Erst die Fraktion 50,0 bis 62,5 Vol.-% Destillat läßt bei diesem Schmierstoff den ihm eigenen naphthenbasischen Charakter erkennen, denn die vorhergehenden Fraktionen dieses Schmierstoffes sind, wie aus den Ergebnissen der Ringanalyse zu ersehen ist, überwiegend paraffinbasischer Natur. Der Schmierstoff 4 dagegen zeigt schon in der Fraktion 12,5 bis 25,0 Vol.-% Destillat einen erhöhten naphthenbasischen Einfluß, der sich aber in den nachfolgenden Fraktionen allmählich verliert. Die Schmierstoffe 3 und 1 sind in der Konstitution ihrer Fraktionen überwiegend paraffinbasischer Natur, die in allen drei untersuchten Fraktionen etwa gleich hoch ist im Gegensatz zu den Fraktionen der beiden anderen Ölen. Schon aus diesen kurzen Betrachtungen ist zu ersehen, daß die Bestimmung des Ringgehaltes nach Waterman in den aufeinanderfolgenden Fraktionen einen tieferen Einblick in den Aufbau des Schmierstoffes gestattet als es bisher ohne Berücksichtigung der Fraktionen möglich war.

Zahlentafel 4. Kathodenvakuumdestillation von Flugmotorenölen. Ringanalyse von Fraktionen.

Eigenschaften	Schmierstoff 1			Schmierstoff 3			Schmierstoff 4			Schmierstoff 6		
	1. Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	2. Fraktion 37,5—50,0 Vol.-%	3. Fraktion 50,0—62,5 Vol.-%	1. Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	2. Fraktion 37,5—50,0 Vol.-%	3. Fraktion 50,0—62,5 Vol.-%	1. Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	2. Fraktion 37,5—50,0 Vol.-%	3. Fraktion 50,0—62,5 Vol.-%	1. Fraktion 12,5—25,0 Vol.-%	2. Fraktion 37,5—50,0 Vol.-%	3. Fraktion 50,0—62,5 Vol.-%
Spez. Gewicht bei 20°C . . . . . kg/l	0,869	0,875	0,879	0,884	0,888	0,893	0,900	0,900	0,900	0,897	0,901	0,911
Refraktion n_{D20}	1,4814	1,4836	1,4856	1,4904	1,4940	1,4970	1,4956	1,4978	1,4974	1,4970	1,4972	1,5020
Spez. Refraktion.	0,3274	0,3265	0,3262	0,3270	0,3278	0,3277	0,3243	0,3254	0,3253	0,3234	0,3245	0,3259
Mittleres Molekulargewicht	586	662	701	555	635	732	485	531	547	484	568	637
Anilinpunkt gefunden . . . . . °C	114,0	119,4	123,0	108,0	114,6	118,4	95,1	102,0	106,0	98,2	110,2	115,0
Anilinpunkt abgelesen . . . . . °C	126,1	130,0	132,3	123,4	131,8	135,6	114,3	119,3	120,8	113,8	121,4	128,2
Differenz	12,1	10,6	9,3	15,4	17,2	17,2	19,2	17,3	14,8	15,6	11,2	13,2
Anilinpunkterhöhung. . . . . °C	9,7	8,5	7,4	12,3	13,8	13,8	15,4	13,8	11,8	12,5	9,0	10,6
Anilinpkt. errechnet n. Hydrierung °C	123,7	127,9	130,4	120,3	128,4	132,2	110,5	115,8	117,8	110,7	119,2	125,6
Aromaten (0,85 × Anilinpkt. Erh.) %	8,0	7,2	6,3	10,5	11,6	11,8	13,1	11,8	10,3	10,6	7,7	9,0
Spez. Refr. (aus Anilinpkt. errechnet)	0,3254	0,3255	0,3250	0,3248	0,3253	0,3243	0,3215	0,3228	0,3235	0,3216	0,3259	0,3244
Naphthenische Ringe . . . . . %	16,0	16,0	18,0	17,0	14,0	14,0	28,0	24,0	22,0	19,0	16,0	30,0
Aromatische Ringe . . . . . %	8,0	7,0	6,0	11,0	12,0	12,0	13,0	12,0	10,0	11,0	8,0	9,0
Paraffinische Seitenketten . . . . %	76,0	77,0	76,0	72,0	74,0	74,0	59,0	64,0	68,0	70,0	76,0	61,0

E. Zusammenfassung.

Es wurde ein Destillationsverfahren im Kathodenvakuum nebst Destillationsergebnissen beschrieben und erörtert. Die Destillationsapparatur besteht im wesentlichen aus einer Kupferblase von 200 cm³ Fassungsvermögen und einer Brühlschen Vorlage mit Messingdeckel. Diese Vorlage besitzt Anschlußvorrichtung für eine dreistufige Quecksilber-Pumpe, für eine Geißler-Röhre zur qualitativen Beobachtung des Kathodenvakuums, sowie einen Anschluß für einen

[3]) Vlughter, Waterman u. van Westen, Petr. Techn. Bd. 21 (1935).

Digitized by Google

Mc.Leod-Manometer zur Messung des in der Vorlage herrschenden Vakuums. Die Anschlußstellen sind zumeist als konische Dichtungen mit Ölverschluß ausgebildet. Die Temperaturmeßstelle zur Messung der Öldampftemperatur ist in ihrem oberen Teil zwecks Vermeidung von Temperaturstrahlungen aus Neusilber angefertigt. Vermittels dieser Destillationsapparatur kann ein Vakuum bis zu 0,001 mm Hg erreicht werden. Reproduzierbare Ergebnisse konnten auch noch mit einem Vakuum von 0,01 mm Hg erhalten werden. Es wurde an einigen Beispielen gezeigt, wie die Fraktionierung, ergänzt durch Untersuchungen, nach dem DVL-Oxydationsverfahren und der Ringanalyse zur Konstitutionsermittlung und zur Beurteilung des praktischen Verhaltens von Schmierstoffen herangezogen werden kann.

Es konnte in dieser Arbeit nur ein Teil der Fraktionen eines jeden Schmierstoffes untersucht werden. Einer späteren Arbeit bleibt es vorbehalten, durch Ausdehnung der hier angegebenen Untersuchungen auf sämtliche Fraktionen, insbesondere auch auf die Destillationsrückstände ein vollständiges Bild vom Aufbau der Schmierstoffe, geordnet nach höher- und niedersiedenden Bestandteilen, zu erhalten.

Digitized by Google

Digitized by Google

East Engin.
Library

JUN 23 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 5 enthält Arbeiten von: W. Mangler S. 219-228, B. Göthert S. 229-246, K. L. Stellmacher - E. Schmid S. 247-250, Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937 38 S. 251, F. R. Schmidt S. 251-275, Th. Hoock S. 276-282

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 5 SEITE 219 BIS 282 | MÜNCHEN, 20. 5. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Die Auftriebsverteilung am Tragflügel mit seitlichen Scheiben. Von W. Mangler . . . . . Seite 219

Einfluß von Flächenbelastung, Flügelstreckung und Spannweitenbelastung auf die Flugleistungen. Von B. Göthert . . . . . Seite 229

Zum Schulerschen Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung. Von K. L. Stellmacher-E. Schmid . . . . . Seite 247

Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38 . . . . . Seite 251

Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren. Von F. R. Schmidt . . . . . Seite 251

Untersuchung der Gaswechselvorgänge verschiedener Ventilsteuerungen und die erzielbaren Grenzwerte von ε, p_{mc} und b_e. Von Th. Hoock . . . . . Seite 276

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern: bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 | 20. Mai 1939 | Lfg. 5

Die Auftriebsverteilung am Tragflügel mit seitlichen Scheiben.

Von W. Mangler.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (Luftfahrt-Forschung Bd. 14 (1937) S. 564 bis 569) werden für den Fall des geringsten induzierten Widerstandes die Auftriebsverteilung über Flügel mit senkrechten Scheiben (Doppelseitenleitwerk) und die auftretenden Momente berechnet. Außerdem wird die Auftriebsverteilung über Flügel mit seitlich aufgebogenen äußeren Enden bestimmt.

Gliederung.

I. Aufgabe.
II. Auftrieb und Momente.
III. Die Abbildung.
IV. Das Potential.
V. Numerische Ergebnisse.
VI. Zusammenfassung.
VII. Schrifttum.

(Der mathematisch weniger interessierte Leser kann die Abschnitte III und IV übergehen.)

Bezeichnungen.

b Spannweite, t Tiefe, t_m mittlere Tiefe, t_0 Tiefe in der Mitte, F Fläche des Tragflügels,

k_o (bzw. k_u) Verhältnis der Höhe des oberen (bzw. unteren) Scheibenteiles zur halben Spannweite,

$k = \frac{k_o}{k_u}$ Verhältnis der Höhe des oberen zur Höhe des unteren Scheibenteiles,

$h/b = \frac{k_o + k_u}{2}$ Verhältnis der Höhe der Endscheibe zur Spannweite,

l_i Verhältnis des Abstandes der Scheibe von der Flügelmitte zur halben Spannweite,

$l = \frac{1 - l_i}{l_i}$ Verhältnis der Länge des außerhalb der Scheiben liegenden Teiles des Flügels zur Länge des innerhalb der Scheiben liegenden Flügelteiles,

ε Neigungswinkel der Scheiben,

F_o Fläche des oberhalb des Flügels liegenden Scheibenteiles,

F_u Fläche des unterhalb des Flügels liegenden Scheibenteiles,

$\bar{\xi}$ die (auf $b/2 = 1$ bezogene) Koordinate längs der Spannweite des Tragflügels,

$\bar{\eta}$ die (auf $b/2 = 1$ bezogene) Koordinate senkrecht zum Tragflügel,

$\zeta = \xi + i\eta$ Koordinaten in der Schnittebene durch die vom Flügel abgehende Wirbelfläche (bezogen auf $b/2 = 1$),

V Anströmgeschwindigkeit,

ϱ Luftdichte,

w_i die durch die abgehenden Wirbel am Flügel erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit,

$w = 2\,w_i$ die durch die abgehenden Wirbel in großem Abstand hinter dem Flügel erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit,

$\alpha_i = \frac{w_i}{V}$ induzierter Anstellwinkel,

α^* effektiver Anstellwinkel,

α geometrischer Anstellwinkel,

α_m mittlerer geometrischer Anstellwinkel,

α_0 geometrischer Anstellwinkel in Flügelmitte,

Γ Zirkulation an einer Stelle des Flügels,

Γ_0 Zirkulation in der Flügelmitte,

Γ_m mittlere Zirkulation,

Γ_s Zirkulation an einer Stelle der Scheibe,

A Gesamtauftrieb,

c_a Auftriebsbeiwert des Flügels,

c_a^* örtlicher Auftriebsbeiwert,

c_{a0}^* örtlicher Auftriebsbeiwert in Flügelmitte,

$c_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\,c_a^*}{d\,\alpha^*}$ Abhängigkeit des Auftriebs vom Anstellwinkel beim unendlich breiten Tragflügel,

W_i induzierter Widerstand,

c_{wi} Beiwert des induzierten Widerstandes,

S_o (bzw. S_u) Seitenkraft am oberen (bzw. unteren) Teil der Scheibe,

c_{so} (bzw. c_{su}) Seitenkraftbeiwert, bezogen auf F_o (bzw. auf F_u),

M_o (bzw. M_u) das durch S_o (bzw. S_u) in bezug auf die Ansatzstelle der Scheibe ausgeübte Moment,

η_o (bzw. η_u) Angriffspunkt der Seitenkraft am oberen (bzw. unteren) Teil der Scheibe,

$\varkappa$ Verhältnis des induzierten Widerstandes eines Flügels mit Scheiben zum induzierten Widerstand eines elliptischen Flügels mit demselben Seitenverhältnis und demselben c_a,

μ Verhältnis von $c_a \cdot t_m$ eines Flügels mit Scheiben zu $c_a \cdot t_m$ eines Flügels ohne Scheiben bei gleichem $c_{a0}^* \cdot t_0$.

I. Aufgabe.

Tragflügel mit zum Flügel senkrechten Scheiben, die in Flugrichtung stehen, sind bei der Konstruktion von Leitwerken mit zwei- oder dreifachem Seitenruder wichtig geworden. Im Anschluß an eine frühere Arbeit [1] über Auftrieb und Momente von Flügeln mit Endscheiben soll hier der allgemeinere Fall behandelt werden, daß die Scheiben eingerückt sind, Bild 1. Numerisch durchgerechnet sind einige Spezialfälle, und zwar einerseits der Fall der symmetrisch zum Tragflügel angebrachten Scheiben, anderseits

Digitized by Google

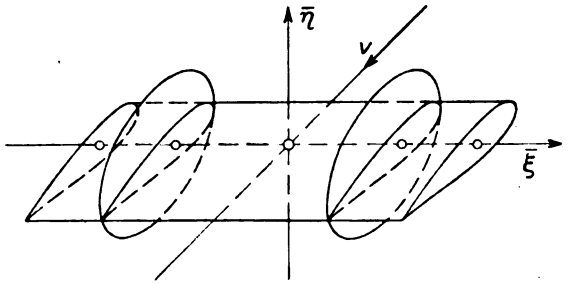


Bild 1. Tragflügel mit senkrechten Scheiben.

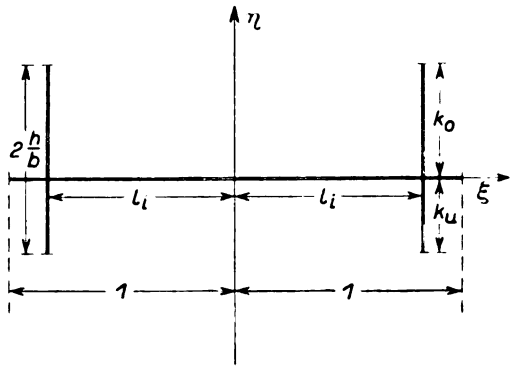


Bild 2. Schnitt durch die vom Flügel mit Scheiben abgehende Wirbelfläche.

der Fall der auf dem Flügel aufgesetzten Scheiben. Daraus läßt sich dann ein Überblick für den Fall beliebig angebrachter senkrechter Scheiben gewinnen.

Die hierfür aufgestellten Formeln lassen sich ohne weiteres auch auf den Fall übertragen, daß die Scheiben nicht senkrecht zum Flügel stehen, sondern geneigt sind. Daraus lassen sich Auftrieb und Momente eines Flügels ableiten, dessen äußere Teile um den Winkel ε nach oben gebogen sind (U- und V-Stellung; Bild 4).

Es wird wieder nur der Fall des kleinsten induzierten Widerstandes behandelt, d. h. es wird angenommen, daß der Abwind über die Spannweite konstant ist. Für die praktische Anwendung kann man bekanntlich von dieser Voraussetzung absehen, da die Ergebnisse des Minimumproblems auch sonst noch mit hinreichender Genauigkeit gelten.

II. Auftrieb und Momente.

Zur Berechnung der Auftriebsverteilung über den in Bild 1 dargestellten Flügel haben wir, wie schon in [1] ausgeführt, so vorzugehen: Falls die durch die abgehenden Wirbel am Flügel erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit w_i und dämit auch die weit hinter dem Flügel erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit $w = 2\,w_i$ klein gegenüber der Anströmgeschwindigkeit ist, hat ein Schnitt senkrecht zur Anströmrichtung durch die abgehenden Wirbel die in Bild 2 angegebene Gestalt; längs der Spannweite herrscht die konstante Abwärtsgeschwindigkeit w, während durch die Scheiben nichts hindurchströmt. Um das Problem stationär zu machen, können wir statt dessen die Umströmung der in Bild 2 dargestellten Wand behandeln, die mit der Geschwindigkeit $w = 2\,w_i$ senkrecht von unten her angeströmt wird.

Ist $\Phi + i\Psi$ das komplexe Potential dieser Strömung, so ist die Zirkulation an einer Stelle des Flügels bzw. der Endscheibe gegeben durch den Sprung, den das Potential an der Stelle ξ bzw. $l_i + i\,\eta$ in der Schnittebene weit hinter dem Flügel, der ζ-Ebene, erleidet. Wir haben daher wie früher in [1] für die mit der Abwärtsgeschwindigkeit w und der halben Spannweite $b/2$ dimensionslos gemachte Zirkulation:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Gamma(\bar{\xi})}{w\cdot b/2} &= \frac{\Phi_2(\xi)-\Phi_1(\xi)}{w\cdot b/2}\\ \frac{\Gamma_s(\bar{\eta})}{w\cdot b/2} &= \frac{\Phi_2(l_i+i\,\eta)-\Phi_1(l_i+i\,\eta)}{w\cdot b/2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

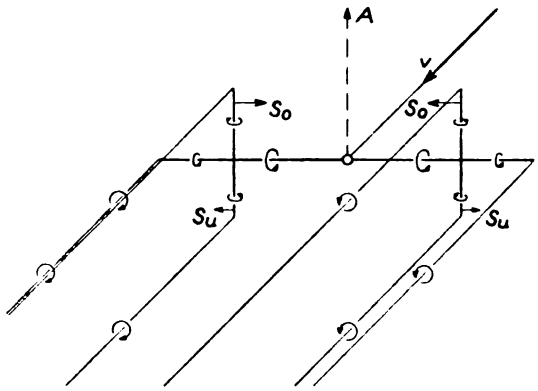


Bild 3. Die gebundenen und die freien Wirbel.

Aus den Zirkulationsverteilungen $\Gamma(\bar{\xi})$ und $\Gamma_s(\bar{\eta})$ lassen sich der Auftrieb A und die an den Scheiben auftretenden Seitenkräfte S_o und S_u, Bild 3, in folgender Weise bestimmen. Wir setzen für die mittlere Zirkulation

$$J = \int_0^1 \frac{\Gamma(\bar{\xi})}{w\cdot b/2}\,d\bar{\xi} = \frac{\Gamma_m}{w\cdot b/2} \quad \ldots \quad (2)$$

Für den Tragflügel ohne Scheiben (elliptische Zirkulationsverteilung) wird $J = J_e = \frac{\pi}{2}$. Der Verhältnis $\frac{J}{J_e}$ bezeichnen wir mit $1/\varkappa$; dann ist

$$\varkappa = \frac{J_e}{J} = \frac{\pi}{2\,J} \quad \ldots \quad (3)$$

stets kleiner als 1, wie sich zeigen wird. Für den Auftrieb finden wir mit Hilfe des Kutta-Joukowskyschen Satzes den Wert

$$A = c_a\cdot\frac{\varrho}{2}V^2\cdot F = \varrho\,V\,b\cdot\Gamma_m = \varrho\,V\,w\,b^2\cdot\frac{\pi}{4\,\varkappa} \quad \ldots \quad (4)$$

also, da $w = 2\,w_i$, ist,

$$c_a = \frac{w_i}{V}\cdot\frac{b^2}{F}\cdot\frac{\pi}{\varkappa} \quad \ldots \quad (5)$$

Der induzierte Anstellwinkel $\alpha_i = \frac{w_i}{V}$ ist nach (4) gegeben durch

$$\alpha_i \approx \operatorname{tg}\alpha_i = \frac{w_i}{V} = \frac{c_{w_i}}{c_a} = c_a\frac{F}{\pi\,b^2}\cdot\varkappa, \quad \ldots \quad (6)$$

so daß sich für den Beiwert des induzierten Widerstandes ergibt

$$c_{w_i} = c_a{}^2\cdot\frac{F}{\pi\,b^2}\cdot\varkappa \quad \ldots \quad (7)$$

Der Faktor $\varkappa$ bezeichnet also gleichzeitig die Abweichung der Widerstandsziffer von der des elliptischen Flügels ohne Scheiben, für den ja $\varkappa = 1$ wird.

Um die Abhängigkeit des Auftriebs und des induzierten Widerstandes vom Anstellwinkel α zu bestimmen, können wir die Prandtlsche Tragflügeltheorie anwenden. Bezeichnen wir mit α^* den effektiven Anstellwinkel gegenüber der Nullauftriebsrichtung in jedem Flügelschnitt und setzen wir für den unendlich breiten Tragflügel $2\,c_1 = \frac{d\,c_a^*}{d\,\alpha^*}$, so ist

$$\frac{\Gamma}{V\,t} = c_1\,\alpha^* = \frac{\Gamma}{w\cdot b/2}\cdot\frac{w_i}{V}\cdot\frac{b}{t} = \frac{\Gamma}{w\cdot b/2}\cdot\frac{b}{t}\cdot\alpha_i \quad (8)$$

Der geometrische Anstellwinkel α setzt sich aus dem effektiven und dem induzierten zusammen:

$$\alpha_i + \alpha^* = \alpha \quad \ldots \quad (9)$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit t und Integration über die Spannweite von $\bar{\xi} = -1$ bis $\bar{\xi} = +1$

$$\alpha_i\int_{-1}^{+1}\left[t + \frac{b}{c_1}\cdot\frac{\Gamma}{w\cdot b/2}\right]d\bar{\xi} = \int_{-1}^{+1}(\alpha\,t)\,d\bar{\xi}$$

oder, wenn wir mit

Digitized by Google

$$t_m = \frac{F}{b} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t\, d\bar{\xi}$$

die mittlere Tiefe und mit

$$(\alpha t)_m = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (\alpha t)\, d\bar{\xi}$$

den Mittelwert von αt bezeichnen,

$$\alpha_i \left[2 t_m + \frac{b}{c_1} \cdot 2 J\right] = 2 (\alpha t)_m,$$

woraus sich mit Hilfe von (3) und (6) ergibt:

$$c_a = \frac{(\alpha t)_m}{t_m} \cdot \frac{2 c_1}{1 + 2 c_1 \frac{F}{\pi b^2} \varkappa} \quad \ldots\ldots (10)$$

Falls wir $\varkappa$ konstant wählen, was wegen (9) nur geht, wenn auch α^* und damit $\frac{\Gamma}{V t}$ konstant ist, dann ist $\frac{(\alpha t)_m}{t_m} = \alpha$. Falls wir t konstant wählen (Rechteckflügel), was zur Folge hat, daß der Flügel verwunden sein muß, dann ist $\frac{(\alpha t)_m}{t_m}$ gleich dem Mittelwert α_m von α. Die zu einer vorgegebenen Tiefenverteilung $t(\bar{\xi})$ für den Fall des geringsten induzierten Widerstandes nötige Verwindung ergibt sich aus der Zirkulationsverteilung, wenn wir mit Γ_0 die Zirkulation, mit $\varkappa_0$ den Anstellwinkel und mit t_0 die Tiefe in der Flügelmitte bezeichnen,

$$\frac{\alpha(\bar{\xi})}{\alpha_0} = \frac{1 + \frac{1}{c_1}\frac{b}{t(\bar{\xi})}\frac{\Gamma(\bar{\xi})}{w \cdot b/2}}{1 + \frac{1}{c_1}\frac{b}{t_0}\cdot\frac{\Gamma_0}{w \cdot b/2}} \quad \ldots\ldots (11)$$

wie man leicht durch Einsetzen von (8) in (9) nachrechnen kann.

Wollen wir alle Rechnungen statt auf die Mittelwerte von t und α lieber auf die Werte in der Flügelmitte beziehen, so müssen wir das Verhältnis von $c_a \cdot t_m$ zu $c_{a0}^* \cdot t_0$ einführen, wobei c_{a0}^* den Auftriebsbeiwert in Flügelmitte für den Fall der ebenen Strömung bezeichnet. Da dieses Verhältnis für den Flügel ohne Scheiben gleich $\frac{t_m}{t_0} = \frac{\pi}{4}$ wird, setzen wir

$$\frac{c_a t_m}{c_{a0}^* \cdot t_0} = \frac{\pi}{4} \cdot \mu \quad \ldots\ldots (12)$$

Da $c_a = \frac{2\Gamma_m}{V t_m}$ ist und ebenso $c_{a0}^* = \frac{2\Gamma_0}{V t_0}$, wird nach (1) und (3)

$$\frac{\pi}{4}\mu = \frac{\Gamma_m}{\Gamma_0} = \frac{\pi/2\,\varkappa}{\Gamma_0/w\,b/2} = \frac{w \cdot b}{\Gamma_0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\varkappa}.$$

Das Verhältnis $\frac{\Gamma_0}{w \cdot b/2}$ ist leicht aus den Zirkulationsverteilungen zu entnehmen, so daß man μ aus

$$\mu = \frac{w \cdot b}{\Gamma_0 \varkappa} \quad \ldots\ldots (13)$$

berechnen kann.

Weiter ist $c_{a0}^* = 2 c_1 \cdot (\alpha_0 - \alpha_i)$, also nach (12)

$$c_a \frac{t_m}{t_0} \cdot \frac{4}{\pi \mu} = 2 c_1 (\alpha_0 - \alpha_i),$$

woraus sich mit Hilfe von (6) und (13) durch eine leichte Rechnung ergibt

$$c_a = \frac{b^2}{F} \cdot \frac{\pi}{\varkappa} \cdot \frac{\alpha_0}{1 + \frac{1}{c_1}\frac{2}{\varkappa \mu}\cdot\frac{b}{t_0}} \quad \ldots\ldots (14)$$

Die an der Scheibe auftretenden Kräfte und Momente werden wie früher [1] bestimmt, Bild 3. Durch die Anströmung V entsteht an den Scheiben eine zu V und zur Scheibe senkrechte Kraft, die im oberen Teile nach innen, im unteren Teile nach außen gerichtet ist. Die von den beiden Scheiben erzeugten Kräfte heben einander auf, aber sie üben auf den Flügel ein Biegemoment aus.

Für die Seitenkraft S_o im oberen Teile der Scheibe ergibt sich

$$S_o = \frac{\varrho}{2} V^2 \cdot F_o \cdot c_{so} = \varrho V \frac{b^2}{4} w J_o \quad \ldots\ldots (15)$$

falls wir

$$J_o = \int_0^{k_o} \frac{\Gamma_s(\bar{\eta})}{w \cdot b/2}\, d\bar{\eta} \quad \ldots\ldots (16)$$

setzen. Aus (4) und (15) ergibt sich dann

$$\frac{S_o}{A} = \frac{J_o}{2J} = \frac{c_{so}}{c_a} \cdot \frac{F_o}{F} \quad \ldots\ldots (17)$$

und für die Seitenkraft im unteren Teil der Scheibe

$$\frac{S_u}{A} = \frac{J_u}{2J} = \frac{c_{s_u}}{c_a} \cdot \frac{F_u}{F}, \quad \ldots\ldots (18)$$

wenn wir setzen

$$J_u = \int_{-k_u}^{0} \frac{\Gamma_s(\bar{\eta})}{w \cdot b/2}\, d\bar{\eta} \quad \ldots\ldots (19)$$

Die Seitenkraft S_o übt auf die Ansatzstelle der Scheibe das Moment M_o aus:

$$M_o = \varrho V \frac{b^3}{8} w \cdot J_o^* \quad \ldots\ldots (20)$$

mit

$$J_o^* = \int_0^{k_o} \frac{\Gamma_s(\bar{\eta})}{w \cdot b/2}\, \bar{\eta}\, d\bar{\eta}, \quad \ldots\ldots (21)$$

woraus sich für den Hebelarm $\eta_0 \cdot \frac{b}{2}$ der Seitenkraft S_o der Wert ergibt

$$\eta_0 = \frac{M_o}{S_o \cdot b/2} = \frac{J_o^*}{J_o} \quad \ldots\ldots (22)$$

Entsprechend ist

$$\eta_u = \frac{J_u^*}{J_u} \quad \ldots\ldots (23)$$

mit

$$J_u^* = \int_{-k_u}^{0} \frac{\Gamma_s(\bar{\eta})}{w \cdot b/2}\, \bar{\eta}\, d\bar{\eta} \quad \ldots\ldots (24)$$

der Angriffspunkt der Seitenkraft S_u am unteren Scheibenteil.

Zur Ermittlung der Gestalt der Scheiben im Fall des geringsten induzierten Widerstandes können wir dieselbe Überlegung anstellen wie oben. Dabei ist nur zu beachten, daß der induzierte Anstellwinkel der Scheibe Null ist, weil die abgehende Wirbelfläche sich nach unserer Annahme starr senkrecht nach unten bewegt, so daß der induzierte Abwind keine Komponente senkrecht zur Scheibe hat. Für den Zusammenhang zwischen Verwindung und Tiefenverteilung ergibt sich jetzt:

$$\alpha_s(\bar{\eta}) = \frac{\Gamma_s(\bar{\eta})}{c_1 V t(\bar{\eta})} \quad \ldots\ldots (25)$$

Hat der Schnitt durch die abgehende Wirbelfläche die in Bild 4 gezeichnete Gestalt, so entspricht die zugehörige Zirkulationsverteilung einem Flügel, dessen äußere Teile um den Winkel ε nach oben gebogen sind (U- bzw. V-Stellung). Bezeichnet $\bar{\xi}$ wie früher die Bogenlänge längs des geraden Flügelteiles und $\bar{\sigma} = \frac{\bar{\xi} - l_i}{\cos\varepsilon} = \frac{\bar{\eta}}{\sin\varepsilon}$ die Bo-

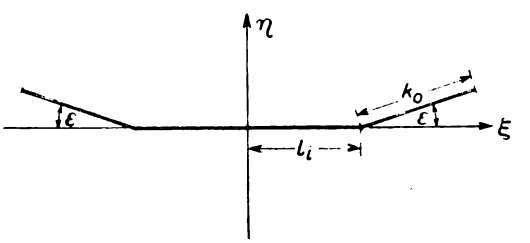


Bild 4. Flügel mit U-Stellung.

Digitized by Google

genlänge des aufgebogenen Teiles, dann gilt entsprechend (1) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Gamma(\bar\xi)}{w\cdot b/2} &= \frac{\Phi_2(\bar\xi)-\Phi_1(\bar\xi)}{w\cdot b/2}\\ \frac{\Gamma_s(\bar\sigma)}{w\cdot b/2} &= \frac{\Phi_2(\bar\sigma)-\Phi_1(\bar\sigma)}{w\cdot b/2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (26)$$

Setzen wir $J = J_1 + J_2$, wobei

$$J_1 = \int_0^{l_i} \frac{\Gamma(\bar\xi)}{w\cdot b/2}\, d\bar\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

und

$$J_2 = \int_0^{k_0} \frac{\Gamma_s(\bar\sigma)}{w\cdot b/2}\cdot\cos\varepsilon\, d\bar\sigma = \int_{l_i}^{l_i+k_0\cos\varepsilon} \frac{\Gamma_s(\bar\xi)}{w\cdot b/2}\, d\bar\xi \quad \ldots (28)$$

gesetzt ist, und

$$J_0 = \int_0^{k_0} \frac{\Gamma_s(\bar\sigma)}{w\cdot b/2}\cdot\sin\varepsilon\, d\bar\sigma = \int_0^{k_0\sin\varepsilon} \frac{\Gamma_s(\bar\eta)}{w\cdot b/2}\, d\bar\eta \quad \ldots (29)$$

$$J_0^* = \int_0^{k_0\sin\varepsilon} \frac{\Gamma_s(\bar\eta)}{w\cdot b/2}\,\bar\eta\, d\bar\eta, \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

so gelten für c_a, c_{wi}, S_o und η_0 die früher abgeleiteten Formeln (5), (7), (10), (14), (17) und (22), wenn wir unter der Flügelfläche die Projektion des Flügels und der aufgebogenen Enden auf die Flügelebene verstehen. Der Grenzfall des V-Flügels ($l_i = 0$) mußte besonders behandelt werden, weil dann die Approximation eines Parabelbogens durch einen Kreisbogen, wie sie bei der konformen Abbildung in Abschnitt III vorkommt, nicht mehr erlaubt ist. Die Zirkulationsverteilung über den Flügel mit V-Stellung ließ sich aber ganz einfach direkt berechnen.

III. Die Abbildung.

Um das komplexe Potential $\Phi + i\Psi$ in der ζ-Ebene zu bestimmen, bilden wir die rechte ζ-Halbebene, Bild 5, so auf die obere Halbebene der z-Ebene, Bild 6, konform ab, daß der rechte Teil des Schlitzes und die imaginäre Achse der ζ-Ebene in die reelle Achse der z-Ebene übergehen. Für spätere Anwendungen behandeln wir gleich den allgemeinen Fall, daß die Scheibe um den Winkel ε zum Flügel geneigt ist. Bei der üblichen Abbildung nach dem Satz von Schwarz-Christoffel würde sich, wie schon in [1] ausgeführt wurde, ein Integral ergeben, das sich nicht mit den bekannten Methoden behandeln läßt. Wir können aber durch eine

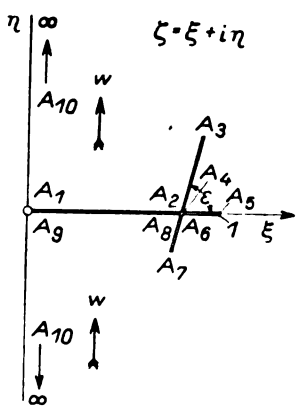


Bild 5. Die ζ-Ebene.

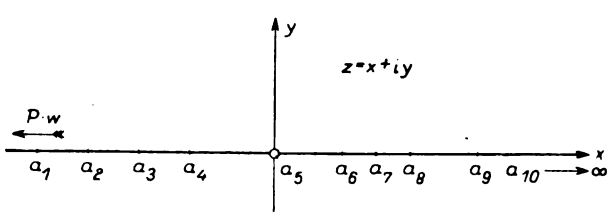


Bild 6. Die z-Ebene.

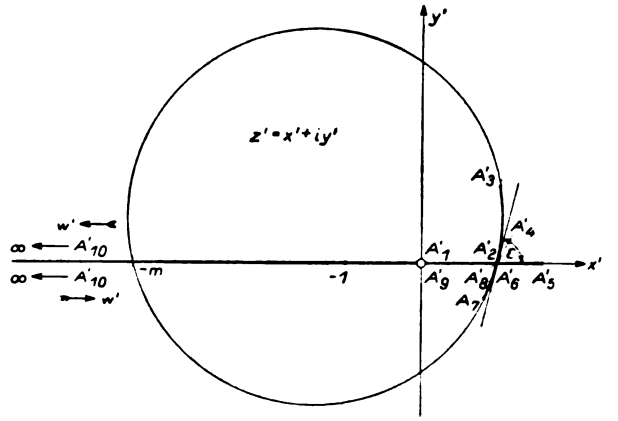


Bild 7. Die z'-Ebene.

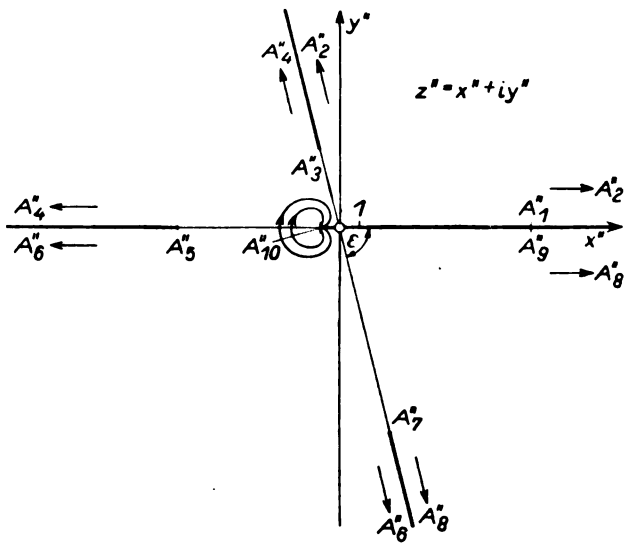


Bild 8. Die z''-Ebene.

in den uns interessierenden Fällen erlaubte Annäherung eine starke Vereinfachung erreichen. Wir können nämlich wie in [1] einen Parabelbogen durch einen Kreisbogen ersetzen, was darauf hinaus kommt, daß wir uns die ebenen Scheiben durch solche ersetzt denken, die schwach nach außen gewölbt sind.

Die konforme Abbildung der ζ- auf die z-Ebene führen wir in drei Schritten durch:

1. Abbildung: $\zeta = l_i\sqrt{z'}$ . . . . . (I)

Wir bilden die rechte ζ-Halbebene auf die volle z'-Ebene (Bild 7) ab, wobei die Projektion der Scheibe in einen Parabelbogen übergeht. Diesen ersetzen wir dann durch einen Kreisbogen, der im Punkt $x' = 1$ mit der x'-Achse ebenfalls den Winkel ε einschließt und durch den Punkt A_3' mit den Koordinaten

$$x_3' = 1 + 2\frac{k_0}{l_i}\cos\varepsilon + \frac{k_0^2}{l_i^2}\cos 2\varepsilon,$$

$$y_3' = 2\frac{k_0}{l_i}\sin\varepsilon\left(1 + \frac{k_0}{l_i}\cos\varepsilon\right)$$

hindurchgeht. Diese Näherung ist innerhalb der erreichbaren Rechengenauigkeit sicher erlaubt, solange $\frac{k_0}{l_i} \leq 1$ bzw. $\frac{k_u}{l_i} \leq 1$ ist. Dabei projizieren wir alle Parabelpunkte auf den Kreis, z. B. parallel zur x'-Achse. Der Punkt A_7' geht dabei in einen Punkt über, der ebenfalls mit A_7' bezeichnet sei. Der Kreis schneidet die reelle Achse in den Punkten $x' = 1$ und $x' = -m = -\left(3 + 4\frac{k_0}{l_i}\cos\varepsilon + \frac{k_0^2}{l_i^2}\right)$.

2. Abbildung: $z' = \frac{z''-m}{z''+1}$ . . . . . (II)

Digitized by Google

Durch eine lineare Transformation bilden wir die z'-Ebene so auf die z''-Ebene, Bild 8, ab, daß der Kreis und die reelle Achse je in eine Gerade übergehen. Dann entsprechen dem Schlitz und der imaginären Achse der ζ-Ebene lauter Geradenstücke der z''-Ebene, so daß wir wieder den Abbildungssatz von Schwarz-Christoffel anwenden können. Ordnen wir dem Punkt $\zeta = A_j$ bzw. $z'' = A_j''$ den Punkt $z = a_j$ zu, wobei wir noch $a_5 = 0$ und $a_{10} = \infty$ wählen, so finden wir für die dritte Abbildung den Ausdruck:

3. Abbildung:

$$z'' = C_1 + C \int_0^z \frac{(t-a_3)\, t\, (t-a_7)\, dt}{[(t-a_2)\,(t-a_6)]^{2-\varepsilon/\pi}\,[(t-a_4)\,(t-a_8)]^{1+\varepsilon/\pi}} \quad \ldots\ldots \text{(III)}$$

Da dieses Integral sich nur in Spezialfällen allgemein integrieren läßt, gehen wir so vor, daß wir für z'' einen Ansatz machen

$$z'' = -\frac{z^2 + A\,z + B}{[(z-a_2)\,(z-a_6)]^{1-\varepsilon/\pi}\,[(z-a_4)\,(z-a_8)]^{\varepsilon/\pi}} \quad \ldots \text{(31)}$$

der durch die Gestalt der Abbildungsfunktion in Spezialfällen nahegelegt wird. In dem Ansatz sind schon die Annahmen enthalten, daß dem Punkt $z = \infty$ der Punkt $z'' = -1$ und dem Schnittpunkt der beiden Geraden der z''-Ebene der Punkt $z'' = 0$ zugeordnet ist. Durch Differenzieren und Koeffizientenvergleich mit (III) finden wir aus (31) die folgenden Gleichungen:

$$A = -\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)(a_2+a_6) + \frac{\varepsilon}{\pi}(a_4+a_8)\right] \quad \ldots\ldots \text{(32)}$$

$$C = -2B + A\left[\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot(a_2+a_6) + \left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\cdot(a_4+a_8)\right] + (a_2+a_6)(a_4+a_8) + 2\frac{\varepsilon}{\pi}a_4 a_8 + 2\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_2 a_6 \quad \text{(33)}$$

$$C(a_3+a_7) = \left(2-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_2 a_6 (a_4+a_8) + \left(1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_4 a_8 (a_2+a_6) - A(a_2 a_6 - a_4 a_8)\left(1-2\frac{\varepsilon}{\pi}\right) - B\left[\left(2-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)(a_4+a_8) + \left(1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)(a_2+a_6)\right] \quad \ldots\ldots \text{(34)}$$

$$C\,a_3 a_7 = -B\left[(a_2+a_6)(a_4+a_8) + 2\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_4 a_8 + 2\frac{\varepsilon}{\pi}a_2 a_6\right] - A\left[\frac{\varepsilon}{\pi}a_4 a_8 (a_2+a_6) + \left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_2 a_6 (a_4+a_8)\right] + 2\,a_2 a_4 a_6 a_8 \quad \ldots\ldots \text{(35)}$$

$$0 = A\,a_2 a_4 a_6 a_8 + B\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_4 a_8 (a_2+a_6) + \frac{\varepsilon}{\pi}a_2 a_6 (a_4+a_8)\right] \quad \ldots\ldots \text{(36)}$$

In diesen 5 Gleichungen kommen 9 reelle Konstanten vor. Da die a_j nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, brauchen wir noch 3 Gleichungen, die durch die Lage der Punkte A_3'', A_5'', A_7'' in der z''-Ebene gegeben sind:

$$A_5'' = -\frac{1+3\,l_i^2+4\,l_i\,k_0\cos\varepsilon + k_0^2}{1-l_i^2} = \frac{-|B|}{a_2 a_6^{\,1-\varepsilon/\pi}\,|a_4 a_8|^{\varepsilon/\pi}} \quad \ldots\ldots \text{(37)}$$

$$A_3'' = 2\left(\cos\varepsilon + \frac{l_i}{k_0}\right)e^{i(\pi-\varepsilon)} = \frac{|a_3^2 + a_3 A + B|\cdot e^{i(\pi-\varepsilon)}}{[(a_3-a_2)\,(a_6-a_3)]^{1-\varepsilon/\pi}\,[(a_4-a_3)\,(a_8-a_3)]^{\varepsilon/\pi}} \quad \text{(38)}$$

$$A_7'' = \frac{|a_7^2 + a_7 A + B|}{[(a_7-a_2)\,(a_7-a_6)]^{1-\varepsilon/\pi}\,[(a_7-a_4)\,(a_8-a_7)]^{\varepsilon/\pi}} \quad \text{(39)}$$

Wir haben also ebenso viele Gleichungen, wie Parameter vorkommen. Die konforme Abbildung der von vier Punkten aus aufgeschlitzten Ebene auf die obere Halbebene ist daher mit Hilfe unseres Ansatzes streng lösbar, falls die Schlitze zu je zwei auf einer Geraden liegen. Falls der Faktor von B in (36)

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_4 a_8 (a_2+a_6) + \frac{\varepsilon}{\pi}a_2 a_6 (a_4+a_8) \neq 0$$

ist, können wir aus (32) bis (36) die Größen A, B, a_3, a_7 bestimmen, so daß wir durch geeignete Wahl von a_2, a_4, a_6, a_8 nur noch die Gleichungen (37), (38) und (39) erfüllen müssen, was im allgemeinen nur durch systematisches Probieren möglich ist.

Der Faktor von B in (37) kann aber in einigen uns interessierenden Spezialfällen auch Null sein, nämlich

1. im Fall der symmetrischen Scheiben:
$$\frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{1}{2},\quad a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 0;$$
2. im Fall der senkrechten Endscheiben (vgl. die frühere Arbeit [1])
$$a_4 = a_6 = 0;\quad \frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{1}{2};$$
3. im Fall der einseitigen Endscheiben mit beliebiger Neigung (U- bzw. V-Stellung)
$$a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = 0.$$

Im ersten Fall wird $k_o = k_u$, und

$$\left.\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{2\,a_2^2 a_4^2 - a_3^2(a_2^2 + a_4^2)}{2\,a_3^2 - (a_2^2 + a_4^2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(40)}$$

$$A_3'' = -A_7'' = 2\frac{l_i}{k_0}\cdot i = \frac{a_3^2 + B|\,i}{\sqrt{(a_3^2 - a_2^2)(a_4^2 - a_3^2)}} \quad \text{(41)}$$

$$A_5'' = -\frac{1+3\,l_i^2 + k_0^2}{1-l_i^2} = -\frac{|B|}{|a_2 a_4|} \quad \ldots\ldots \text{(42)}$$

Aus (41) und (42) lassen sich a_2, a_3, a_4 bestimmen, wenn wir noch die Einheit der z-Ebene irgendwie festsetzen, z. B. so, daß dem Punkt $z'' = 3 + \frac{k_0^2}{l_i^2}$ der Punkt $z = a_1 = -1$ entspricht.

Im zweiten Fall haben wir $A_5 = \infty$, also $l_i = 1$, und

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}(a_2 + a_8) \\ -B &= \frac{(a_3+a_7)(a_2-a_8)^2}{2[4(a_3+a_7) - 3(a_2+a_8)]} \\ &= \frac{a_3 a_7 (a_2-a_8)^2}{4[2\,a_3 a_7 - a_2 a_5]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(43)}$$

$$A_3'' = \frac{2\,i}{k_0} = \frac{i\,|a_3^2 + a_3 A + B|}{a_3\sqrt{(a_8-a_3)(a_3-a_2)}} \quad \ldots\ldots \text{(44)}$$

$$A_7'' = \frac{-i\,|a_7^2 + a_7 A + B|}{a_7\sqrt{(a_8-a_7)(a_7-a_2)}} \quad \ldots\ldots \text{(45)}$$

Wenn wir die Einheit der z-Ebene wieder so festsetzen, daß dem Punkt $z'' = 3 + k_0^2$ der Punkt $z = a_1 = -1$ entspricht, sind durch (44) und (45) die übrigen Parameter bestimmt.

Im dritten Fall wird schließlich $A_5'' = A_7'' = \infty$, also $l_i = 1$, $k_u = 0$ und

$$\left.\begin{aligned} A &= -\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_2 \\ B &= -\frac{\frac{\varepsilon}{\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_2^2 a_3}{2\,a_3 - \left(1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)a_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(46)}$$

Setzen wir wieder die Einheit der z-Ebene so fest, daß $z'' = 3 + 4\,k_o\cos\varepsilon + k_o^2$ dem Punkt $z = a_1 = -1$ entspricht, so brauchen wir noch eine Gleichung:

$$A_3'' = 2\left(\cos\varepsilon + \frac{1}{k_0}\right)e^{i(\pi-\varepsilon)} = \frac{|a_3^2 + a_3 A + B|\cdot e^{i(\pi-\varepsilon)}}{(a_3-a_2)^{1-\varepsilon/\pi}\,(-a_3)^{1+\varepsilon/\pi}} \quad \ldots\ldots \text{(47)}$$

zur Bestimmung von a_2 und a_3.

Digitized by Google

Endlich interessieren wir uns noch für den Fall der senkrechten einseitigen Scheiben. Diesen erhalten wir, indem wir in den zuerst abgeleiteten Formeln (31) bis (39) $\frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{1}{2}$ und $a_6 = a_8 = a_7$ setzen. Dann wird $A_7'' = \infty$.

Für die numerische Rechnung brauchen wir den Verlauf der Abbildungsfunktion für reelle z zwischen a_1 und a_9. Dabei ist es zweckmäßig, nicht nach den Formeln (I), (II) und (III) zu rechnen, sondern (II) und (III) in (I) einzusetzen, weil dann das Auftreten der großen z''-Werte vermieden wird. Wir erhalten dann als Abbildungsfunktion der z-Ebene auf die ζ-Ebene:

$$\zeta = l_i \sqrt{\frac{-m\left[(z-a_2)(z-a_6)\right]^{1-\frac{\varepsilon}{\pi}}\left[(z-a_4)(z-a_8)\right]^{\frac{\varepsilon}{\pi}} - \left[z^2 + A z + B\right]}{\left[(z-a_2)(z-a_6)\right]^{1-\frac{\varepsilon}{\pi}}\left[(z-a_4)(z-a_8)\right]^{\frac{\varepsilon}{\pi}} - \left[z^2 + A z + B\right]}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

IV. Das Potential.

In der ζ-Ebene wollen wir in großem Abstand vom Schlitz eine Strömung parallel zur η-Achse mit der Geschwindigkeit w haben, Bild 5. Das Potential $\Phi + i\Psi$ muß also in der Umgebung des Punktes $\zeta = \infty$ die Entwicklung haben:

$$\Phi + i\Psi = w \cdot b/2 \cdot (-i) \cdot \zeta + \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

Für die Abbildungsfunktion finden wir aus (48) für große $|z|$ die Entwicklung $\zeta = +iPz + \ldots$, wobei

$$P = -l_i \sqrt{\frac{4 + 4\frac{k_0}{l_i}\cos\varepsilon + \frac{k_0}{l_i^2}}{Q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

und

$$Q = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right) a_2 a_6 + \frac{\varepsilon}{\pi} a_4 a_8 - B - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\pi}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right)(a_2 + a_6 - a_4 - a_8)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Damit wird

$$\Phi + i\Psi = w \cdot b/2 \cdot P \cdot z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

das Potential einer Parallelströmung. Längs der reellen Achse, die dem Schlitz und der imaginären Achse der ζ-Ebene entspricht, ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit Null, so daß die Randbedingungen erfüllt sind. In der Entwicklung (52) kommen also keine weiteren Glieder hinzu. Da sich die Umkehrung der Abbildungsfunktion (48) nicht allgemein angeben läßt, die man für die direkte Berechnung von Φ und Γ nach (49) bzw. (1) brauchen würde, müssen wir uns damit begnügen, numerische Beispiele zu rechnen. Nach Bestimmung der Parameter a_i wurden für z-Werte aus dem Intervall $a_1 \leqq z \leqq a_9$ die Bildpunkte in der ζ-Ebene nach (48) berechnet. Das zugehörige Potential wurde dann aus (50) bis (52) bestimmt, woraus sich dann die Zirkulationsverteilungen $\Gamma(\xi)$ und $\Gamma_s(\bar{\eta})$ nach (1) finden ließen.

V. Numerische Ergebnisse.

Um bei einem Tragflügel mit senkrechten Scheiben die Abhängigkeit der Zirkulationsverteilung über den Tragflügel und die Scheiben von der Höhe und der Art der Anbringung der Scheiben (Abhängigkeit von h/b, k, l) festzustellen, wurden Beispiele für einige Spezialanordnungen durchgerechnet. Außer dem schon früher [1] betrachteten Fall des Tragflügels mit Endscheiben ($l = 0$) wurden noch die Fälle behandelt, daß die Scheiben eingerückt sind ($l > 0$) und einerseits symmetrisch zum Tragflügel ($k = 1$), anderseits ganz oberhalb des Tragflügels ($k = \infty$) angebracht sind. Daraus läßt sich ein ausreichender Überblick auch für den allgemeinen Fall gewinnen. Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß in Bild 9 bis 25 nur die eingezeichneten Punkte berechnet worden sind, aus denen dann die Kurven interpoliert wurden. Da die Kurven glatt verlaufen, ist das Verfahren wohl berechtigt.

In Bild 9 und 10 sind einige Zirkulationsverteilungen über den Tragflügel und die Scheibe aufgetragen. Es zeigt

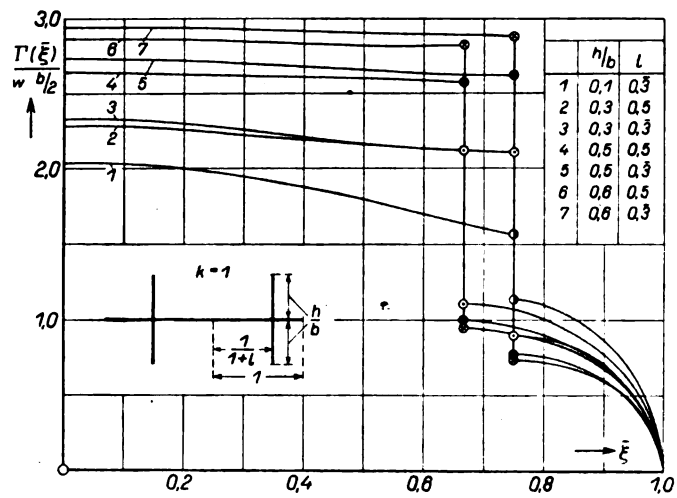
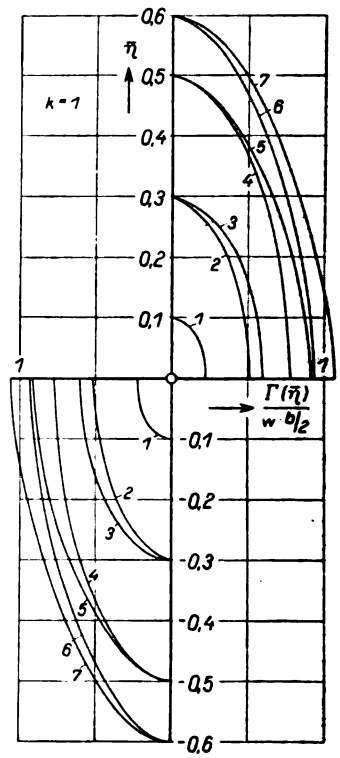


Bild 9. Die Zirkulationsverteilung längs des Tragflügels und der Scheibe bei symmetrischen Scheiben ($k = 1$) mit $h/b = k_0$ und $l = \frac{1-l_i}{l_i}$ als Parametern.



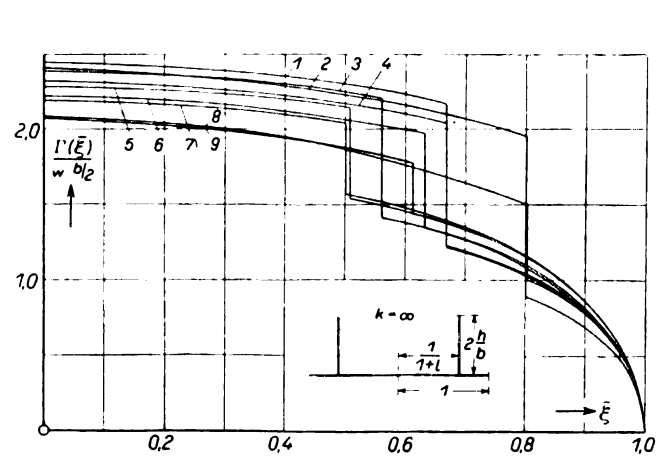


Bild 10. Die Zirkulationsverteilung längs des Tragflügels und der Scheibe bei aufgesetzten Scheiben ($k = \infty$) mit $h/b = \frac{1}{2} k_0$ und $l = \frac{1-l_i}{l_i}$ als Parametern.

Digitized by Google

sich wieder wie in [1], daß die Zirkulation $\Gamma(\xi)$ im wesentlichen von der Höhe der Scheibe abhängt, und daß die Gesamtzirkulation des Tragflügels von k nahezu unabhängig ist. An der Stelle $\xi = l_i = \frac{1}{1+l}$, an der die Scheibe sitzt, erleidet die Zirkulation einen Sprung, der gleich der Summe der Zirkulationen $\Gamma_s(0)$ am Ober- und Unterteil der Scheibe an deren Ansatzstelle ist. Die Gesamtzirkulation ist um so größer, je größer die Scheibe ist, und je näher sie am Flügelende sitzt.

In Bild 11 und 12 ist nach (3) der Wert $\varkappa = \frac{\pi}{2J}$, also nach (7) das Verhältnis $c_{wi}/c_a^2 F/\pi b^2$, in Abhängigkeit von k_o für verschiedene Werte von h/b einerseits für $k = 1$, anderseits für $k = \infty$ aufgetragen. Es zeigt sich, daß $\varkappa$ für symmetrische und einseitige Scheiben von bestimmter Höhe h/b und bestimmter Lage l annähernd denselben Wert hat; für $k = 1$ ist $\varkappa$ etwas größer als für $k = \infty$. Für den Fall der Endscheiben [1] hatte sich ergeben, daß $\varkappa$ für $k = 1$ seinen größten Wert, für $k = \infty$ seinen kleinsten Wert annimmt, sich also mit k nicht sehr ändert. Man kann also annehmen, daß das auch im allgemeinen Fall ($l > 0$) gilt. Daher sind in Bild 13 die Mittelwerte $\varkappa_m$ von $\varkappa$ als Funktionen von h/b mit l als Parameter dargestellt. Aus diesen Auftragungen lassen sich die Werte von $\varkappa$ für jede Anordnung und jede Höhe der Scheiben mit praktisch ausreichender Genauigkeit entnehmen. Die Abhängigkeit des Auftriebs und des induzierten Widerstandes vom Anstellwinkel α ergibt sich aus (7) und (10) mit Hilfe von Bild 13. Wollen wir die Abhängigkeit des Auftriebs vom Anstellwinkel α_0 in Flügelmitte berechnen, müssen wir nach (14) den Wert von $\varkappa\mu$ kennen, wo μ das Verhältnis von $c_a \cdot t_m$ beim Flügel mit Scheiben zu $c_a \cdot t_m$ beim Flügel ohne Scheiben, aber gleichem $c_{a0}^* \cdot t_0$ bedeutet. Die Abhängigkeit von $\varkappa\mu$ von der Anordnung der Scheiben ist ähnlich, wie die von $\varkappa$, Bild 14 und 15, so daß es im allgemeinen wieder genügt, die Mittelwerte $(\varkappa\mu)_m$ von $\varkappa\mu$ zu nehmen, Bild 16. Außerdem interessieren wir uns noch für die an der Scheibe auftretenden Momente. Der Angriffspunkt $\eta_o \cdot b/2$ der Seitenkraft S_o am oberen Teil der Scheibe und ebenso der Angriffspunkt $\eta_u \cdot b/2$ wurde nach (22) und (23) bestimmt. Für nicht zu große Scheiben ist η_o proportional k_o und ebenso η_u proportional k_u, Bild 17 und 18:

$$\frac{\eta_o}{k_o} \approx -\frac{\eta_u}{k_u} \approx 0{,}40 \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

Die Zahl 0,40 ist nur ein Mittelwert, der aber wie schon in [1] für alle Werte von k und l mit recht guter Annäherung gilt.

In Bild 19 und 20 ist nach (17) und (18) die Abhängigkeit des Verhältnisses der am Oberteil der Scheibe angreifenden Seitenkraft S_o zum Auftrieb A in Abhängigkeit von k_o und l einmal für symmetrische und einmal für einseitige Scheiben dargestellt. Aus Bild 21 kann man sich für jedes l die Kurven S_o/A über k_o für $k = 1$ und $k = \infty$ aufzeichnen, und diese Auftragung dann nach dem Vorbild des Bild 13 der End-

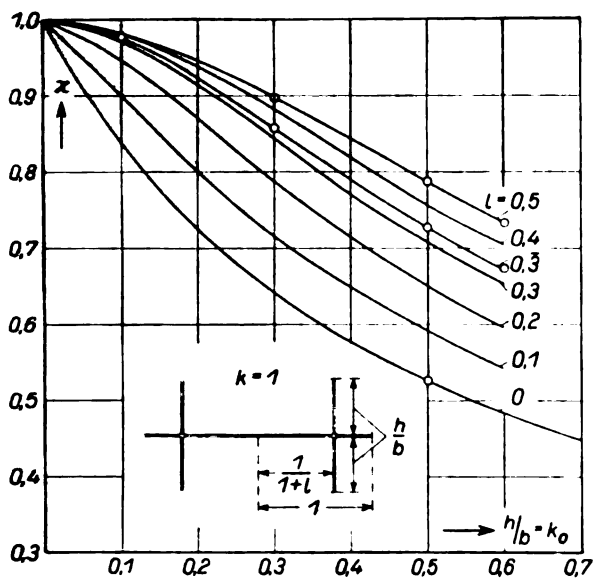


Bild 11. Der Auftrieb (10) und induzierte Widerstand (7) von Tragflügeln mit senkrechten symmetrischen Scheiben ($k = 1$).

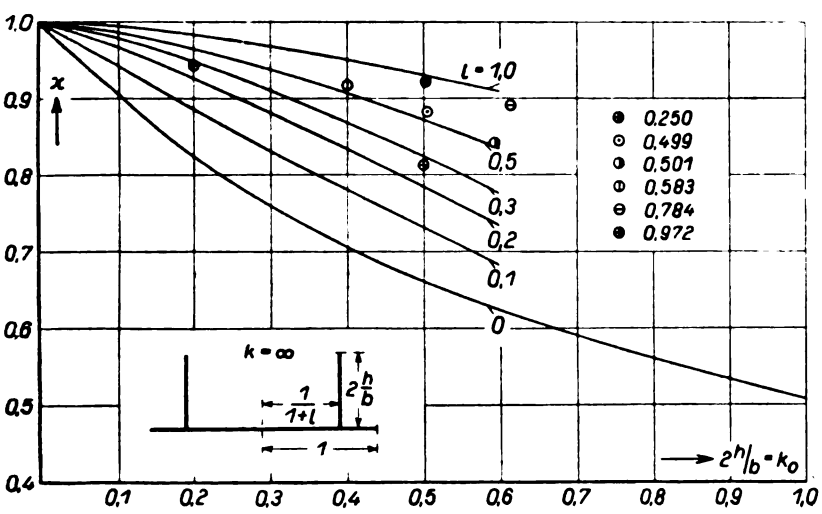


Bild 12. Der Auftrieb (10) und induzierte Widerstand (7) von Flügeln mit senkrechten einseitigen Scheiben ($k = \infty$).

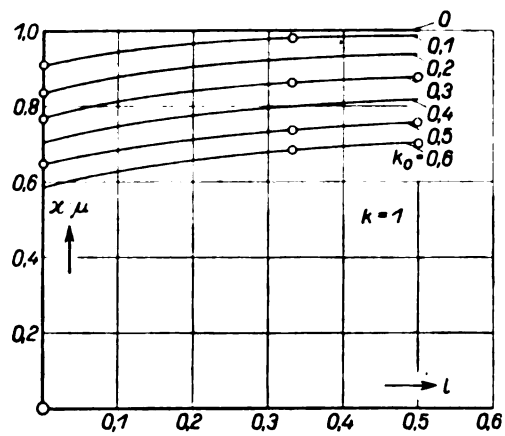


Bild 14. Zur Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_a vom Anstellwinkel α_0 beim Flügel mit symmetrischen Scheiben (14).

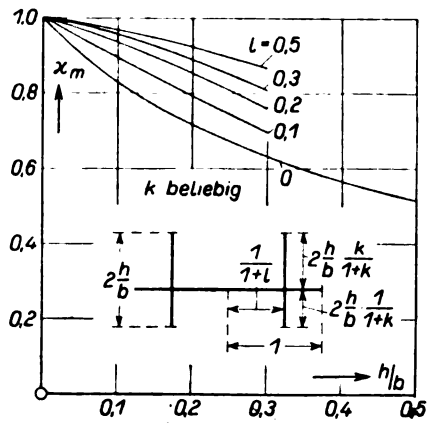


Bild 13 (oben). Mittelwert $\varkappa_m$ des Koeffizienten $\varkappa$ für verschiedene k bei festem l und h/b. Näherungsweise Darstellung des Auftriebs (10) und des induzierten Widerstandes (7) für Tragflügel mit beliebig angebrachten senkrechten Scheiben.

Digitized by Google

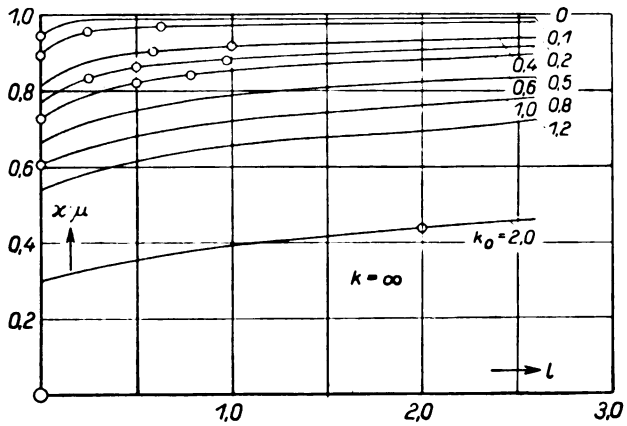


Bild 15. Zur Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_a vom Anstellwinkel α_a beim Tragflügel mit aufgesetzten Scheiben (14).

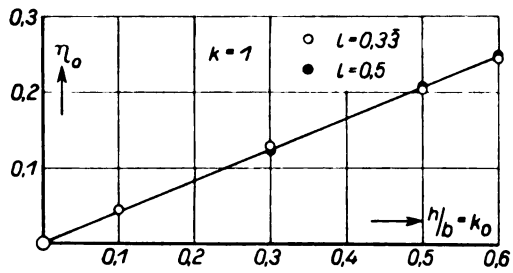


Bild 17. Die Lage des Angriffspunktes der Seitenkraft bei symmetrischen Scheiben (22 und 23).

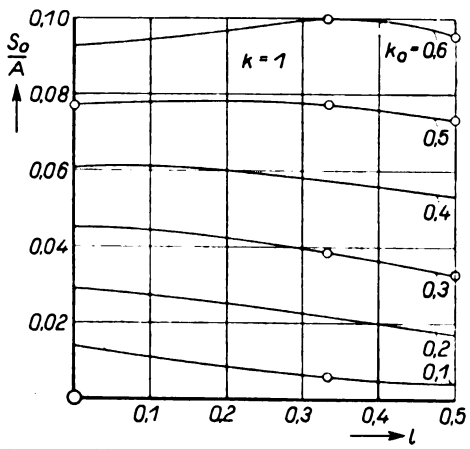
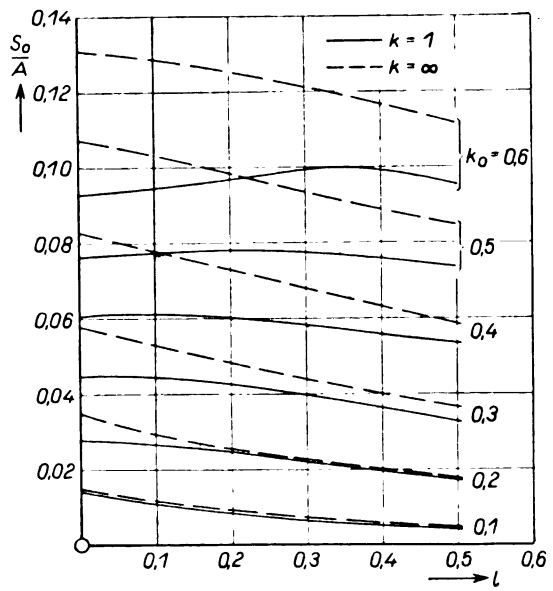


Bild 19. Zur Abhängigkeit der Seitenkraft von der Höhe und Lage der Scheibe bei symmetrischen Scheiben (17 und 18).



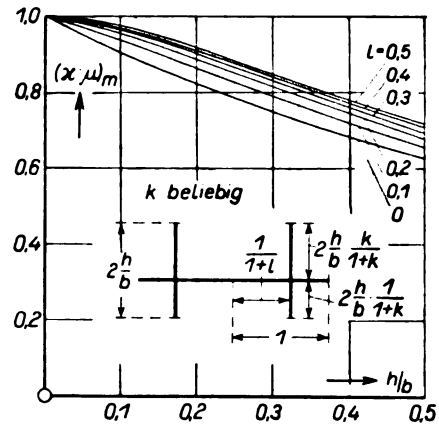


Bild 16. Mittelwert $(\varkappa\alpha)_m$ des Produktes $\varkappa\alpha$ für verschiedene k. Zur Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_a vom Anstellwinkel α_a für Tragflügel mit beliebig angebrachten senkrechten Scheiben (14).

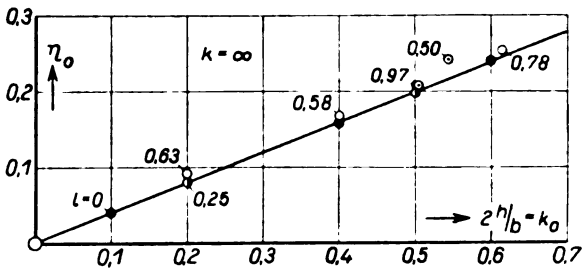


Bild 18. Die Lage des Angriffspunktes der Seitenkraft bei aufgesetzten Scheiben (22 und 23).

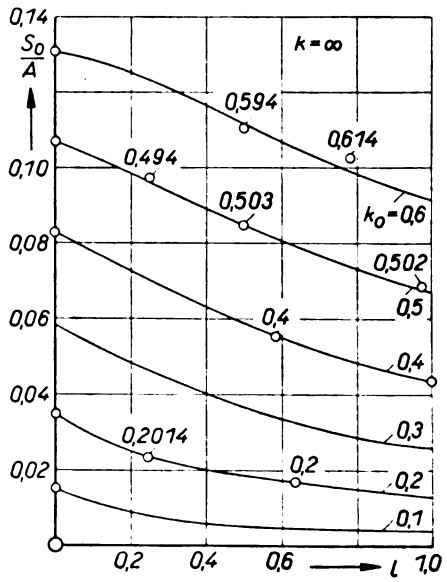


Bild 20. Zur Abhängigkeit der Seitenkraft von der Höhe und Lage der Scheibe bei aufgesetzten Scheiben (17 und 18).

Bild 21 (links). Zur Abhängigkeit der Seitenkraft von der Größe und Lage beliebig angebrachter senkrechter Scheiben (17 und 18).

scheibenarbeit [1] ergänzen, wo die entsprechende Auftragung für $l = 0$ berechnet ist. Auf diese Weise läßt sich ein Überblick über das Verhalten der Seitenkraft bei irgendeiner Befestigung der Scheibe gewinnen.

Es zeigt sich, daß der Quotient S_0/A bei einseitigen Scheiben von bestimmter Höhe k_0 für $l = 0$ sein Maximum erreicht, bei großen symmetrischen Scheiben an einer Zwischenstelle $0 < l < 1$, die von k_0 abhängt, aber einer Stellung der Scheibe ziemlich weit am Ende des Flügels entspricht. Im allgemeinen ergibt sich eine Zunahme der Seitenkraft S_0 mit wachsender Höhe k_0 der Scheibe und eine Abnahme, wenn die Scheibe nach innen gerückt wird. Die Zunahme mit wachsendem k_0 ist bei festem l im Fall der einseitigen

Digitized by Google

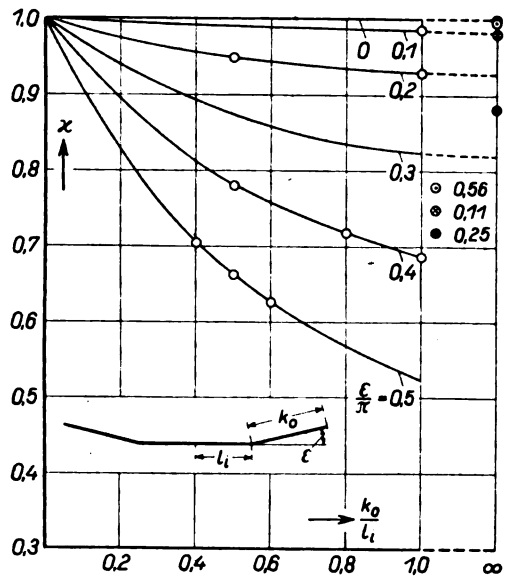


Bild 22. Der Auftrieb (10) und induzierte Widerstand (7) beim Tragflügel mit außen aufgebogenen Enden (U-Stellung).

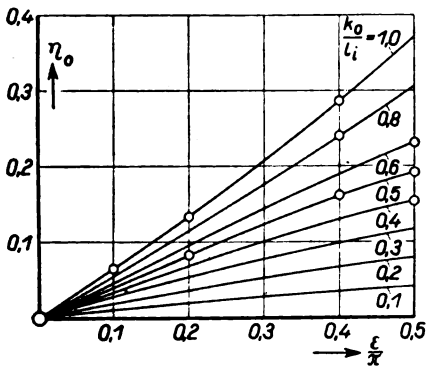


Bild 25. Der Angriffspunkt der Seitenkraft beim Flügel mit U-Stellung (22).

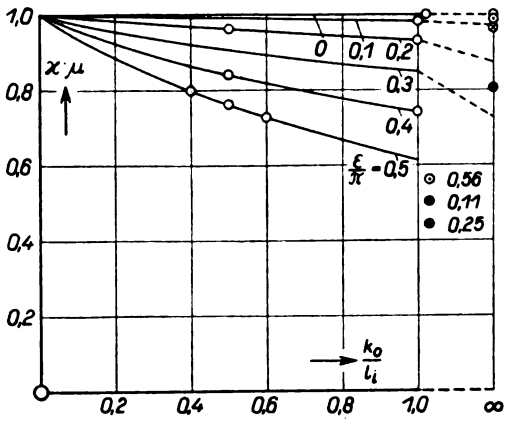


Bild 23. Der Auftrieb beim Tragflügel mit außen aufgebogenen Enden (14).

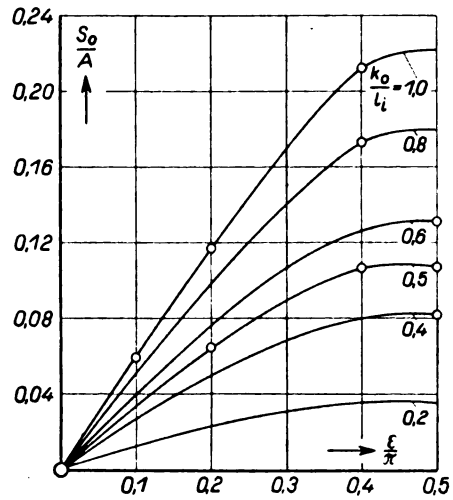


Bild 24. Zur Abhängigkeit der Seitenkraft von der U-Stellung des Flügels (17).

Scheiben ($k = \infty$) am größten, eine Eigenschaft, die sich für $l = 0$ aus [1], Bild 13, ergibt, aber auch sonst bestehen wird, wie Bild 21 vermuten läßt. Ersetzt man in Bild 17 bis 21 k durch $1/k$, k_o durch k_u und S_o bzw. η_o durch S_u bzw. η_u, so erhält man die Abhängigkeit von S_u und η_u von h/b, k und l.

Falls auch die Gestalt der Scheibe bekannt ist, also die Verhältnisse F_o/F und F_u/F gegeben sind, können wir aus Bild 21 nach (17) und (18) auch das Verhältnis der Beiwerte c_{so}/c_a und c_{su}/c_a bestimmen.

Auf Grund der in Abschnitt III und IV entwickelten Formeln wurden noch die in Bild 4 dargestellten Flügel mit U- bzw. V-Stellung berechnet. In Bild 22 ist der Faktor $\varkappa = \frac{\pi}{2J}$, in Bild 23 die Zahl $\varkappa\mu$ als Funktion des Neigungswinkels $\varepsilon\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$ und des Verhältnisses $\frac{k_o}{l_i}$ dargestellt. Wie schon in Abschnitt II erwähnt ist, wurde der Grenzfall der V-Stellung nach einer anderen Methode behandelt. Die Gesamtzirkulation des Flügels nimmt mit wachsendem ε und mit wachsender Länge des hochgebogenen Flügelteiles zu. Aus Bild 24 ergibt sich die Abhängigkeit des Quotienten S_o/A von ε und $\frac{k_o}{l_i}$, aus Bild 25 die Abhängigkeit des Angriffspunktes η_o der Seitenkraft S_o (gemeint ist die nach innen gerichtete horizontale Komponente der senkrecht zum aufgebogenen Flügelteil wirkenden Kraft, die vertikale Komponente ist zum Auftrieb hinzugenommen). Auch die Seitenkraft und das Moment nehmen zu mit wachsendem ε und wachsender Länge des aufgebogenen Flügelteiles.

Die Ergebnisse der Theorie stimmen recht gut mit den wenigen hierüber vorliegenden Versuchen überein. Es wurde nach (14) $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ berechnet und dann nach (17) und (18) $\frac{c_{so}}{c_a}$ und $\frac{c_{su}}{c_a}$. Die schon in [1] erwähnten Messungen von Schrenk [2] und Nagel [3] für den Tragflügel mit Endscheiben sowie Messungen von Blenk [4] über den Flügel mit V-Stellung ergaben eine befriedigende Übereinstimmung mit den gerechneten Werten.

VI. Zusammenfassung.

Für den Fall des geringsten induzierten Widerstandes (der induzierte Abwind ist konstant über die Spannweite) wurde die Auftriebsverteilung an Tragflügeln mit senkrechten Scheiben, wie sie z. B. bei Leitwerken vorkommen, in einigen charakteristischen Fällen berechnet. Daraus wurden Kurven für Auftrieb und induzierten Widerstand der Tragflügel für beliebige Größe und beliebige Anbringung der Scheiben interpoliert, Bild 13 und 16. Außerdem wurde die an den Endscheiben auftretende Seitenkraft, Bild 21, bestimmt. Der Angriffspunkt der Seitenkraft liegt in etwa 40% der Höhe des Ober- bzw. Unterteiles der Scheibe.

Der Gesamtauftrieb des Tragflügels nimmt bei einem bestimmten Anstellwinkel mit wachsender Höhe der Scheiben zu und ist am größten, wenn die Scheiben als Endscheiben angebracht sind. Die an den Scheiben auftretenden Seitenkräfte und Momente wachsen ebenfalls mit der Höhe des Ober- bzw. Unterteiles der Scheibe und haben bei einseitig angebrachten Scheiben im Fall der Endscheiben und sonst, wenn die Scheibe nahezu am Ende des Flügels sitzt, ihren größten Wert.

Digitized by Google

Außerdem wurde der Auftrieb und induzierte Widerstand eines Tragflügels berechnet, dessen äußere Teile um den Winkel ε nach oben gebogen sind (U- oder V-Stellung). Der Gesamtauftrieb, Bild 22, 23, und das an der Knickstelle angreifende Moment, Bild 24, 25, wachsen mit zunehmendem ε und zunehmender Länge des aufgebogenen Flügelteiles.

Herrn Prof. Dr. A. Betz danke ich für seine Ratschläge während der Abfassung der Arbeit.

VII. Schrifttum.

[1] W. Mangler, Die Auftriebsverteilung am Tragflügel mit Endscheiben. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 564.

[2] O. Schrenk, Modellversuche über die Kräfte und Momente einer am Flügelende angesetzten Scheibe. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 570.

[3] F. Nagel, Flügel mit seitlichen Scheiben. Vorläufige Mitteilungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (1924).

[4] H. Blenk, Göttinger Sechskomponentenmessungen an Flügeln mit V-Form, Pfeilform und Verwindung. Luftf.-Forschg. Bd. 3 (1929), S. 27.

Abgeschlossen Februar 1939.

Digitized by Google

Einfluß von Flächenbelastung, Flügelstreckung und Spannweitenbelastung auf die Flugleistungen*).

Von B. Göthert.

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Direktion Flugwerk, Gruppe Flugzeugentwurf.

Der Bericht zeigt in allgemeiner Form die mögliche Steigerung von Höchst-, Reise- und Steiggeschwindigkeit durch Erhöhung der Flächenbelastung. Dabei werden hinsichtlich der Flügelform die beiden Grenzwerte: »Flächenverkleinerung bei gleicher Flügelstreckung und Flächenverkleinerung bei gleicher Spannweitenbelastung« untersucht. Ausgehend von den Bestwerten der Flächenbelastung für einen bestimmten Flugzustand wird allgemein die wichtige Frage untersucht, welche Flugleistungseinbußen in Kauf genommen werden müssen, wenn aus gegebenen Gründen bestimmte Flächenbelastungen nicht überschritten werden sollen. An Hand dieser allgemeinen Untersuchungen werden an typischen Flugzeugen die künftigen Entwicklungslinien hinsichtlich der Höhe der Flächenbelastung und daraus abgeleitet die Anforderungen an die Landehilfen dargelegt[1]).

Gliederung.

A. Bezeichnungen.
B. Vorbemerkungen.
I. Aufgabenstellung.
II. Festsetzungen für die Rechnung.
C. Flächenbelastungsänderung bei bestimmten Flugelstreckungen.
I. Höchst- und Reisegeschwindigkeit.
1. Beispiel.
2. Günstigste Flächenbelastung für Schnell- und Reiseflug.
3. Flächenbelastung bei bestimmten Einbußen an Geschwindigkeit.
4. Einfluß der Flügelstreckung.
a) Mittelstrecken-Schnellflugzeug.
b) Langstrecken-Schnellflugzeug.
5. Einfluß des Profilwiderstandsbeiwertes.
6. Einfluß der Flughöhe.
II. Steiggeschwindigkeit.
1. Beispiel.
2. Günstigste Flächenbelastung für den Steigflug.
3. Einfluß der Flügelstreckung.
4. Steiggeschwindigkeitsverluste durch Abweichungen von der günstigsten Flächenbelastung.
5. Vergleich der günstigsten mit den ausgeführten Flächenbelastungen heutiger Flugzeuge.
D. Flächenbelastungsänderung bei bestimmten Spannweitenbelastungen.
I. Höchst- und Reisegeschwindigkeit.
1. Grenzgeschwindigkeit bei vorgegebener Spannweitenbelastung.
2. Flächenbelastung bei bestimmten Einbußen an Geschwindigkeit.
E. Anwendung der gefundenen Beziehungen auf verschiedenartige Flugzeuge.
I. Festlegung der Kennwerte für typische Flugzeuge.
II. Langstrecken-Schnellflugzeug.
III. Mittelstrecken-Schnellflugzeug.
IV. Kurzstrecken-Schnellflugzeug.
V. Allgemeine Gesichtspunkte für die Flächenbelastungserhöhungen bei den betrachteten Beispielflugzeugen.
F. Zusammenfassung.
I. Schnellflug.
II. Steigflug.
G. Schrifttum.
H. Anhang.

*) Gekürzte Fassung der von der Technischen Hochschule Berlin angenommenen Dissertation. D 83.

[1]) Während der Neubearbeitung dieses aus dem Jahre 1936 stammenden Berichtes sind eine Reihe von ausländischen Arbeiten veröffentlicht worden, die sich gleichfalls mit der zweckmäßigen Steigerung der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung befassen (L 1 bis 5). In diesen Berichten sind teilweise auch in allgemeiner Form die Gleichungen für die günstigsten Flächenbelastungen des Schnellfluges abgeleitet und diskutiert und die Schwierigkeiten bei der Verwirklichung hoher Flächenbelastungen eingehend besprochen worden. — Die vorliegende Arbeit befaßt sich nun nicht nur mit dem Flächenbelastungsoptimum für den Schnellflug, sondern darüber hinaus auch mit den Flugleistungsverlusten, die durch die meist unvermeidlichen Abweichungen von der günstigsten Flächenbelastung bedingt sind, z. B. wenn aus Start- und Landegründen bestimmte Flächenbelastungen nicht überschritten werden dürfen.

A. Bezeichnungen.

G = Fluggewicht,
G' = Fluggewicht beim Bezugszustand $G/F = 100$ kg/m² und $\Lambda = 5$,
G_F = Flügelgewicht,
N = Motorleistung,
F = Flügelfläche,
$f_{ws} = c_{ws} \cdot F$ = Stirnwiderstandsfläche,
$f_{ws}' = f_{ws} - c_{wp} \cdot F = (c_{ws} - c_{wp}) \cdot F$,
$= c_{ws}' \cdot F$ = Restwiderstandsfläche,
ϱ = Luftdichte,
η = Schraubenwirkungsgrad,
N/G = Leistungsverhältnis,
$\eta f_{ws}'/G$ = Restwiderstandsverhältnis,
$\Lambda = b^2/F$ = Flügelstreckung,
G/b^2 = Spannweitenbelastung,
v = Geschwindigkeit im Waagerechtflug,
w = Steiggeschwindigkeit,
$\Omega_\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_{4000}}$; $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda = 5}$ usw. = Beizahl.

Besondere Zeichen:

$'$ = Bezugszustand bei $G/F = 100$ kg/m² und $\Lambda = 5$,
$*$ = Zustand bei günstigster Flächenbelastung.

B. Vorbemerkungen.

I. Aufgabenstellung.

Aus der Leistungsaufteilung eines heutigen Schnellflugzeuges, Bild 1[2]), mit einer Flächenbelastung von 120 kg/m² geht hervor, daß im Schnellflug der Tragflügel einen Widerstandsanteil von etwa 50% des gesamten Widerstandes des Flugzeuges hervorruft. Da dieser Flügelwiderstand zum größten Teil aus reinem Reibungswiderstand besteht, kann abgesehen von der Glättung der Oberflächen seine Verminderung nur durch Verkleinerung der von der Luft bestrichenen Oberflächen erreicht werden, d. h. bei gegebenem

[2]) Bild 1 wurde folgendem Aufsatz entnommen: G. Bock, Wege zur Leistungssteigerung im Flugzeugbau. Luftwissen Bd. 4 (1937) Nr. 4 S. 104.

Digitized by Google

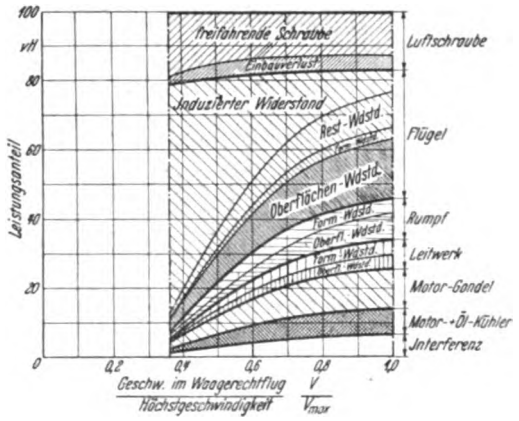


Bild 1[1]). Leistungsbilanz eines zweimotorigen Schnellflugzeuges. $G/F = 120$ kg/m²; $G/N = 4{,}5$ kg/PS.

Fluggewicht durch Erhöhung der Flächenbelastung. Im Drosselflug oder, was auf das gleiche hinauskommt, beim Schnellflug in großen Höhen, bei dem der Anteil des Flügelprofilwiderstandes durch das Anwachsen des induzierten Widerstandes zurückgeht, wird der bei einer Flügelverkleinerung herausspringende Flugleistungsgewinn nur gering sein, da einerseits der durch die Flächenverkleinerung beeinflußte Widerstandsanteil geringer ist und andererseits die mit der Flächenverkleinerung meist verknüpfte Vergrößerung des induzierten Widerstandes sich stärker im ungünstigen Sinne auswirkt.

Bei den heutigen Flugzeugen ist also augenscheinlich durch Vergrößerung der Flächenbelastung eine Steigerung der Höchstgeschwindigkeit erzielbar, deren Größe entscheidend von den Auslegedaten der Flugzeuge abhängt. Andererseits wird die Vergrößerung der Flächenbelastung über die heute üblichen Werte hinaus im allgemeinen die Steigleistung und die Gipfelhöhe der Flugzeuge im ungünstigen Sinne beeinflussen, so daß je nach dem Verwendungszweck des Flugzeuges zwischen den sich widersprechenden Forderungen hinsichtlich Höchstgeschwindigkeit und Steigfähigkeit eine günstige Kompromißlösung gefunden werden muß. Die Aufgabe dieser Untersuchungen besteht nun darin, festzustellen, bei welchen Flugzeugen eine Steigerung der Flächenbelastung besonders lohnend ist und bis zu welchen Werten diese Steigerung noch Vorteile hinsichtlich des Schnell- und Reisefluges bei ausreichender Steigleistung verspricht.

Weitere Grenzen für die Erhöhung der Flächenbelastung liegen in den Anforderungen an die Start- bzw. Landeeigenschaften der Flugzeuge. Für den Start sind in den letzten Jahren verschiedene Möglichkeiten erprobt worden, um auch bei extrem hohen Belastungen, z. B. mit Hilfe von Katapulten, Seilwinden, kurzzeitigen Zusatzleistungen usw. einen genügend kurzen Start zu erreichen. Wenn demnach für die Zukunft Starthilfen mit befriedigenden Eigenschaften auch für noch wesentlich gesteigerte Flächenbelastungen von etwa 250 kg/m² beim Abflug vorausgesetzt werden dürfen, verschiebt sich das eigentliche Problem auf die sichere Beherrschung der Landung. Hier kommt zwar als erleichternder Umstand hinzu, daß durch den Fortfall der Brennstofflasten und in Sonderfällen auch der Nutzlast bei der Landung niedrigere Flächenbelastungen als beim Abflug wirksam sind. Andererseits fallen aber auch sämtliche Hilfsmittel von außen fort, so daß als einzige Möglichkeit zur Abkürzung des Landeweges die Verringerung der Landegeschwindigkeit durch Steigerung des Höchstauftriebes der Tragflügel und im Anschluß daran durch wirksames Bremsen verbleiben. Abgesehen vom stationären Kurvenflug, bei dem der Durchmesser der engsten Kurve naturgemäß mit steigender Flächenbelastung zunimmt, wird sich im allgemeinen eine Erhöhung der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung im günstigen Sinne auf die Wendigkeit auswirken. Nach Lachmann[3]) sinkt nämlich mit Verringerung der Spannweite bei gleicher Fluggeschwindigkeit und gleichem Flügel-Rollmomentenbeiwert die Zeit zum Ausführen einer vollständigen Kehrtwendung, da die Dämpfung durch die Flächen schneller herabgesetzt wird als die beschleunigenden Rollmomente. Diese Erhöhung der Wendigkeit wird bei Kampfflugzeugen von Vorteil sein; bei Verkehrsflugzeugen dagegen, die im Fluge keine große Wendigkeit erfordern, wird sich vielfach die Verkleinerung der Tragflügeldämpfung besonders beim Anschweben zur Landung im ungünstigen Sinne auswirken.

Die geplante Untersuchung soll im folgenden nun so durchgeführt werden, daß die durch Start- und Landefähigkeit sowie die unter Umständen durch die Veränderung der Wendigkeit gesetzten Grenzen für die Erhöhung der Flächenbelastung zunächst nicht beachtet werden; es werden also nur diejenigen Flächenbelastungen ermittelt, die hinsichtlich des Schnell- und Steigfluges die günstigsten sind.

II. Festsetzungen für die Rechnung.

Für die Vergrößerung der Flächenbelastung bei einem bestimmten Flugzeugmuster können zwei Grenzfälle unterschieden werden: Die Flächenverkleinerung bei gleicher Flügelstreckung, d. h. ähnliche Verkleinerung der Tragflügel oder aber Flächenverkleinerung bei gleicher Spannweite, d. h. bei gleicher Spannweitenbelastung G/b^2, falls das Fluggewicht gleich groß gehalten wird, Bild 2. Die Untersuchung bei gleicher Spannweitenbelastung hat den Vorteil, daß man bei gleichem Fluggewicht den induzierten Widerstand nur noch in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit einzuführen braucht; die Grenze für die Flächenbelastungssteigerung ist hier aber nicht allein aus Start- und Landegründen, sondern darüber hinaus aus Steifigkeitsforderungen für sehr schlanke Flügel festgelegt. Es erschien deshalb vorteilhafter, die Flügelverkleinerung bei gleicher Streckung durchzuführen, dabei die Größe der Flügelstreckung aber als unabhängige Veränderliche einzuführen; der Konstrukteur kennt dann sofort eine ihm geläufige Bauzahl, mit der er den Aufwand für die notwendige Steifigkeit des Flügels schnell abzuschätzen gewohnt ist. Um jedoch auch die Ergebnisse der Rechnung mit konstanter Spannweitenbelastung überblicken zu können, wurde in abgekürzter Art auch der Einfluß der Flächenbelastung bei gleicher Spannweitenbelastung untersucht.

Beim Übergang zu geänderten Flächenbelastungen kann in der Rechnung angenommen werden, daß entweder die Leitwerksfläche in gleicher Größe bestehen bleibt oder aber daß im anderen Grenzfall die Leitwerksfläche und damit der Leitwerkswiderstand sich im gleichen Verhältnis zur Flügelfläche ändern. Im letzteren Fall kann der Leitwerkswiderstand einfach durch eine entsprechende verhältnismäßige Erhöhung des Profilwiderstandsbeiwertes berücksichtigt werden. In der folgenden Untersuchung, in die nur der Profilwiderstandsbeiwert c_{wp} einbezogen wurde, ist es zur Anpassung an beliebige Verhältnisse freigestellt, den Beiwert c_{wp} je nach dem bestrachteten Sonderfall als tatsächlichen Profilwiderstandsbeiwert unter Einschluß des Leitwerkswiderstandes einzuführen.

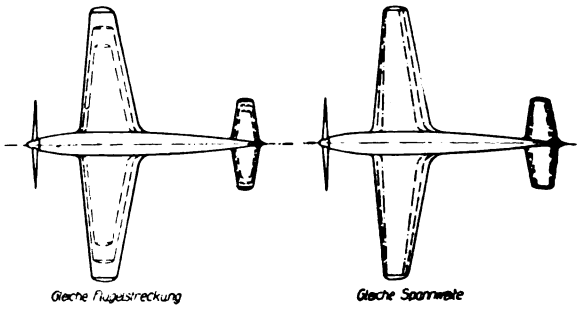


Bild 2. Flugzeuge mit verschieden verkleinerten Tragflügeln.

[3]) G. Lachmann, Die Spannweite als grundlegendes Bestimmungsstück des Flugzeugentwurfs. Z. Flugtechn. (1928) S. 205ff.

Digitized by Google

Über diese Änderung des Tragflügels und des Leitwerks hinaus wurde festgesetzt, daß keine weiteren Widerstands- und Gewichtsänderungen am Flugzeug infolge der Flächenbelastungsänderung auftreten; d. h. also z. B., daß sowohl der Rumpf- als auch der Motorgondelwiderstand von Änderungen der Flügelgröße unberührt bleiben. Diese Annahme trifft meist genügend genau zu, da beim Rumpf das Volumen im Bereich der größten Dicke durch die zu befördernden Lasten festgelegt ist und nur durch Änderungen der Rumpflänge oder der gegenseitigen Beeinflussung zwischen Rumpf und Flügel und bei den Gondeln durch Änderungen der aus dem Tragflügel herausragenden Gondelteile Abweichungen denkbar sind. Diese Abweichungen hängen aber in starkem Maße von dem Verwendungszweck der Flugzeuge ab und sind nur schwer allgemein zu erfassen[4]); sie sind meist im Vergleich zum Gesamtwiderstand klein und außerdem zum Teil von entgegengesetztem Vorzeichen, so daß der herausspringende Fehler im Endergebnis nur unbedeutend sein kann.

Weiterhin wurde vorausgesetzt, daß unabhängig von der Größe der Flächenbelastung mit dem gleichen Profilwiderstandsbeiwert gerechnet werden kann, daß also durch Anbringung von Landehilfen keine zusätzlichen Verluste gegenüber dem glatten Flügel ohne Landehilfe entstehen. Bei sauberer Formgebung dürfte diese Forderung besonders bei Klappen mit günstiger Lage der Trennfugen wie z. B. bei Spreizklappen und Fowler-Flügel weitgehend verwirklicht werden können.

Für die Ermittlung der Flugleistungen, insbesondere der größten Steiggeschwindigkeit und der von ihr abhängigen Größen wie Steigzeit und Gipfelhöhe, ist es von wesentlicher Bedeutung, die Änderungen des Gesamtgewichts des Flugzeuges infolge Veränderung der Flächenbelastung und der Flügelstreckung zu kennen. Um diese Gewichtsänderungen zu erfassen, wurde daher eine eingehende Rechnung durchgeführt, über die im Anhang ausführlich berichtet wird. An dieser Stelle soll nur auf das Ergebnis hingewiesen werden, das auf Bild 3 dargestellt ist. In Abhängigkeit von Flächenbelastung, Flügelstreckung und Spannweitenbelastung zeigt dieses Bild die verhältnismäßige Änderung des Fluggewichts

[4]) Z. B. ist es durchaus noch unklar, ob eine bestimmte Triebwerksgondel bei Anordnung an einem tiefen oder an einem schmalen Flügel größeren Widerstand hervorruft. Zwar wird der Oberflächenreibungswiderstand der Triebwerksgondel beim tiefen Flügel kleiner sein, da die Gondel beim tiefen Flügel stärker im Flügel verschwindet. Dieser Reibungswiderstand macht aber bei den zur Zeit gebräuchlichen Gondeln nur den kleineren Anteil, etwa 30 % des Gesamtwiderstandes, aus, während der übrige Hauptanteil durch Druckwiderstand, insbesondere durch Störung der Tragflügelströmung entsteht. Wie sich dieser Druckwiderstand bei Änderung der Flügeltiefe ändert, ist schwer zu übersehen, da beim tiefen Flügel einerseits wohl die störenden, aus dem Flügel herausragenden Gondelteile kleiner sind, andererseits aber auch die durch die Störung benachteiligte Flügelfläche größer ist.

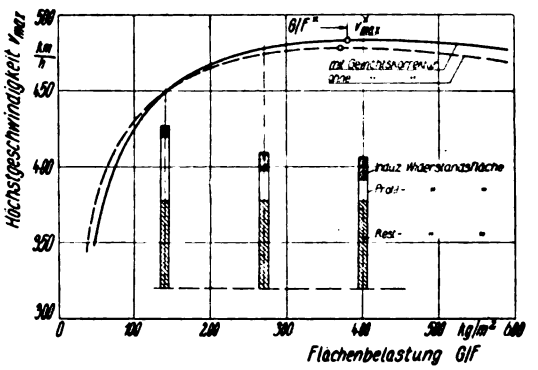


Bild 4. Beispiel: Höchstgeschwindigkeit eines Schnellflugzeuges bei verschiedenen Flächenbelastungen.
Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G' = 0{,}2$ PS/kg.
Restwiderstandsverhältnis $f_{res}/G' = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ m²/kg.
Flughöhe = 4 km; Flügelstreckung $\Lambda = 8$.
(Flügelgewichtsanteil $G_F'/G' = 0{,}14$).

G'/G, wobei G' das Fluggewicht bei einem willkürlich gewählten Bezugszustand (Flächenbelastung $G/F = 100$ kg/m² und Flügelstreckung $b^2/F = 5$) darstellt. Verschiedene Güte des Flügelbaues hinsichtlich des aufgewendeten Gewichts und verschiedene Größe der Flugzeuge wurde durch den gemeinsamen Parameter G_F'/G' berücksichtigt, der für den Bezugszustand das Verhältnis des Flügelgewichts zum Fluggewicht darstellt.

In den Beziehungen des Bildes 3 ist damit das Rüstzeug gewonnen, um für die geplanten überschlägigen Flugleistungsrechnungen den Einfluß des Flügelgewichts bei verschiedener Bemessung des Flügels berücksichtigen zu können.

C. Flächenbelastungsänderung bei bestimmten Flügelstreckungen.

I. Höchst- und Reisegeschwindigkeit.

1. Beispiel.

Der Einfluß einer Flächenbelastungsänderung auf die Höchstgeschwindigkeit soll zunächst an einem Beispielflugzeug gezeigt werden, das bei einem Fluggewicht von 8000 kg und einer Motorleistung von 2 × 1000 PS eine Höchstgeschwindigkeit von etwa 450 km/h in 4 km Höhe entwickelt (Bild 4). Steigert man bei gleicher Flügelstreckung $\Lambda = 8$ die Flächenbelastung über die des Ausgangsflugzeuges mit $G/F = 140$ kg/m² hinaus, so steigt die Höchstgeschwindigkeit zunächst merklich, bei weiterer Steigerung der Flächenbelastung jedoch nur langsamer an, um schließlich bei etwa 400 kg/m² ein Maximum der Höchstgeschwindigkeit von etwa 480 km/h zu erreichen. Bei Erhöhung der Flächenbelastung über diesen Grenzwert hinaus beginnt die Höchstgeschwindigkeit wieder abzusinken.

Dieser Verlauf der Höchstgeschwindigkeit bei Veränderung der Flächenbelastung wird aus den Darstellungen der Widerstandsaufteilung bei den verschiedenen Flächenbelastungen verständlich. Da bei dem Ausgangsflugzeug mit 140 kg/m² der induzierte Widerstand nur einen sehr geringen Anteil des Gesamtwiderstandes bildet, äußert sich zunächst eine Verkleinerung der Flügelfläche in einer starken Herabsetzung des Profilwiderstandes, während das Anwachsen des induzierten Widerstandes von untergeordneter Be-

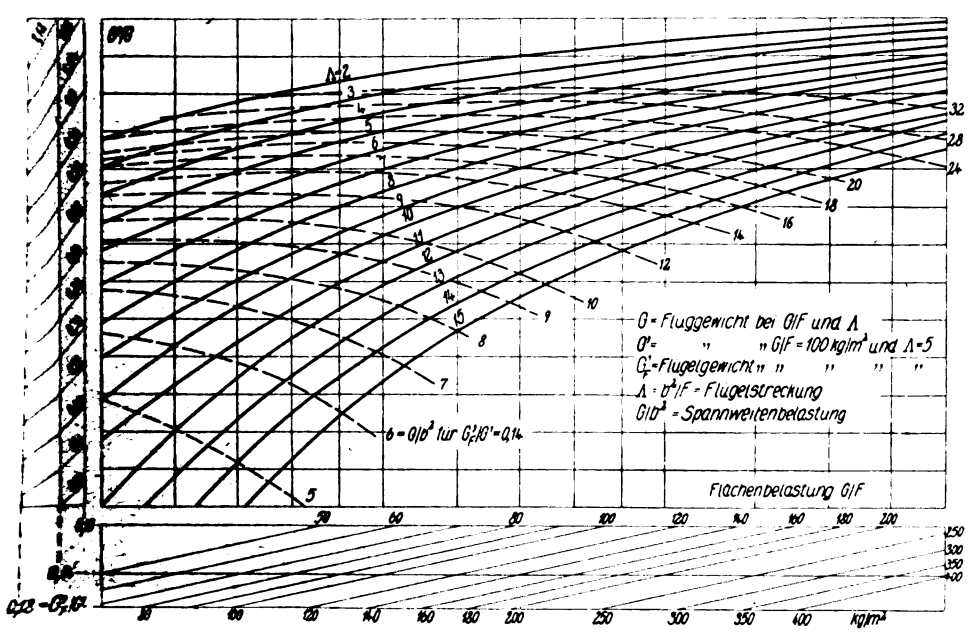


Bild 3. Fluggewichtsverhältnis G'/G in Abhängigkeit von Flächenbelastung und Flügelstreckung.

Digitized by Google

deutung bleibt. Bei weiterer Vergrößerung der Flächenbelastung wächst die Zunahme des induzierten Widerstandes immer mehr zu der Größe der Profilwiderstandsverminderung an, bis schließlich beim Optimum der induzierte Widerstand gleich dem Profilwiderstand ist. Von dieser Flächenbelastung an überwiegt bei weiterer Flügelverkleinerung die Zunahme des induzierten Widerstandes gegenüber der Abnahme des Profilwiderstandes, so daß die Höchstgeschwindigkeit wieder sinken muß.

Diese Betrachtung wurde einmal bei konstantem Fluggewicht, ein andermal mit Berücksichtigung der Flügelgewichtsänderung durch die verschiedenen Flügelgrößen durchgeführt (vgl. Bild 4). Es zeigt sich, daß sich grundsätzlich der gleiche Kurvenverlauf ergibt, so daß also bei der Betrachtung der Höchstgeschwindigkeit schon eine Näherungsrechnung mit konstantem Fluggewicht den Einfluß der Flächenbelastung genügend gut wiedergibt.

Das herausspringende Optimum der Flächenbelastung ist bei diesem Beispielflugzeug so flach, daß eine Steigerung der Flächenbelastung bis zum Optimalwert unzweckmäßig ist. In dem betrachteten Fall ergibt sich z. B. bei einer Steigerung der Flächenbelastung von 100 bis 200 kg/m² eine Höchstgeschwindigkeitssteigerung von 10%, bei weiterer Steigerung von 200 bis 300 kg/m² nur noch weitere 3% und bei Erhöhung der Flächenbelastung über 300 kg/m² hinaus bis zum Optimum von 400 kg/m² nur noch weitere 0,6% Steigerung der Höchstgeschwindigkeit.

Für das betrachtete Beispielflugzeug erscheint es demnach zweckmäßig, Start- und Landehilfen zu entwickeln, die eine Flächenbelastung von etwa 200 bis 250 kg/m² auszuführen gestatten; der Höchstgeschwindigkeitsgewinn bei gleicher Antriebsleistung gegenüber der Ausgangsflächenbelastung von 140 kg/m² beträgt dabei etwa 27 km/h, entsprechend 6% Zunahme gegenüber dem Ausgangswert.

2. Günstigste Flächenbelastung für Schnell- und Reiseflug.

Die Aufgabe besteht nun darin, die im vorangehenden Abschnitt für einen Einzelfall gefundenen Ergebnisse auf beliebige Flugzeuge zu übertragen.

Die angestellten Betrachtungen gelten natürlich nicht nur für den Höchstgeschwindigkeitsflug, sondern können auch auf den Reiseflug übertragen werden. Bei der Betrachtung des Reisefluges kann man sich nämlich statt des Geschwindigkeitsverhältnisses auch direkt das Reichweitenverhältnis eingesetzt denken, da bei gleichem Drosselgrad der Motoren eine Steigerung der Geschwindigkeit um ein bestimmtes Maß auch eine gleich große Steigerung der Reichweite zur Folge hat. Soll z. B. für ein Flugzeug die günstigste Flächenbelastung für den Reiseflug bestimmt werden, so braucht nur die Motorleistung entsprechend dem angesetzten Reise-Drosselgrad und das mittlere Fluggewicht in die Rechnung eingeführt zu werden.

Aus der Leistungsgleichung für den Waagerechtflug: Nutzantriebsleistung = Leistung des Restwiderstandes und Profilwiderstandes + Leistung des induzierten Widerstandes

$$\frac{\eta \cdot N}{G} = \frac{\varrho}{2} v_{max}^3 \left[\frac{f'_{ws}}{G} + \frac{c_{wp}}{G/F} \right] + \frac{2}{\pi \cdot \varrho} \cdot \left(\frac{F}{b^2} \right) \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{v_{max}} \qquad (1)$$

folgt, daß die Hauptabhängigen dieser Betrachtung das Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G$ und das Restwiderstandsverhältnis f'_{ws}/G sind, wenn die Flughöhe, die Flügelstreckung $\Lambda = b^2/F$ und der Profilwiderstandsbeiwert c_{wp} als vorgegebene Festwerte angesehen werden können.

Differenziert man nun die Leistungsgleichung nach G/F, so ergibt sich bei gleichem Fluggewicht als Bedingung für die günstigste Flächenbelastung mit $\frac{\partial v_{max}}{\partial G/F} = 0$:

$$\frac{G/F^*}{\varrho/2 \cdot v_{max}^{*2}} = c_a^* = \sqrt{\pi \cdot c_{wp} \cdot \Lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

= Auftriebsbeiwert des Tragflügels bei günstigstem G/F. (Sämtliche Größen mit einem * beziehen sich auf den Zustand bei günstigster Flächenbelastung.)

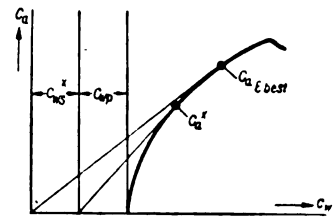


Bild 5. Flugzeugpolare mit den Betriebspunkten für den Flug mit günstigstem G/F und den Flug mit flachstem Gleitwinkel.

Diese Gleichung besagt, daß die Flächenbelastung günstigenfalls solange erhöht werden kann, bis das Flugzeug bei Höchstgeschwindigkeit mit dem angegebenen Auftriebsbeiwert c_a^* fliegt. Dieser Auftriebsbeiwert ist lediglich abhängig vom Profilwiderstandsbeiwert und von der Flügelstreckung. Er entspricht dem Zustand des besten Gleitens des Flügels allein $(c_{w\,\text{Flügel}}/c_a)_{min}$, wie durch eine einfache Rechnung nachgewiesen werden kann; also im Polardiagramm dem Berührungspunkt der Tangente an die Flügelpolare; Bild 5; für diesen Flugzustand ist bekanntlich der induzierte Widerstand gleich dem Profilwiderstand des Tragflügels.

Der Zustand bei günstigster Flächenbelastung ist also nicht identisch mit dem Zustand des flachsten Gleitens des Flugzeuges, da der Auftriebsbeiwert für das günstigste Gleiten stets beachtlich höher liegt als der zu der Höchstgeschwindigkeit gehörige Wert. Dies bedeutet z. B.:

Wenn ein Flugzeug in irgendeiner Höhe mit dem besten Gleitwinkel fliegt, bei dem also bei festgehaltener Flügelgröße der Zustand der größten Wirtschaftlichkeit erreicht wird, so ist dieser Flugzustand für die betreffende Fluggeschwindigkeit durchaus nicht als wirtschaftlichster Flugzustand zu betrachten, wenn die Flügelgröße bei gleicher Flügelstreckung als frei wählbar angesehen werden kann. Es wäre vielmehr möglich, die gleiche Fluggeschwindigkeit mit geringerer Antriebsleistung und damit mit besserer Wirtschaftlichkeit zu erzielen, wenn die Flügel in dem oben bezeichneten Maße vergrößert werden würden. Es läßt sich zeigen, daß das Verhältnis der Antriebsleistung beim besten Gleitwinkel $N_{\varepsilon\,best}$ zur Antriebsleistung bei günstigster Flächenbelastung und gleicher Fluggeschwindigkeit $N_{G/F}{}^*$ folgendermaßen bestimmt ist:

$$\frac{N_{G/F}{}^*}{N_{\varepsilon\,best}} = \frac{c'_{ws}/c_{wp} + 2\sqrt{1 + c'_{ws}/c_{wp}}}{2 \cdot (1 + c'_{ws}/c_{wp})}; \quad c'_{ws} = \frac{f'_{ws}/G}{G/F_{\varepsilon\,best}} \qquad (3)$$

D. h. bei einem Verhältnis $c'_{ws}/c_{wp} = 2$, wie es etwa einem Schnellflugzeug entspricht, könnte die Antriebsleistung um etwa 10% bei gleicher Fluggeschwindigkeit gesenkt werden und damit eine Reichweitenvergrößerung um das gleiche Maß erreicht werden.

In allgemeiner Form läßt sich das Ergebnis auch so fassen: Soll ein Flugzeug eine vorgegebene Fluggeschwindigkeit erzielen, so hat dasjenige Flugzeug den geringsten Leistungsbedarf, dessen Flächenbelastung den aus Gleichung (2) ermittelten Wert besitzt:

$$G/F^* = \frac{\varrho}{2} \cdot v^{*2} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{wp} \cdot \Lambda}.$$

Dabei ist es völlig gleichgültig, ob das betreffende Flugzeug ein aerodynamisch hochwertiges Flugzeug mit geringer Antriebsleistung oder ein aerodynamisch schlecht durchgebildetes Flugzeug mit entsprechend hoher Antriebsleistung ist.

Für ein Flugzeug mit 300 km/h Höchstgeschwindigkeit in 4 km Höhe würde sich demnach bei einer Flügelstreckung von $\Lambda = 8$ eine günstigste Flächenbelastung von etwa 145 kg/m² ergeben, bei einer Steigerung der Geschwindigkeit auf das Doppelte in gleicher Flughöhe schon 580 kg/m². Eine Erhöhung der Flächenbelastung ist also besonders vorteilhaft bei schnellen Flugzeugen, während bei langsamen Flugzeugen kein nennenswerter Gewinn zu erwarten ist.

Aus dieser Gleichung lassen sich also schon sämtliche Richtlinien ablesen, die für die Bemessung der Flächen-

Digitized by Google

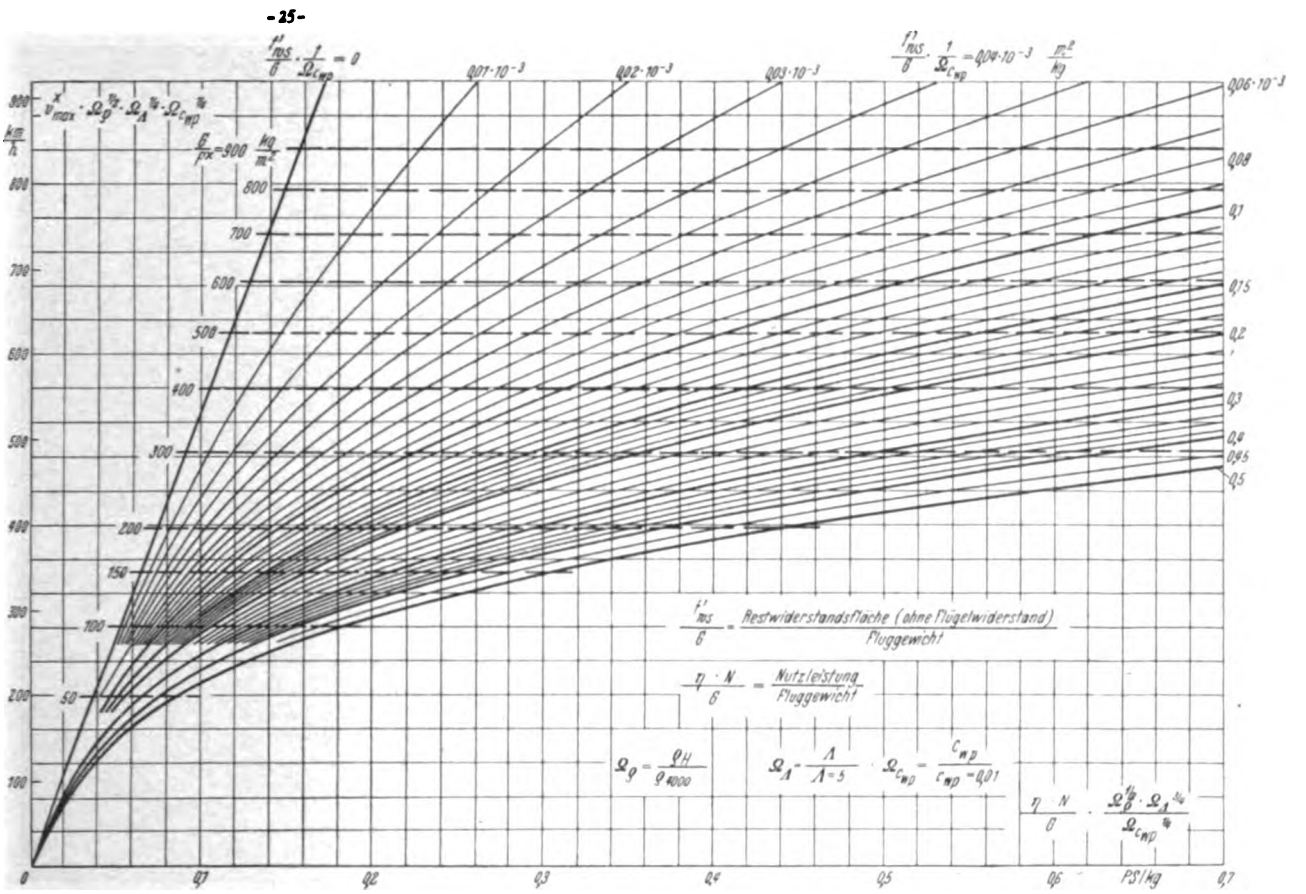


Bild 6. Höchstgeschwindigkeit v_{max}* bei günstigster Flächenbelastung G/F* für gleiche Flügelstreckung Λ (ohne Gewichtskorrektur).

belastung von Wichtigkeit sind, wie Luftdichte, Flügelstreckung, Profilwiderstandsbeiwert usw. Für die praktische Anwendung ist es jedoch vorteilhaft, den Einfluß der Grundgrößen des Flugzeugentwurfs wie Leistungs- und Widerstandsverhältnis zu verfolgen.

Die Ergebnisse einer solchen Rechnung zeigt Bild 6, auf dem in Abhängigkeit vom Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G$ und vom Restwiderstandsverhältnis f'_{ws}/G die günstigste Flächenbelastung G/F* und die bei ihr erreichten Höchstgeschwindigkeiten aufgetragen sind. Das Schaubild wurde entworfen für die Flughöhe $H = 4$ km, den Profilwiderstandsbeiwert $c_{wp} = 0{,}01$ und die Flügelstreckung $\Lambda = 5$. Um jedoch auch für beliebige Verhältnisse dieses Schaubild benutzen zu können, wurde die Leistungsgleichung mit Hilfe von Beizahlen umgeformt, die folgendermaßen definiert sind:

$$\Omega_\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_{4000}};\quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda = 5};\quad \Omega_{c_{wp}} = \frac{c_{wp}}{c_{wp} = 0{,}01}.$$

Die umgeformte Leistungsgleichung lautet dann:

$$\frac{\eta \cdot N}{G} \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2} \cdot \Omega_\Lambda^{3/4}}{\Omega_{c_{wp}}^{1/4}} = \frac{\varrho_{4000}}{2} \cdot \left(v_{max} \cdot \Omega_\varrho^{1/2} \cdot \Omega_\Lambda^{1/4} \cdot \Omega_{c_{wp}}^{1/4}\right)^3 \times \left[\frac{f'_{ws}}{G} \cdot \frac{1}{\Omega_{c_{wp}}} + \frac{c_{wp} = 0{,}01}{G/F}\right] + \frac{2}{\pi \cdot \varrho_{4000}} \cdot \frac{1}{\Lambda = 5} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{v_{max} \cdot \Omega_\varrho^{1/2} \cdot \Omega_\Lambda^{1/4} \cdot \Omega_{c_{wp}}^{1/4}}.$$

Aus dieser Schreibweise erkennt man, daß das Schaubild sofort allgemein anwendbar wird, wenn folgende fiktive Kennzahlen eingeführt werden:

Fiktives Leistungsverhältnis $\dfrac{\eta \cdot N}{G} \cdot \dfrac{\Omega_\varrho^{1/2} \cdot \Omega_\Lambda^{3/4}}{\Omega_{c_{wp}}^{1/4}}$

Fiktives Restwiderstandsverhältnis $f'_{ws}/G \cdot 1/\Omega_{c_{wp}}$

Fiktive Höchstgeschwindigkeit $v_{max} \cdot \Omega_\varrho^{1/2} \cdot \Omega_\Lambda^{1/4} \cdot \Omega_{c_{wp}}^{1/4}$.

Aus dem Schaubild, Bild 6, kann also für beliebige Flugzeuge sofort diejenige Flächenbelastung abgelesen werden, bis zu der eine Steigerung der Flächenbelastung unter den betreffenden Flugbedingungen sich günstig auf die Fluggeschwindigkeit auswirkt. Man sieht, daß die günstigste Flächenbelastung um so höher liegt, je höher bei gleichem f'_{ws}/G die Antriebsleistung im Verhältnis zum Fluggewicht gewählt wird bzw. je hochwertiger bei gleichem $\eta \cdot N/G$ die aerodynamische Durchbildung des Flugzeuges ist, d. h. je kleiner f'_{ws}/G ist.

In das gleiche Schaubild, das auf Bild 7 nochmals in verkleinertem Maßstab wiedergegeben ist, ist eine Zahl von neueren Flugzeugen entsprechend ihrem Leistungs- und Widerstandsverhältnis für Vollgasflug in Volldruckhöhe eingetragen, wobei die Flügelstreckung in der bei den verschiedenen Baumustern vorhandenen Größe beibehalten wurden. Bei diesen Flugzeugen steigt die günstigste Flächenbelastung bis zu Werten von etwa 400 kg/m² an, die mit fortschreitender aerodynamischer Verfeinerung der Flug-

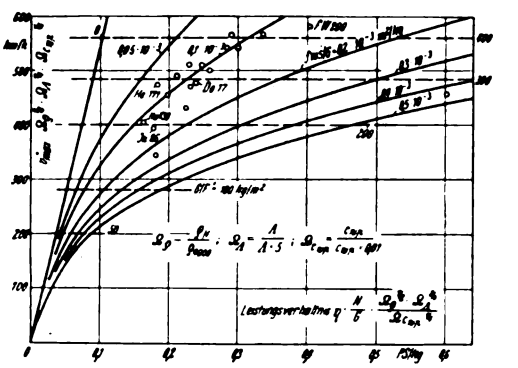


Bild 7. Günstigste Flächenbelastung G/F* und zugehörige Höchstgeschwindigkeit v_{max}* für neuere Flugzeuge (ohne Gewichtskorrektur).

Digitized by Google

zeuge noch größeren Werten zustreben. Da Flächenbelastungen dieser Größenordnung in naher Zukunft wohl kaum Aussicht auf Verwirklichung haben und außerdem das Optimum der Höchstgeschwindigkeit außerordentlich flach verläuft (vgl. Beispielrechnung Bild 4), muß als nächster Schritt die Frage untersucht werden: »Wie stark darf die Flächenbelastung gegenüber dem jeweiligen Bestwert herabgesetzt werden, wenn gegenüber dem Optimum bestimmte Einbußen an Höchstgeschwindigkeit, wie z. B. 1 oder 2%, zugelassen werden sollen?«

3. Flächenbelastung bei bestimmten Einbußen an Geschwindigkeit.

Denkt man sich die Leistungsgleichung für ein bestimmtes Flugzeug einmal für eine beliebige Flächenbelastung G/F und ein andermal für die günstigste Flächenbelastung G/F^* aufgestellt und voneinander subtrahiert und hält dabei die Flugzeugkennwerte $\eta \cdot N/G$ und f'_{ws}/G unverändert bei:
so ergibt sich mit der Beziehung für die günstigste Flächenbelastung

$$G/F^* = \frac{\varrho}{2} v^{*2} \cdot \sqrt{\pi \cdot \Lambda \cdot c_{wp}},$$

nach einigem Umformen:

$$\frac{G/F}{G/F^*} = \frac{v_{max}}{v_{max}^*} \left\{ 1 + \frac{K}{2} \cdot \left(1 - \frac{v_{max}^3}{v_{max}^{*3}} \right) \pm \sqrt{\left[1 + \frac{K}{2} \cdot \left(1 - \frac{v_{max}^3}{v_{max}^{*3}} \right) \right]^2 - \left[\frac{v_{max}}{v_{max}^*} \right]^2} \right\} \quad \ldots \quad (4a)$$

Hierin stellt K das Verhältnis des Restwiderstandes zum Profilwiderstand bei günstigster Flächenbelastung dar:

$$K = c'_{ws}/c_{wp} = f'_{ws}/G \cdot G/F^* \cdot 1/c_{wp} \quad \ldots \quad (4b)$$

Der Parameter K ist für jedes Flugzeug einfach zu bestimmen, da mit Hilfe von Bild 6 die günstigste Flächenbelastung als bekannt anzusehen ist.

Dieser Zusammenhang zwischen Flächenbelastungsverminderung und Geschwindigkeitsabnahme ist auf Bild 8 dargestellt. Die Empfindlichkeit der einzelnen Baumuster gegenüber Abweichungen von der günstigsten Flächenbelastung sind nach diesem Schaubild sehr verschieden. Sie ist umso stärker, d. h. umso gewinnbringender ist eine Angleichung an den Bestwert, je kleiner der Wert des Parameters $f'_{ws}/G \cdot G/F^* \cdot 1/c_{wp}$ ist. Wie wird sich nun bei fortschreitender Entwicklung der Flugzeuge die Empfindlichkeit gegenüber der richtigen Wahl der Flächenbelastung ändern? Zur Beantwortung dieser Frage ist es zweckmäßig, den Parameter etwas umzuformen.

Mit der Beziehung $G/F^* = \frac{\varrho}{2} v_{max}^{*2} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{wp} \cdot \Lambda}$ und der Tatsache, daß bei günstigster Flächenbelastung der induzierte Widerstand gleich dem Profilwiderstand des Flügels ist (vgl. Abschn. C I/2) kann der Ausdruck für den Parameter K unter Verwendung der Leistungsgleichung auch folgendermaßen umgeformt werden:

$$K = \frac{f'_{ws}}{G} \cdot \frac{G}{F^*} \cdot \frac{1}{c_{wp}} = \frac{f'_{ws}}{G} \cdot v_{max}^{*2} \cdot \frac{\varrho}{2} \times \sqrt{\frac{\pi \cdot \Lambda}{c_{wp}}} = \frac{\eta \cdot N/G}{v_{max}^*} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \Lambda}{c_{wp}}} - 2 \quad \ldots \quad (5)$$

Wird also bei einem Flugzeug die Höchstgeschwindigkeit bei gleicher aerodynamischer Güte und gleicher Flughöhe durch Erhöhung der Antriebsleistung gesteigert, so steigt der Wert des Parameters K, d. h. der Einfluß der günstigsten Wahl der Flächenbelastung wird geringer. Wird dagegen die Höchstgeschwindigkeit bei gleicher Antriebsleistung durch Verbesserung der aerodynamischen Güte oder durch Vergrößerung der Flughöhe gesteigert, so sinkt der Wert des Parameters K, so daß die Empfindlichkeit des Flugzeuges gegenüber der richtigen Wahl der Flächenbelastung größer wird.

Für die zukünftige Entwicklung ist aber in steigendem Maße sowohl mit einer weiteren Verfeinerung der aerodynamischen Formgebung der Flugzeuge als auch mit einer Vergrößerung der Flughöhe zu rechnen, so daß der Gesichtspunkt der richtigen Anpassung der Flächenbelastung an Bedeutung gewinnen wird.

Für die Flugzeuge der Baujahre 1935 bis 1937 beträgt nach Bild 9 der mögliche Höchstgeschwindigkeitsgewinn durch Steigerung der Flächenbelastung bis zu 10%. Für die Baumuster Fw 200 und He 70 erscheint demnach eine Steigerung der Flächenbelastung besonders lohnend, während bei den Baumustern Ju 86, Do 17 und Ha 139 (Doppel-Schwimmer-Flugzeug) eine weitere Steigerung der Flächenbelastung über den schon vorgesehenen Wert bei gleicher Flügelstreckung keinen merkbaren Erfolg verspricht.

Zusammenfassend läßt sich also sagen:

Durch Erhöhung der Flächenbelastung über die heute üblichen Werte hinaus ist bei schnellen Flugzeugen, insbesondere bei Flugzeugen mit hoher aerodynamischer Güte, ein beachtlicher Geschwindigkeitsgewinn erzielbar.

Bei langsamen Flugzeugen dagegen ist der mögliche Geschwindigkeitsgewinn durch Flächenbelastungserhöhung gering.

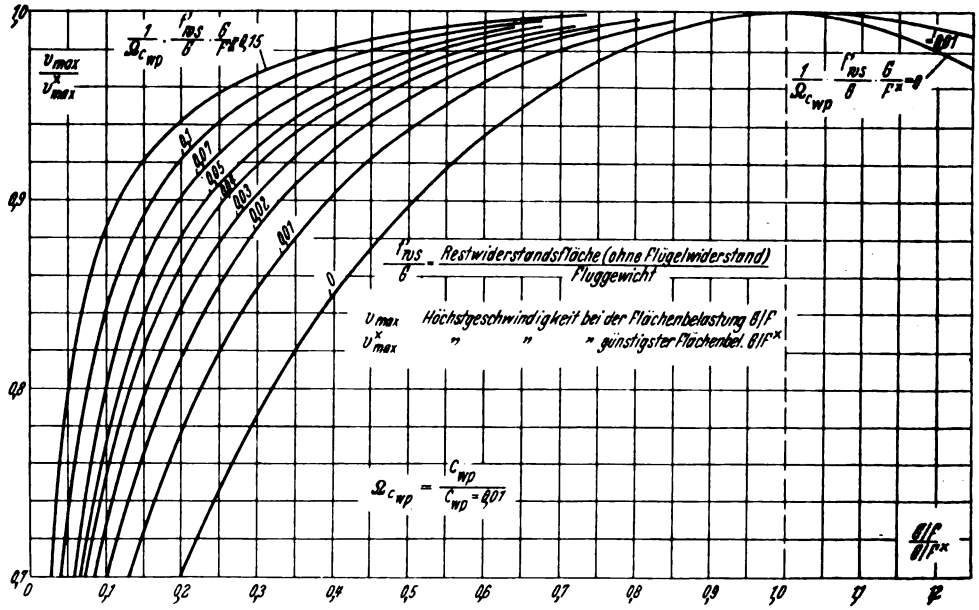


Bild 8. Abhängigkeit der Höchstgeschwindigkeit von der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung (ohne Gewichtskorrektur).

Digitized by Google

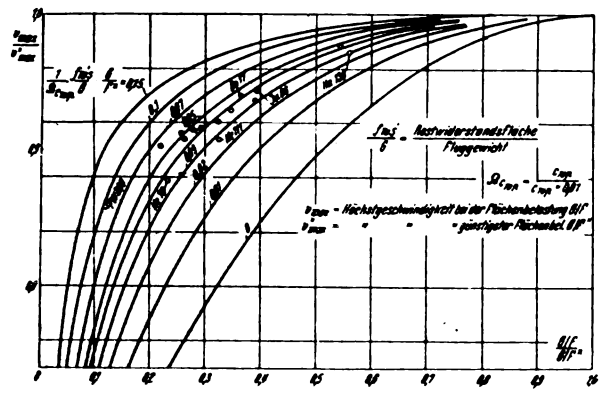


Bild 9. Abhängigkeit der Höchstgeschwindigkeit von der Flächenbelastung für neuere Flugzeuge (ohne Gewichtskorrektur).

4. Einfluß der Flügelstreckung.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten sämtlich nur für den Sonderfall, daß bei der Erhöhung der Flächenbelastung die Flügelstreckung unverändert beibehalten wird. Da aber mit steigender Flächenbelastung der induzierte Widerstand immer mehr an Bedeutung gewinnt und das Optimum schließlich durch das Zusammenspiel von induziertem und Profilwiderstand bedingt ist, liegt es nahe, mit steigender Flächenbelastung auch die Flügelstreckung zu erhöhen. Wie aber schon aus den Betrachtungen über den günstigsten Auftriebsbeiwert hervorgeht, wird mit steigender Flügelstreckung die günstigste Flächenbelastung zu höheren Werten verschoben, so daß es immer schwieriger wird, die günstigste Flächenbelastung in die Praxis umzusetzen. Andererseits wird bei gleichem Flächeninhalt das Tragflügelgewicht mit wachsender Streckung steigen, so daß dadurch der erreichbare Gewinn wieder geschmälert wird.

Um die Zusammenhänge genauer überblicken zu können, ist auf Bild 10 das Verhältnis der Höchstgeschwindigkeit bei jeweils günstigster Flächenbelastung für verschiedene Flügelstreckungen aufgetragen. Dabei wurde die Änderung der Flügelgewichte nach den Näherungsbeziehungen des Bildes 3 zunächst für einen Flügelgewichtsanteil von 14% beim Ausgangszustand abgeschätzt. Davon ausgehend wurden die Ergebnisse auf beliebige Flügelgewichtsanteile folgendermaßen umgerechnet:

Das Schaubild 3 konnte für beliebige Flügelgewichtsanteile einfach durch Verschiebung des Bezugspunktes anwendbar gemacht werden. D. h. bezeichnet man beim Flügelgewichtsanteil $G'_F/G' = 0{,}14$ die Flächenbelastung mit $(G/F)_0$ und das zugehörige Fluggewichtsverhältnis mit $(G'/G)_0$, so gehört für beliebige Flügelgewichtsanteile zur Flächenbelastung $k_2 \cdot (G/F)_0$ das Fluggewichtsverhältnis $k_1 \cdot (G'/G)_0$. Die Faktoren k_1 und k_2 stellen für jeden Flügelgewichtsanteil bestimmte Konstanten dar, deren Werte sofort aus Bild 3 entnommen werden können.

Damit lautet die Leistungsgleichung:

$$\frac{\eta \cdot N}{G'} \cdot k_1 \cdot \left(\frac{G'}{G}\right)_0 = \frac{\varrho}{2} \cdot v_{max}^3 \left[\frac{f'_{we}}{G'} \cdot k_1 \cdot \left(\frac{G'}{G}\right)_0 + \frac{c_{wp}}{k_2 (G/F)_0}\right] + \frac{2}{\pi \cdot \varrho} \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot k_2 \left(\frac{G}{F}\right)_0 \cdot \frac{1}{v_{max}}$$

oder

$$\left(\frac{\eta \cdot N}{G} \cdot \frac{k_1}{\sqrt{k_2}}\right) \cdot \left(\frac{G'}{G}\right)_0 = \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{v_{max}}{\sqrt{k_2}}\right)^3 \times \left[\left(\frac{f'_{we}}{G'} \cdot k_1 \cdot k_2\right) \cdot \left(\frac{G'}{G}\right)_0 + \frac{c_{wp}}{(G/F)_0}\right] + \frac{2}{\pi \cdot \varrho} \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\sqrt{k_2}}{v_{max}} \cdot \left(\frac{G}{F}\right)_0 .$$

Die Umrechnung auf beliebige Flügelgewichtsanteile kann also dadurch geschehen, daß folgende fiktive Kennzahlen eingeführt werden:

Leistungsverhältnis $\eta \cdot N \cdot k_1/\sqrt{k_2}$

Restwiderstandsverhältnis $f'_{we}/G' \cdot k_1 \cdot k_2$,

Höchstgeschwindigkeit $v_{max}/\sqrt{k_2}$.

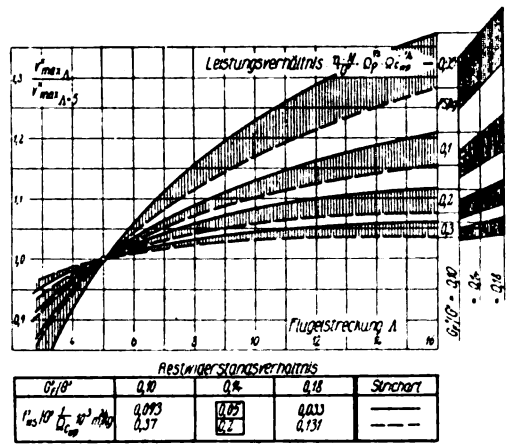


Bild 10. Einfluß der Flügelstreckung auf die Höchstgeschwindigkeit v_{max}* bei günstigster Flächenbelastung (mit Gewichtskorrektur)
G' = Fluggewicht bei $G/F = 100$ kg/m² und $\Lambda = 5$.
G'_F = Flügelgewicht » » $= 100$ » » $= 5$.

$$\Omega_\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_{4000}}; \quad \Omega_{c_{wp}} = \frac{c_{wp}}{c_{wp} = 0{,}010}.$$

Zu beachten ist zum Schluß nur, daß die Ergebnisse nach obiger Gleichung zunächst in Abhängigkeit von der Flächenbelastung $(G/F)_0$ gewonnen werden, daß also die rechnerischen Flächenbelastungen $(G/F)_0$ wieder mit Hilfe der Beziehung $G/F = k_2 \cdot (G/F)_0$ in die tatsächlichen rückverwandelt werden müssen.

Diese oben beschriebenen Umwandlungen können in einfacher Weise durch Maßstabsänderungen erfaßt werden, wie es z. B. Bild 10 zeigt.

Man sieht, daß Flugzeuge mit großer Antriebsleistung, das sind z. B. Rennflugzeuge, Jagdflugzeuge, Schnellflugzeuge geringer Nutzlast und Reichweite mit einem Leistungsverhältnis von mehr als 0,2 bis zu 0,4 PS/kg, sehr unempfindlich sind hinsichtlich der Wahl der Flügelstreckung. Bei schwachmotorigen Flugzeugen dagegen, wie z. B. bei neueren Schnellverkehrsflugzeugen vom Typ der Fw 200 oder der Douglas DC 4 mit einem $\eta \cdot N/G$ von etwa 0,1 PS/kg und weniger im Reiseflug oder bei Langstreckenflugzeugen mit Leistungsverhältnissen bis herab zu 0,05 PS/kg, ist ein beachtlicher Gewinn durch Steigerung der Flügelstreckung zu erzielen, der sich sogar noch in unvermindertem Anstieg über Flügelstreckungen von 15 hinaus fortsetzt. Dabei ist die Geschwindigkeitssteigerung durch Erhöhung der Flügelstreckung um so ausgeprägter, je größer die aerodynamische Güte der Flugzeuge ist.

Bei der Betrachtung des Bildes 10 ist jedoch zu beachten, daß einer hohen Flügelstreckung auch zwangsläufig eine hohe Flächenbelastung zugeordnet ist; es wird daher bei hohen Streckungen immer schwieriger werden, die dargestellten Geschwindigkeitsgewinne in die Wirklichkeit umzusetzen. Diese Zusammenhänge sollen im folgenden an zwei typischen Flugzeugen, an einem Mittelstrecken-Schnellflugzeug und an einem Langstrecken-Schnellflugzeug gezeigt werden.

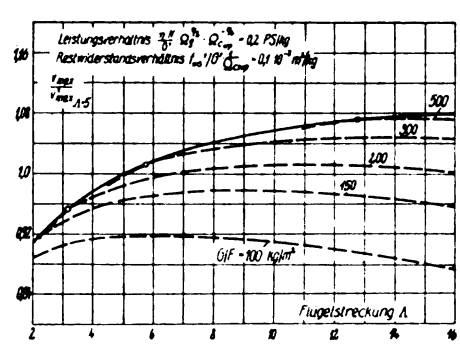


Bild 11. Einfluß der Flügelstreckung auf die Höchstgeschwindigkeit für ein Schnellflugzeug (mit Gewichtskorrektur, $G'_F/G' = 0{,}14$).
v_{max}*$\Lambda = 5$ = Höchstgeschwindigkeit bei günstigst. G/F und $\Lambda = 5$.
G' = Fluggewicht bei $G/F = 100$ kg/m² und $\Lambda = 5$.

Digitized by Google

a) Mittelstrecken-Schnellflugzeug. Auf Bild 11 ist für ein Flugzeug mit 8000 kg Fluggewicht und zwei Motoren von je 1000 PS, das in 4 km Höhe eine Höchstgeschwindigkeit von etwa 450 km/h entwickelt, der Einfluß von Flügelstreckung und Flächenbelastung auf die Höchstgeschwindigkeit dargestellt. Bei den zur Zeit üblichen Flächenbelastungen von etwa 150 kg/m² ist es in weiten Grenzen völlig gleichgültig, welche Flügelstreckung ausgeführt wird. Erst bei weiterer Steigerung der Flächenbelastung auf 200 bis 300 kg/m² tritt eine leichte Verschiebung der günstigsten Flügelstreckung zu Werten von $\Lambda = 10$ auf.

Für das betrachtete Flugzeug ist es demnach zweckmäßig, bei einer Flügelstreckung von etwa $\Lambda = 9$ Flächenbelastungen der Größenordnung 200 bis 300 kg/m² anzustreben.

b) Langstrecken-Schnellflugzeug. Für ein ausgesprochenes Langstrecken-Flugzeug von etwa 20000 kg Fluggewicht mit vier Motoren von je 720 PS Höchstleistung, das in 6 km Höhe bei einer Drosselung der Motoren auf 60% eine Reisegeschwindigkeit von 360 km/h entwickeln soll (Höchstgeschwindigkeit in 6 km Höhe 430 km/h), zeigt Bild 12 die entsprechenden Abhängigkeiten. Bei diesem Flugzeug ist die erreichbare Flügelstreckung von ausschlaggebender Wichtigkeit. Um Flächenbelastungen von größenordnungsmäßig 200 kg/m² ausnützen zu können, die noch einen beachtlichen Gewinn an Höchstgeschwindigkeit ergeben, müßte die Flügelstreckung auf mindestens $\Lambda = 12$ heraufgesetzt werden.

Zur Erzielung größter Wirtschaftlichkeit im Reiseflug wäre bei diesem Flugzeug anzustreben, Flächenbelastungen

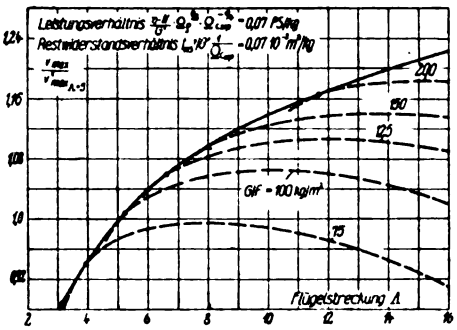


Bild 12. Einfluß der Flügelstreckung auf die Höchstgeschwindigkeit für ein Langstreckenflugzeug (mit Gewichtskorrektur, $G'_p/G' = 0{,}14$). $v_{max}{}^{*}{}_{\Lambda=5}$ = Höchstgeschwindigkeit bei günstigstem G/F und $\Lambda = 5$. G' = Fluggewicht bei $G/F = 100$ kg/m² und $\Lambda = 5$.

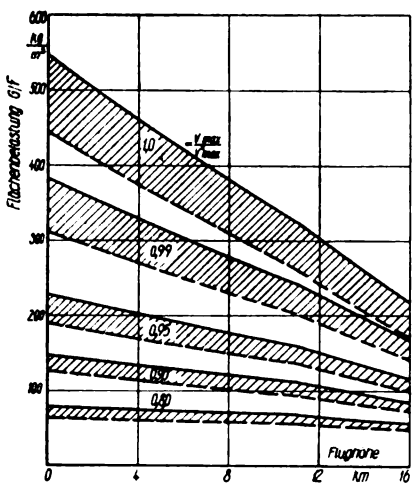


Bild 13. Einfluß der Flughöhe auf die Wahl der Flächenbelastung (mit Gewichtskorrektur, $G'_p/G' = 0{,}14$).
Leistungsverhältnis: $\eta \cdot N/G' = 0{,}2$ PS/kg.
Restwiderstandsverhältnis:
$f'_{ws}/G' = 0{,}05 \cdot 10^{-3}$ m²/kg ($c_{wp} = 0{,}006$) ———
» $= 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ m²/kg ($c_{wp} = 0{,}01$) – – – –
Flügelstreckung: $\Lambda = 8$.
Höchstgeschwindigkeit bei günstigster Flächenbelastung: $= v_{max}{}^{*}$.

von etwa 200 kg/m² in Verbindung mit Flügelstreckungen von etwa $\Lambda = 12$ zu erreichen.

5. Einfluß des Profilwiderstandsbeiwertes.

In den vorangehend angegebenen Beziehungen werden verschiedene Profilwiderstandsbeiwerte durch die Beizahlen $\Omega_{c_{wp}}$ erfaßt. Um diesen Einfluß eingehender zu zeigen, wurde für ein typisches Mittelstrecken-Schnellflugzeug die Abhängigkeit der günstigsten Flächenbelastung vom Profilwiderstandsbeiwert untersucht. Der Gewinn durch Erhöhung der Flächenbelastung ergab sich dabei um so geringer, je niedriger der Widerstandsbeiwert des Tragflügels liegt.

Bei Verbesserung des Profilwiderstandsbeiwertes z. B. von 0,01 auf 0,006, wie es etwa dem reinen Reibungswiderstand an aerodynamisch glatten Oberflächen entspricht, würde durchschnittlich die Flächenbelastung um etwa 18% bei gleicher Annäherung an den Bestwert niedriger gehalten werden können.

Bei ungewöhnlich hohen Widerstandszahlen von z. B. 0,015, wie sie etwa bei Absaugeflügeln mit großen Dickenverhältnissen in Betracht kommen, ist eine weitere Steigerung der Flächenbelastung um 18% gegenüber den Werten bei $c_{wp} = 0{,}01$ noch zweckmäßig.

6. Einfluß der Flughöhe.

Aus der Gleichung für die günstigste Flächenbelastung:

$$G/F^{*} = \frac{\varrho}{2} v_{max}^{*2} \sqrt{\pi \cdot c_{wp} \cdot \Lambda}$$

kann schon gefolgert werden, daß bei gleicher Höchstgeschwindigkeit die günstigste Flächenbelastung sich im Verhältnis der Luftdichten ändert; d. h. also, daß mit steigender Flughöhe z. B. von 3 km auf 12 km die günstigste Flächenbelastung auf etwa $\frac{1}{3}$ des Ursprungsbetrages sinkt.

Dieser Zusammenhang ist unter Einschluß der Kurven für bestimmte Annäherungsgrade an den Bestwert auf Bild 13 für ein typisches Mittelstrecken-Flugzeug mit der Flügelstreckung $\Lambda = 8$ dargestellt. Bei Vergrößerung der Flughöhe ist dabei zur Vereinfachung angenommen worden, daß das Triebwerks-Einheitsgewicht und die Stirnwiderstände mit steigender Höhe nicht zunehmen, wie es in Wirklichkeit besonders beim Übergang zu extremen Höhen der Fall ist. Durch diese Vernachlässigungen werden die Geschwindigkeiten der Höhenflugzeuge gegenüber den Bodenflugzeugen überschätzt, so daß dadurch die Abnahme der günstigsten Flächenbelastung mit der Höhe in Wirklichkeit noch stärker ist.

Steigert man die Höhe dieses Beispielflugzeuges von Bodennähe auf 8 km Höhe, so sinkt die günstigste Flächenbelastung auf 70%, um in 16 km Höhe, die etwa der zur Zeit mit Abgasturbinenbetrieb erreichbaren Grenz-Volldruckhöhe der Otto-Motoren entspricht, sogar auf 40% des Bodenwertes abzusinken.

Bei diesem Flugzeugtyp (Mittelstrecken-Schnellflugzeug) ist es also in Höhen um 4 km anzustreben, Flächenbelastungen von etwa 200 kg/m² auszuführen, da eine weitere Steigerung nur sehr geringe Flugleistungsverbesserungen ergibt. In Höhen von etwa 16 km hat es dagegen schon kaum noch Sinn, die Flächenbelastung über 120 kg/m² zu erhöhen. Selbst bei einer gleichzeitigen Steigerung der Flügelstreckung von 8 auf 12 würde es in 16 km Höhe unzweckmäßig sein, über Flächenbelastungen von 150 kg/m² hinauszugehen.

Um in diesem Schaubild die Entwicklungsmöglichkeiten durch Verfeinerung der aerodynamischen Güte der Flugzeuge abschätzen zu können, wurde bei einer zweiten Durchrechnung der Restwiderstand f'_{ws} auf die Hälfte und der Profilwiderstandsbeiwert auf $c_{wp} = 0{,}06$ herabgesetzt, wie es etwa unteren Grenzwerten für den Fall völlig glatter Oberflächen und ablösungsfreier Formgebung entspricht. Man erkennt, daß durch diese aerodynamische Verfeinerung das Gesamtbild zu Flächenbelastungen von etwa 20% größeren Werten verschoben wird.

Bei dieser Auftragung zeigt sich deutlich, daß das Flugzeug in großen Höhen wesentlich empfindlicher auf günstige

Digitized by Google

Wahl der Flächenbelastung ist als das Flugzeug in geringen Höhen, wie schon aus den Betrachtungen im Abschnitt C I/3 für schwachmotorige Flugzeuge zu folgern war.

II. Steiggeschwindigkeit.

Die gleichen Überlegungen wie für die Höchstgeschwindigkeit wurden in beschränktem Umfange auch für die größte Steiggeschwindigkeit durchgeführt, da neben der erreichten Höchstgeschwindigkeit auch die Steigfähigkeit der Flugzeuge von Bedeutung ist und darüber hinaus die Steiggeschwindigkeit auch als Maßstab für die Länge des Starts und die Gipfelhöhe angesehen werden kann.

1. Beispiel.

Für das gleiche Flugzeug, für das in Abschnitt C I/1 der Einfluß der Flächenbelastung auf die Höchstgeschwindigkeit verfolgt worden war, ist der Verlauf der größten Steiggeschwindigkeit in 4 km Höhe in Abhängigkeit von der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung auf Bild 14 dargestellt. Als größte Steiggeschwindigkeit wurde hierbei diejenige Steiggeschwindigkeit gewertet, die sich beim besten Gleitwinkel als Differenz der Hubgeschwindigkeit w_h und der Sinkgeschwindigkeit w_s ergibt. Wird die Änderung des Fluggewichts bei Veränderung der Flächenbelastung zunächst vernachlässigt (gestrichelte Kurven), so sinkt die Steiggeschwindigkeit mit zunehmender Flächenbelastung stetig bis auf $w = 0$ ab. Bei Berücksichtigung der Gewichtsänderungen ergibt sich jedoch ein grundsätzlich anderer Verlauf. Im Zusammenspiel zwischen Fluggewichtsvergrößerung und Sinkgeschwindigkeitsverringerung wird ein flaches Maximum bei etwa $G/F = 100$ kg/m² erreicht.

2. Günstigste Flächenbelastung für den Steigflug.

Für die Ermittlung der günstigsten Flächenbelastung im Steigflug kann nach der vorangehenden Beispielrechnung nicht die vereinfachende Annahme getroffen werden wie bei der Untersuchung der Höchstgeschwindigkeit, daß das Fluggewicht in erster Annäherung als unveränderlich zu betrachten ist. Durch Berücksichtigung der verwickelten Zusammenhänge zwischen Flügelgewicht und Flächenbelastung und Flügelstreckung konnte die Lösung der Aufgabe nur graphisch gefunden werden.

In Übereinstimmung mit der Schrenkschen polarlosen Leistungsrechnung[8]) wird festgesetzt, daß als größte Steiggeschwindigkeit die Steiggeschwindigkeit bei bester Gleitzahl des Flugzeuges gewertet wird.

Zergliedert man die Stirnwiderstandsbeizahl c_{ws} in die beiden Widerstandsteile: Profilwiderstandsbeizahl c_{wp} und Restwiderstandsbeizahl c'_{ws}, so ergibt sich unter Einschluß des Gewichtsverhältnisses G/G' für die Sinkgeschwindigkeit $w_{s\,best}$ bei bester Gleitzahl:

$$w_{s_{best}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\pi \cdot \Lambda}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{G/F}{\varrho/2}\right) \cdot \left(\frac{f'_{ws}}{G'} \cdot \frac{G'}{G} \cdot \frac{G}{F} + c_{wp}\right)^{1/4}.$$

Mit der Hubgeschwindigkeit $w_h = \eta \cdot N/G = \eta \cdot N/G' \cdot G'/G$ ist dann die Steiggeschwindigkeit beim besten Gleitwinkel:

[8]) M. Schrenk, Z. Flugtechn. (1931) S. 695, 721.

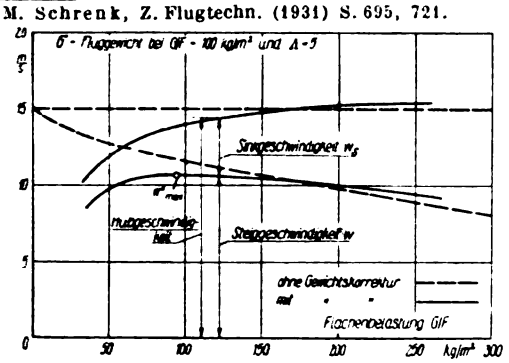


Bild 14. Beispiel: Steiggeschwindigkeit eines Schnellflugzeuges bei verschiedenen Flächenbelastungen.
Leistungsverhältnis: $\eta \cdot N/G' = 0{,}2$ PS/kg.
Restwiderstandsverhältnis: $f'_{ws}/G' = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ m²/kg.
Flughöhe = 4 km, Flügelstreckung $\Lambda = 8$.
(Flügelgewichtsanteil: $G'_F/G' = 0{,}14$).

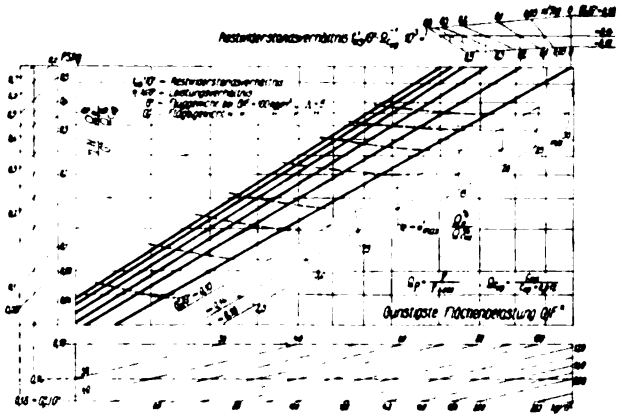


Bild 15. Günstigste Flächenbelastung G/F^* für den Steigflug bei der Flügelstreckung $\Lambda = 5$ und zugehörige Steiggeschwindigkeit w_{max}^* (mit Gewichtskorrektur).

$$w = \frac{\eta \cdot N}{G'} \cdot \frac{G'}{G} - 2 \cdot \left(\frac{1}{\pi \cdot \Lambda}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{G/F}{\varrho\,2}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{f'_{ws}}{G'} \cdot \frac{G'}{G} \cdot \frac{G}{F} + c_{wp}\right)^{1/4} \quad \ldots\ldots (6)$$

Diese Gleichung wurde nun für verschiedene Flächenbelastungen ausgewertet und auf graphischem Wege der Bestwert G/F^* der Flächenbelastung bestimmt. Als Bezugsfluggewicht G' wurde hierbei das Fluggewicht bei der Flügelstreckung $\Lambda = 5$ und der Flächenbelastung $G/F' = 100$ kg/m² gewählt. Das Ergebnis der graphischen Rechnungen hinsichtlich der günstigsten Flächenbelastungen G/F^* und der bei ihr erflogenen günstigsten Steiggeschwindigkeiten w_{max}^* ist für die Flügelstreckung $\Lambda = 5$ auf Bild 15 in Abhängigkeit von den beiden Hauptparametern: »Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G'$ und Restwiderstandsverhältnis f'_{ws}/G'« dargestellt. Die Flughöhe wurde dabei zunächst zu $H = 4000$ m und der Profilwiderstandsbeiwert der Tragflügel entsprechend mittleren Werten im Steigflug zu $c_{wp} = 0{,}012$ gesetzt.

Um dieses Schaubild auch für beliebige Flughöhen und Profilwiderstandsbeizahlen anwendbar zu machen, wurde mit Hilfe der Beizahlen $\Omega_\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_{4000}}$ und $\Omega_{c_{wp}} = \frac{c_{wp}}{c_{wp}} = 0{,}012$ die Gleichung (6) folgendermaßen umgeformt:

$$w \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2}}{\Omega_{c_{wp}}^{1/4}} = \frac{\eta \cdot N}{G'} \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2}}{\Omega_{c_{wp}}^{1/4}} \cdot \frac{G'}{G} - 2\left(\frac{1}{\pi \cdot \Lambda}\right)^{3/4} \times \left(\frac{G/F}{\varrho_{4000}/2}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{f'_{ws}}{G'} \cdot \frac{1}{\Omega_{c_{wp}}} \cdot \frac{G'}{G} \cdot \frac{G}{F} + c_{wp_{0.012}}\right)^{1/4}.$$

Aus dieser Schreibweise erkennt man, daß das Schaubild sofort allgemein anwendbar wird, wenn folgende fiktiven Kennzahlen eingeführt werden:

Leistungsverhältnis $\frac{\eta \cdot N}{G'} \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2}}{\Omega_{c_{wp}}^{1/4}}$

Restwiderstandsverhältnis $f'_{ws}/G' \cdot 1/\Omega_{c_{wp}}$

Größte Steiggeschwindigkeit $w^* \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2}}{\Omega_{c_{wp}}^{1/4}}$.

Verschiedene Anteile des Flügelgewichts am Gesamtgewicht beim Ausgangszustand ($\Lambda' = 5$, $G/F' = 100$ kg/m²) konnten durch eine einfache Maßstabsänderung auf Grund der Beziehungen des Bildes 3 erfaßt werden.

In Übereinstimmung mit den Verhältnissen beim Schnellflug liegen die günstigsten Flächenbelastungen des Steigflugs um so höher, je größer das Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G'$, je größer die aerodynamische Güte, d. h. je kleiner f'_{ws}/G', je größer der Profilwiderstandsbeiwert c_{wp}, je kleiner die Flughöhe und je größer der Anteil des Flügelgewichts am Gesamtgewicht beim Ausgangszustand ist. Hervorzuheben ist, daß die günstigsten Flächenbelastungen für den Steigflug im allgemeinen nur einen Bruchteil der günstigsten Flächenbelastungen für den Schnellflug sind.

Digitized by Google

3. Einfluß der Flügelstreckung.

Bild 15 für die Bestimmung der günstigsten Flächenbelastung ist nur für die Flügelstreckung $\Lambda = 5$ gültig. Eine Nachrechnung für beliebige Flügelstreckungen im Bereich zwischen $\Lambda = 3$ und $\Lambda = 15$ ergab, daß mit einer Genauigkeit von $\pm 2\%$ folgendes Umrechnungsgesetz auf beliebige Flügelstreckungen angewendet werden kann:

$$G/F^*_{\Lambda} = \Omega_{\Lambda} \cdot G/F^*_{\Lambda=5}; \quad \Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda = 5},$$

d. h. z. B.: Eine Erhöhung der Flügelstreckung auf den doppelten Wert ergibt auch eine Steigerung der günstigsten Flächenbelastung auf den doppelten Betrag. Die zugehörigen Verschiebungen der größten Steiggeschwindigkeit bei jeweils günstigster Flächenbelastung sind auf Bild 16 in Abhängigkeit von der Flügelstreckung aufgetragen. Die Unterschiede sind bei günstigster Flächenbelastung nur gering; sie bewegen sich in der Größenordnung von weniger als 0,5 m/s. Hinsichtlich der Steiggeschwindigkeit ist es daher nahezu gleichgültig, welche Flügelstreckung ausgeführt wird, wenn nur dafür Sorge getragen wird, daß die mit der Flügelstreckung stets gekoppelte günstigste Flächenbelastung verwirklicht wird. Hierzu sei noch betont, daß das Optimum der Steiggeschwindigkeit sich nicht etwa bei gleicher Spannweitenbelastung G/b^2 einstellt, sondern mit steigender Leistungsbelastung kleineren Werten der Spannweitenbelastung zustrebt.

Die Veränderung der Flügelstreckung wird im Hinblick auf die Steiggeschwindigkeit also hauptsächlich den Sinn haben können, das Optimum der Steiggeschwindigkeit in den Bereich der Flächenbelastungen zu verlagern, die sich für die Höchstgeschwindigkeit als günstig erwiesen haben; d. h. im allgemeinen zu höheren Werten.

4. Steiggeschwindigkeitsverluste durch Abweichungen von der günstigsten Flächenbelastung.

Da es im allgemeinen nicht möglich sein wird, die günstigsten Flächenbelastungen hinsichtlich des Steigflugs in die Praxis umzusetzen, soll hier die Frage untersucht werden:

Wie wird sich die Steiggeschwindigkeit ändern, wenn Flächenbelastungen mit bestimmten Abweichungen vom Bestwert ausgeführt werden?

Da es im allgemeinen genügt, die Steiggeschwindigkeitsverluste nur näherungsweise abschätzen zu können, wurden allgemein gültige Mittelkurven für den Verlauf der Steiggeschwindigkeit und der Flächenbelastung ausgearbeitet. Diese mittleren Kurven, Bild 17, gelten genau etwa für Restwiderstandsverhältnisse von $f_{we}/G' = 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2/kg}$, Flügelstreckungen von $\Lambda = 8$ und Flügelgewichtsanteile von $G_F/G' = 0{,}14$. Für Flugzeuge mit wesentlich abweichenden Kenngrößen wurde ein größter Fehler von $\pm 4\%$ in der Steiggeschwindigkeit durch diese Vereinfachung zugelassen für den Fall, daß die Flächenbelastung auf den halben bzw. den doppelten Betrag der günstigsten Flächenbelastung abgeändert wurde.

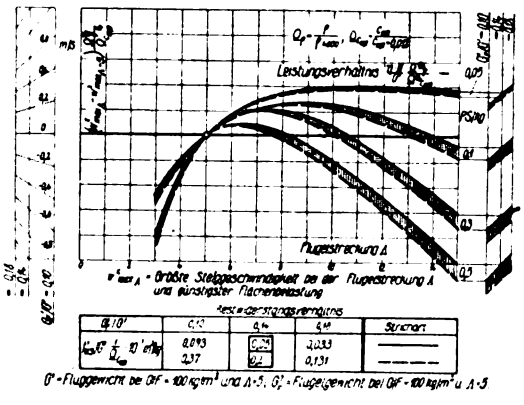


Bild 16. Einfluß der Flügelstreckung auf die Steiggeschwindigkeit bei günstigster Flächenbelastung (mit Gewichtskorrektur).

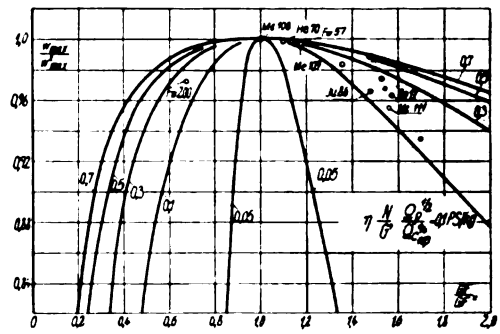


Bild 17. Abhängigkeit der Steiggeschwindigkeit von der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung (mit Gewichtskorrektur).
w_{max} = Steiggeschwindigkeit bei der Flächenbelastung G/F
w_{max}^* = » » » günstigsten » GF^*
$\eta \cdot N/G'$ = Leistungsverhältnis; $\Omega_Q = \frac{Q}{Q_{4000}}$; $\Omega_{c_{wp}} = \frac{c_{wp}}{c_{wp} = 0{,}012}$.

In Parallele zu den Betrachtungen über die Höchstgeschwindigkeit zeigt sich auch die Steiggeschwindigkeit um so empfindlicher auf richtige Wahl der Flächenbelastung, je größer die Leistungsbelastung der Flugzeuge, d. h. je kleiner $\eta \cdot N/G'$ ist.

5. Vergleich der günstigsten mit den ausgeführten Flächenbelastungen heutiger Flugzeuge.

Bei heutigen Flugzeugen ergeben sich nach Bild 15 günstigste Flächenbelastungen für den Steigflug in der Größe von 60 bis 80 kg/m², so daß im allgemeinen die heutigen Flugzeuge das Flächenbelastungsoptimum bereits überschritten haben und mit weiterer Steigerung der Flächenbelastung die Steiggeschwindigkeit und damit der Start und die Gipfelhöhe zwangsläufig verschlechtert werden müssen.

Diese Entwicklungsrichtung ist noch genauer aus Bild 17 zu ersehen, die unter Berücksichtigung der jeweilig ausgeführten Flügelstreckung das Verhältnis der erreichten Steiggeschwindigkeit zur günstigstenfalls erreichbaren in Abhängigkeit vom Flächenbelastungsverhältnis zeigt und für sämtliche Flügelstreckungen gültig ist. Mit Ausnahme des Baumusters Fw 200, das sich wegen seiner hohen Flügelstreckung $\Lambda = 9{,}1$ von den übrigen Baumustern abhebt, haben sämtliche eingetragenen Flugzeugmuster die günstigste Flächenbelastung bereits bis zu etwa dem 1,6fachen Betrag überschritten.

D. Flächenbelastungsänderung bei bestimmten Spannweitenbelastungen[6]).

Nachdem im vorangehenden der Einfluß der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung untersucht worden ist, soll an dieser Stelle eine gedrängte Übersicht über die Ergebnisse angeschlossen werden, bei denen als Grundannahme an Stelle der Flügelstreckung die Spannweite in gleicher Größe beibehalten wird. Durch die Einführung dieses Parameters werden natürlich die schon bei gleicher Flügelstreckung gewonnenen Ergebnisse in keiner Richtung erweitert, sondern nur eine etwas abweichende Darstellung der gleichen Zusammenhänge gegeben.

Wird bei gleicher Spannweitenbelastung die Flügelfläche verkleinert, so sinkt einerseits der Profilwiderstand, andererseits bleibt aber bei gleicher Fluggeschwindigkeit der induzierte Widerstand gleich groß, wenn die Gewichtsänderungen durch Änderung der Flächenabmessungen vernachlässigt werden. Das Optimum der Flächenbelastung stellt sich also in diesem Fall bei unendlich großer Flächenbelastung ein, d. h. wenn der Flügel bei gleicher Spannweite zu einer tragenden Linie zusammengeschrumpft ist.

Durch Berücksichtigung der Gewichtsänderungen wird dagegen das Optimum der Flächenbelastung in den Bereich endlicher Flächenbelastungen verschoben. Dabei ist schon aus der Betrachtung der Beispielrechnung auf Bild 4 und 14 zu folgern, daß der grundsätzliche Verlauf der Höchst-

[6]) Bei der Bearbeitung des Abschnittes D bin ich den Herren Dipl.-Ing. H. Matt, DVL, und Ing. W. Haack, DVL, zu Dank verpflichtet.

Digitized by Google

geschwindigkeitskurve nur geringfügig durch die Gewichtsänderungen beeinflußt wird, so daß in Übereinstimmung mit den vorangehenden Untersuchungen für einen Überblick über den Flächenbelastungseinfluß auf die Höchstgeschwindigkeit die Rechnung mit konstantem Fluggewicht ausreichend ist.

I. Höchst- und Reisegeschwindigkeit.

1. Grenzgeschwindigkeit bei vorgegebener Spannweitenbelastung.

Formt man die Leistungsgleichung (1) derart um, daß statt der Flügelstreckung Λ die Spannweitenbelastung G/b^2 auftritt, so lautet sie folgendermaßen:

$$\frac{\eta \cdot N}{G} = \left(\frac{f'_{ws}}{G} + \frac{c_{wp}}{G/F}\right) \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v_{max}{}^3 + \frac{2}{\pi \cdot \varrho} \cdot \left(\frac{G}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{v_{max}} .$$

Die größtmögliche Geschwindigkeit $v_{max}{}^*$ eines Flugzeuges bei vorgegebener Spannweitenbelastung G/b^2 stellt sich demnach bei $G/F \longrightarrow \infty$ ein und ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{\eta \cdot N}{G} = \frac{\varrho}{2} v^{*3}_{max} \cdot \frac{f'_{ws}}{G} + \frac{2}{\pi \cdot \varrho} \cdot \frac{G}{b^2} \cdot \frac{1}{v_{max}{}^*} .$$

Diese Gleichung wurde zunächst wieder für die Flughöhe $H = 4$ km und eine bestimmte Ausgangsspannweitenbelastung $G/b^2 = 20$ kg/m² ausgewertet und das Ergebnis mit Hilfe der Beizahlen $\Omega_\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_{4000}}$ und $\Omega_{G/b^2} = \frac{G/b^2}{(G/b^2)_{20}}$ verallgemeinert. In allgemeiner Form läßt sich die Leistungsgleichung folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\eta \cdot N}{G} \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2}}{\Omega_{G/b^2}^{1/2}} = \frac{\varrho_{4000}}{2} \cdot \frac{f'_{ws}}{G} \cdot \Omega_{G/b^2} \cdot \left(v_{max}{}^* \cdot \frac{\Omega_\varrho^{1/2}}{\Omega_{G/b^2}^{1/2}}\right)^3 + \frac{2}{\pi \cdot \varrho_{4000}} \cdot \left(\frac{G}{b^2}\right)_{20} \cdot \frac{1}{v_{max}{}^* \cdot \Omega_\varrho^{1/2} / \Omega_{G/b^2}^{1/4}} \quad \ldots . \quad (7)$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist auf Bild 18 dargestellt, das in Abhängigkeit vom Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G$ und vom Restwiderstandsverhältnis f'_{ws}/G die Grenzgeschwindigkeit $v_{max}{}^*$ bei unendlich großer Flächenbelastung zeigt. Diese Grenzgeschwindigkeit ist natürlich umso größer, je größer das Leistungsverhältnis und je kleiner das Restwiderstandsverhältnis des Flugzeuges ist.

2. Flächenbelastung bei bestimmten Einbußen an Geschwindigkeit.

Die Endgeschwindigkeit $v_{max}{}^*$ bei unendlich großer Flächenbelastung ist im allgemeinen von geringer Bedeutung.

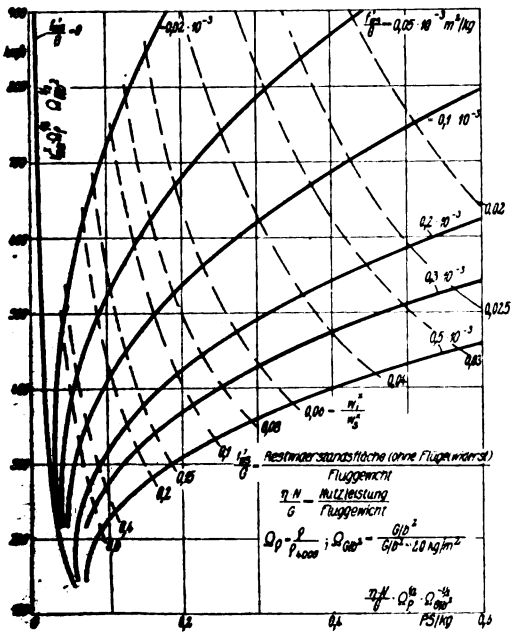


Abb. 18. Höchstgeschwindigkeit $v_{max}{}^*$ bei unendlich hoher Flächenbelastung und gleicher Spannweitenbelastung (ohne Gewichtskorrektur).

Sehr viel wichtiger ist dagegen die Frage: Bis zu welchen Werten ist es notwendig, die Flächenbelastung zu erhöhen, wenn bei festgehaltener Spannweite dem Grenzwert der Geschwindigkeit bis auf vorgegebene Verhältnisse, z. B. bis auf 0,98, nahegekommen werden soll?

Nimmt man zu diesem Zweck an, daß die Flächenbelastung G/F für einen bestimmten Annäherungsgrad $v_{max}/v_{max}{}^*$ an den Bestwert bestimmt werden soll, so lautet für diesen Zustand die Leistungsgleichung:

$$\frac{\eta \cdot N}{G} = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{f'_{ws}}{G} \cdot v^{*3}_{max} \cdot \left(\frac{v_{max}}{v_{max}{}^*}\right)^3 \times \frac{f'_{ws}/G + c_{wp}/G/F}{f'_{ws}/G} + \frac{2}{\pi \cdot \varrho} \cdot \frac{G}{b^2} \cdot \frac{1}{v_{max}{}^*} \cdot \frac{v_{max}{}^*}{v_{max}} = W_s{}^* \cdot \frac{f'_{ws}/G + c_{wp}/G/F}{f'_{ws}/G} \cdot \left(\frac{v_{max}}{v_{max}{}^*}\right)^3 + W_i{}^* \cdot \frac{v_{max}{}^*}{v_{max}}$$

$W_s{}^*$ = Stirnwiderstand bei unendlich großer Flächenbelastung,

$W_i{}^*$ = induzierter Widerstand bei unendlich großer Flächenbelastung.

Denkt man sich von dieser Gleichung die entsprechende Beziehung für unendlich große Flächenbelastung $\eta \cdot N/G = W_s{}^* + W_i{}^*$ abgezogen, so erhält man nach einigem Umformen:

$$G/F \cdot \frac{f'_{ws}/G}{c_{wp}} = \frac{(v_{max}/v_{max}{}^*)^3}{w_i{}^*/w_s{}^* \cdot (1 - v_{max}{}^*/v_{max}) - (v_{max}/v_{max}{}^*)^3 + 1} \quad \ldots . \quad (8)$$

Der in dieser Gleichung enthaltene Parameter $W_i{}^*/W_s{}^*$, d. h. das Verhältnis des induzierten Widerstandes zum Stirnwiderstand bei gegebener Spannweitenbelastung und unendlich großer Flächenbelastung, ist für ein bestimmtes Flugzeug aus Gleichung (7) bekannt und ist zur schnellen Ermittlung in Bild 18 in Abhängigkeit vom Leistungs- und Restwiderstandsverhältnis eingetragen.

Die Auswertung der Gleichung (8) ist auf Bild 19 dargestellt. Die Abweichungen der einzelnen Kurven voneinander sind im praktischen Bereich außerordentlich gering. Nimmt man als Grenzwerte $W_i{}^*/W_s{}^* = 0{,}02$ als untere Grenze und $W_i{}^*/W_s{}^* = 0{,}4$ als obere Grenze an, so kann mit genügender Genauigkeit mit einer mittleren Kurve gerechnet werden. Daraus ergibt sich eine einfache Beziehung, die direkt in Abhängigkeit von der Flächenbelastung den Höchstgeschwindigkeitsverlust gegenüber dem Höchstwert $v_{max}{}^*$ darstellt, Bild 20.

Danach bestätigen sich die in Abschnitt C I/2 und 3 gewonnenen Ergebnisse, daß hohe Flächenbelastungen besonders bei aerodynamisch hochwertigen Flugzeugen angestrebt werden müssen, während bei aerodynamisch schlechten Flugzeugen der erzielbare Gewinn durch Flächenbelastungssteigerung bei gleicher Spannweite gering bleibt.

Dieses Schaubild ist mit guter Annäherung nahezu unabhängig von der jeweils gewählten Spannweitenbelastung, so daß es damit in einfachster Weise einen schnellen Über-

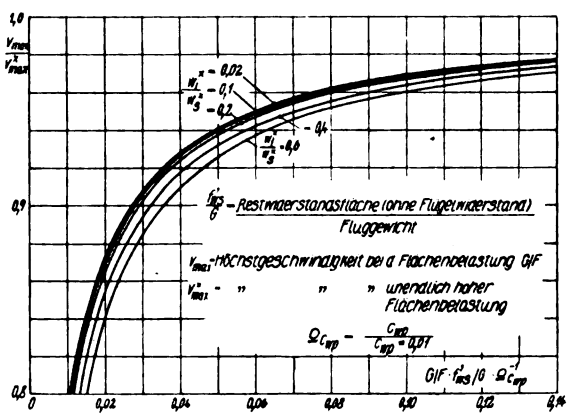


Bild 19. Abhängigkeit der Höchstgeschwindigkeit von der Flächenbelastung bei gleicher Spannweitenbelastung G/b^2 (ohne Gewichtskorrektur).

Digitized by Google

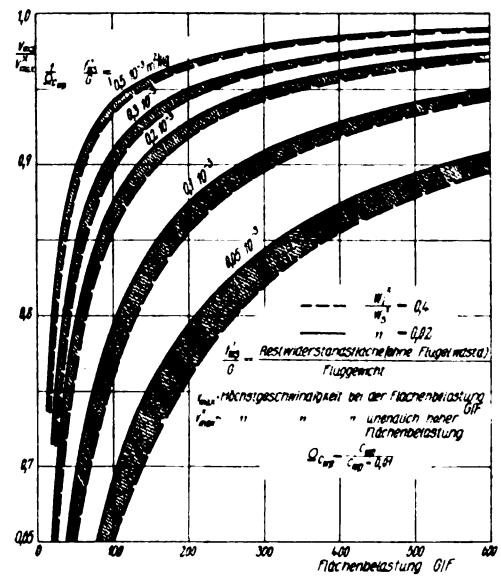


Bild 20. Abhängigkeit der Höchstgeschwindigkeit von der Flächenbelastung bei gleicher Spannweitenbelastung G/b^2 (ohne Gewichtskorrektur).

blick über den erzielbaren Gewinn durch Flächenbelastungserhöhung ermöglicht.

Mit Ausnahme dieses letzteren Bildes 20 gelten die vorangehend abgeleiteten Beziehungen nur für den Fall, daß die Spannweitenbelastung unverändert beibehalten wird. Darüber hinaus erhebt sich nun die Frage, ob diese zufällig vorhandene Spannweitenbelastung auch für den betrachteten Flugzustand die günstigste ist. Diese Fragestellung entspricht aber völlig der Frage nach der günstigsten Flügelstreckung, die in Abschnitt C I/4 ausführlich behandelt ist, so daß an dieser Stelle auf die bereits gewonnenen Ergebnisse verwiesen werden kann.

E. Anwendung der gefundenen Beziehungen auf verschiedenartige Flugzeuge.

Die vorangehenden Betrachtungen haben gezeigt, daß Höchstgeschwindigkeit einerseits und Steiggeschwindigkeit, Gipfelhöhe und Start andererseits völlig verschiedene Anforderungen an die Bemessung der Flügelgröße und -form stellen. Für den Einzelfall muß also stets eine günstige Kompromißlösung zwischen den widersprechenden Anforderungen gefunden werden.

Im folgenden soll nun an einigen typischen Flugzeugen:

Langstrecken-Schnellflugzeug,
Mittelstrecken-Schnellflugzeug und
Kurzstrecken-Schnellflugzeug

das Zusammenwirken von Flächenbelastung und Flügelstreckung auf Höchst- bzw. Reisegeschwindigkeit und Steiggeschwindigkeit dargestellt werden. Für einen vollkommenen Überblick wäre es natürlich notwendig, die Betrachtungen für verschiedene Höhen durchzuführen; zur Vereinfachung wurde jedoch davon abgesehen und die Zusammenhänge nur in den jeweils wichtigsten Arbeitshöhen untersucht.

I. Festlegung der Kennwerte für typische Flugzeuge.

Einen Überblick über die wichtigsten Entwurfsgrößen, nämlich Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G$ und Restwiderstandsverhältnis f'_{ws}/G für einige Baumuster der Jahre 1935 bis 1937 zeigt Bild 21. Auffällig ist, daß trotz stark verändertem Leistungsverhältnis die untere Grenze des Restwiderstandsverhältnisses bei allen dargestellten Flugzeugen um etwa $0{,}1 \cdot 10^{-3}$ m²/kg schwankt. Eine weitere Untersuchung hinsichtlich der Widerstandsaufteilung der wichtigsten dargestellten Flugzeuge ergab, daß nur etwa 50% des gesamten Widerstandes auf Oberflächenreibung an glatten Flächen entfällt, während der Rest auf Strömungsstörungen durch Ablösungen, Interferenz und Rauhigkeit zurückzuführen ist.

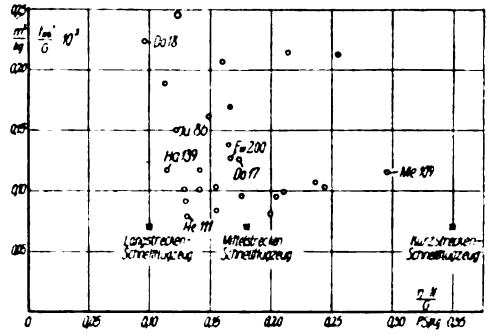


Bild 21. Übersicht über die Entwurfsgrundgrößen von Flugzeugen der Baujahre 1935 bis 1937.
$\eta \cdot N/G$ = Leistungsverhältnis.
f'_{ws}/G = Restwiderstandsverhältnis.

Für den künftigen Entwicklungsstand konnte daher geschlossen werden, daß mit fortschreitender Verfeinerung der aerodynamischen Form die Flugzeuge einem Restwiderstandsverhältnis von etwa $0{,}07 \cdot 10^{-3}$ m²/kg zustreben werden. Dieser Wert wurde unabhängig von dem Flugzeugtyp für die Flächenbelastungsuntersuchungen zugrunde gelegt.

Die Leistungsverhältnisse der Beispielflugzeuge wurden unter Beachtung der gesteigerten Reichweiten für Langstrecken-Schnellflugzeuge und der steigenden Flugleistungen der Jagdmaschinen folgendermaßen festgesetzt:

Langstrecken-Schnellflugzeug:
$\eta \cdot N/G = 0{,}1$ PS/kg oder $G/N = 8$ kg/PS,
Mittelstrecken-Schnellflugzeug:
$= 0{,}18$ PS/kg oder $G/N = 4{,}5$ kg/PS,
Kurzstrecken-Schnellflugzeug:
$= 0{,}35$ PS/kg oder $G/N = 2{,}3$ kg/PS.

Die Beziehungen zwischen Flächenbelastung und Flügelstreckung einerseits und den Flugleistungen andererseits wurden in der folgenden Rechnung den Bildern 3, 6, 8, 15, 16, 17 entnommen.

II. Langstrecken-Schnellflugzeug.

($\eta \cdot N/G = 0{,}1$ PS/kg, $f'_{ws}/G = 0{,}07 \cdot 10^{-3}$ m²/kg, Reiseflug mit 60% Drosselung der Motoren und mittlerem Fluggewicht $G_m = 0{,}8 \cdot G$.)

Das betrachtete Flugzeug besitzt z. B. ein Fluggewicht von 32 t, eine Motor-Nennleistung von 4×1000 PS und entwickelt in 6 km Flughöhe mit $G/F = 140$ kg/m² und $\Lambda = 8$ bei einer Drosselung der Motoren auf 60% der Nennleistung im Reiseflug eine Reisegeschwindigkeit von 320 km/h (Höchstgeschwindigkeit in 6 km Höhe 400 km/h). Setzt man eine Brennstoffzuladung von 40% des Flug-

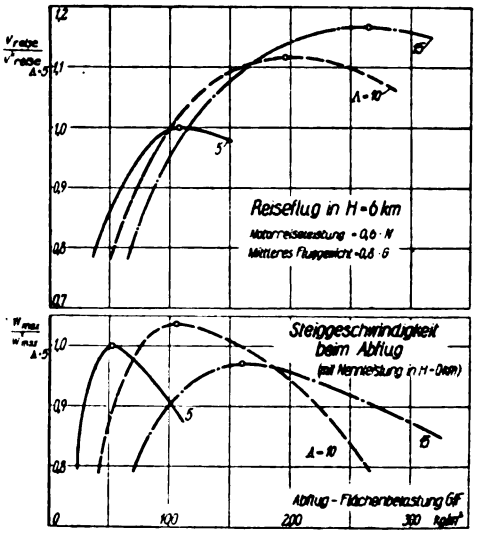


Bild 22. Langstreckenflugzeug (mit Gewichtskorrektur; $G_F'/G' = 0{,}14$) $G = 32\,000$ kg; $N = 4 \cdot 1000$ PS.
$v_{max\,6} = 400$ km/h; $(v_{reise})_{\Lambda=5} = 295$ km/h).

Digitized by Google

gewichtes an, so kann als mittleres Fluggewicht etwa das 0,8fache des Abfluggewichtes betrachtet werden.

Für dieses Flugzeug zeigt Bild 22 in Abhängigkeit von der Abflugflächenbelastung und der Flügelstreckung die mittlere Reisegeschwindigkeit (bei 0,8 G_{Abflug} und 0,6 N_{Nenn}) und die Steiggeschwindigkeit in 0 km Höhe mit Vollgas beim Abflug. Hinsichtlich der Reisegeschwindigkeit ist es demnach vorteilhaft, möglichst hohe Flügelstreckung in Verbindung mit hoher Flächenbelastung auszuführen. Sieht man von dem Start ab, da bei diesen Flugzeugen stets mit gut vorbereiteten Flugplätzen oder Starthilfen gerechnet werden kann, so ist es nach Bild 22 anzustreben, den Flügel auf eine Streckung $\Lambda = 12$ und eine Abflugflächenbelastung von etwa 200 kg/m² zu bemessen. Gegenüber der Flächenbelastung 140 kg/m² mit günstigster Flügelstreckung würde dadurch ein Reisegeschwindigkeitsgewinn und damit eine entsprechende Steigerung der Reichweite um etwa 5 bis 6% erreicht werden.

Da bei der Landung dieser Flugzeuge stets mit einer starken Verminderung des Abfluggewichtes auf etwa 60% gerechnet werden kann, d. h. für die Landung nur Flächenbelastungen von etwa 120 kg/m² zur Wirkung kommen, bereitet die Landung auch mit normalen Flügelklappen kein besonderes Problem. Um auch bei Notlandungen die niedrige Flächenbelastung von 120 kg/m² sicherzustellen, sind die Flugzeuge zweckmäßigerweise mit Schnellablaßvorrichtungen für den Brennstoff zu versehen.

III. Mittelstrecken-Schnellflugzeug.

($\eta \cdot N/G = 0{,}18$ PS/kg, $f'_{ws}/G = 0{,}07 \cdot 10^{-3}$ m²/kg, Reiseflug mit 80% Drosselung der Motoren und mittlerem Fluggewicht $G_m = 0{,}85 \cdot G$.)

Das betrachtete Flugzeug besitzt z. B. ein Fluggewicht von 9000 kg, eine Nennleistung der Motoren von 2 × 1000 PS und entwickelt in 6 km Höhe mit $G/F = 140$ kg/m² und $\Lambda = 7$ eine Höchstgeschwindigkeit von 500 km/h. Für diesen Flugzeugtyp wurde als mittlerer Flugzustand ein Fluggewicht entsprechend dem 0,85fachen des Abfluggewichtes und ein Drosselgrad der Motoren von 80% entsprechend dem Mittel aus Schnell- und Reiseflug festgesetzt. Die Steiggeschwindigkeit wurde am Boden mit Vollgas beim Abfluggewicht gerechnet, um so ein Maß für die Startfähigkeit zu erhalten, Bild 23. Hinsichtlich des Schnell- und Reisefluges wäre es nach Bild 23 vorteilhaft, Flächenbelastungen von 250 kg/m² bei Flügelstreckungen von 8 bis 10 anzustreben. Der erzielte Geschwindigkeitsgewinn gegenüber der Flächenbelastung 140 kg/m² und günstigster Flügelstreckung würde dann etwa 8% betragen

Setzt man für die Landung, vorsichtig gerechnet, eine Geschwindigkeitsverminderung von 20% an, so wäre demnach

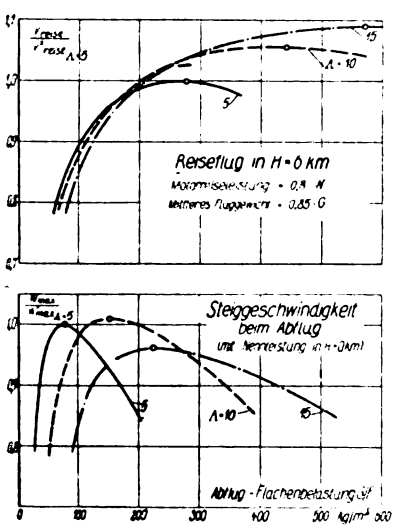


Bild 23. Mittelstreckenflugzeug (mit Gewichtskorrektur; $G'_p/G' = 0{,}14$)
$G = 9000$ kg; $N = 2 \cdot 1000$ PS.
$v_{max_6} = 500$ km/h; ($v_{reise}{}^*{}_{\Lambda=5} = 480$ km/h).

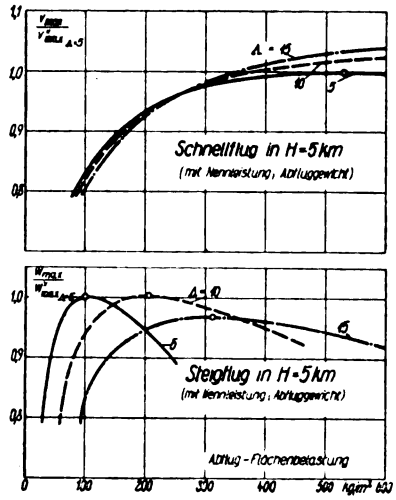


Bild 24. Kurzstreckenflugzeug (mit Gewichtskorrektur; $G'_p/G' = 0{,}14$)
$G = 2300$ kg; $N = 1000$ PS.
$v_{max_5} = 600$ km/h ($v_{max}{}^*{}_{\Lambda=5} = 680$ km/h).

mit etwa 200 kg/m² Belastung bei der Landung zu rechnen. Bei einer Landegeschwindigkeit von etwa 120 km/h, die wohl zur Zeit als vernünftiger Grenzwert angesehen werden kann, ergibt sich danach ein Auftriebsbeiwert des Tragflügels von 2,85. Höchstauftriebsbeiwerte dieser Größenordnung bereiten mit Rollflügeln auf aerodynamischer Seite kaum Schwierigkeiten.

Da von Flugzeugen dieser Verwendungsgruppe auch verlangt werden muß, mit eigener Kraft einen ausreichend kurzen Start zu erzielen, wurde eine Überschlagsrechnung für die Startlänge angestellt. Bei einer Start-Mehrleistung der Motoren um etwa 10 bis 20% sind mit Rollflügeln infolge ihrer verhältnismäßig geringen Profilwiderstandserhöhung noch Startwege von der Größenordnung 600 m bis 20 m Flughöhe erreichbar. Es muß jedoch darauf geachtet werden, den Rollflügel so anzustellen, daß geringe Profilwiderstandszahlen trotz hoher Auftriebsbeiwerte von etwa 2,6 erreicht werden.

IV. Kurzstrecken-Schnellflugzeug.

($\eta \cdot N/G = 0{,}35$ PS/kg, $f'_{ws}/G = 0{,}07 \cdot 10^{-3}$ m²/kg, Vollgasflug mit größtem Fluggewicht.)

Als typisches Kurzstrecken-Schnellflugzeug wurde ein Flugzeug von 2300 kg Fluggewicht und einer Nennleistung von 1000 PS zugrunde gelegt. Betrachtet wurden nun Höchstgeschwindigkeit und Steiggeschwindigkeit in 5 km Höhe für Vollgasflug bei größtem Fluggewicht, da die Gewichtsänderung während des Fluges im allgemeinen sehr gering ist.

Bild 24 zeigt, daß eine wesentliche Steigerung der Höchstgeschwindigkeit durch Erhöhung der Flächenbelastung bis zu Werten von 300 kg/m² erzielbar ist; dabei spielt die Flügelstreckung nur eine völlig untergeordnete Rolle. Die Steiggeschwindigkeit liegt mit ihrem Höchstwert bei den untersuchten Flügelstreckungen etwa in gleicher Höhe; nach Überschreiten der Höchstwerte sinkt jedoch die Steiggeschwindigkeit kräftig ab.

Eine Steigerung der Flächenbelastung bis auf 250 bis 300 kg/m² wird also zweckmäßig von einer gleichzeitigen Erhöhung der Flügelstreckung begleitet sein, um eine günstige Kompromißlösung zwischen Höchstgeschwindigkeit und Steigfähigkeit zu ermöglichen. Als erstrebenswerte Flächenbemessungen ist daher eine Flächenbelastung von 250 bis 300 kg/m² bei einer Flügelstreckung von etwa 10 anzusehen. Der erzielte Höchstgeschwindigkeitsgewinn gegenüber $G/F = 140$ kg/m² beträgt dabei 8 bzw. 10% bei etwa gleicher Steiggeschwindigkeit der Flugzeuge.

Bei der Landung dieser Flugzeuge kann nur mit einer unbedeutenden Fluggewichtsverringerung gegenüber dem Abfluggewicht von etwa 10% gerechnet werden, so daß das Problem der sicheren Landung in voller Schärfe auftritt.

Digitized by Google

Bei einer Landegeschwindigkeit von 120 km/h müßten demnach Höchstauftriebsbeiwerte von 3,2 bzw. 3,9 verfügbar sein.

Die Startlänge dieser hochbelasteten Flugzeuge liegt infolge des außerordentlich hohen Leistungsüberschusses noch in der Größenordnung von 600 m bis 20 m Flughöhe, so daß von dieser Seite auch ohne besondere Starthilfe bei guten Flugplätzen ein ausreichender Start gewährleistet ist.

V. Allgemeine Gesichtspunkte für die Flächenbelastungs-Erhöhungen bei den betrachteten Beispielflugzeugen.

Als allgemeines Kennzeichen bei der Flächenbelastungserhöhung an den betrachteten Beispielflugzeugen hat sich herausgestellt, daß die Flächenbelastungserhöhungen durchweg nur gemeinsam mit einer Flügelstreckungserhöhung zweckmäßig sind, sei es aus Gründen der Höchstgeschwindigkeitssteigerung oder einer günstigen Kompromißlösung zwischen Schnell- und Steigflug. Diese Entwicklungsrichtung scheint auch schon dadurch besonders geboten, daß die Sinkgeschwindigkeit bei der Landung sich bei hohen Streckungen in normalen Grenzen halten läßt.

Schwierig wird dagegen ganz allgemein sein, in solch stark verkleinerten Flügeln Lasten unterzubringen, die wie z. B. Brennstoff, Einziehfahrgestelle beim Einsitzer usw., häufig nur im Flügel untergebracht werden können. Aus derartigen konstruktiven Gründen sind daher u. U. die aufgezeigten Flugleistungsgewinne nicht immer zu verwirklichen. Die hierdurch gezogenen Grenzen festzulegen, überschreitet aber den Rahmen dieser Arbeit, die nur die möglichen Flugleistungsgewinne bei einer Flächenverkleinerung ohne konstruktive Rücksichten herausstellen soll.

Gegenüber Flächenbelastungen von 140 kg/m², die etwa den heutigen Stand der Technik kennzeichnen dürften, sind also nur noch Geschwindigkeitsgewinne von 5 bis 10% je nach den Auslegedaten des Flugzeuges durch Steigerung der Flächenbelastung erzielbar. Diese Steigerungen sind an und für sich nicht von entscheidender Größe, sie bedeuten aber einen bemerkenswerten Schritt zur weiteren Verfeinerung des Flugzeugentwurfs, der ohne Antriebsleistungssteigerung eine Erhöhung der Flugleistungen in einem Gebiet zur Folge hat, in dem der Aufwand für weitere Flugleistungssteigerungen immer größer wird.

F. Zusammenfassung[7]).

I. Schnellflug.

1. Die günstigste Flächenbelastung G/F^*, bei der die Höchstgeschwindigkeit bei vorgegebener Flügelstreckung unter bestimmten vereinfachenden Annahmen ihren Größtwert erreicht, ist durch folgenden Zusammenhang gegeben:

$$G/F^* = \frac{\varrho}{2} v_{max}^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \Lambda \cdot c_{wp}},$$

d. h. eine Steigerung der Flächenbelastung ist besonders bei schnellen Flugzeugen in geringen Höhen lohnend, während bei langsamen Flugzeugen und Höhenflugzeugen kein nennenswerter Gewinn zu erwarten ist.

Die günstigsten Flächenbelastungen liegen bei sonst gleichen Verhältnissen um so höher, je größer die Flügelstreckung und der Profilwiderstandsbeiwert und je niedriger die Flughöhe ist.

2. Infolge des flachen Verlaufes des Geschwindigkeitsoptimums bei Veränderung der Flächenbelastung ist es zweckmäßig und meist sogar notwendig, beachtlich unterhalb der günstigsten Flächenbelastung zu bleiben. Der dadurch entstehende Verlust an Höchstgeschwindigkeit ist um so stärker, je größer die Fluggeschwindigkeit und die aerodynamische Güte der Flugzeuge sind, d. h. für die zukünftige Flugzeugentwicklung in Richtung auf schnelle und aerodynamisch noch hochwertigere Flugzeuge wird die Empfindlichkeit auf günstige Wahl der Flächenbelastung steigen.

3. Bei starkmotorigen Flugzeugen hat die Flügelstreckung nur eine untergeordnete Bedeutung. Bei schwachmotorigen Flugzeugen (Langstrecken-Flugzeug) bietet jedoch die Erhöhung der Flächenbelastung beträchtliche Geschwindigkeitsgewinne, die sich bis über Flügelstreckungen von $\Lambda = 15$ hinaus erstrecken.

II. Steigflug.

1. In Übereinstimmung mit den Verhältnissen bei der Höchstgeschwindigkeit liegen die günstigsten Flächenbelastungen für den Steigflug um so höher, je starkmotoriger das Flugzeug, je größer die aerodynamische Güte, je höher die Flügelstreckungen und der Profilwiderstandsbeiwert und je niedriger die Flughöhe ist.

Für die heutigen Flugzeuge liegen die günstigsten Flächenbelastungen meist bei kleineren Werten als bei den ausgeführten Flugzeugen, so daß eine Erhöhung der Flächenbelastung bei gleicher Flügelstreckung zwangsweise zu Verlusten an Steigfähigkeit führt. Diese Verluste können aber zum großen Teil ausgeglichen werden, wenn bei Erhöhung der Flächenbelastung auch gleichzeitig eine Erhöhung der Flügelstreckung vorgenommen wird.

2. Die Empfindlichkeit der Flugzeuge gegenüber Abweichungen von der günstigsten Flächenbelastung ist um so stärker, je geringer das Leistungsverhältnis $\eta \cdot N/G$ ist.

3. Die Flügelstreckung hat bei jeweils günstigster Flächenbelastung nur einen geringen Einfluß auf die Steiggeschwindigkeit; ihre Veränderung lohnt sich also hinsichtlich der Steigfähigkeit im allgemeinen nur, wenn Steiggeschwindigkeitsverluste durch hohe Flächenbelastungen (durch den Schnellflug bedingt) klein gehalten werden sollen.

[7]) Die Potenzen der Beizahlen Ω, die bei der Anwendung der abgeleiteten Beziehungen gebraucht werden, können aus den Rechenblättern Bild 4 und 5 im Anhang entnommen werden.

G. Schrifttum.

1. Wilbur C. Nelson, Wing Loading. J. Aeronautical Sciences Bd. 4 (1937) Nr. 11 S. 469.
2. H. F. Vessey, Einfluß der Flächenbelastung auf die Konstruktion moderner Flugzeuge. Luschau Bd. 4 (1938) Nr. 2.
3. H. P. Fraser, Hohe Flächenbelastungen und einige der damit verbundenen Probleme vom Gesichtspunkt des Flugzeugführers. Luschau Bd. 4 (1938) Nr. 3/4.
4. L. H. Leonard, Some Problems of the Design of High-Speed Aircraft. J. Aeronautical Sciences Bd. 5 (1938) Nr. 7 S. 273.
5. H. Belart, High Wing-Loading. Aircraft Engeneering Bd. 10 (1938) Nr. 112 S. 173.

Anhang.

Fluggewichtsänderung durch Änderung der Flügelabmessungen.

I. Allgemeines.

Für die Ermittlung der Flugleistungen, insbesondere der größten Steiggeschwindigkeit und der von ihr abhängigen Größen wie Steigzeit und Gipfelhöhe, ist es von wesentlicher Bedeutung, die Änderungen des Gesamtgewichtes des Flugzeugs infolge Veränderung der Flächenbelastung und der Flügelstreckung zu kennen.

Da durch eine Änderung von Flächenbelastung und Flügelstreckung in erster Linie das Gewicht der Flächen beeinflußt wird und nur in geringem Maße die Gewichte von Rumpf, Leitwerk und Fahrwerk, soll bei dieser Abschätzung angenommen werden, daß diese letzten drei Baugruppen keine Gewichtsänderungen erfahren. Der durch diese Annahme verursachte Fehler ist im allgemeinen als recht gering zu erwarten, weil kleine Änderungen an diesen an sich schon kleinen Gewichtsanteilen, deren Gewichtsänderungen einander sogar entgegengesetzt sind[1]), sich kaum beim Gesamtgewicht bemerkbar machen. Mit dieser Vernachlässigung

Digitized by Google

kann also die Aufgabe darauf beschränkt werden, eine zuverlässige Beziehung zwischen Flügelgewicht einerseits und Flächenbelastung und Flügelstreckung andererseits zu finden. Vorausgesetzt werden soll ferner, daß es sich um freitragende Eindeckerflügel handelt, die auch bei Änderung der Flügelabmessungen gleiches Dickenverhältnis und gleiches Trapezverhältnis behalten und in ihrem Aufbau ähnlich aus den gleichen Baustoffen hergestellt sind.

II. Flügeleinheitsgewicht.

Wenn auch bei einem Tragflügel ein beachtlicher Gewichtsanteil auf zusätzliche Gewichte, z. B. infolge von Stößen, Flügelausschnitten, Überdimensionierung von Bauteilen, ferner aus Fertigungs- und Beschaffungsgründen usw. zurückzuführen ist, ist trotzdem zu erwarten, daß das Gesamtgewicht grundsätzlich den Verlauf desjenigen Gewichtsanteiles aufweist, der zur Aufnahme der äußeren Flügelbeanspruchung notwendig ist. Daher wird das Flügelgewicht in Anlehnung an eine bisher unveröffentlichte Arbeit von Bock, DVL[2]) in folgende Hauptgruppen zerlegt:

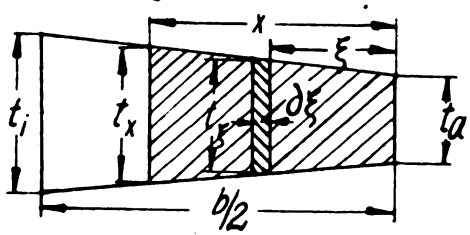
1. Gewichtsanteil, der dem Gurtgewicht der Holme verhältig ist (Aufnahme der Biegemomente).
2. Gewichtsanteil, der dem Steggewicht der Holme verhältig ist (Aufnahme der Querkräfte).
3. Gewichtsanteil, der dem Gewicht der Beplankung verhältig ist (Aufnahme der Flügeltorsion).
4. Gewichtsanteil, der der Tragflügelfläche verhältig ist, zur Deckung der zusätzlichen Gewichte wie durch Stöße, überdimensionierte Bleche usw.

Zur Vereinfachung wurde der Einfluß von Steifigkeitsanforderungen nicht beachtet, da sich diese Forderungen in allgemeiner Form nur recht verwickelt berücksichtigen lassen.

1. Gurtgewicht. Nimmt man an, daß bei der Aufnahme der Biegemomente der wirksame Abstand der Holmgurte gleich der größten Höhe des Flügelprofils ist, d. h. vernachlässigt man, abgesehen von der Verlagerung der Holme an die Stelle der größten Profilhöhe, die Verringerung des wirksamen Abstandes durch die endliche Dicke der Gurte, so ergibt sich aus den wirkenden Biegemomenten für das Gurtgewicht einer Flügelhälfte:

$$G_G = \gamma \int_0^{b/2} F_{Gx} \cdot dx$$

$$= 2 \cdot \frac{\gamma}{\sigma_G} \int_0^{b/2} \frac{M_x}{h_x} \cdot dx$$



$$G_G = 2 \cdot \frac{\gamma}{\sigma_G} \cdot n_A \cdot G/F \cdot \int_0^{b/2} \frac{\int_0^x t_\xi \cdot (x-\xi) \cdot \delta_\xi}{h_x} \cdot dx.$$

Hierin bedeuten:

F_{Gx} = Gurtquerschnitt an der Stelle x,
h_x = größte Profilhöhe an der Stelle x,
M_x = Biegemoment an der Stelle x,
γ = spez. Gewicht des Baustoffes (Duralumin),
σ_G = mittlere Spannung im Holmgurt,
n_A = Bruchlastvielfaches des Tragflügels im A-Fall.

Setzt man Trapezflügel mit einem Zuspitzungsverhältnis entsprechend t_i/t_a und einem Dickenverhältnis der Flügelschnitte voraus, das von d_i/t_i an der Flügelwurzel geradlinig bis auf d_a/t_a an der Flügelspitze abnimmt, so ergibt sich nach Auflösung der Integrale und einigem Umformen:

$$G_G/F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\sigma_G} \cdot n_A \cdot G/F \cdot \frac{b}{2} \cdot A \cdot \frac{1}{d_i/t_i} \cdot f_G \quad \ldots \quad (1a)$$

In dieser Gleichung erfaßt der Faktor f_G den Einfluß des Zuspitzungsverhältnisses t_i/t_a und den Einfluß der Abnahme des Flügeldickenverhältnisses zur Flügelspitze hin und ist folgendermaßen definiert:

$$f_G = \int_0^{x=b/2} \left(\frac{x}{b/2}\right)^2 \frac{\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{b/2} \cdot \left(\frac{t_i}{t_a} - 1\right)\right] \cdot d\left(\frac{x}{b/2}\right)}{\left[1 + \frac{x}{b/2} \cdot \left(\frac{t_i}{t_a} - 1\right)\right] \left[\frac{d_a/t_a}{d_i/t_i} + \frac{x}{b/2} \cdot \left(1 - \frac{d_a/t_a}{d_i/t_i}\right)\right]} \quad \ldots \quad (1b)$$

Bei gleichem Trapezverhältnis und gleichem Verlauf des Dickenverhältnisses stellt also der Faktor f_G eine Konstante dar.

2. Steggewicht. Denkt man sich die Flügelquerkräfte Q_x durch einen Steg mit der Schubfestigkeit τ_{St} aufgenommen, so beträgt das Steggewicht:

$$G_{St} = \gamma \cdot \int_0^{b/2} F_{St} \cdot dx = \frac{\gamma}{\tau_{St}} \int_0^{b/2} Q_x \cdot d_x$$

$$= \frac{\gamma}{\tau_{St}} \cdot n_A \cdot G/F \cdot \int_0^{b/2} \left[\int_0^x t_\xi \cdot d_\xi\right] \cdot dx.$$

Setzt man wieder Trapezflügel mit dem Zuspitzungsverhältnis t_i/t_a voraus, so ergibt sich hieraus für das auf die Flügelfläche bezogene Strebengewicht:

$$G_{St}/F = \frac{\gamma}{\tau_{St}} \cdot n_A \cdot G/F \cdot \frac{b}{2} \cdot f_{St} \quad \ldots \quad (2a)$$

Der Faktor f_{St} stellt wieder den Einfluß der Flügelform dar und ist folgendermaßen bestimmt:

$$f_{St} = \int_0^{b/2} \frac{2 \cdot x/b/2}{1 + t_i/t_a} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{b/2} \cdot \left(\frac{t_i}{t_a} - 1\right)\right] \cdot d\left(\frac{x}{b/2}\right) \quad (2c)$$

3. Beplankungsgewicht. Betrachtet man als maßgebend für die Bemessung der Beplankung die Flügeltorsion im Sturzflug mit dem Staudruck q_c und dem Momentenbeiwert c_{m0}, so findet man in entsprechender Weise wie bei der Bestimmung der Gurte und Steggewichte:

$$G_B/F = \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma}{\tau_B} \cdot c_{m0} \cdot q_c \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{U_{pr_i} \cdot t_i}{F_{pr_i}}\right) \cdot f_B.$$

Aus einer statistischen Betrachtung üblicher Profile zeigte sich, daß mit guter Genauigkeit $\frac{U_{pr} \cdot t}{F_{pr}} = \frac{3}{d/t}$ gesetzt werden kann. Mit dieser Beziehung ergibt sich:

$$G_B/F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\tau_B} \cdot c_{m0} \cdot q_c \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{d_i/t_i} \cdot f_B \quad \ldots \quad (3a)$$

Der Faktor f_B ist dabei:

$$f_B = \int_0^{b/2} \frac{x}{b/2} \cdot \frac{2}{1 + t_i/t_a} \cdot \frac{d_i/t_i/d_a/t_a}{1 + \frac{x}{b/2}\left(\frac{d_i/t_i}{d_a/t_a} - 1\right)} \times \frac{\left(\frac{x}{b/2}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_i}{t_a} - 1\right)^2 + 3\frac{x}{b/2} \cdot \left(\frac{t_i}{t_a} - 1\right) + 3}{1 + \frac{x}{b/2} \cdot \left(\frac{t_i}{t_a} - 1\right)} \cdot d\left(\frac{x}{b/2}\right) \quad (3b)$$

In dieser Formel für G_B/F ist unbequem, daß zur Abschätzung der äußeren Belastung nicht mehr das Lastvielfache n_A, sondern der Sturzflugstaudruck q_c eingeführt werden muß. Nach den Vorschriften für die Festigkeit von Flugzeugen vom Dezember 1936 wird für die Mehrzahl der Flugzeuge ein sicherer Sturzflug-Staudruck von $q_{c\,\text{sicher}} = 2{,}25\, q_h$ angesetzt, wobei q_h der größte Staudruck im beschleunigungsfreien Waagerechtflug ist. Für eine einfache Abschätzung kann nun in Übereinstimmung mit den Lastannahmen vom Januar 1935 folgender Zusammenhang

[1]) Bei Verkleinerung der Flächenbelastung wird im allgemeinen Rumpf- und Leitwerksgewicht erhöht, das Fahrwerkgewicht erniedrigt.

[2]) G. Bock, Vorausberechnung der Tragwerksgewichte bei freitragenden Flügeln. Danzig, 30. August 1932.

Digitized by Google

zwischen dem Größt-Staudruck q_h und dem Lastvielfachen n_A eingeführt werden, der auch im praktisch wichtigen Bereich von $\frac{q_h}{G/F} = 5$ bis 9 mit den Vorschriften der Lastannahmen vom Dezember 1936 gut übereinstimmt[3]).

$$n_{A\,\text{sicher}} = \sim 0{,}7 \cdot \frac{q_h}{G/F} = \frac{1}{2} \cdot n_A.$$

Mit dieser Beziehung nimmt Gleichung (3a) folgende Form an:

$$G_B/F = 1{,}6 \cdot c_{m_0} \cdot \frac{\gamma}{\tau_B} \cdot G/F \cdot \frac{b}{2} \cdot n_A \cdot \frac{1}{d_i/t_i} \cdot f_B \quad . \quad . \quad (3c)$$

4. Gesamtes Flügeleinheitsgewicht. Mit den vorangehend abgeleiteten Teilgewichten ergibt sich für das gesamte Flügeleinheitsgewicht folgende Beziehung:

$$G_F/F = n_A \cdot G/F \cdot \frac{b}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\sigma_G} \cdot \frac{1}{d_i/t_i} \cdot \Lambda \cdot f_G + 2 \cdot \frac{\gamma}{\tau_{St}} \cdot f_{St} + 1{,}6 \cdot c_{m_0} \cdot \frac{\gamma}{\tau_B} \cdot \frac{1}{d_i/t_i} \cdot f_B\right] + k_Z \quad (4)$$

Da diese Flügeleinheitsgewichts-Formel nicht dazu benutzt werden soll, für einen gegebenen Flügel das Flügelgewicht vorauszuberechnen, sondern nur für eine flugmechanische Rechnung die Flügelgewichtsänderung bei Übergang von einer bestimmten Flügelgröße oder Flügelstreckung auf geänderte Abmessungen bei gleicher Bauweise, gleichem Dickenverhältnis, gleichem Trapezverhältnis usw. abschätzen soll, genügt es entsprechend der geringeren zu fordernden Genauigkeit sowohl mittlere Werte für die Formparameter f_G, f_{St} und f_B als auch mittlere fiktive Spannungen in die Rechnung einzuführen.

Unter diesen vereinfachenden Annahmen nimmt dann die Flügelgewichtsgleichung (4) folgende Form an:

$$G_F/F = (k_1 + k_2 \cdot \Lambda) \cdot n_A \cdot b \cdot G/F + k_Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Durch Vergleich mit statistisch erfaßten Gewichten ausgeführter Tragflügel wurden für die Konstanten k_1, k_2 und k_Z folgende Werte ermittelt:

$k_1 = 0{,}58 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$
$k_2 = 0{,}041 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$
$k_Z = 3{,}5\ \text{kg/m}^2$

Stand entsprechend den Baujahren 1934 bis 1936[4]).

Die auf diese Weise ermittelten Flügeleinheitsgewichte stimmen befriedigend mit der Mehrzahl der zur Zeit ausgeführten Tragflügelgewichte überein. Da die vorliegende Rechnung jedoch im wesentlichen auf künftige Flugzeuge zugeschnitten werden soll, bei denen entsprechend der fortschreitenden Flugzeugentwicklung mit günstigeren Gewichten gerechnet werden kann, wurde das dem heutigen Stand entsprechende Flügelgewicht um etwa 15% gesenkt; d. h. die Konstanten der Flügeleinheitsgewichtsformel (Gl. 5) wurden folgendermaßen angesetzt:

$k_1 = 0{,}50 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$
$k_2 = 0{,}035 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$
$k_Z = 3{,}0\ \text{kg/m}^2$

Der Rechnung zugrundegelegte Werte. Um etwa 15% verbessert gegenüber dem Stand von 1934 bis 1936.

[3]) Neesen und Teichmann, Vorschriften für die Festigkeit von Flugzeugen. Luftwissen Bd. 4 (1937) Nr. 2 S. 7.

[4]) Nimmt man im Mittel das Dickenverhältnis an der Flügelwurzel $d_i/t_i = 0{,}17$, die Abnahme des Dickenverhältnisses nach der Flügelspitze zu $d_a/t_a = 0{,}6 \cdot d_i/t_i$ und das Trapezverhältnis $t_a/t_i = 0{,}5$ an, so ergeben sich folgende Flügelformparameter:

$$f_G = 0{,}26 \quad f_{St} = 0{,}44 \quad f_B = 1{,}2.$$

Mit diesen Werten sind die mittleren fiktiven Bruchspannungen des Tragflügels und der wirksame Flügelmomentenbeiwert folgendermaßen festgelegt:

$\sigma_G = 25\ \text{kg/mm}^2$; $\tau_{St} = 3{,}5\ \text{kg/mm}^2$; $\tau_B/c_{m_0} = 3{,}0/0{,}07 = 43\ \text{kg/mm}^2$.

Zum Vergleich wurde nach »Heck und Ebner, Formeln und Berechnungsverfahren für die Festigkeit von Platten- und Schalenkonstruktionen im Flugzeugbau, Luftf.-Forschg. Bd. 11 (1935) Nr. 8 S. 211« die kritische Beulspannung für ein kennzeichnendes Beplankungsfeld eines Flügels mit eingespannten Rändern (30 cm Länge, 16 cm Breite, 1 mm Dicke) zu etwa 3,0 kg/mm² und für die Stegbleche entsprechend der besseren Stützung des Steges und der im allgemeinen größeren Blechstärken etwa zu 3,5 kg/mm² ermittelt. Unter Beachtung der üblichen Zusatzgewichte durch Einschnitte, Überdimensionierung usw. stehen also die angesetzten mittleren fiktiven Spannungen in einem vernünftigen Verhältnis sowohl zu den kritischen Beulspannungen einiger kennzeichnender Bauglieder, als auch zur mittleren Zug- bzw. Bruchspannung von Duraluminium.

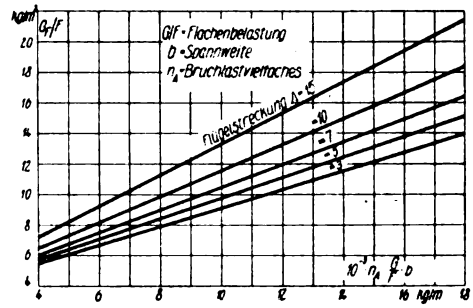


Bild 1. Flügeleinheitsgewicht G_F/F für freitragende Eindeckerflügel in Ganzmetall-Bauart.

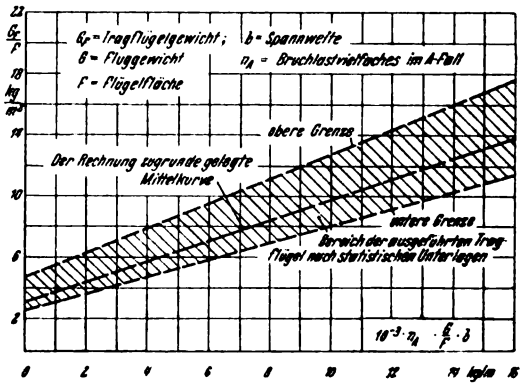


Bild 2. Vergleich der rechnerischen Flügeleinheitsgewichte mit der Statistik. Sämtliche Einheitsgewichte um 15% verbessert und mit Bild 1 auf die Flügelstreckung $\Lambda = 5$ umgerechnet.

Der sich mit diesen Werten ergebende Verlauf der Flügeleinheitsgewichte bei verschiedenen Flügelstreckungen ist in Abhängigkeit von dem Hauptparameter $n_A \cdot G/F \cdot b$ auf Bild 1 aufgetragen.

Auf Bild 2 sind zum Vergleich die um 15% verbesserten Tragflügeleinheitsgewichte von Flugzeugen der Baujahre 1934 bis 1936 angegeben, die mit Hilfe des Bildes 1 sämtlich auf die gleiche Flügelstreckung $\Lambda = 5$ durch Hinzufügen des Einheitsgewichtszuschlages $\Delta G/F = G_F/F_{\Lambda=5} - G_F/F_\Lambda$ umgerechnet wurde. Wie beabsichtigt, liegt die der Rechnung zugrundegelegte Mittelkurve in der günstigeren Hälfte des Einheitsgewichtsbereiches und deckt sich in ihrem Verlauf gut mit den statistischen Werten.

III. Fluggewichtsänderung durch Änderung der Flügelabmessungen.

Für die spätere Rechnung ist es zweckmäßig, die Veränderung des Fluggewichts durch Änderung der Flügelfläche und Flügelstreckung durch Verhältniszahlen festzulegen, die auf einen bestimmten, später noch genauer zu definierenden Ausgangszustand bezogen sind. Sämtliche Werte, die sich auf die Ausgangsflügelform beziehen, sollen in der Rechnung durch ′ gekennzeichnet werden, z. B. F', n_A' usw. und das Verhältnis der geänderten Größen mit Ω z. B. $\Omega_F = F/F'$, $\Omega_{n_A} = n_A/n_A'$ usw.

Setzt man weiterhin als bekannt voraus, daß das Flügelgewicht bei diesem Ausgangszustand einen bestimmten Teil des Gesamtfluggewichts ausmacht, z. B. $G_F' = (1 - \varphi') \cdot G'$, so läßt sich aus Gl. (5) folgende Beziehung ermitteln:

$$n_A' \cdot b' = \frac{1 - \varphi' - k_Z/G/F'}{k_1 + k_2 \cdot \Lambda'}.$$

Führt man diese Beziehung und die auf den Ausgangszustand bezogenen Bezeichnungen in Gl. (5) ein, so lautet diese in der neuen Schreibweise:

$$\frac{G_F/F}{G/F} = \sqrt{\frac{\Omega_G}{\Omega_{G/F}}} \cdot \left[k_1 \cdot \Omega_A^{1/2} \cdot \frac{1 - \varphi' - \frac{k_Z}{G/F'}}{k_1 + k_2 \cdot \Lambda'} + k_2 \cdot \Omega_A^{3/2} \cdot \Lambda' \cdot \frac{1 - \varphi' - \frac{k_Z}{G/F'}}{k_1 + k_2 \cdot \Lambda'}\right] + \frac{1}{\Omega_{G/F}} \cdot \frac{k_Z}{G/F'}$$

Digitized by Google

oder

$$G_i/G = \sqrt{\frac{\Omega_G}{\Omega_{G,F}}} \cdot \left[k_1^* \cdot \Omega_A'^{\frac{1}{2}} + k_2^* \cdot \Omega_A'^{\frac{3}{2}}\right] + k_Z^* \cdot \frac{1}{\Omega_{G,F}}.$$

Stellt man nun die Gleichung für das Gesamtfluggewicht unter der Voraussetzung auf, daß nur das Flügelgewicht eine Änderung erfährt, so erhält man:

$$1 = \varphi' \cdot \frac{1}{\Omega_G} + \sqrt{\Omega_G} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega_{G,F}}} \times \left[k_1^* \cdot \Omega_A'^{\frac{1}{2}} + k_2^* \cdot \Omega_A'^{\frac{3}{2}}\right] + k_Z^* \cdot \frac{1}{\Omega_{G,F}} \quad (6)$$

Aus dieser Beziehung kann nun für beliebige Verhältnisse der Flächenbelastung $\Omega_{G,F}$ und der Flügelstreckung Ω_A der Endwert der Gewichtsbetrachtung, nämlich des Fluggewichtsverhältnis Ω_G, berechnet werden. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß obige Gleichung für $\Omega_G^{\frac{1}{2}}$ eine kubische Funktion darstellt (casus irreducibilis), von deren drei reellen Lösungen nur eine Lösung in dem praktischen Bereich zwischen $\varphi' < \Omega_G < +\infty$ liegt. Für diese Lösung ergibt sich dann:

$$\Omega_G^{-\frac{1}{2}} = (G/G')^{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3\varphi'} \cdot \left(1 - k_Z^* \cdot \frac{1}{\Omega_{G,F}}\right)} \cdot \cos\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \quad (7\,a)$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2\cdot\varphi'} \cdot \left(k_1^* \cdot \Omega_A'^{\frac{1}{2}} + k_2^* \cdot \Omega_A'^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\Omega_{G,F}}}}{\left[\frac{1}{3\varphi'} \cdot \left(1 - k_Z^* \cdot \frac{1}{\Omega_{G,F}}\right)\right]^{3/2}} \quad (7\,b)$$

Zur Auswertung dieser Gleichung wurden für den Ausgangszustand folgende Festwerte gewählt:

Flächenbelastung $G/F' = 100$ kg/m²,
Flügelstreckung $A' = 5$,
Flügelgewichtsanteil $G_F'/G' = 1 - \varphi' = 0{,}14$ (wird später auf einen größeren Bereich erweitert).

Der angenommene Flügelgewichtsanteil von 14% am Gesamtfluggewicht entspricht günstigen mittleren Verhältnissen ausgeführter Flugzeuge der Baujahre 1935 bis 1937. Die zahlenmäßige Auswertung der Gl. (6) für diese genannten Ausgangsgrößen ist auf Bild 3 des Hauptberichtes dargestellt.

IV. Empfindlichkeit der Fluggewichtsänderung.

Die vorstehend abgeleiteten Beziehungen für die Änderung des Fluggewichts durch verschiedene Wahl der Flächenbelastung und Flügelstreckung sind von zahlreichen Voraussetzungen abhängig, so daß es zum Schluß zweckmäßig erscheint, die Verschiebung der Kurven durch abweichende Annahmen zu prüfen. Die wichtigsten Voraussetzungen

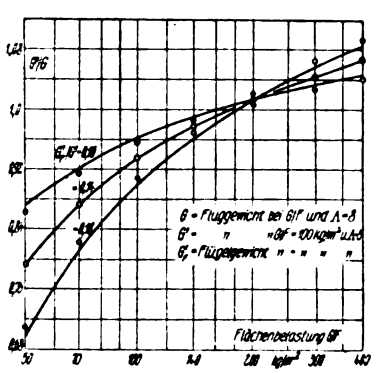


Bild 3. Fluggewichtsverhältnisse bei verschiedenen Anteilen des Flügelgewichts am Gesamtgewicht.
Ausgezogene Kurven: genau gerechnet.
Punkte: aus Bild 3 des Hauptberichtes durch Maßstabsverschiebung bestimmt.

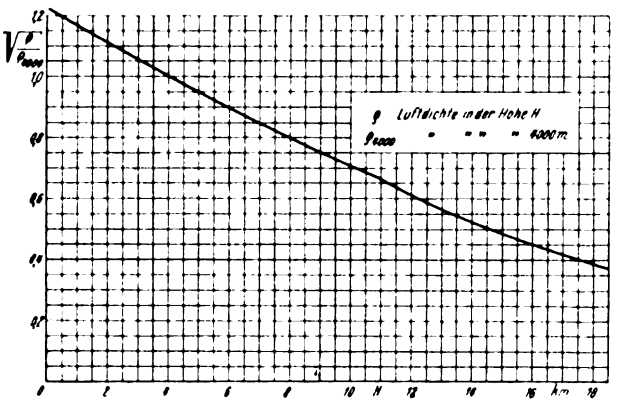


Bild 4. Rechenblatt für das Luftdichtenverhältnis $\sqrt{\varrho/\varrho_{4000}} = \Omega_\varrho^{\frac{1}{2}}$.

sind zweifellos die Annahme der Flügeleinheitsgewichtskurve nach Bild 2 und der angenommene Anteil von 14% des Flügelgewichtes am Gesamtfluggewicht.

Um zunächst den Einfluß der Flügeleinheitsgewichtskurve zu prüfen, wurden abweichend von den bisher getroffenen Annahmen einmal die Flügeleinheitsgewichte um 30% erhöht und ein andermal um 30% erniedrigt und mit diesen veränderten Werten wieder das Fluggewichtsverhältnis bei der Flügelstreckung $A = 8$ bestimmt. Da das Fluggewicht trotz der verschiedenen Annahmen für das Flügelgewicht dem Grenzwert $G'/G = 1/\varphi' = 1{,}163$ bei unendlich hoher Flächenbelastung zustrebt, bleiben die Abweichungen der tatsächlichen Werte von den Mittelwerten auch im Bereich der hohen Flächenbelastungen außerordentlich gering. Die zahlenmäßige Auswertung ergab nur sehr geringe Abweichungen von weniger als 1% gegenüber den Mittelwerten.

Im Gegensatz dazu ergeben sich größere Abweichungen, wenn bei gleicher Flügeleinheitsgewichtskurve der Anteil des Flügelgewichts am Gesamtgewicht verschieden stark angesetzt wird, z. B. zeigt Bild 3 den Fluggewichtsverlauf, wenn beim Ausgangszustand ($G/F' = 100$ kg/m² $A' = 5$) der Flügelgewichtsanteil zu 10, 14 und 18% des Gesamtgewichts angesetzt wird. Da bei steigender Flächenbelastung die Kurven verschiedenen Grenzwerten asymptotisch zustreben, nehmen mit steigender Flächenbelastung die Unterschiede beträchtlich zu.

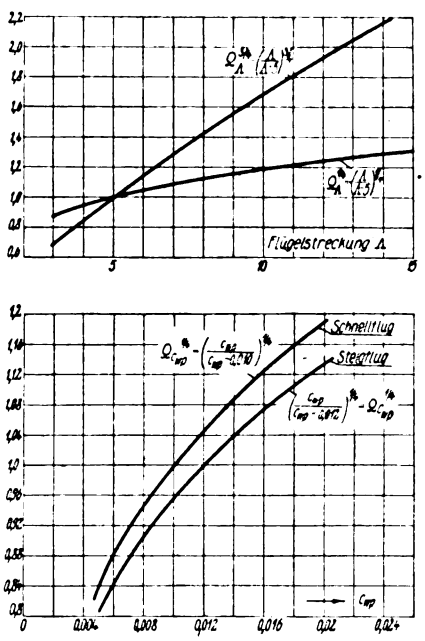


Bild 5. Rechenblatt für die Potenzen der Beizahlen Ω_A und $\Omega_{c_{wp}}$

Digitized by Google

Um jedoch auch die Verhältnisse bei geänderten Flügelgewichtsanteilen, z. B. bei $G_F' = (1 - \varphi_2') \cdot G'$ abschätzen zu können, kann mit recht guter Annäherung mit einer einfachen Maßstabsänderung gearbeitet werden und zwar derart, daß der Fluggewichtsmaßstab mit φ'/φ_2' und der Flächenbelastungsmaßstab mit $\frac{G/F'}{G/F_{\Lambda=5}}$ (für $G'/G \cdot \varphi'/\varphi_2' = 1{,}0$) multipliziert gedacht wird; d. h. man sucht im Schaubild mit φ' denjenigen Punkt auf der G'/G-Kurve, bei dem das Flügelgewicht bei der Flügelstreckung $\Lambda' = 5$ an Stelle von $(1 - \varphi') \cdot G'$ den gewünschten Betrag $(1 - \varphi_2') \cdot G'$ besitzt und bezieht auf diesen Punkt als Ausgangswert das gesamte Schaubild (vgl. Näherungspunkte Bild 3). Die entsprechenden neuen Maßstäbe sind für Flügelgewichtsanteile von 10, 14 und 18% bei der Flügelstreckung $\Lambda' = 5$ und der Flächenbelastung $G/F' = 100$ kg/m² auf Bild 3 des Hauptberichtes angegeben, so daß dieses Bild für einen weiten Bereich von Flügelgewichtsanteilen anwendbar gemacht ist.

In den Beziehungen nach Bild 3 des Hauptberichtes ist damit das Rüstzeug gewonnen, um für die geplanten überschlägigen Flugleistungsrechnungen den Einfluß des Tragflügelgewichtes bei verschiedener Bemessung des Flügels berücksichtigen zu können.

Digitized by Google

Zum Schulerschen Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung.

Zuschrift zu der Veröffentlichung von E. Schmid »Bemerkung zum Pendel von 84 Minuten Schwingungsdauer«. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung S. III 8.

Es wird gezeigt, daß das Schulersche Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung bei einem physikalischen Pendel für eine ganz beliebige Fahrzeugbeschleunigung gilt. Für den Fall, daß das Pendel nicht auf einer Spitze gelagert, sondern kardanisch aufgehängt ist, gelten einige Einschränkungen. Frühere entgegengesetzte Behauptungen beruhen auf einem Fehler, der als solcher aufgezeigt wird.

In letzter Zeit sind bezüglich der Allgemeingültigkeit des Schulerschen Prinzipes[1]) von der beschleunigungsfreien Abstimmung Bedenken[2]) laut geworden. Es sollen deshalb diese Fragen im folgenden für das physikalische Pendel geklärt werden.

Das Schulersche Prinzip hat etwa folgenden Inhalt. Wenn ein schwingungsfähiges Gebilde im Schwerefeld der Erde horizontalen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten ausgesetzt ist, dadurch daß es sich auf einem Fahrzeug befindet, so bewegt es sich weiter an Orte, die wegen der Kugelgestalt der Erde eine abweichende Richtung der Schwerkraft aufweisen. Das System ist einerseits bestrebt, den Störbeschleunigungen nachzugeben, andererseits, sich in die veränderliche Richtung der Schwere einzustellen. Es ist möglich die Richtungsänderung der Schwere zu einer Kompensation der Störbeschleunigungen auszunutzen.

M. Schuler zeigte, daß man dadurch auf eine Abstimmung von 84 Minuten Schwingungszeit geführt wird, d. i. die Schwingungszeit eines physikalischen Pendels, dessen reduzierte Pendellänge gleich dem Erdradius ist. Um das zu erreichen, ist es erforderlich, durch Verwendung von Kreiseln die Trägheitsmomente bzw. die scheinbaren Trägheitsmomente des schwingenden Gebildes gegenüber den Schwerемomenten außerordentlich groß zu machen.

Wenn trotzdem häufig von einem physikalischen Pendel mit 84 min Schwingungszeit die Rede ist, so geschieht dies deshalb, weil sich daran in einfacher Weise die Verhältnisse übersehen lassen. Dennoch können, wie sich gerade im folgenden zeigen wird, Übertragungen von Ergebnissen, die am physikalischen Pendel gewonnen sind, auf das Kreiselpendel zu Unzuträglichkeiten führen.

Der Beweis für die Beschleunigungsfreiheit eines auf 84 Minuten abgestimmten physikalischen Pendels wurde von M. Schuler nur im Differential gegeben. Will man diesen Beweis erweitern auf endliche Fahrzeugwege, so ist die Übertragung der Überlegung auf endliche geradlinige Flugzeugbewegungen, d. h. auf solche, die auf einem größten Kugelkreise erfolgen, evident. Schwierigkeiten sind aufgetreten für den Fall, daß man auch Drehungen des Fahrzeuges (Kurvenflug) zuläßt. In diesem Falle muß man das Problem gleichzeitig für die beiden Freiheitsgrade des Pendels behandeln. Zur Durchführung ist es erforderlich, bestimmte Annahmen über die Aufhängung des Pendels zu machen. Es gibt da zwei Möglichkeiten:

1. Das Pendel ist an einer Spitze (oder frei in Quecksilber schwimmend) derart aufgehängt, daß es drei Drehungsfreiheitsgrade besitzt, insbesondere einen dritten Freiheitsgrad um die Hochachse;
2. das Pendel ist kardanisch am Fahrzeug aufgehängt derart, daß es gezwungen ist, die Drehbewegungen des Fahrzeuges um die Hochachse mitzumachen.

Beide Fälle werden wir im folgenden gesondert behandeln, zunächst den Fall 1.

1.

Wir benutzen ein ruhendes Koordinatensystem, so daß jede Bewegung auf der Erdoberfläche zur Drehbewegung der Erde vektoriell hinzuzuaddieren ist. Jede Bewegung eines Punktes P auf der zunächst als ruhend gedachten Erdoberfläche werde beschrieben durch den Winkel β, den der Fahrstrahl R vom Punkte P zum Erdmittelpunkt M mit einem beliebigen passend zu wählenden aber raumfesten Erdradius R_f bildet (Bild 1). Um diesen Winkel analytisch zu beschreiben benutzen wir die Drehwinkelkomponenten β_x und β_y um zwei zueinander senkrechte Achsen durch den Erdmittelpunkt M die senkrecht stehen auf R_f aber sonst völlig beliebig gewählt werden können. Wir haben dann in unmittelbar verständlicher Schreibweise für die Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit des Punktes P zu setzen:

$$v_x = R\,\frac{d\beta_x}{dt};\quad v_y = R\cdot\frac{d\beta_y}{dt} \qquad \ldots\ldots (1)$$

entsprechend für die Horizontalkomponenten der Beschleunigung

$$b_{hx} = R\,\frac{d^2\beta_x}{dt^2};\quad b_{hy} = R\,\frac{d^2\beta_y}{dt^2} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Im Punkte P denken wir dann ein physikalisches Pendel aufgehängt. Das Pendel wird als rotationssymmetrisch um die Hochachse vorausgesetzt und es werden die Abweichungen der Symmetrieachse von der Richtung zum Erdmittelpunkt bestimmt durch die Drehwinkel α_x und α_y um zwei durch P gehende zur x- bzw. y-Achse parallele Achsen, die wir die x'- bzw. y'-Achse nennen. Diese Winkel werden als klein angenommen, derart daß in den α quadra-

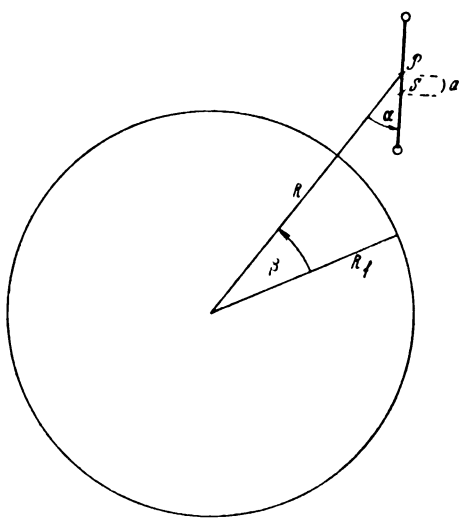


Bild 1.

[1]) M. Schuler, Phys. Z. Bd. 24 (1923), S. 344 ff.

[2]) E. Schmid, Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung S. III 8. Verlag R. Oldenbourg, München u. Berlin.

Digitized by Google

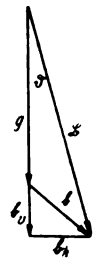


Bild 2.

tische Ausdrücke vernachlässigt werden können. Ebenso wird angenommen, daß der Winkel β zwischen dem Fahrstrahl R und R_f klein ist. Betreff des Drehwinkels um die Hochachse machen wir die Annahme, daß das Pendel vollkommen reibungsfrei aufgehängt sei, so daß bei beliebigen Drehbewegungen des Fahrzeuges eine am Pendel in horizontaler Richtung körperfest gedachte Achse bei kleinen Fahrzeugbewegungen ihre Richtung im Raume unverändert beibehält[3]).

Der Aufhängepunkt P werde nun in beliebiger Weise bewegt, so daß eine beliebige, nicht notwendig kleine Beschleunigung b neben der Schwerebeschleunigung g auf das Pendel wirkt. Man tut gut, die resultierende Gesamtbeschleunigung $\mathfrak{B}$, Bild 2, in zwei Komponenten aufzuspalten: eine in Richtung des Schwerevektors g vom Betrage $(g + b_v)$, und eine senkrecht dazu vom Betrage b_h. Jede von beiden Komponenten liefert ein Drehmoment um die Drehachse des Pendels, das um den Winkel α gegenüber g ausgelenkt sein möge, nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} m\,a\,(g+b_v)\sin\alpha & \text{(Moment der Vertikalkomponente)} \\ m\,a\,b_h\cos\alpha & (\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{Horizontalkomponente}) \end{array}\right\} \quad (3)$$

(a ist die Schwerpunktstieferlage des Pendels).

Diesen Momenten wird das Gleichgewicht gehalten durch die Änderung des Impulsmomentes, d. i. Trägheitsmoment des Pendels um die x'-Achse mal Drehbeschleunigung gemessen im Inertialsystem, so daß wir für α bekommen

$$\Theta\,(\ddot{\alpha}_x - \ddot{\beta}_x) + m\,a\,(g+b_v)\,\alpha_x = -\,m\,a\,b_{hx} \qquad (4\text{a})$$

(Θ = Trägheitsmoment des Pendels um eine Querachse durch den Aufhängepunkt; Punkte über den Buchstaben bedeuten Ableitungen nach der Zeit.)

Entsprechend für die Drehung um die y'-Achse

$$\Theta\,(\ddot{\alpha}_y - \ddot{\beta}_y) + m\,a\,(g+b_v)\,\alpha_y = -\,m\,a\,b_{hy} \qquad (4\text{b})$$

Die so gewonnenen Bewegungsgleichungen schreiben wir gemäß (2) in der Form[4])

$$\Theta\,\ddot{\alpha}_x + m\,a\,(g+b_v)\,\alpha_x = \ddot{\beta}_x\,(\Theta - R\,m\,a) \quad . \; . \; (5\text{a})$$

$$\Theta\,\ddot{\alpha}_y + m\,a\,(g+b_v)\,\alpha_y = \ddot{\beta}_y\,(\Theta - R\,m\,a) \quad . \; . \; (5\text{b})$$

Offenbar verschwinden die rechten Seiten, wenn die reduzierte Pendellänge gleich dem Erdradius gemacht wird, wenn also gilt:

$$R = \frac{\Theta}{m\,a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

In diesem Falle kann das Pendel, wenn es nur irgendwann einmal in Ruhe war, durch Beschleunigungen überhaupt nicht aus seiner Gleichgewichtslage, die zum Erdmittelpunkt (d. h. zum Gravitationszentrum) zeigt, herausgeworfen werden[5]). Ob diese Störbeschleunigungen dabei neben Horizontalkomponenten noch eine Vertikalkomponente enthalten, oder ob der Vektor der Störbeschleunigung seine Richtung mit der Zeit wechselt, ist dabei vollkommen gleichgültig. In die Bedingungen für die Abstimmung gehen nur die Pendeldaten und der Erdradius, aber nicht der Wert der Schwerebeschleunigung g ein. Stimmt man die reduzierte Pendellänge auf einen mittleren Erdradius R_0 ab, so bleibt rechts noch ein ganz außerordentlich kleines Störmoment übrig vom Betrage $-\,b_h\,\frac{\Delta R}{R}\cdot\frac{\Theta}{R}$ das aber selbst bei einer Flughöhenänderung ΔR von 6 km erst ein Promille des durch die 84 Min.-Abstimmung wegkompensierten Gliedes ausmacht.

Damit ist gezeigt, daß die Schulersche Behauptung bezüglich der beschleunigungsfreien Abstimmung eines physikalischen Pendels ganz allgemein für beliebige Fahrzeugbewegungen gilt.

Es erscheint nützlich, am Beispiel des Kurvenfluges auf einem kleinen Kreise unseren Satz von der Beschleunigungsfreiheit nachzuprüfen.

Bei einem engen Kreisflug wirkt die Beschleunigung als Zentrifugalbeschleunigung b_c nach außen und erzeugt ein Moment $m\,a\,b_c$. Dieser Horizontalbeschleunigung entspricht gemäß Gl. (2) eine Drehbeschleunigung um den Erdmittelpunkt $\ddot{\beta}_c = \frac{b_c}{R}$. Die Änderung des Impulsmomentes $\frac{\Theta}{R}\,b_c$ kompensiert gerade im Falle der Abstimmung Gl. (6) die Zentrifugalbeschleunigung (dieses entscheidende Kompensationsglied unberücksichtigt gelassen zu haben, ist der Fehler in der Arbeit von E. Schmid).

2.

Auch wenn das Pendel durch kardanische Aufhängung gezwungen ist, die Drehbewegungen des Flugzeuges um die Hochachse mitzumachen, existiert näherungsweise eine beschleunigungsfreie Abstimmung. Zunächst ist klar, daß Überlegungen, diejenigen Beschleunigungen betreffend, die bei einem Geradeausflug auftreten (größter Kugelkreis), ohne weiteres übertragen werden können, so daß wir als Bedingung für Unabhängigkeit von solchen Beschleunigungen wieder die Bedingung (6) erhalten.

Um uns über die Wirkung von Kurvenflügen zu orientieren, berechnen wir die Gleichgewichtslage im stationären Kurvenflug. Wenn man will, kann man die Drehbewegung der Erde als solchen ansehen. Sei φ die Breite des Punktes P, in dem das Pendel aufgehängt ist, so wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die Richtung zum Erdmittelpunkt eine Gleichgewichtslage für das Pendel darstellt. Wir zerlegen den Drehvektor u (s. Bild 3), der die Kreisfahrt beschreibt, in zwei Komponenten, eine in der Richtung R des Erdradius, d. h. in Richtung der Hochachse des Pendels vom Betrage $u_A = |u| \sin\varphi$ und eine senkrecht dazu vom Betrage $u_B = |u| \cos\varphi$.

Wir haben dann ein Zentrifugalmoment um eine Achse durch P senkrecht zu u und R vom Betrage

$$u|^2 \cdot R \sin\varphi \cdot m \cdot a \cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Dieses versucht das Pendel nach außen zu ziehen, während das Coriolismoment $u_A\,u_B\,(\Theta - \Theta_A) =$

$$u^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi\,(\Theta - \Theta_A) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

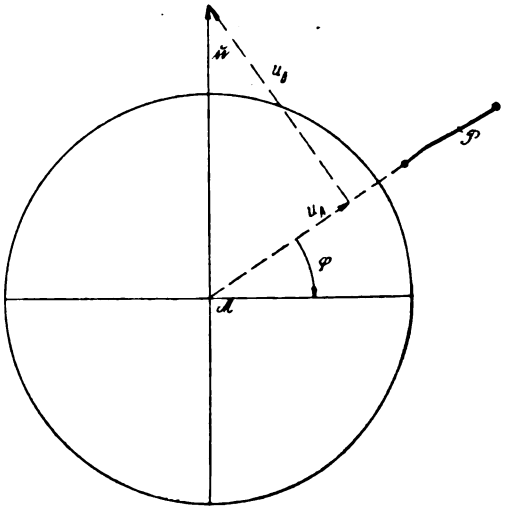


Bild 3.

[3]) Natürlich ist diese Reibungsfreiheit praktisch nicht durchführbar. Das wird besonders klar, wenn man bedenkt, daß ein Pendel, das auf der sich drehenden Erde aufgehängt ist und sich dieser gegenüber vollständig in Ruhe befindet, um seine Hochachse eine Drehgeschwindigkeit gleich der betreffenden Komponente der Drehgeschwindigkeit der Erde besitzt. — Diese Drehgeschwindigkeit wäre durch einen passenden einmal zu erteilenden Drehimpuls zu beseitigen. Läßt man dagegen Drehungen des Pendels um die Hochachse zu, so hat man letzten Endes einen langsam laufenden Kreisel, also zwei Eigenfrequenzen, so daß eine Beschleunigungsfreiheit sicher nicht zu erzielen sein wird.

[4]) Vgl. hierzu Geckeler, Ing. Arch. Bd. 4 (1933), S. 78.

[5]) Etwas Ähnliches wird in einer Arbeit in der Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939) S. 158 für das Kreiselpendel gezeigt, wo die Dinge etwas komplizierter sind. Ein Unterschied besteht hinsichtlich des Einflusses der Vertikalbeschleunigung.

Digitized by Google

(Θ_A ist das Trägheitsmoment des Pendels um die Hochachse) die Achse größten Trägheitsmomentes zur Drehachse machen will und daher im entgegengesetzten Sinne wirkt, wie das Zentrifugalmoment. Beide Momente sind für beliebiges u und φ einander gleich, wenn gilt

$$R = \frac{\Theta - \Theta_A}{m\,a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so zeigt das Pendel in der Gleichgewichtslage zum Erdmittelpunkt. Die Bedingung (9) stimmt mit der Schulerschen Bedingung (6) für Unempfindlichkeit gegenüber Beschleunigungen in der Bewegungsrichtung des Flugzeuges nur in dem Falle überein, daß Θ_A verschwindet oder doch sehr klein gegenüber Θ ist.

Bild 4.

Beschreibt nun das Fahrzeug eine beliebige gekrümmte Bahn, so können wir in einem beliebigen Punkte P dieser Bahn die Horizontalkomponente der Beschleunigung in jedem Augenblick in zwei Komponenten aufspalten; die eine in der Fahrtrichtung ist die Fahrtbeschleunigung $\mathfrak{F}$, die andere quer zur Fahrtrichtung ist die Zentrifugalbeschleunigung $\mathfrak{Z}$, Bild 4. Legen wir nun eine Ebene durch $\mathfrak{F}$ und den Erdmittelpunkt und eine zweite durch $\mathfrak{Z}$ und den Erdmittelpunkt, so haben wir in jeder Ebene zu untersuchen, ob im Falle, daß das Pendel zum Erdmittelpunkt weist, Momentengleichgewicht herrscht.

Nach dem über den Kurvenflug Gesagten ist klar, daß im Falle eines Erfülltseins der Gl. (9) im Zentrifugalbeschleunigungsfreiheitsgrade Gleichgewicht herrscht, wenn das Pendel zum Erdmittelpunkt zeigt. Hierzu müssen wir allerdings voraussetzen, daß sich das Flugzeug um seine Hochachse mit derselben Winkelgeschwindigkeit dreht, wie der Vektor der Fluggeschwindigkeit, d. h. wie die Vektoren $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{F}$, daß also keine Gierbewegungen auftreten.

Ebenso herrscht offensichtlich in der Fahrtrichtung Gleichgewicht, wenn das Pendel nach Gl. (6) abgestimmt ist, und auf den Erdmittelpunkt zeigt. Damit die Bedingungen Gl. (6) und (9) übereinstimmen, muß, wie schon erwähnt, vorausgesetzt werden, daß Θ_A sehr klein gegenüber Θ ist.

Da also unter den gemachten Voraussetzungen in jedem Punkte der Bahnkurve die wahre Lotrichtung Gleichgewichtslage für das Pendel ist, so folgt in der Tat, daß das Pendel unter den gemachten Voraussetzungen beschleunigungsfrei ist.

Diese Überlegung gilt zunächst nur für Bewegungen gegenüber einem Inertialsystem. Man macht sich aber leicht klar, daß durch Überlagerung mit der Drehgeschwindigkeit der Erde nichts geändert wird. Insbesondere genügt dann auch die Voraussetzung, daß das Flugzeug immer in Richtung seines Geschwindigkeitsvektors v gegenüber einem erdfesten Bezugssystem liegt. Damit ist auch für diesen Fall die Frage nach der beschleunigungsfreien Abstimmung vollkommen geklärt. Allerdings ist das kardanisch aufgehängte physikalische Pendel von 84 Minuten Schwingungszeit insofern nicht vollkommen beschleunigungsfrei, als bei Gierbewegungen durch Änderung des Coriolismomentes (8) Fehler hervorgerufen werden können.

An unseren Überlegungen ändert sich nichts, wenn wir auch noch Vertikalbeschleunigungen zulassen, da Kräfte, die in Richtung des Erdradius im Schwerpunkt des Pendels angreifen, wie etwa die Schwerebeschleunigung g überhaupt nicht in die Rechnung eingehen, solange überhaupt nur eine Rückführkraft in dieser Richtung übrig bleibt, die aber im übrigen vollkommen beliebig insbesondere zeitlich veränderlich sein darf. Infolgedessen ist unter den gemachten Voraussetzungen das Pendel auch gegenüber Beschleunigungen unempfindlich, die eine Vertikalkomponente enthalten. Die einzige Einschränkung, die wie im Abschnitt 1 gemacht werden muß, ist die, daß die mit der Vertika beschleunigung verknüpften vertikalen Wege nicht so groß sein dürfen, daß sie eine wesentliche Änderung des Abstandes R vom Erdmittelpunkt bewirken, aber selbst bei einer Flughöhendifferenz von 13 km ändert sich die Schwingungszeit des Pendels erst um $^1/_{1000}$.

3.

Es möge noch ein Zahlenbeispiel über die Dimensionen eines physikalischen 84-Minuten-Pendels gegeben werden. Stellt man sich einen Pendelkörper vor, bestehend aus einer 100 m langen Stange, an deren Enden sich je eine schwere Kugel befindet, so hat man unter der Voraussetzung, daß der Trägheitsradius ϱ dieses Pendels 50 m beträgt, eine Schwerpunktstieferlage

$$a \approx \frac{\varrho^2}{R} = \frac{2500}{6370} \cdot 10^{-3}\,m = 0{,}39\ \text{mm}$$

zu wählen.

Wenn man trotz dieser unmöglichen Dimensionen ein physikalisches 84-Minuten-Pendel betrachtet, so geschieht das, wie schon erwähnt, der größeren Einfachheit wegen. In der Tat lassen sich nun besonders die Überlegungen des Abschnittes 2 auf den Fall des Kreiselpendels übertragen. Der Unterschied ist lediglich der, daß beim Kreiselpendel, das auf 84 Minuten abgestimmt ist, noch ein Fahrtfehler auftritt vom Betrage $\varepsilon = \frac{|u|\cos\varphi \cdot J}{m\,g\,a}$[1]. Daher ist beim Kreiselpendel zu zeigen, daß der Fahrtfehler und nicht, wie beim physikalischen Pendel, das Erdlot eine Gleichgewichtslage für beliebige Beschleunigungen darstellt. Für Längsbeschleunigungen ist dieser Beweis bereits von M. Schuler erbracht worden. Für Zentrifugalbeschleunigungen läßt es sich folgendermaßen einsehen. Wir haben ein Coriolismoment

$$\mathfrak{C} = [J \times u] = J \cdot |u| \cdot \cos(\varphi + \varepsilon) \approx J\,|u|\,(\cos\varphi - \varepsilon \sin\varphi)$$
$$= J\,|u|\,(\cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi \frac{|u| \cdot J}{m \cdot g\,a},$$

das bei einer Richtung des Kreiselimpulspfeiles vom Erdmittelpunkt fort durch einen der Fahrtrichtung entgegen liegenden Momentenvektor dargestellt wird. (Vgl. Bild 3.) Dazu das Zentrifugalmoment

$$\mathfrak{Z} = |u|^2 \cdot m\,a \cdot \cos\varphi \cdot R \sin\varphi$$

mit der gleichen Richtung wie $\mathfrak{C}$ und schließlich das Schweremoment des um den Fahrtfehler ε ausgelenkten Kreiselpendels

$$\mathfrak{M} = -m\,g\,a\,\varepsilon = -J \cdot |u \cos\varphi,$$

das bei positivem ε dem Zentrifugalmoment entgegen gerichtet ist. Diese drei Momente halten sich dann, und nur dann das Gleichgewicht, wenn gilt: $\mathfrak{C} + \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} = 0$ und folglich

$$\frac{R}{g} = \left(\frac{J}{m\,g\,a}\right)^2,$$

wenn also der Kreisel auf eine Schwingungszeit von 84 Minuten abgestimmt ist. Damit ist genau wie im Falle des physikalischen Pendels die Beschleunigungsfreiheit eines Kreiselpendels bei beliebigen horizontalen Kurvenflügen dargetan[7]).

K. L. Stellmacher, Göttingen.

Entgegnung.

Die »Bemerkung zum Pendel von 84 Minuten Schwingungsdauer« sollte an einem Beispiel zeigen, daß das physikalische Pendel von 84 Minuten Schwingungsdauer nicht allgemein beschleunigungsunabhängig ist. Es wurde zu diesem Zweck der Sonderfall betrachtet, daß der Aufhängepunkt des Pendels auf einer Kleinkreisbahn geführt wird. Dabei wurde — stillschweigend — vorausgesetzt, daß das Pendel kardanisch gelagert sei und daß die Resultante der Trägheitskräfte durch den Schwerpunkt gehe. Diese letzte Voraussetzung gilt allerdings nur für kugeliges Trägheitsellipsoid (bezogen auf den Schwerpunkt); für alle anderen

[7]) Vgl. Anm. 5. L. c. findet sich ein verallgemeinerungsfähiger Beweis unter Berücksichtigung der Dämpfung mit eingehender Diskussion.

Digitized by Google

Trägheitsellipsoide geht die Resultante zwar nicht durch den Schwerpunkt, aber in Lotlage — mit Ausnahme des »Stabpendels«, bei dem ein Trägheitsmoment gleich Null ist — auch nicht durch den Aufhängepunkt. Der Schluß, daß das 84-Minuten-Pendel nicht allgemein beschleunigungsunabhängig ist, gilt also für alle nicht stabförmigen Pendel in kardanischer Aufhängung. Dies geht auch aus Gl. (9) der vorstehenden Arbeit von K. Stellmacher klar hervor (wenn ich auch mit der Art seiner Beweisführung nicht in allen Punkten einig gehe). Jedenfalls ist durch beide Ableitungen gezeigt, daß der von M. Schuler vermutete allgemeine Satz nicht besteht.

E. Schmid, DVL.

Digitized by Google

Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38.

In Lieferung 4 der Schriftenreihe »Luftfahrtforschung« vom 20. April 1939 wurden die mit einem Preise ausgezeichneten Arbeiten auf dem Gebiet des Flugzeugbaus veröffentlicht.

Diese Lieferung enthält die Arbeiten auf dem Gebiet:

Flugmotorenbau.

Die Weiterentwicklung der Flugmotoren zu höchster Leistung und ständig zunehmender Drehzahl rückt die Fragen der Beherrschung der Gaswechselvorgänge in den Vordergrund der Forschungsarbeit. Die Beschleunigungsverhältnisse, Schwingungsfragen, Werkstoffeigenschaften, Temperatureinfluß und Zeitquerschnittsverhältnisse sind der Inhalt zahlreicher Veröffentlichungen der letzten Jahre.

Aufgabe.

Es ist an Hand dieser Veröffentlichungen und ihrer erweiterten Auswertung ein zusammenfassendes Bild der gegenwärtigen Erkenntnisse über die Gaswechselvorgänge bei Viertakthöchstleistungsflugmotoren zu geben. Durch eingehende Behandlung des einen oder anderen Faktors dieser Gesamtvorgänge sind sodann neue Unterlagen für die weiteren Entwicklungsmöglichkeiten von Ventilsteuerungen und ihren Grenzwerten zu suchen.

Preisgericht für die Aufgabe.

Triebnigg, Heinrich, Prof., Berlin (Vorsitzender);
Bollenrath, Franz, Dr.-Ing., Berlin;
Holfelder, Otto, Prof., Berlin.

Einen Zwischenpreis erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Ventilfederanstrengung« von Dipl.-Ing. Fritz Schmidt, Berlin-Frohnau.

Eine Anerkennung erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Roland« von Ing. Theodor Hoock, Köln-Rhein.

Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren*).

Von Fr. R. Schmidt, Berlin-Frohnau.

Die Gründe, die zu hohen Literleistungen zwingen, sind in dem Schrifttum schon mehrfach behandelt worden. Die Wege zu größeren Hubraumleistungen — Drehzahlsteigerung und Aufladung — wurden bisher unter Bevorzugung des einen oder anderen Faktors beschritten. Für die kommende Leistungssteigerung werden jedoch beide gemeinsam eingesetzt werden müssen. Höhere Aufladungen bringen eine Änderung des Gaswechselvorganges mit sich, die Steigerung der Drehzahlen wird dagegen durch den Gaswechselvorgang begrenzt. In vorliegender Arbeit werden entsprechend der gestellten Aufgabe die den Gaswechselvorgang beherrschenden Einflußgrößen besprochen. Die sich aus dem gesamten Zylinder- und Steuerungsaufbau ergebenden räumlichen, zeitlichen und mechanischen Grenzen werden eingehend behandelt und in ihrem Einfluß auf die Begrenzung der Drehzahlsteigerung untersucht und miteinander verglichen. Desgleichen werden die zur Verfügung stehenden Möglichkeiten, die Drehzahlgrenzen weiter hinauszuschieben, besprochen. Es wird hierbei für sämtliche Untersuchungen angenommen, daß eine Begrenzung durch die Triebwerkbeanspruchung nicht gegeben ist. Zum Schluß werden noch die bei diesem Vorgang besonders interessierenden Werkstoffe (Ventilfedern, Auslaßventil) erörtert. Zusammenfassend wird ein Gesamtüberblick über das in vorliegender Arbeit behandelte Gebiet gegeben.

*) Dissertation Technische Hochschule Breslau 1939. D 85.

Gliederung.

I. Der Gaswechselvorgang und seine Verluste.
1. Gaswechselarbeit.
2. Liefergrad.
3. Zusammenfassung.
II. Die mittlere Gasgeschwindigkeit.
1. Zahlenangaben.
2. Einfluß des Ventilerhebungsdiagrammes.
3. Wahl der zulässigen Gasgeschwindigkeit.
III. Untersuchung der räumlichen Grenzen.
1. Bauglieder.
a) Kanäle.
b) Ventile.
2. Raumverteilung zwischen Einlaß und Auslaß.
3. Untersuchung der größtmöglichen Ventile für verschiedene Hubräume.
4. Ventilhübe.
IV. Erreichbare Motordrehzahlen.
V. Mechanische Grenzen der Ventilsteuerung.
1. Die Ventilfeder.
a) Allgemeines.
b) Die Federanstrengung.
c) Bisher erreichbare Motordrehzahlen.
d) Der Hußmann-Nocken — Grenzdrehzahlen.
2. Bauart der Steuerung.
a) Drehzahlgrenzen der Stoßstangensteuerung.
b) Drehzahlgrenzen für obenliegende Nockenwelle.
c) Einflüsse der Nockenform und der Kipphebelübersetzung.
VI. Zusammenstellung und Vergleich der erreichbaren Grenzdrehzahlen.
VII. Werkstoffe und Herstellung.
1. Auslaßventil.
2. Ventilfeder.
VIII. Schluß.
IX. Schrifttum.

Digitized by Google

I. Gaswechselvorgang und seine Verluste.

Mit »Gaswechselvorgang« bezeichnet man das Ausschieben der verbrannten und das Einblasen der frischen Ladung. Dieser Lade- und Entladevorgang ist in den Kreisprozeß dort eingeschaltet, wo der Druck des Kreisprozesses mit dem Außendruck übereinstimmt. Beim Viertaktmotor erfolgt das zwangsläufige Ausschieben und Ansaugen nacheinander in getrennten Hüben mit Kreislauf der Rückstände des Verbrennungsraumes. Hierbei treten Verluste auf, die sich in einer Verringerung des Mitteldruckes auswirken, und zwar:

1. direkt durch den Arbeitsaufwand, der zum Wechseln der Ladung erforderlich ist und
2. indirekt durch die Unmöglichkeit, den Zylinder mit dem Ladungsgewicht zu füllen, das dem Zustand des Arbeitsmittels vor dem Zylinder entspricht. Das Maß hierfür ist der Liefergrad.

1. Gaswechselarbeit.

Bild 1 stellt schematisch den Gaswechselvorgang im selbstsaugenden Motor (Bodenmotor) dar. Die Fläche stellt die Pumpverluste dar, die sich aus den Ausströmverlusten (Fläche *ACDEFKBA*) und den Einströmverlusten (Fläche *FGKF*) zusammensetzen. Sie ergeben zusammen die Gaswechselarbeit, eine indizierbare Verlustleistung, welche durch die Wandreibung und die Kontraktion gegeben ist und in ihrer Größe von der Ein- und Ausströmgeschwindigkeit abhängt. Die negative Diagrammfläche — d. i. die Pumparbeit — wird mit wachsender Drehzahl, d. h. mit wachsender Durchströmgeschwindigkeit durch die Ventile größer, und zwar wird der Einströmverlust größer als der Ausströmverlust. Das findet seine Erklärung darin, daß nach dem Öffnen des Auslaßventiles der größte Gewichtsanteil der noch hochgespannten Gase in der Nähe des Totpunktes bei nur geringer Kolbenbewegung ausströmt. In den in Bild 4 wiedergegebenen Druckkolbenwegdiagrammen bei 0,5 Überladung [8][1]) ist die Zunahme der Ausströmverluste 0,05 kg/cm² und der Einströmverluste 0,1 kg/cm². Die Gasgeschwindigkeit in den Ventilquerschnitten und ganz besonders in den Einlaßventilen haben demnach den weitaus größten Einfluß auf das Anwachsen der Pumparbeit bei steigender Drehzahl, Bild 5, 6 u. 7.

Anders verläuft der Gaswechselvorgang beim überladenen Bodenmotor, Bild 2. Hier kann unter Umständen, d. h. bei richtiger Wahl der beeinflussenden Größen, die Gaswechselarbeit einen positiven Wert erreichen, was einer Arbeitsabgabe an den Kolben entspricht und einen Rückgewinn der Laderleistung bedeutet.

[1]) Die Zahlen in den Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende der Abhandlung.

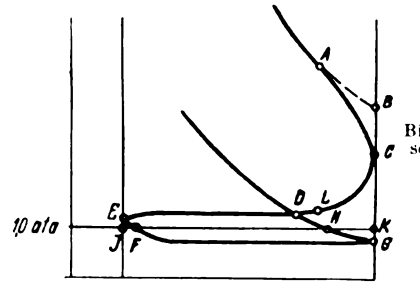


Bild 1. *pr*-Diagramm des selbstsaugenden Motors.

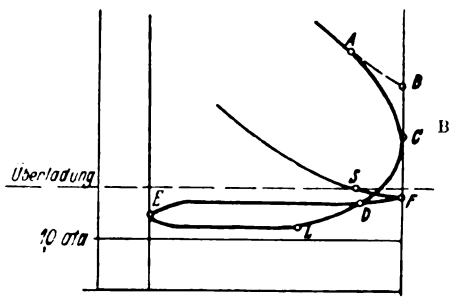


Bild 2. *pr*-Diagramm des überladenden Bodenmotors.

Der Gaswechsel beim Höhenmotor entspricht ähnlichen Gesetzmäßigkeiten, nur geht er bei einem niedrigeren Druckniveau vor sich, Bild 3. Beiden gemeinsam ist die Verringerung des Leistungsgewinnes bei steigender Drehzahl, da ebenso wie beim Bodenmotor die Strömungsverluste wachsen, Bild 4, 5.

Die Strömungsverluste setzen sich zusammen: für den Einlaß aus den Widerständen in der Saugleitung, den Widerständen des Einlaßkanales, seinem Wirkungsgrad in bezug auf die Beaufschlagung des Ventiles, dem Durchflußwiderstand durch das Ventil und der »Raumfreiheit« des Ventiles, die den Gasen gestattet, nach dem Durchströmen

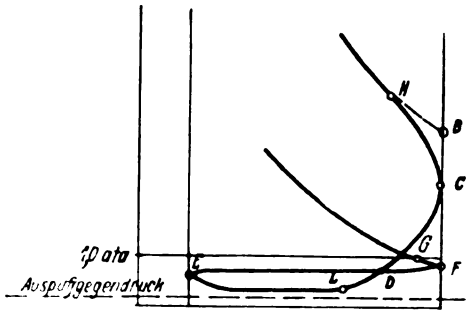


Bild 3. *pr*-Diagramm des Höhenmotors.

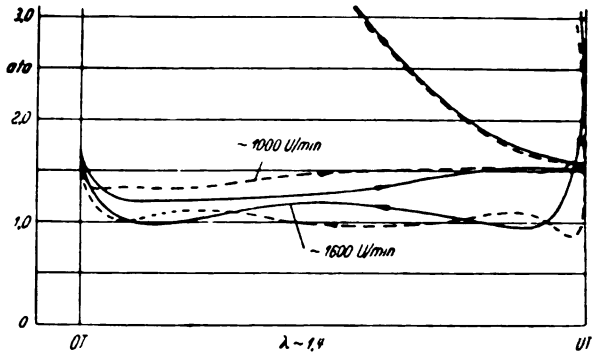


Bild 4. *pr*-Diagramm bei 0,5 Überladung nach F. A. F. Schmidt [8].

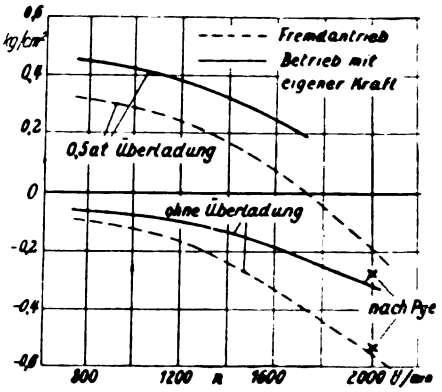


Bild 5. Gaswechselarbeit als Funktion der Drehzahl nach F. A. F. Schmidt [8].

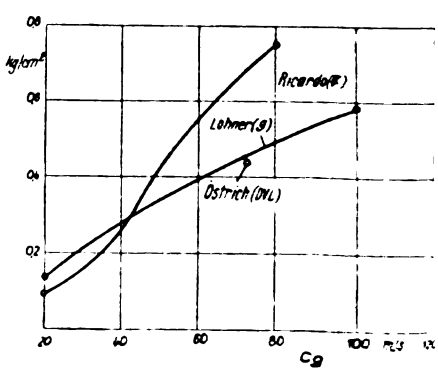


Bild 6. Pumpverluste als Funktion der mittleren Gasgeschwindigkeit.

Digitized by Google

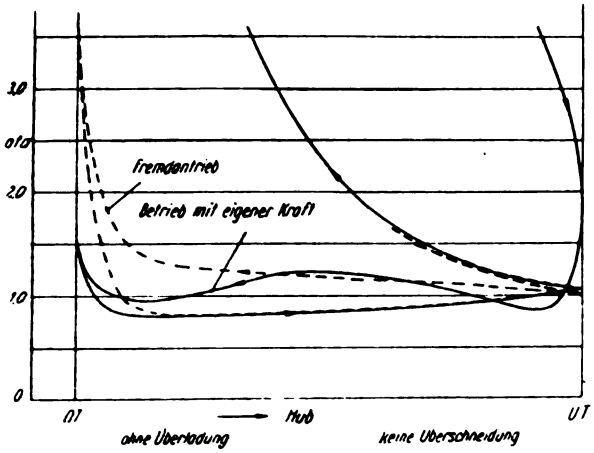


Bild 7. pv-Diagramme ($n = 1500$) nach F. A. F. Schmidt [8].

durch den Ventilquerschnitt allseitig ohne große Umlenkung in den Zylinder abzufließen. In letzterem ist der zweiventilige Kugelkopf allen anderen Zylinderbauarten weitaus überlegen. Für das Auslaßsystem gilt sinngemäß das gleiche in umgekehrter Richtung, wobei noch hinzukommt, daß die Forderung nach einer möglichst guten Kühlung eine in allem befriedigende Lösung erschwert.

Unterstellt man, daß Saugleitung, Kanäle und Zylinderkopf die bestmögliche konstruktive Durchbildung erfahren haben, so bleibt nur noch zur Beeinflussung der Strömungsverluste der Ventilquerschnitt und die Steuerzeiten übrig. Ersterer ist durch die räumlichen Grenzen gegeben und seine Verbesserungsmöglichkeit durch strömungsrichtige Formgebung heute nahezu erschöpft.

Dagegen erfordern die Steuerzeiten ein sorgfältiges Anpassen an den Gaswechselvorgang namentlich beim überladenen Bodenmotor und beim Höhenmotor. Neben den hierüber erschienenen Arbeiten [3 u. 5] gibt die von Oestrich (DVL) den besten Aufschluß. Die Voraussage von Hansen [1], daß die Öffnungszeiten der Ventile beim Höhenmotor gegenüber den Öffnungszeiten beim Bodenmotor vorverlegt werden müssen, ist durch die Versuche Oestrichs wenigstens in bezug auf die Auslaßöffnungszeiten[2]) bestätigt worden.

Die Ergebnisse der Oestrichschen Versuche sind zusammengefaßt in Bild 8 dargestellt:

Auslaßöffnen ist von der Drehzahl und vom Gegendruck in der Weise abhängig, daß mit steigender Drehzahl und kleiner werdendem Gegendruck die Zeiten früher liegen müssen.

Einlaßöffnen ist in gleicher Weise von der Drehzahl abhängig, d. h. bei steigender Drehzahl müssen die Öffnungspunkte früher liegen. Der Kurvenverlauf für die einzelnen Drehzahlen gibt die von Oestrich empfohlenen frühesten Öffnungszeiten an, das sind die Zeiten, von denen ab die Leistung nicht mehr nennenswert anstieg. Die größten Leistungen zeigten keinen Einfluß der Gegendrücke, dagegen wieder eine Abhängigkeit von der Drehzahl, und zwar:

bei n	= 1300	1500	1700 U/min
die beste Einlaßöffnungszeit	= 25°	30°	35° v.o.T.

Einlaßschließen ist vom Auspuffgegendruck unabhängig.

Wichtig ist, daß die frühesten der günstigsten Öffnungszeiten für Auslaß und Einlaß bei allen Gegendrücken und allen Drehzahlen nahezu gleich gute Leistungen ergaben, wie die jeweils besten Öffnungszeiten.

Für die Öffnungszeiten bei größten Leistungen sind noch in Bild 8 die Zeiten der mittleren Öffnungswinkel für Einlaß nach o.T. und für Auslaß nach u.T. aufgetragen, wobei für Auslaßschließen für alle Drehzahlen 10° nach o.T. angenommen wurde[3]). Beim symmetrischen Erhebungsdia-

[1]) Hansen nahm Einlaßöffnen in o.T. beim Bodenmotor an, so daß hieraus der Unterschied zu erklären ist.

[2]) Die Schließzeiten für Auslaß für den Betrieb ohne Ausspülung wurden bei den höheren Drehzahlen nur wegen des gegebenen Verstellbereiches der Steuerung geändert. Die Rückwirkung auf die Leistung war nur sehr gering.

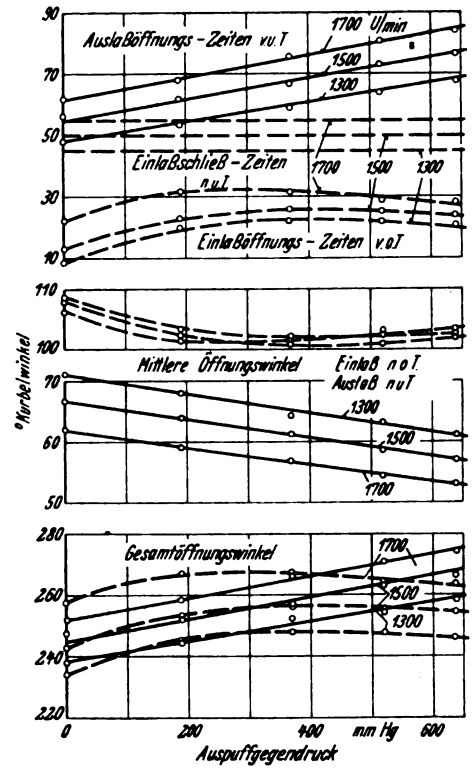


Bild 8. Abhängigkeit der Steuerzeiten vom Auspuffgegendruck und von der Drehzahl (nach Oestrich).
--- Einlaß — Auslaß.

gramm, wie es der Versuchsmotor und die meisten ausgeführten anderen Motoren aufweisen, bilden diese Zeiten gute Vergleichswerte. Sie zeigen für den Auslaß bei fallendem Gegendruck und steigender Drehzahl frühere Zeiten, beim Einlaß ist eine Drehzahlabhängigkeit nicht zu erkennen.

Versuche an einem 1,5-l-Einzylinder-Prüfmotor mit $n =$ 3000 U/min zeigten als günstigsten mittleren Einlaßöffnungswinkel 116° nach o.T. bei einem Gesamtöffnungswinkel von 274° und 284°. Die Ursache hierbei ist das weniger füllige Erhebungsdiagramm, das auch alle übrigen schnellaufenden Motoren aufweisen, denn der Nachladeeffekt verlangt im u.T. noch einen bestimmten Durchgangsquerschnitt im Einlaß, der nur durch ein Späterverlegen des mittleren Öffnungswinkels erreicht werden kann.

Bild 8 zeigt fernerhin die Gesamtöffnungswinkel, die mit wachsender Drehzahl und fallendem Gegendruck für Auslaß eine steigende Tendenz aufweisen. Der gesamte Einlaßöffnungswinkel steigt nur bis zu einem gewissen Auspuffgegendruck, etwa — 200 mm Hg; mit wachsender Drehzahl wird er ebenfalls erheblich größer.

Die Zunahme von N_i bei den günstigsten Steuerzeiten infolge Abnahme des Auspuffgegendruckes von 0 auf — 640 mm Hg war geringer als die von Kamm und Hansen berechneten und betrug bei $n = 1300$ U/min ungefähr 14%, bei $n = 1700$ U/min ungefähr 16%, während sie bei normalen Steuerzeiten 8 bis 12% betrug. Die Versuche von Schey [5] lassen keine eindeutige Schlußfolgerung zu, da sie bei Drehzahlen gefahren wurden, die zu niedrige Gasgeschwindigkeiten ergaben[4]), und sind deswegen nicht zum Vergleich herangezogen worden.

2. Der Liefergrad (indirekte Verluste).

Außer den Pumpverlusten, die im pv-Diagramm eine negative Arbeitsfläche bei selbstsaugenden Motoren und

[4]) Es handelt sich um Gasgeschwindigkeiten von 38 bis 55 m/s, wobei als Vergleichsgröße

$$c_y = \frac{V_h \cdot n}{30 \cdot f}$$

gesetzt wurde, während für die vorliegende Arbeit Geschwindigkeiten von 50 bis 70 m/s interessieren.

Digitized by Google

bei überladenen Bodenmotoren und aufgeladenen bzw. überladenen Höhenmotoren eine Verminderung (abhängig von der Gasgeschwindigkeit) des Leistungsrückgewinnes ergeben, ist noch für die Höhe des mittleren indizierten Druckes der Liefergrad, bezogen auf den Außenzustand maßgebend.

Der Liefergrad ist abhängig:

1. von dem Füllgrad und
2. von der Erwärmung der frischen Ladung beim Einströmen.

Zu 1. Der Füllgrad, der ganz wesentlich durch die Strömungswiderstände in den Kanälen und Ventilen bedingt ist, läßt sich aus Schwachfederdiagrammen bestimmen. Die Versuche von Oestrich zeigen bei allen Diagrammen, daß der Druck am Ende des Saughubes gleich dem mittleren Ansaugdruck vor dem Vergaser ist. Caroselli (DVL) schließt daraus, daß die Füllungseinbuße ausschließlich auf die Erwärmung des Frischgases durch Wandwirkung und nicht auf die Drosselung zurückzuführen ist. Es findet hierbei aber außerdem, als besonders gearteter Fall, eine gewisse Nachladung statt, die auf das günstige Ventilerhebungsdiagramm mit noch verhältnismäßig großem Einlaßöffnungsquerschnitt im o.T. zurückzuführen sein dürfte. Die Versuche von Schey [5] zeigen eine erhebliche Füllungseinbuße durch geringeren Füllgrad bei ähnlicher Ventilerhebung. Infolge der zu geringen Gasgeschwindigkeiten (vgl. Fußnote 4) kann ein Nachladen nicht stattfinden. Erst bei 1590 U/min (mittlere Gasgeschwindigkeit $c_g = 58$ m/s) war der Druck am Ende des Saughubes gleich dem Außendruck, so daß der Füllgrad = 1 war. Bei neuzeitlichen Schnelläufern ist eine Füllungseinbuße durch Drosselung vorhanden, da bei diesen Motoren die Erhebungsdiagramme mit Rücksicht auf mechanische Beanspruchung nicht so füllig sein können, wie bei den vorbezeichneten Versuchsmotoren, Bild 9 bis 11.

Zu 2. Auch bei Vorhandensein einer gewissen Drosselung ist die Füllungseinbuße zum größten Teil auf die Erwärmung der frischen Ladung zurückzuführen. Die Erwärmung erfolgt durch die Kanäle und Ventile sowie die heißen Wände des Arbeitsraumes bis Füllungsende und besonders noch durch die Vermischung mit Restgasen aus dem vorhergehenden Arbeitshub. Einen gewissen Einfluß im günstigen Sinne hat auch die Verdunstungswärme bei der Vergasung des flüssigen Brennstoffes. Die Versuche von Oestrich zeigen nur einen geringen Unterschied zwischen der Erwärmung bei normalen und günstigsten Steuerzeiten (1,5 bis 3,5%). Dagegen war der Einfluß der Absaugung erheblich (bei — 640 mm Hg = 6,0 bis 6,5%). Die Drehzahlen zeigten eine geringe Zunahme — 1,3 bis 1,5% bei $n = 1300$ bis 1700 U/min —, die möglicherweise auf die Kolben- und Ventiltemperaturen zurückzuführen ist.

Aus allen Versuchen geht hervor, daß der Einfluß der Restgase am stärksten ist. Es sind deswegen Versuche zur Ausspülung des schädlichen Raumes vorgenommen worden. Die größte Leistung ergab sich, wenn die Mitte des Überschneidungsbereiches in o.T. lag [1]. Eine Überschneidung von 90° bei — 190 mm Hg ($n = 1400$ U/min) bringt eine Leistungserhöhung von ungefähr 10%. E. S. Taylor erreicht bei Vergrößerung der Überschneidung von 25° auf 100° bei + 190 mm QS eine Leistungssteigerung von 14,5% ($\varepsilon = 4$), vorher $\varepsilon = 6$. Bei höherer Verdichtung ist also der Leistungsgewinn durch Ausspülen geringer, und zwar direkt verhältig dem reziproken Wert von ε. Oestrich errechnet aus seinen Versuchen den höchsten erreichbaren effektiven Mitteldruck zu

$$p_{max} = 11{,}44 \text{ bei } n = 1300 \text{ U/min},$$
$$p_{max} = 11{,}02 \text{ bei } n = 1500 \text{ U/min}$$

bei ungefähr 110° Überschneidung.

Der Wärmeübergang von den Wänden wächst mit zunehmender Durchspülung, da der Temperaturunterschied zwischen den Wänden und der Ladung, infolge Fortfalls der Restgase, größer wird. Mit zunehmender Flughöhe verliert die Brennraumspülung ihre Bedeutung, da das Restgasgewicht kleiner wird. Direkte Brennstoffeinspritzung ist Vorbedingung für wirtschaftliches Spülen des Brennraumes.

Nach Oestrich scheint die Grenze der Leistungssteigerung bei ungefähr 110° Überschneidung zu liegen. Wieweit sie in der Praxis zu verwirklichen ist, ergibt sich aus der Forderung nach einem einwandfreien Leerlauf des Motors. Die Versuche von Schey [6] zeigten ebenfalls bis zu 112° Überschneidung ein starkes Anwachsen der Leistung.

Hier sei jedoch noch eine Schwierigkeit angeführt, die Ricardo in seinem Vortrag vor der Akademie der Luftfahrt 1935 in Italien erwähnte: Die Schwierigkeit, beim Ventilmotor die Ventile so anzuordnen, daß sie auch eine wirkliche Spülung ermöglichen und nicht nur einen kurzen Fluß vom Einlaß zum Auslaß. Capon (Vortrag 12. 10. 1935 auf der Tagung der VDL) hielt es für noch nicht erwiesen, daß mit Ausspülen des Brennraumes ein verhältnisgleicher Leistungsgewinn erzielt werden kann, denn die Klopfneigung würde erhöht werden, so daß Änderung des Ladedruckes oder des ε erforderlich wäre.

Inzwischen haben weitere Versuche (NACA-Jahresbericht 1937) ergeben, daß die Neigung zum Klopfen beim Ausspülen geringer wird. Bei 130° Überschneidung am Einspritzmotor ($n_{max} = 2200$ U/min, geringer Ladedruck) betrug die Mehrleistung 25% bei gleicher Temperatur.

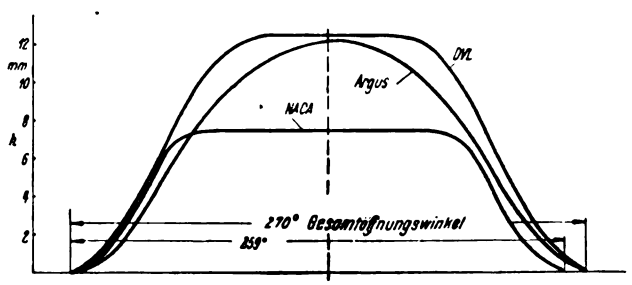


Bild 9. Ventilerhebungsdiagramme.

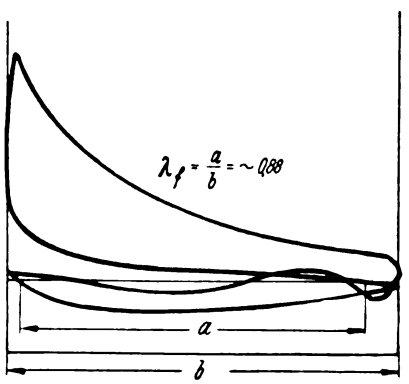


Bild 10. pr-Diagramm des NACA-Prüfmotors ($n = 1500$) nach Schey [5].

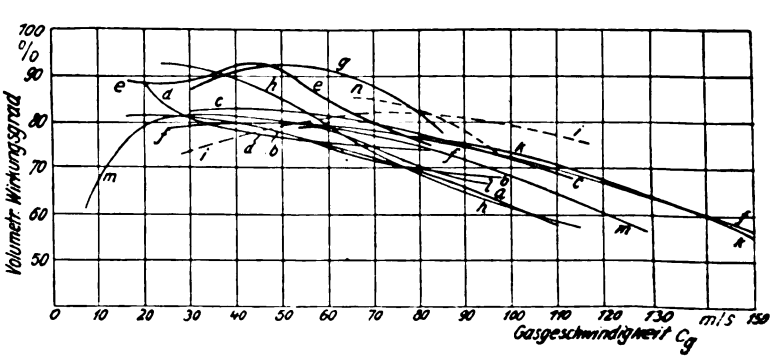


Bild 11. Volumetrische Wirkungsgrade nach Drucker [43].

Digitized by Google

8. Zusammenfassung.

Alle Versuche zur Erforschung des Gaswechselvorganges zeigen mehr oder weniger, unter der Voraussetzung, daß für alle übrigen Punkte ein Optimum erreicht ist, den erheblichen Einfluß der Steuerzeiten in der Weise, daß mit Erhöhung der Überladung, mit zunehmender Gleichdruckhöhe und mit steigender Drehzahl die Gesamtöffnungswinkel für Einlaß und Auslaß größer werden müssen, wobei aber dann von einer gewissen Größe ab keine nennenswerte Leistungsverbesserung zu erwarten ist. Darüber hinaus wird man bei der kommenden Drehzahlsteigerung — auch unter Verzicht auf einen Leistungsvorteil — im Hinblick auf die sichere Erfassung der mechanischen Beanspruchung der Steuerungsteile zu längeren Gesamtöffnungszeiten übergehen müssen. Christian [10] betont ausdrücklich, daß bei sehr schnellaufenden Maschinen die Bedeutung einer Vergrößerung des Öffnungswinkels bis an das zulässige Maß nicht in der Verlängerung des Zeitraumes für das Ein- und Ausströmen liegt, sondern überhaupt erst die Möglichkeit gibt, die Nockenform für eine einwandfrei arbeitende Steuerung zu finden. Einen weiteren Entwicklungsschritt in dieser Richtung bedeutet die Ausspülung des Brennraumes, die eine zusätzliche Verlängerung der Gesamtöffnungszeiten benötigt und dadurch weiterhin eine noch bessere Nockenform ermöglicht, die jedoch mit der direkten Brennstoffeinspritzung steht und fällt.

Der größte zulässige Öffnungswinkel ist durch die Forderung nach einem einwandfreien Leerlauf des Motors beschränkt.

Die bei ausgesprochenen Schnelläufern verwendeten Nockenformen weisen im Gegensatz zu den bei den vorbesprochenen Versuchen benutzten keine Rast in der Mitte auf, vielmehr folgt auf das Anheben sofort das Zurückgehen des Ventiles — das Erhebungsdiagramm wird weniger füllig. Daß hier ein erheblicher Unterschied besteht, zeigen die erreichbaren mittleren Gasgeschwindigkeiten, s. Abschnitt II. Die Aufgabe lautet demnach allgemein, den durch die Kinematik gegebenen Nocken (größte zulässige Beschleunigung) in seinen Zeiten mit den geringsten Verlusten einzuordnen. Im einzelnen fehlen hier Versuche über den Einfluß der Fülligkeit des Ventilerhebungsdiagrammes auf den Füllgrad. Es ist anzunehmen, daß dieser Einfluß nicht unerheblich ist und gegenüber den bei den Versuchen von Oestrich und Caroselli verwendeten Nockenformen der Füllgrad einen erheblich stärkeren Einfluß auf den Liefergrad haben wird.

II. Die mittlere Gasgeschwindigkeit.

1. Zahlenangaben.

Die zur Beurteilung einer Maschine meist zugrunde gelegte mittlere Gasgeschwindigkeit

$$c_g = \frac{F_k \cdot c_{km}}{f} \text{ (m/s) mit } \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

F_k = Kolbenfläche (cm²)
c_{km} = mittl. Kolbengeschwindigkeit (m/s)
f = größter freier Durchflußquerschnitt des Ventiles (cm²)

ist ein Rechenwert ohne physikalische Bedeutung. Als einfacher Vergleichswert wird sie allgemein angewendet, und Leistungen und Mitteldrücke in Abhängigkeit von ihr aufgetragen ergeben ein ausreichend klares Bild, sofern die Ventilerhebungskurven der zu vergleichenden Maschinen gleich oder ähnlich sind und die Drehzahlen derart, daß die Unterschiede in den Wärmeverlusten vernachlässigbar sind.

Der Ventilquerschnitt wird der Einfachheit halber meistens

$$f = d \cdot \pi \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gesetzt. Für genaue Rechnungen ist jedoch erforderlich, den Sitzwinkel zu berücksichtigen. Im folgenden sind die in der Literatur angegebenen Formeln zusammengestellt und in Bild 12 aufgetragen.

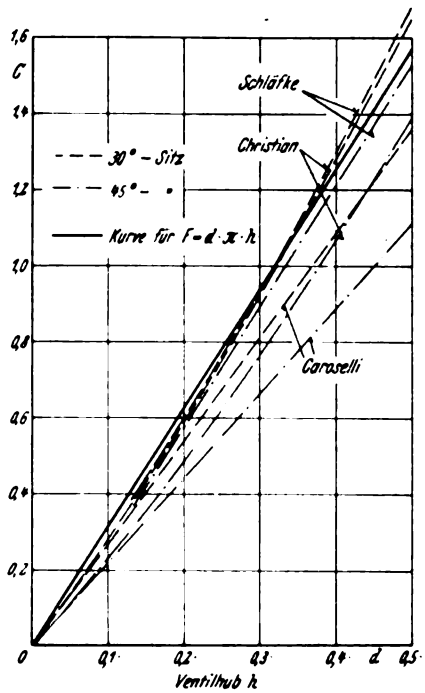
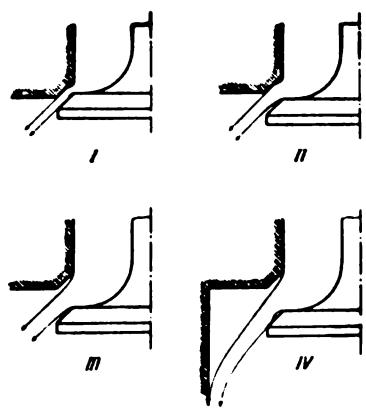


Bild 12. Vergleich der in dem Schrifttum angegebenen Ventilöffnungsquerschnitte.
Durchgangsfläche $F = c \cdot d^2$; d = Ventil-Φ.



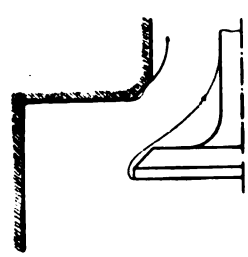


Bild 13. Strömungsbilder im Ventilquerschnitt für Einlaß und Auslaß nach Tanaka [13 u. 14].

Christian [10] gibt an:

für $\alpha = 30^0$: $f = 5{,}44 \cdot r \cdot h + 1{,}18 \cdot h^2$ . . . . . (3)

$\alpha = 45^0$; $f = 4{,}43 \cdot r \cdot h + 1{,}11 \cdot h^2$ . . . . . (4)

Schläfke [12] rechnet mit:

$$f = \pi\,(d + h \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha) \cdot h \cdot \cos\alpha \text{ für } 0 < h < \frac{b}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \quad \ldots\ldots (5)$$

$$f = \pi\,(d + b) \cdot V\,(h - b \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2 + b^2 \text{ für } h \geq \frac{b}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \quad (6)$$

b = Sitzbreite

Digitized by Google

Caroselli (DVL) gibt an:

$$f = d \cdot \pi \cdot h \cdot \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die Formeln von Christian und Schläfke scheinen die genauesten Werte zu ergeben. Bestätigt wird dieses bei der Betrachtung der Strömungsformen, die Tanaka in seinen Versuchen über Kegelventile sichtbar gemacht hat. Die Richtung des einströmenden Gases ist trotz der immer wieder anders gearteten Ablösung bei allen Ventilhüben den Sitzflächen nahezu parallel. Auf Bild 14 sind zu den von Ricardo [4] in Abhängigkeit von der mittleren Gasgeschwindigkeit angegebenen Mitteldruckkurven die Produkte

$$c_g \cdot p_{me} \cdot 10^{-1}$$

aufgetragen, die den Verlauf von N_e angeben. Weiterhin zeigt Bild 15b die Leistungskurven einiger Flugmotoren (zum Vergleich noch den Vauxhall-Rennmotor), Bild 15a diejenigen des Argus-Einzylinder-Prüfmotors und Bild 17b die Leistungskurven ein und desselben Motors nach Düsenberg [21]. Abgesehen von der Höhe des mittleren Druckes und der Größe der Nutzleistung, die sich in ihrer Abhängigkeit von der Drehzahl, Verdichtungsverhältnis und vom Wirkungsgrad des Brennraumes zum Teil erheblich unterscheiden, ist doch der Verlauf der Kurven in allen Fällen ungefähr der gleiche. Man kann erkennen, daß die größte Leistung bei einer Drehzahl liegt, die Gasgeschwindigkeiten von 65 bis 75 m/s ergibt.

2. Einfluß des Ventilerhebungsdiagrammes.

Die hauptsächlichste Ursache für das Streuen der Lage der Leistungsspitzen zwischen 65 bis 75 m/s Gasgeschwin-

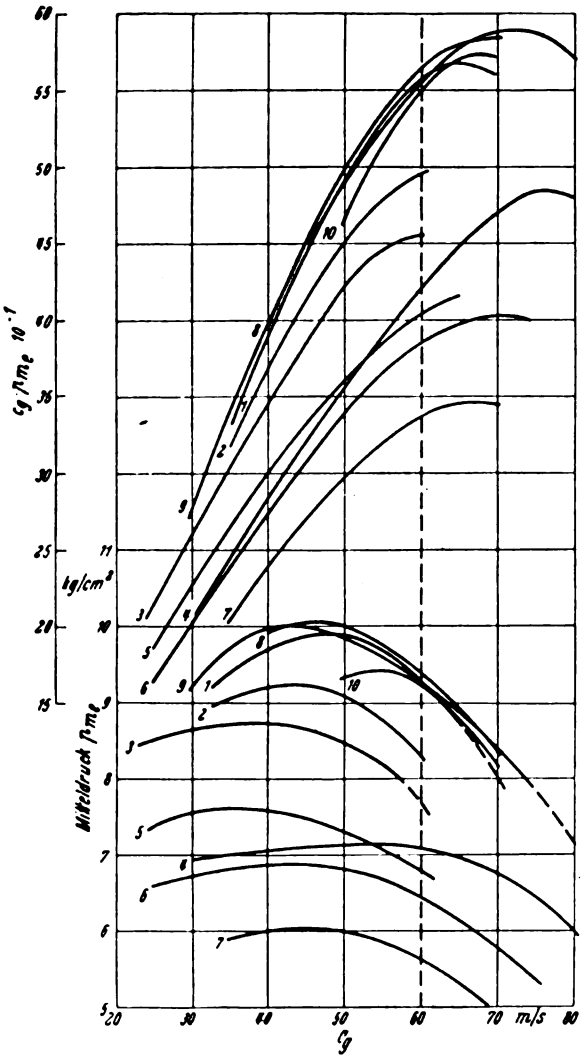


Bild 14. Mitteldruck- und Leistungskurven in Abhängigkeit von der mittleren Gasgeschwindigkeit nach H. Ricardo. Schnellaufende Verbrennungsmaschinen.

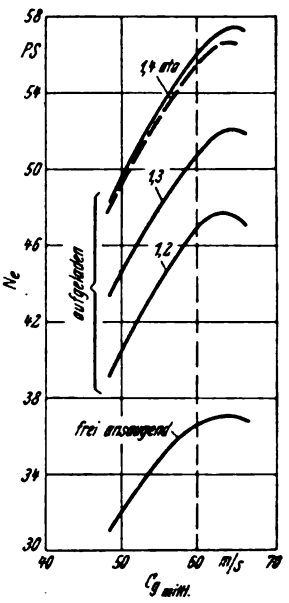


Bild 15a. $N_e = f(c_g)$ am Argus-1-Zylinder-Prüfmotor.

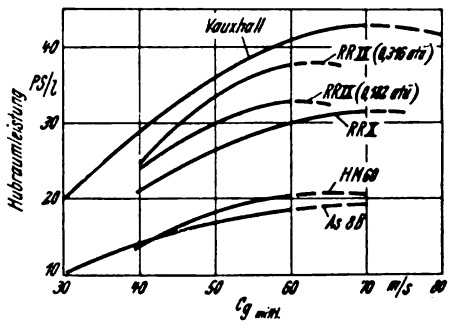


Bild 15b. $N_e = f(c_g)$ einiger älterer Flugmotoren. Zum Vergleich: Vauxhall-Rennmotor nach Ricardo.

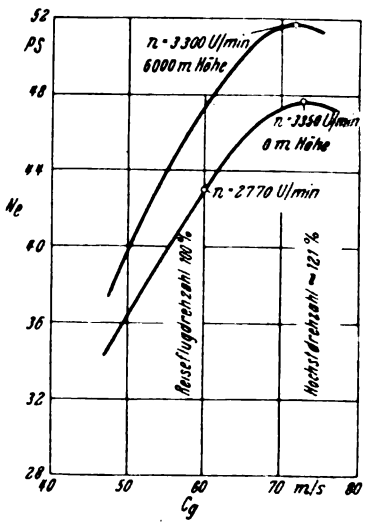


Bild 16. $N_e = f(c_g)$; gemessen am Argus-1-Zylinder-1,35-l-Prüfmotor.

digkeit ist neben der Ausbildung der Kanäle und Ventile die unterschiedliche Form des Erhebungsdiagrammes. Bei gegebenem Ventilhub liegt die Leistungsspitze bei um so höheren Gasgeschwindigkeiten, je fülliger das Erhebungsdiagramm ist. Zum Vergleich seien zwei Motoren mit sehr verschiedenen Zeitquerschnitten herangezogen: Der DVL-Versuchsmotor und der Argus-Einzylinder-Prüfmotor. Ihre Ventilerhebungskurve zeigt Bild 9. Die Fülligkeit der Erhebungskurve des Schnelläufers hat durch die Forderung nach einer zulässigen mechanischen Beanspruchung Einbuße erlitten. Der konzentrische Kreisbogen am Nocken muß wegfallen, d. h. der gesamte halbe Öffnungswinkel wird zum Anheben des Ventiles benutzt. Der hierdurch entstandene Verlust an Zeitquerschnitt muß durch größere Zeit — größeren Öffnungswinkel — ausgeglichen werden. Die

Digitized by Google

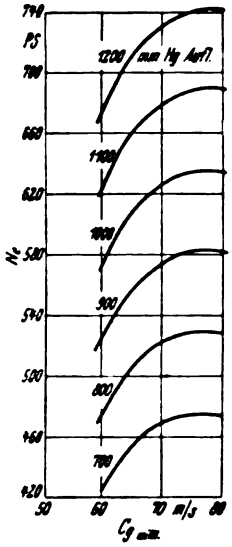


Bild 17a. $N_e = f(c_g)$ des Wright Cyclone SR-1820-F 3 [17].

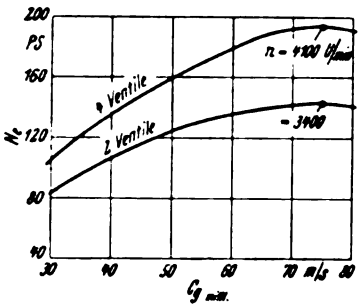


Bild 17b. $N_e = f(c_g)$ nach Duesenberg [21].

Leistungsspitze beim DVL-Versuchsmotor lag bei ~80 m/s Gasgeschwindigkeit, das sind ~ 1650 U/min, Bild 18. Der Argus-Einzylinder-Prüfmotor hatte die Leistungsspitze bei ~ 3700 U/min, was einem $c_g = 65$ m/s entspricht. In beiden Fällen ist mit dem größten Ventilhub gerechnet.

Durch Einführen eines mittleren Ventilhubes kann die Fülligkeit der Erhebungskurve in gewissem Maße berücksichtigt werden, wobei von der Überlegung ausgegangen wird, daß die Erhebung vor o.T. als unbedeutend vernachlässigt wird, daß dagegen der Öffnungsquerschnitt in und nach u.T. wegen des Nachladens erforderlich ist.

Bildet man den mittleren Ventilhub über dem Öffnungswinkel von o. T. bis Einlaßschließen, so liegt die Leistungsspitze beim DVL-Motor bei 105 m/s, beim Argusmotor bei 103 m/s. Diese Werte zeigen eine gute Übereinstimmung, und es scheint möglich, auf diese Weise Motoren mit verschiedenen Ventilerhebungsdiagrammen und verschiedenen Steuerzeiten bezüglich ihres Verhaltens an der Leistungsspitze zu vergleichen.

8. Wahl der zulässigen Gasgeschwindigkeit. Zusammenfassung.

Aus den in Abschnitt II, 1 bezeichneten Kurvenscharen läßt sich weiterhin entnehmen, daß die Leistungszunahme bei Drehzahlen oberhalb

$$c_g = 60 \text{ m/s}$$

nur noch sehr gering ist, und zwar ist gegenüber der Leistung bei der Drehzahl für $c_g = 60$ m/s die Zunahme für die Leistungsspitze in der Größenordnung von 3 bis 5,5%; demgegenüber steht aber eine Drehzahlerhöhung von 10 bis 15%.

Bild 19 zeigt die Erhöhung von n und N_e in % von $c_g = 60$ m/s ab. Es ist hieraus zweifelsohne der Schluß zu ziehen, daß als höchste praktisch brauchbare Drehzahl diejenige zu wählen ist, bei der eben $c_g = 60$ m/s ist.

Der Wright-Cyclone zeigt bei normalem Erhebungsdiagramm und verhältnismäßig kleinem Öffnungswinkel die Leistungsspitze bei $c_g = 78$ m/s und ergibt gegenüber der Drehzahl für $c_g = 60$ m/s eine Leistungszunahme von 12% und eine Drehzahlerhöhung von 30%. Wir haben hier einen hochaufgeladenen Motor vor uns, dessen Auslaßquerschnitte beinahe genau so groß sind wie die Einlaßquerschnitte, um die Ausschubverluste herabzusetzen. Es scheint hierbei eine Rückwirkung auf die zulässigen Gasgeschwindigkeiten im Einlaßventilquerschnitt stattzufinden, und zwar so, daß um sie 10% höher liegen dürfen. Auf vorliegenden Fall angewendet, ergibt sich also für den Wright-Cyclone eine Erhöhung von N_e bis zur Leistungsspitze von 3,0%, während n um 16,5% größer wird, wenn man mit $c_g = 66$ m/s, d. h. $n = 1800$ U/min rechnet.

Ricardo [4] gibt als günstigste Gasgeschwindigkeit 50 m/s an, Christian [10] 60 m/s und Fedden [23] 55 m/s.

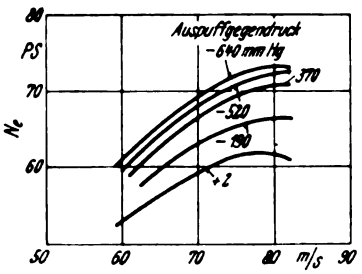


Bild 18. $N_e = f(c_g)$ am DVL-Versuchsmotor bei den günstigsten Steuerzeiten aus den Versuchen von Oestrich.

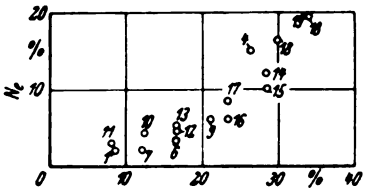


Bild 19. Leistungs- und Drehzahlzuwachs in %, von der Leistung und Drehzahl bei $c_g = 60$ m/s ab gerechnet bis zur Leistungsspitze für die in den Bildern 14 bis 18 angegebenen Kurven.

Punkt 1 bis 10 nach Bild 14.
11 Argus-1-Zyl.-PM. Bild 16a.
12 Vauxhall. Bild 15b.
13 RRX. Bild 15b.
14 Wright Cyclone 700 mm Hg. Bild 17a.
15 Wright Cyclone 1200 mm Hg. Bild 17a.
16 u. 17 Duesenberg. Bild 17b.
18 DVL-PM 0 mm Hg. Bild 18.
19 DVL-PM. 640 mm Hg. Bild 18.

Für die Fortführung der Arbeit sei daher nochmals zusammengefaßt:

Bei normalen Steuerzeiten und Ventilerhebungskurven wird nach der vereinfachten Formel

$$c_g = \frac{V_h \cdot n}{30 \cdot f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

gerechnet, wobei für die höchstzulässige Gasgeschwindigkeit

1. $c_g = 60$ m/s für Motoren mit großem Einlaßventil und kleinem Auslaßventil,
2. $c_g = 65$ m/s für Motoren mit annähernd gleich großen Ventilen, d. h. Motoren mit hoher Aufladung, bei denen zugunsten des Auslaßventiles das Einlaßventil verkleinert ist.

Für beide Fälle ist die Leistungszunahme bis zur Spitze ungefähr 3 bis 5%, der eine Drehzahlerhöhung von 10 bis 16% gegenübersteht.

Für den Ventilquerschnitt wird

$$f = d \cdot \pi \cdot h$$

gesetzt, der, wie Bild 12 zeigt, nur eine unwesentlich größere Durchgangsfläche als die genaue Formel für den 30°-Ventilsitz zeigt. Letzterer wird heute in der Praxis hauptsächlich verwendet, da er einen größeren Durchgang freigibt als 45°-Sitz.

III. Untersuchung der räumlichen Grenzen.

1. Baugleder (Kanäle und Ventile).

Sämtliche vorerwähnten Untersuchungen zeigen den überragenden Einfluß der Gasgeschwindigkeiten auf den Verlauf der Mitteldruck- und Leistungskurven. Die Aufgabe, die Ausström- und Einströmverluste, d. h. die Gaswechselarbeit möglichst klein zu halten und den Liefergrad, d. h. das Ladungsgewicht möglichst groß zu halten, erfordert beim Entwurf einer Steuerung sorgfältige Ausnutzung des vorhandenen Raumes, um die größtmöglichen Öffnungsquerschnitte zu erreichen. Den genauen Einfluß des gesamten Steuerungsaufbaues, seines Antriebes, seiner Einzelteile, wie z. B. Lage und Form der Gaskanäle und Form der Ein- und Austrittsquerschnitte und ihre gegenseitige Wechselwirkung und Beeinflussung sowie z. B. auch die sichere mechanische Beanspruchung einer neuzeitlichen hochbelasteten Stoßstangensteuerung mit ihren vielen elastischen Zwischengliedern richtig zu erfassen, ist eine äußerst schwierige Aufgabe und erfordert bei der Entwicklung von

Digitized by Google

Hochleistungsschnelläufern sorgfältige und langwierige Kleinarbeit. Die zeitliche Begrenzung der Vorgänge erhöht die Schwierigkeiten.

Im folgenden sollen die einzelnen Bauelemente und die Möglichkeiten ihrer Weiterentwicklung besprochen werden.

a) Die Gaskanäle.

Für die Anordnung und Unterbringung der Ein- und Auslaßkanäle bestehen keine räumlichen Grenzen. Lediglich die Bauhöhe legt eine gewisse Beschränkung auf. Die Aufgabe der Kanäle besteht darin, beim Einlaß die Luft bzw. das Gemisch auf dem geradesten Wege an das Ventil heranzuführen und eine möglichst gleichmäßige Beaufschlagung am ganzen Umfang zu erzielen. Um große Wirbel und damit Querschnittverengungen zu vermeiden, ist es zweckmäßig, den Querschnitt bis zum Ventil hin ein wenig zu verjüngen, um so eine zusätzliche Beschleunigung des durchströmenden Gases zu erreichen. Der Auslaßkanal hat die aus dem Zylinder ausströmenden Gase aufzunehmen und auf dem schnellsten Wege vom Ventil wegzubringen. Auch hier sollte eine kleine Erweiterung nach außen hin angestrebt werden, um der Expansion der Gase entgegenzukommen. In den meisten Fällen wird der Stutzenquerschnitt gleich der Ventilöffnung für größten Hub ausgeführt; auch hier liegt der Hauptdurchflußwiderstand beim Ventil, zumal es nur kurze Zeit voll geöffnet ist.

Um nun an der besonders für Sternmotoren wichtigen Bauhöhe des Zylinders zu sparen, sind an einem Pratt & Whitney-Hornet-B-Zylinder Versuche angestellt worden [11], den Stutzendurchmesser zu verkleinern. Die Ergebnisse waren folgende:

Auslaßstutzen, Bild 20: Querschnittsverminderung um 31,3%.

(Verhältnis $R = \frac{\text{Stutzenquerschnitt}}{\text{Ventilquerschnitt}} = 0{,}945$ auf $R = 0{,}65$ geändert)

hat bei kleinen Hüben sehr geringen Einfluß, bei großen Hüben wird der Durchflußbeiwert lediglich um 7% vermindert.

Einlaßstutzen, Bild 20: Verringerung von R um 38% ergab bei $\frac{h}{d} = 0{,}25$ eine Verminderung des Durchflußbeiwertes um 20%. Der Einfluß auf die Motorleistung dürfte jedoch geringer sein, da das Ventil nur während kurzer

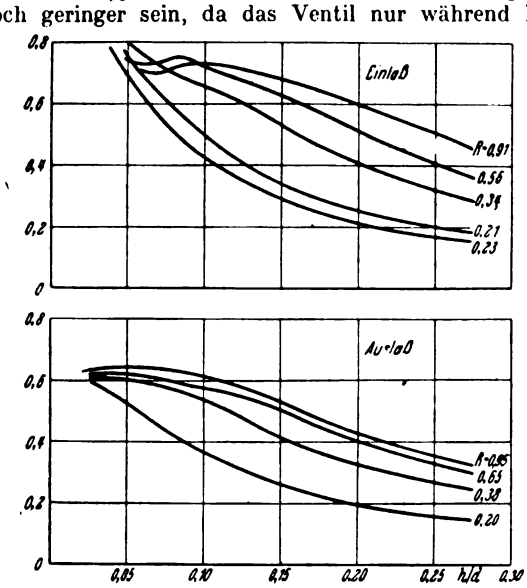


Bild 20. Einfluß der Verkleinerung des Kanales auf den Durchflußbeiwert C bei verschiedenen Ventilhüben nach Taylor [11].

$C = \frac{\text{tatsächlich in der Sek. durchgehendes Luftgew.}}{\text{theoretisches Luftgew.}}$

theor. Luftgew. = Ventildurchgangsfläche × Luftdichte × $\sqrt{2gh_{\text{Luft}}}$

$R = \frac{\text{Öffnungsquerschnitt am Flansch}}{\text{Ventildurchgangsfläche bei } h/d = 0{,}25}$

h = Ventilhub.
d = Ventil-Dmr.

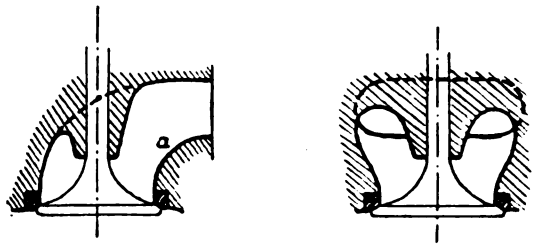


Bild 21. Einlaß-Kanalform.

Zeit voll geöffnet ist. Einem mittleren Ventilhub $\left(\frac{h}{d} = 0{,}18\right)$ würde eine Verminderung des Durchflußbeiwertes von 14% entsprechen. Danach ist es wenig empfehlenswert, den Stutzenquerschnitt zugunsten der Bauhöhe besonders beim Einlaßventil zu verkleinern.

Um den zur Verfügung stehenden Ventilquerschnitt voll ausnutzen zu können, ist die größte Sorgfalt darauf zu verwenden, den Kanal so zu entwerfen, daß das Ventil am ganzen Umfang beaufschlagt wird. Bei allen neuzeitlichen und auch älteren Flugmotoren wird zwar der Kanalquerschnitt nicht oder nur unwesentlich kleiner als der Ventilquerschnitt ausgeführt, jedoch werden die Kanäle kurz nach dem Ventilsitz sehr stark umgelenkt, um an Ventillänge, Bauhöhe und Baugewicht zu sparen. Es sei nebenbei auf eine Kanalform aufmerksam gemacht, die bei großem Krümmungsradius bei »a« eine sehr geringe Bauhöhe, Bild 21, erlaubt. Beim Auslaß werden solche Kanalformen nicht in Frage kommen, da das Verhältnis Kanaloberfläche : Kanaldurchgangsfläche möglichst klein sein muß, um die Wärmeaufnahme des Kopfes niedrig zu halten. Einige deutsche Motorradmotoren sind in der Ausbildung der Kanalformen geradezu vorbildlich zu nennen, zumal deren Bauhöhe auch gewissen Beschränkungen unterworfen ist.

Die verwickelten Durchströmverhältnisse sind wegen der veränderlichen Querschnitte am Ventil, der wechselnden Drücke im Zylinder, der Bewegungen des Ventiles selbst und der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Gassäule ungleich schwerer zu erfassen, als im Ventilquerschnitt selbst. Nur zu leicht verständlich, daß hierüber ganz spärliche Versuche vorliegen, die nicht einmal unter Betriebsbedingungen vorgenommen wurden.

Für die kommende Leistungserhöhung wird die Lücke, die hier noch besteht, unbedingt geschlossen werden müssen. Wichtig ist die Frage, ob die heutigen Kanalformen eine hundertprozentige Ausnutzung der verfügbaren Ventilöffnungsquerschnitte gewährleisten und wieweit eine Verbesserung möglich ist. Versuche an einem betriebsfähigen Modell werden durch die gewonnenen Erkenntnisse den Aufwand lohnen. Als Ergebnis steht zu erwarten, daß für das Einlaßventil höhere mittlere Gasgeschwindigkeiten möglich sein werden.

b) Ventile.

Eine beträchtliche Anzahl von Arbeiten über die Durchflußzahl von Tellerventilen steht zur Verfügung. Sie geben jedoch geringen Aufschluß über den Einfluß der Ventilwiderstände auf die tatsächliche Maschinenleistung und können mehr oder weniger nur als Vergleichsmaßstab dienen. Es seien daher lediglich die Versuche von Tanaka [13/14], die in mancher Hinsicht bemerkenswert sind, herausgegriffen. Als wesentlichstes Ergebnis hieraus ist folgendes zu nennen: Trägt man das Verhältnis der Luftgewichte $\frac{w}{w_\infty}$ in Abhängigkeit vom Verhältnis Ventilhub : Ventildurchmesser auf, so verschwindet der Einfluß der Druckunterschiede vor und hinter dem Ventil, Bild 22. Hierbei ist

w = durch das Ventil gehendes Luftgewicht bei jeweiligem Hub,
w_∞ = Luftgewicht für $h = \infty$, d. h. bei herausgenommenem Ventil.

Digitized by Google

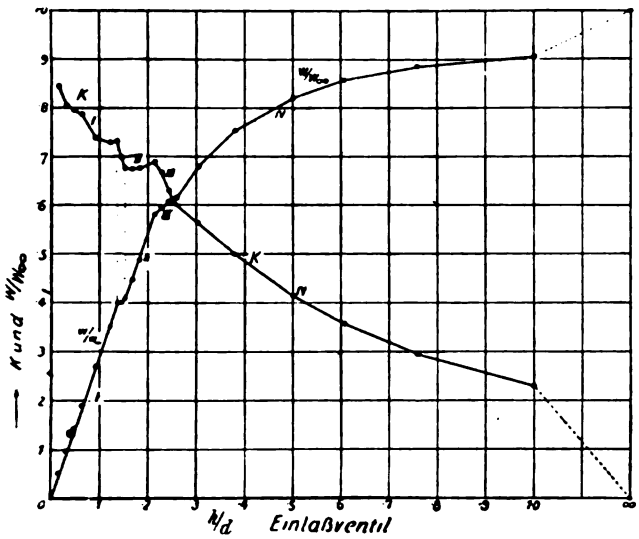


Bild 22. w/w_∞ in Abhängigkeit vom Verhältnis Ventilhub : Ventildurchmesser; desgl. Durchflußbeiwert k für das Einlaßventil nach Tanaka [13].

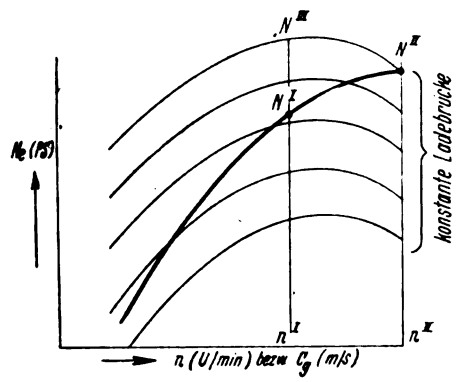


Bild 24. Schematische Darstellung der Leistungen bei konstanten Ladedrücken und mit starrgetriebenem Lader.

Ebenso bleibt der Durchflußbeiwert k bei allen Druckunterschieden nahezu gleich, Bild 22, 23. k ist das Verhältnis des wirklich durchgehenden Luftgewichtes zu dem theoretisch durch eine Öffnung $d \cdot \pi \cdot h$ bei dem jeweiligen Druckunterschied durchgehenden Luftgewicht.

Dieses Ergebnis läßt sich, wenn auch nicht in den absoluten Größenordnungen, so doch im Verlauf der Kurven $\frac{w}{w_\infty}$ und k auf den Motor übertragen, d. h. die Durchflußzahlen bleiben bei selbstansaugenden und aufgeladenen Motoren gleich, die Strömungsverluste sind prozentual gleich, mithin ist auch der Verlauf der Leistungskurven bei verschiedenen Ladedrücken ähnlich. Die Leistungsspitze liegt bei derselben Drehzahl, d. h. durch Überladen ist keine Steigerung der Drehzahl möglich. Bild 24 zeigt schematisch die Leistungen als Funktion der Drehzahlen bzw. der mittleren Gasgeschwindigkeiten für verschiedene Aufladungen.

Eingezeichnet ist ferner die Motorleistungskurve mit starr angetriebenem Lader. Die Leistungsspitze liegt für alle Ladedrücke bei n'. Es wäre verfehlt, n' auf n'' zu erhöhen, um N'' zu erreichen, durch einen anders ausgelegten Lader erreicht man das größere N''' bereits bei n'. Dasselbe Bild zeigen die Leistungskurven des Wright-Cyclone SR 1870 und die eines neuzeitlichen Argus-Einzylinder-Prüfmotors, Bild 15a u. 17a.

Der Einfluß des Sitzwinkels auf die durchströmende Luftmenge ist erheblich, besonders am Einlaßventil [12]. Bild 25 ist der Veröffentlichung von Schläfke entnommen und zeigt, daß bei $n = 1600$ U/min die Leistung mit 30° Ventil um ungefähr 4% größer ist als mit 45° Ventil. Schläfke berechnet die Ausflußzahl für heute übliche Werte

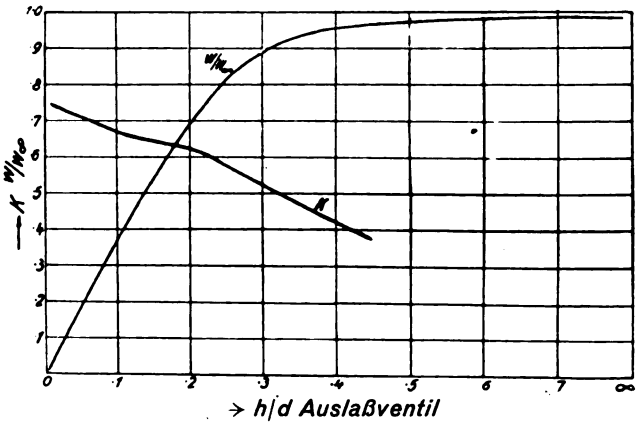


Bild 23. w/w_∞ und Durchflußbeiwert k in Abhängigkeit vom Verhältnis Ventilhub : Ventildurchmesser für das Auslaßventil nach Tanaka [14].

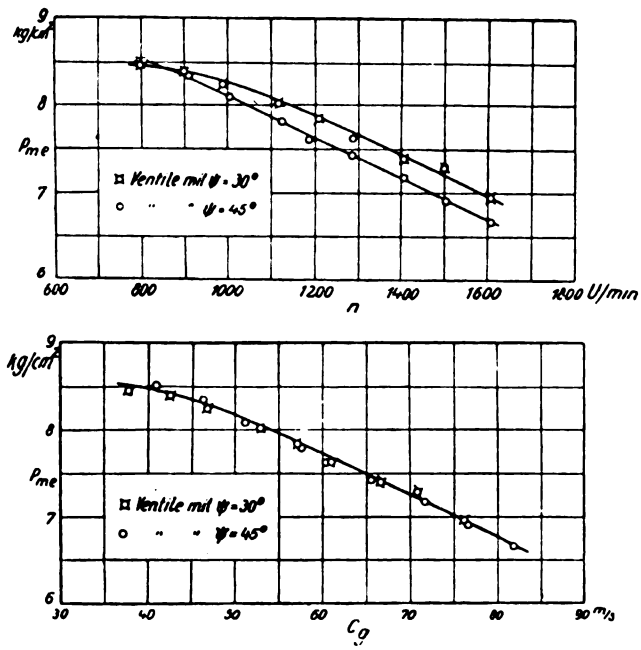


Bild 25. Der Verlauf des mittleren wirksamen Kolbendruckes p_{me} für verschiedene Ventilsitzwinkel nach K. Schläfke [12].

$$\frac{h}{d} = 1/4 \text{ bis } 1/5 \text{ bzw.}$$

$$h_m = 0{,}55 \cdot h_{max} \text{ und}$$

$$\frac{h_m}{d} = 0{,}12$$

für den 30°-Sitz zu 0,81 und
für den 45°-Sitz zu 0,84.

Der 30°-Sitz hat hierbei ungefähr 11% größeren Querschnitt, mithin ergibt sich für ihn eine Verbesserung des wirksamen Durchflußquerschnittes von 7,4%.

Mit kleiner werdendem Sitzwinkel wird zwar die Widerstandszahl größer, d. h. die Ausflußzahl wird kleiner, jedoch die Querschnittsfläche größer.

Um die hier gegeneinander gerichteten Einflüsse klarzustellen, sind aus den Versuchen von Tanaka die in Bild 26 gezeigten Kurven ausgewertet und zeigen den Sitzwinkel in Abhängigkeit von $\frac{h}{d}$ für das Einlaß- und das Auslaßventil. Die Verbindungslinie der Maxima der Durchflußmengenkurven zeigt die günstigsten Sitzwinkel für die einzelnen Verhältnisse $\frac{h}{d}$. Hierbei erweist sich, daß für die heute allgemein gebräuchlichen Werte

$$\frac{h_m}{d} = 0{,}12$$

Digitized by Google

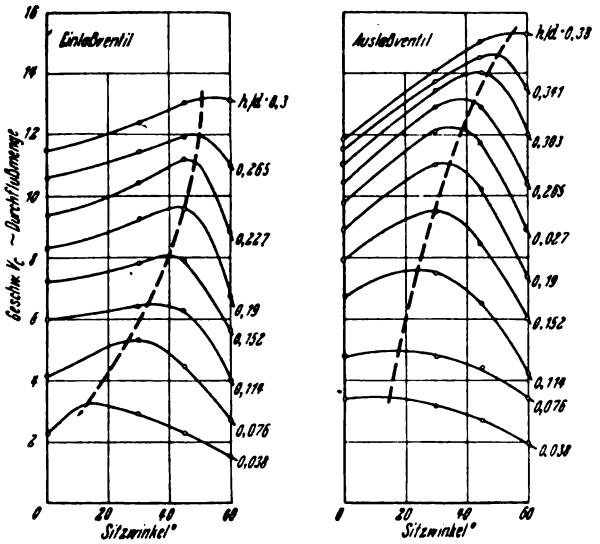


Bild 26. Günstigste Sitzwinkel für verschiedene $\frac{h}{d}$ aus Versuchen von Tanaka [13 u. 14] ermittelt.

ungefähr 30 bis 35° Sitzwinkel verwendet werden soll. Für höhere Hubverhältnisse nimmt der Sitzwinkel zu, und zwar für Einlaß stärker als für Auslaß. Versuche am Motor haben jedoch keinen Unterschied zwischen 30° und 45° Sitz am Auslaßventil ergeben, was darauf zurückzuführen ist, daß die Hauptmenge der verbrannten Gase bereits bei sehr geringem Hub mit großem Überdruck ausströmt.

Abrundungen namentlich an den inneren Sitz- und Ventilkanten verringern die Durchflußwiderstände erheblich und bringen eine Verbesserung von 26% gegenüber scharfkantigem Sitz und Ventil[5]). Die Verbesserung des Liefergrades von ungefähr 3 bis 4% und die Leistungserhöhung von 3 bis 5% an einem Hispano-Suiza-Flugmotor [15] sind jedoch nicht so groß. Die Ursache hierfür dürfte die periodische Strömung im Motor sein, während sie bei den Versuchen Tanakas stationär war. Wie bereits bei der Besprechung über die Kanalform hervorgehoben war, wären auch hier Versuche, die den Betriebsverhältnissen angeglichen sind, aufschlußreich, wenngleich sie nicht die Bedeutung haben, wie die Versuche über die Kanalform.

2. Raumverteilung zwischen Einlaß und Auslaß.

Für die Aufteilung des Raumes zwischen Ein- und Auslaßventil liegen verschiedene Angaben vor. Das Einlaßventil darf in seiner Größe wegen eines großen Auslaßventiles nicht beeinträchtigt werden. Ricardo empfiehlt, die Größe der Ventile so zu wählen, daß die Gasgeschwindigkeit am Auslaßventil 50% höher ist als die am Einlaß, d. h.

$$F_e = 1{,}5 \cdot F_a.$$

Christian gibt nach Vergleichen an ausgeführten Maschinen an, daß

$$F_e = 1{,}3 \cdot F_a$$

sein soll. Cousins empfiehlt

$$\frac{F_e}{F_a} = 1{,}33 - 1{,}5.$$

Es scheint, daß der Auslaßventilquerschnitt bei selbstsaugenden Motoren bis an die untere der oben angegebenen Grenzen verkleinert werden kann. Bild 27 zeigt die Ergebnisse aus Ricardos Versuchen über dem Verhältnis $\frac{F_e}{F_a}$ aufgetragen.

Mit steigendem Vorverdichtungsdruck bzw. mit größer werdender Gleichdruckhöhe wird dagegen das beste Verhältnis $\frac{F_e}{F_a}$ kleiner werden müssen, um die Ausschubverluste möglichst klein zu halten. Bestätigt wird diese Ansicht besonders beim Betrachten der Niederdruckdiagramme aus den Oestrichschen Versuchen: Während die Auspuffgegendrücke bei geringer Absaugung bereits 30° nach u.T. erreicht werden, ist bei hoher Absaugung der Druckausgleich zwischen Zylinder und Außenluft erst 20° bis 30° vor o.T. vollzogen. Taylor [11] hält eine Vergrößerung des Auslaßquerschnittes bei überladenem Motor für erforderlich.

Trotzdem bleibt auch für die vorverdichteten Motoren die Forderung nach größtmöglichem Einlaßventilquerschnitt bestehen, da hierdurch die vom Lader aufzunehmende Lei-

[5]) Vgl. Bild 28 u. 29.

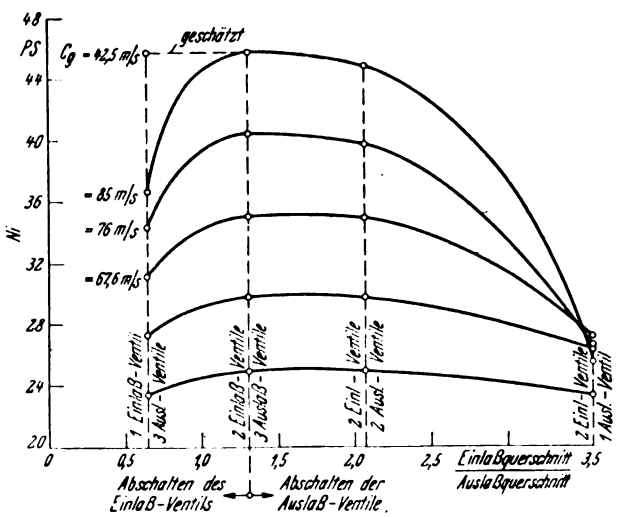


Bild 27. Leistungskurven aus den Versuchen Ricardos zur Bestimmung des günstigsten Verhältnisses $\frac{\text{Einlaßquerschnitt}}{\text{Auslaßquerschnitt}}$ bei selbstsaugendem Motor.
$n = 1900$ U/min; $c_g = 42{,}5$ m/s.
$n = 1700$ U/min; $c_g = 38$ m/s.
$n = 1500$ U/min; $c_g = 33{,}8$ m/s.

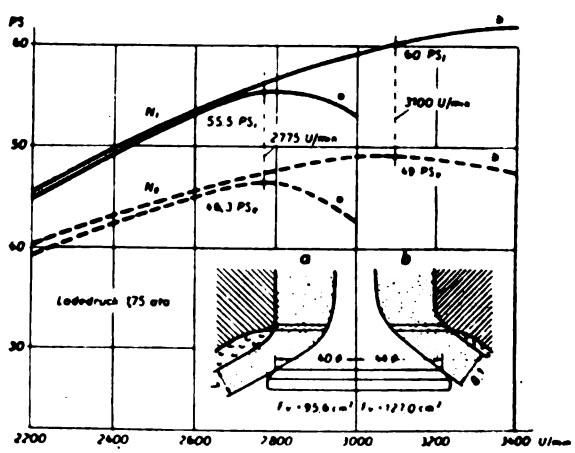


Bild 28. Verbesserungen am Ventil nach Goßlau [24].

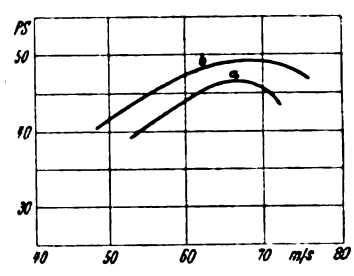


Bild 29. $N_e = f(c_g)$ aus Bild 28.

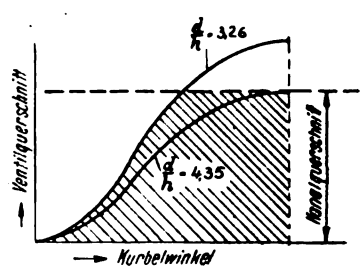


Bild 30.

Digitized by Google

stung und die Temperatur der Ladung geringer werden. Fedden [23] erwähnt, daß die ersten Ladermotoren bei Bristol die engen Einlaßquerschnitte durch Überladung ausgeglichen hatten, s. auch Bild 24.

3. Untersuchung der größtmöglichen Ventile für verschiedene Hubräume.

Für die Untersuchung der räumlichen Grenzen ist die Festlegung der den einzelnen Zylindergrößen zugeordneten Ventilgrößen von Interesse. Bekanntlich ist der halbkugelförmige Verbrennungsraum mit schräghängend angeordneten Ventilen als einziger von allen möglichen Zylinderkopfformen für Höchstleistungen geeignet. Ein solcher Verbrennungsraum hat im Verhältnis zu seinem Inhalt die kleinstmögliche Oberfläche, gestattet wegen seiner einfachen Form und der kurzen Brennwege höhere Verdichtungsverhältnisse und nicht zuletzt bietet er den größten Raum, der für das Einlaß- und Auslaßventil zusammen verfügbar ist.

Im folgenden werden die in einem zweiventiligen Kugelkopf unterzubringenden Ventilgrößen untersucht, und zwar für das Verhältnis

1. $F_e = F_a$, d. h. $d_e = d_a$,
2. $F_e = 1{,}4 \cdot F_a$, wobei unter der Voraussetzung gleichen Ventilhubes für Einlaß und Auslaß, mit 30°-Sitz für Einlaß und 45°-Sitz für Auslaß und mit Formeln (3) und (4), Abschnitt II 1,

$d_e = 1{,}17 \cdot d_a$ wird.

Zum Vergleich ist außerdem der vierventilige Zylinderkopf, wie er häufig bei wassergekühlten Motoren mit zur Zylinderachse parallelen oder paarweise nur schwachgeneigten Ventilen verwendet wird, herangezogen. Desgleichen wird der vierventilige Kopf für luftgekühlte Motoren untersucht, bei dem die Ventile aus Kühlungsgründen paarweise einen großen Winkel zur Zylinderachse bilden.

Bei der Festlegung der Ventildurchmesser ist folgendes zugrunde gelegt worden:

1. Der halbkugelförmige Zylinderkopfraum soll annähernd den gesamten Verdichtungsraum bilden, jedoch so, daß der Kolben nicht überhöht zu werden braucht, um die wärmeaufnehmende Oberfläche des Kolbens möglichst klein zu halten. Das bedeutet, daß die Winkel der Ventilachsen in ihrer Größe begrenzt sind.

2. Der Zylinderkopf darf nicht taschenförmig über den Zylinderdurchmesser hinaus erweitert sein. Lediglich eine Vergrößerung um die Laufbuchsenstärke am Grundkreis der Zylinderkopfkalotte ist zulässig, da bei den luftgekühlten aufgeschraubten und -geschrumpften Zylinderköpfen teils Innenauflage, teils Außenauflage der Laufbüchse verwendet wird.

3. Die Zylinderköpfe bestehen aus Leichtmetall. Für die Ventile sind daher Ventilsitze vorgesehen, die sich in den Abmessungen in den heute üblichen Größen halten. Die Entfernung der Sitze voneinander darf ein gewisses, an ausgeführten Maschinen erprobtes Maß nicht unterschreiten, desgleichen muß zwischen Ventilsitz und Laufbüchse noch genügend Zylinderkopfwerkstoff vorhanden sein.

4. Die Ventile dürfen sich nicht bei größtem Hub berühren, da sonst beim Hängenbleiben eines Ventiles eine Zerstörung nicht nur des Ventiles, sondern des gesamten Zylinderaufbaues unvermeidlich ist.

5. Die Zylinder mit 4 l Hubraum haben nicht die größtmöglichen Ventile erhalten, um nicht durch die großen Durchbrüche der Kanalöffnungen die Festigkeit des Zylinderkopfes zu stark herabzusetzen.

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen wurden die erreichbaren Ventildurchmesser zunächst der Einfachheit halber für gleichgroße Ein- und Auslaßventile bestimmt, und zwar für Hubräume von 0,5 bis 4 l, für Hubverhältnisse $\frac{S}{D} = 0{,}9 - 1{,}3$ und für Verdichtungsverhältnisse $\varepsilon = 5 - 8$. Die erhaltenen Größen sind in Bild 31 und in Zahlentafel 1 zu sehen. Die den Hubräumen zugeordneten Ventildurchmesser für das Verhältnis

$$F_e = 1{,}4 \cdot F_a$$

sind in Zahlentafel 1 enthalten.

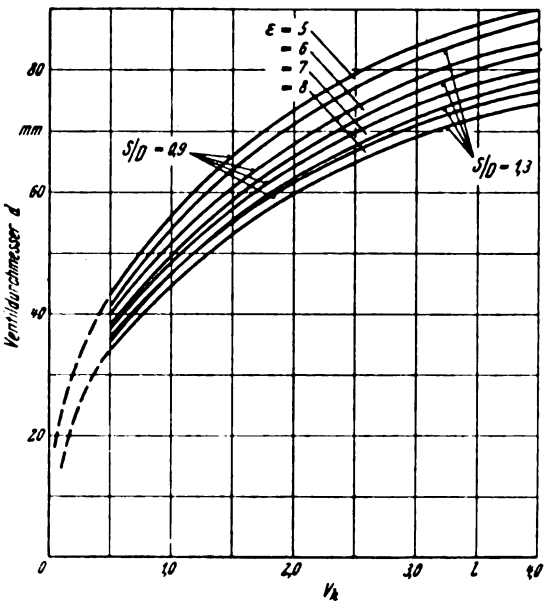


Bild 31. Ventilgrößen für 2ventiligen Kugelkopf. E.- und A.-Ventil gleich groß.

Zahlentafel 1. Ventilgrößen für zweiventiligen Kopf.

Einlaßquerschnitt / Auslaßquerschnitt		1,0				1,4			
V_h	$\frac{S}{d}$ / ε	5	6	7	8	5	6	7	8
0,5	1,3	41,0	38,0	35,5	34,0	44,5	41,0	38,5	36,6
	1,2	41,5	38,5	36,0	34,5	45,0	41,55	39,0	37,2
	1,1	42,0	39,0	36,5	35,0	45,5	42,1	39,6	37,7
	1,0	42,5	39,5	37,0	35,5	46,0	42,7	40,05	38,2
	0,9	43,0	40,0	37,5	36,0	46,5	43,25	40,6	38,8
1,0	1,3	54,0	49,5	46,5	45,0	58,2	53,5	50,5	48,6
	1,2	54,5	50,0	47,0	45,5	58,6	54,0	51,0	49,15
	1,1	55,0	50,5	47,5	46,0	59,3	54,5	51,5	49,7
	1,0	55,5	51,0	48,0	46,5	59,9	55,1	52,05	50,25
	0,9	56,0	51,5	48,5	47,0	60,4	55,6	52,6	50,8
2,0	1,3	71,0	65,5	62,0	59,5	76,7	70,9	67,0	64,3
	1,2	71,5	66,0	62,5	60,0	77,3	71,5	67,5	64,8
	1,1	72,0	66,5	63,0	60,5	77,8	72,0	68,0	65,4
	1,0	72,5	67,0	63,5	61,0	78,4	72,5	68,6	66,0
	0,9	73,0	67,5	64,0	61,5	79,0	73,1	69,2	66,5
3,0	1,3	81,5	76,5	72,0	69,0	88,2	82,5	77,8	74,8
	1,2	82,0	77,0	72,5	69,5	88,8	83,0	78,3	75,4
	1,1	82,5	77,5	73,0	70,0	89,3	83,6	78,9	75,9
	1,0	83,0	78,0	73,5	70,5	89,9	84,1	79,5	76,5
	0,9	83,5	78,5	74,0	71,0	90,4	84,7	80,0	77,0
4,0	1,3	88,0	82,5	78,0	74,5	95,1	89,2	84,3	80,6
	1,2	88,5	83,0	78,5	75,0	95,6	89,7	84,8	81,2
	1,1	89,0	83,5	79,0	75,5	96,2	90,2	85,4	81,75
	1,0	89,5	84,0	79,5	76,0	96,7	90,8	86,0	82,25
	0,9	90,0	84,5	80,0	76,5	97,2	91,3	86,5	82,7

Es sei hierbei noch besonders darauf hingewiesen, daß die Untersuchung der räumlichen Grenzen, also hier der Ventildurchmesser, ohne Rücksicht auf die thermischen Grenzen vorgenommen wurde, denn nach dem heutigen Stande der Erkenntnisse sind für Ventile, wie sie schon vom 2,8-l-Zylinder ab erreichbar sind, noch erhebliche Entwicklungsarbeiten zu leisten.

4. Ventilhübe.

Betrachtet man eine Reihe von ausgeführten Motoren, so findet man, daß der Ventilhub in den meisten Fällen möglichst so groß gewählt wurde, daß der Ventilquerschnitt ungefähr dem Durchflußquerschnitt in Höhe des Ventil-

Digitized by Google

sitzes gleich ist. Bei der Annahme, daß der Schaftdurchmesser des Ventiles

$$d_s = 0{,}35 \cdot d_{\text{Ventil}}$$

in Ventilsitzhöhe ist, ergibt sich unter Verwendung der Formel für den 30°-Sitz (Abschnitt II 1, Formel (3)) das Verhältnis zu

$$\frac{d}{h} = 4{,}35. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Bei dieser Festlegung ist die Ventilfläche immer noch der hauptsächlichste Durchgangswiderstand, zumal jene nur in einem Augenblick ihren größten Wert erreicht. Es ist deswegen noch sinnvoll, den Hub weiter zu vergrößern und einen mittleren Hub einzuführen, für den dann die freie Ventildurchgangsfläche gleich dem freien Querschnitt in Höhe des Ventilsitzes ist, so daß wenigstens für einen Teil des Öffnungswinkels der volle Durchgangsquerschnitt erhalten bleibt.

Als mittlerer Hub sei derjenige gewählt, der für den Ansaughub von o.T. bis u.T. — also über 180° — sich aus dem Erhebungsdiagramm ergibt; bei einer Anzahl untersuchter Motoren war bei langsamlaufenden mit kleinerem Gesämtöffnungswinkel

$$h_m = 0{,}75 \cdot h,$$

bei schnellaufenden

$$h_m = \text{bis } 0{,}79 \cdot h.$$

Für unsere Untersuchung sei im Mittel angenommen

$$h_m = 0{,}75 \cdot h. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Damit ist also

$$\frac{d}{h_m} = 4{,}35; \text{ und } \frac{d}{h} = \frac{d}{h_m} \cdot 0{,}75 = 3{,}26 \quad \ldots \quad (11)$$

Mit diesen beiden Verhältnissen $\frac{d}{h}$ und mit den Ventildurchmessern sind die Öffnungsquerschnitte gegeben. Aus diesen lassen sich bei einer gegebenen mittleren Strömungsgeschwindigkeit nach der Kontinuitätsgleichung — s. Abschnitt II 1 (1) die erreichbaren Drehzahlen berechnen.

IV. Erreichbare Motordrehzahlen

(durch räumliche Grenzen gegeben).

Führt man in die Gleichung

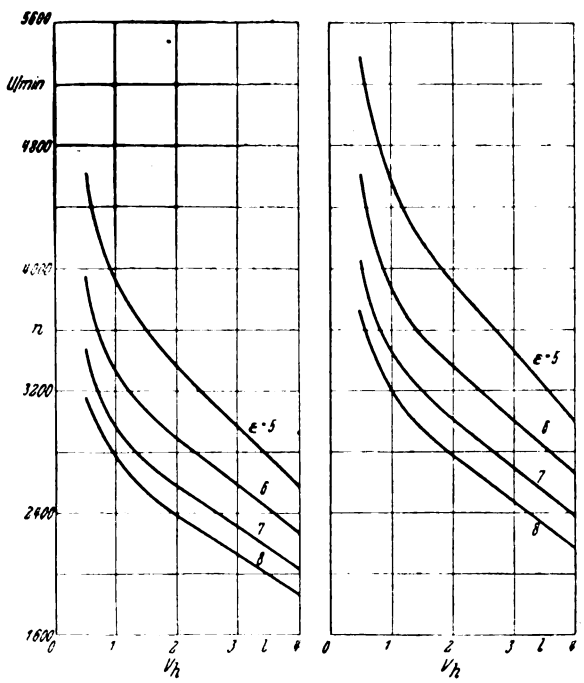


Bild 32. Motordrehzahlen für $c_g = 60$ m/s und $h = \frac{d_e}{4{,}35}$; $S/D = 1{,}1$.
a gleichgroße Ein- und Auslaßventile.
b $\frac{\text{Einlaßventilquerschnitt}}{\text{Auslaßventilquerschnitt}} = 1{,}4$.

Zahlentafel 2a. Drehzahlen mit $c_g = 60$ m/s u. Federanstrengung $n \cdot h = 3100$.

V_h	ε	5	6	7	8	5	6	7	8
	S/D	$E/A = 1{,}0$				$E/A = 1{,}4$			
0,5	1,3	3790	3640	3520	3430	3940	3780	3664	3575
	1,2	3810	3665	3545	3460	3960	2810	3690	3600
	1,1	3830	3690	3575	3485	3980	3830	3720	3630
	1,0	3860	3720	3600	3520	4000	3860	3740	3650
	0,9	3880	3750	3630	3540	4020	3890	3770	3680
1,0	1,3	3070	2950	2860	2800	3190	3060	2970	2910
	1,2	3080	2970	2870	2810	3200	3070	2980	2930
	1,1	3090	2980	2890	2830	3220	3080	3000	2940
	1,0	3100	3000	2900	2850	3230	3100	3020	2960
	0,9	3120	3010	2920	2860	3250	3120	3030	2980
2,0	1,3	2480	2400	2330	2290	2590	2485	2420	2370
	1,2	2490	2410	2340	2300	2600	2500	2430	2380
	1,1	2500	2420	2350	2305	2610	2510	2440	2390
	1,0	2510	2430	2360	2310	2620	2520	2450	2400
	0,9	2520	2440	2370	2320	2630	2530	2460	2410
3,0	1,3	2180	2100	2040	2005	2265	2190	2120	2080
	1,2	2185	2110	2050	2010	2270	2200	2130	2090
	1,1	2190	2120	2060	2020	2280	2205	2140	2100
	1,0	2095	2130	2065	2025	2285	2210	2150	2110
	0,9	2200	2140	2070	2030	2290	2220	2160	2120
4,0	1,3	1960	1900	1845	1800	2035	1970	1910	1870
	1,2	1965	1905	1850	1810	2040	1975	1920	1880
	1,1	1970	1910	1855	1815	2045	1980	1930	1890
	1,0	1975	1915	1860	1820	2050	1985	1935	1895
	0,9	1980	1920	1865	1830	2060	1990	1940	1900

Zahlentafel 2b. Drehzahlen mit $c_g = 60$ m/s u. Ventilhub $h = d_e/4{,}35$.

V_h	ε	5	6	7	8	5	6	7	8
	S/D	$E/A = 1{,}0$				$E/A = 1{,}4$			
0,5	1,3	4390	3760	3300	2990	5120	4390	3850	3490
	1,2	4500	3860	3390	3080	5250	4500	3960	3590
	1,1	4610	3960	3480	3170	5380	4620	4060	3700
	1,0	4720	4060	3580	3260	5500	4730	4175	3800
	0,9	4830	4160	3680	3360	5640	4850	4300	3920
1,0	1,3	3780	3190	2830	2640	4405	3720	3300	3080
	1,2	3850	3250	2900	2695	4500	3790	3380	3140
	1,1	3920	3320	2960	2760	4570	3870	3450	3210
	1,0	3990	3380	3020	2820	4650	3940	3520	3280
	0,9	4070	3450	3080	2870	4750	4020	3590	3350
2,0	1,3	3280	2800	2500	2300	3820	3260	2920	2680
	1,2	3320	2840	2540	2340	3870	3310	2960	2730
	1,1	3370	2880	2580	2380	3930	3360	3010	2780
	1,0	3420	2930	2620	2420	3990	3410	3060	2820
	0,9	3460	2970	2660	2460	4040	3460	3100	2870
3,0	1,3	2890	2520	2250	2070	3360	2940	2620	2420
	1,2	2920	2560	2280	2100	3400	2980	2660	2450
	1,1	2960	2590	2310	2130	3450	3020	2700	2480
	1,0	2990	2630	2340	2160	3490	3060	2730	2520
	0,9	3030	2660	2370	2190	3530	3100	2770	2560
4,0	1,3	2520	2210	1980	1810	2940	2580	2310	2110
	1,2	2550	2240	2005	1830	2970	2610	2340	2140
	1,1	2575	2260	2030	1855	3000	2640	2370	2160
	1,0	2600	2290	2050	1880	3040	2680	2390	2190
	0,9	2630	2320	2080	1905	3070	2700	2430	2220

$$\frac{V_h \cdot n}{30} = c_g \cdot f$$

die auf S. 256 festgelegte mittlere Gasgeschwindigkeit

$$c_g = 60 \text{ m/s und}$$

$$\frac{d}{h} = 4{,}35$$

ein, so erhält man

$$n = 130 \cdot \frac{d^2}{V_h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hierbei ist d in cm und V_h in lit. einzusetzen.

Digitized by Google

Hieraus sind die Grenzdrehzahlen für Einlaß/Auslaß = 1[6]) und Einlaß/Auslaß = 1,4 berechnet und in Abb. 32 für $\frac{S}{D} = 1{,}1$ und in Zahlentafel 2b für $\frac{S}{D} = 0{,}9 - 1{,}3$ dargestellt. Man erkennt, daß mit steigendem ε die erreichbaren Drehzahlen erheblich fallen, ebenso mit größerem $\frac{S}{D}$. Bild 33 enthält die aus den Drehzahlen sich ergebenden Kolbengeschwindigkeiten. Auffallend ist hierbei, daß die Maxima aller Kurven zwischen Hubräumen von 2 bis 3 l Inhalt liegen.

Die absoluten höchsten Motordrehzahlen ergeben sich bei weiterer Vergrößerung des Ventilhubes entsprechend den im Abschnitt III 4 angegebenen Werten

$$\frac{d}{h} = 3{,}26.$$

Da hierbei ein sehr fülliges Querschnittsdiagramm erreicht wird, Bild 30, das dem in Bild 9 gezeigten sehr ähnlich ist, wird auf Grund der Versuchsergebnisse am DVL-Prüfmotor, Bild 18, eine zulässige Gasgeschwindigkeit von 70 m/s angenommen und mit h_m als dem höchsten Ventilhub gerechnet. Man erhält damit

$$n = 152 \frac{d^2}{V_h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

In Bild 34 sind die Höchstdrehzahlen aufgetragen. Die Abhängigkeit von $\frac{S}{D}$ und ε, sowie der Verlauf der Kolbengeschwindigkeiten entsprechen genau der vorangegangenen Entwicklung. In gleicher Weise wurden die Drehzahlen für vierventiligen Zylinder mit parallelen Ventilen und mit stark geneigten Ventilen (Bristol-Bauart) ermittelt. Die in Zahlentafel 3 enthaltenen Werte für parallele Ventile sind in Bild 35 dargestellt. Die Drehzahlen für die Bristol-Bauart liegen um 17% höher. Der Einfluß von ε entfällt hierbei wegen der besonderen Brennraumform der vierventiligen Zylinderköpfe. Auch ergeben sich für alle $\frac{S}{D}$ einer Zylindergröße dieselben Kolbengeschwindigkeiten. Ihr Verlauf weist dieselbe Charakteristik wie die der zweiventiligen Zylinder auf.

Zusammenfassend kann über die räumlichen Grenzen folgendes gesagt werden:

1. Die Unterbringung der erforderlichen Ein- und Ausströmkanäle bereitet keine Schwierigkeiten. Es ist nicht zu empfehlen, zugunsten der Bauhöhe die Kanäle mit scharfen Umlenkungen zu versehen, da sonst das Ventil nur an einem geringen Teil des Umfanges beaufschlagt wird. Die Versuche zur Ermittlung der günstigsten Kanalform stehen noch aus.

2. Die größtmöglichen Ventildurchmesser sind durch die Baudaten bzw. die Kopfform des Motors gegeben. Die bisherigen umfangreichen Versuche mit stationärer Strömung genügen nicht zur Klärung der günstigsten Ventilform am Motor. Insbesondere müßte bei Versuchen mit stoßweiser Strömung der Gesichtspunkt der Herstellungs- und namentlich der Unterhaltungskosten miteinbezogen werden (Formgebung an den Sitzflächen).

3. Der Einlaßquerschnitt soll so groß wie möglich sein. Nach bisherigen Erkenntnissen kann

$$F_e = 1{,}4 \cdot F_a$$

sein. Bei überladenen und Höhenmotoren muß wahrscheinlich der Auslaßquerschnitt vergrößert werden. Versuche über das günstigste Verhältnis $\frac{F_e}{F_a}$ bei verschiedenen Ladedrücken stehen noch aus.

4. Die Untersuchung der durch die räumlichen Grenzen — ohne Berücksichtigung der thermischen und mechanischen — erreichbaren Drehzahlen zeigt, daß der zweiventilige Kugelkopf allen anderen Bauarten weitaus überlegen ist, Bild 36. Seine Grenzdrehzahlen liegen weit über denen des vierventiligen und bis zu einem Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 7{,}5$ noch über dem vierventiligen Bristol-Kopf.

5. Die zu den Drehzahlen gehörenden Kolbengeschwindigkeiten liegen zum größten Teil über den heute in ausgeführten Motoren gebräuchlichen.

Hubräume zwischen 2 bis 3 l Inhalt erreichen die größten Kolbengeschwindigkeiten. Bei schnellaufenden Motoren mit ihren kleineren Hubräumen lassen sich demnach Ein- und Auslaßventile verhältnismäßig schwerer unterbringen, denn bestimmte Maße, z. B. Abstand der angehobenen Ventile voneinander, der Abstand der Ventilsitze, die Maße der Ventilsitze selbst und der Sitzbreiten dürfen zum Teil aus Werkstattgründen und wegen der erforderlichen Herstellungstoleranzen nicht unterschritten werden. Bei Zylindern über 3 l Inhalt sind die kleineren Kolbengeschwindigkeiten durch die Festigkeit des Zylinderkopfes bedingt, Punkt 5, Abschnitt III 3. Würde man statt der flachen Kolbenböden gewölbte verwenden, so würden sich die erreichbaren Drehzahlen für die höheren ε denen für $\varepsilon = 5$ nähern.

[6]) Ungeachtet der im Abschnitt III 3 vertretenen Ansicht wurde auch für Einlaß/Auslaß = 1 c_g = 60 m/s angenommen, um einen allgemein gültigen Vergleich zu haben.

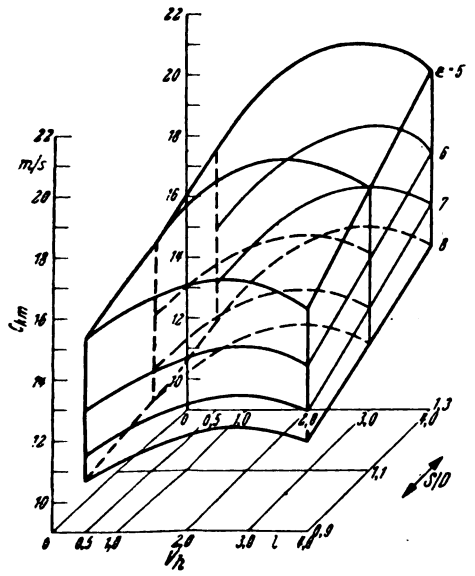


Bild 33. Kolbengeschwindigkeiten zu den Motordrehzahlen in Bild 32. c_g = 60 m/s; $h = \frac{d_e}{4{,}35}$; $\frac{\text{Einlaßquerschnitt}}{\text{Auslaßquerschnitt}} = 1{,}4$.

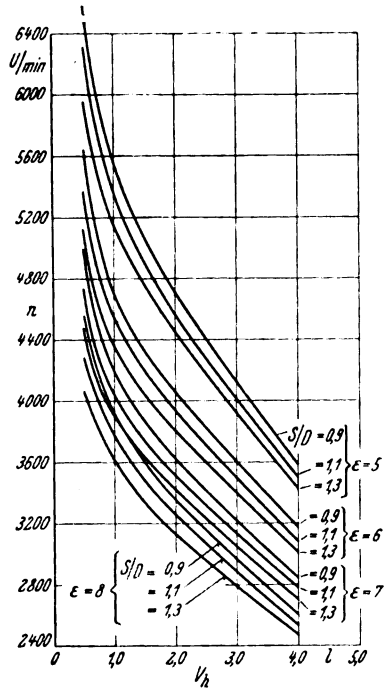


Bild 34. Durch räumliche Grenzen gegebene Höchstdrehzahlen für den 2ventiligen Zylinderkopf.

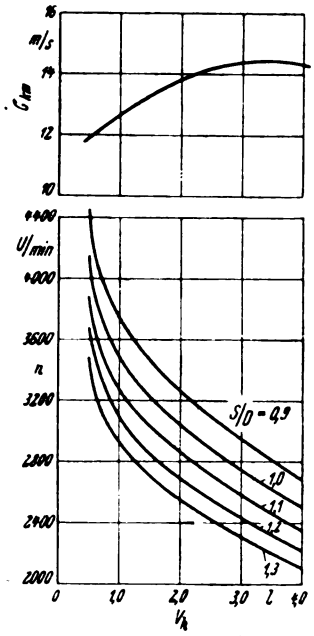


Bild 35. Durch räumliche Grenzen gegebene Höchstdrehzahlen für 4 ventiligen Zylinderkopf mit parallelen Ventilen.

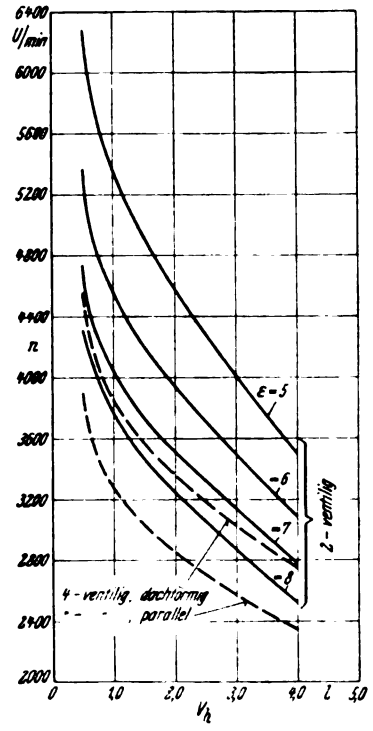


Bild 36. Durch räumliche Grenzen gegebene Höchstdrehzahlen für 2- und 4 ventiligen Kopf mit $S/D = 1{,}1$.

V. Mechanische Grenzen der Ventilsteuerung.

1. Die Ventilfeder.

Ausgehend von den Beanspruchungsarten der Feder und ihren Zusammenhängen wird im folgenden eine direkte Beziehung zwischen Motordrehzahl und Ventilhub entwickelt. Die Gleichung wird zur Bestimmung der den Zylindergrößen zugeordneten Grenzdrehzahlen benutzt. Anschließend werden die Grenzen für den von Hußmann (DVL) vorgeschlagenen Nocken gegeben.

a) Allgemeines.

Maßgebend für die Dauerhaltbarkeit der Ventilfeder sind folgende drei Punkte:

1. die höchste Beanspruchung des Federdrahtes K_{d2},
2. der Unterschied zwischen den Beanspruchungen bei geschlossenem und geöffnetem Ventil, der Lastbereich,
3. die durch Schwingungen der Feder bedingte Erhöhung des Lastbereiches.

Zu 1. Die höchste auftretende Beanspruchung des Federdrahtes K_{d2} darf zuzüglich einer bestimmten Sicherheit die Dauerfestigkeit des Drahtes nicht überschreiten. Diese Sicherheit ist namentlich bedingt

a) durch die nicht genau bestimmbaren Erhöhungen des Lastbereiches, die durch Federschwingungen infolge möglicher Spieländerungen, großer Elastizitäten usw. (s. Abschnitt V 1 d — Hußmann-Nocken) auftreten, und

b) durch die noch heute nicht überwundene Ungenauigkeit in der Federherstellung (abgesehen von den Eigenschaften des fertigen Drahtes, s. Abschnitt VIII): Einhalten der verlangten Steigung, Belastungstoleranzen und besonders Ausbilden der Federn am Beginn der ersten federnden Windung, wo bekanntlich die höchsten Beanspruchungen auftreten.

Unter Berücksichtigung des Röver-Beiwertes sollte eine Feder nicht über 5000 kg/cm² beansprucht werden, zumal mit steigender Mittelspannung der zulässige Lastbereich abnimmt, Bild 38b. Es bereitet jedenfalls keine Schwierigkeit, bei statischer Belastung für jede erforderliche Kraft die richtige Feder zu berechnen. Man muß jedoch bestrebt sein — schon im Interesse einer baulich bequem unterzubringenden Feder — mit allen Mitteln die von ihr aufzunehmenden Massenkräfte tunlichst zu verringern. Wäre nur dieser eine Punkt zu berücksichtigen, so könnte man bereits beim Nockenentwurf die erforderlichen Maßnahmen treffen. Bild 37a u. b zeigen die bekannten Mittel, bei gegebenem Öffnungswinkel und Mindesthub die Beschleunigung herabzusetzen. Die Erhebungskurven I mit den entsprechenden Beschleunigungen sind den Kurven II vorzuziehen.

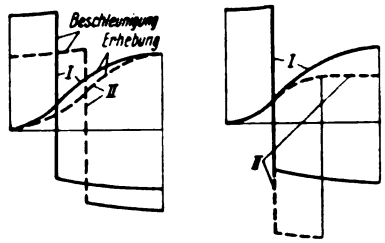


Bild 37a u. b. Einfluß der Ventilerhebungskurve auf die größte erforderliche Federkraft.

Zu 2. Der Lastbereich U_{kd}. Er sollte so klein wie möglich sein, jedoch ergeben sich für ihn, wie aus dem folgenden Abschnitt zu ersehen ist, untere und obere Grenzen. Bild 38a zeigt die heute in deutschen Flugmotoren üblichen Lastwechsel ohne Berücksichtigung des Röver-Beiwertes. Bild 38b enthält die von verschiedenen ausländischen Forschern angegebenen zulässigen Lastbereiche für Ventilfedern. Der empfohlene Lastbereich von Nixon [25] ist außerdem in Bild 38a eingezeichnet. Er deckt sich sehr gut mit den in Deutschland am meisten angewendeten Lastbereichen von 2000 bis 2400 kg/cm².

Zu 3. Die unter 1. und 2. besprochene statische Belastung der Feder läßt sich jederzeit beherrschen und bildet keine Grenze für die Drehzahl des Motors. Der dritte Punkt, die unerwünschte Erhöhung des statischen Lastbereiches durch die auftretenden Federschwingungen, ist bis heute ein unüberwindliches Hindernis zur erheblichen Erhöhung der Drehzahlen, namentlich der Dauerdrehzahlen der Flugmotoren, gewesen. Es wird daher kurz auf das Wesen und die Zusammenhänge der Schwingungen eingegangen, um daraus die Grenzen für die bis heute üblichen Nocken und Federn zu finden.

Die Feder und der Nocken bilden ein System, in dem beide zusammen betrachtet werden müssen. Der Feder wird durch den Nocken ein bestimmtes Bewegungsgesetz aufgezwungen. Diese Ventilerhebungskurve läßt sich entsprechend einer Fourierschen Reihe durch einzelne Harmonische mit einem bestimmten Scheitelwert und einer bestimmten Phase darstellen. Jede dieser Harmonischen kann die Feder, sobald darin die Eigenschwingungszahl ein ganzzahliges Vielfaches der Nockenwellendrehzahl ist, zu Schwingungen erregen, die bei kleiner Dämpfung oder großem Scheitelwert sich zu erheblichen zusätzlichen Durchbiegungen der Feder gegenüber der statischen Zusammendrückung aufschaukeln können. Auf diese Weise werden Erhöhungen des statischen Lastbereiches bis auf das Doppelte und mehr hervorgerufen. Die Gesamtbeanspruchung der Feder zeigt Bild 39.

b) Die »Federanstrengung«.

Bei Betrachtung der bekannten Formel für die Eigenschwingungszahl der Feder

$$N = 18{,}7 \cdot 10^5 \cdot \frac{d}{i \cdot D^2} \text{ min}^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (14$$

und für die Federung

$$R = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot i \cdot D^3} \text{ kg/cm} \quad \ldots\ldots \quad (15$$

erkennt man, daß die Bedingungen einer möglichst weichen Feder, d. h. eines möglichst kleinen U_{kd} und einer möglichst hohen Eigenschwingungszahl einander entgegenstehen.

Digitized by Google

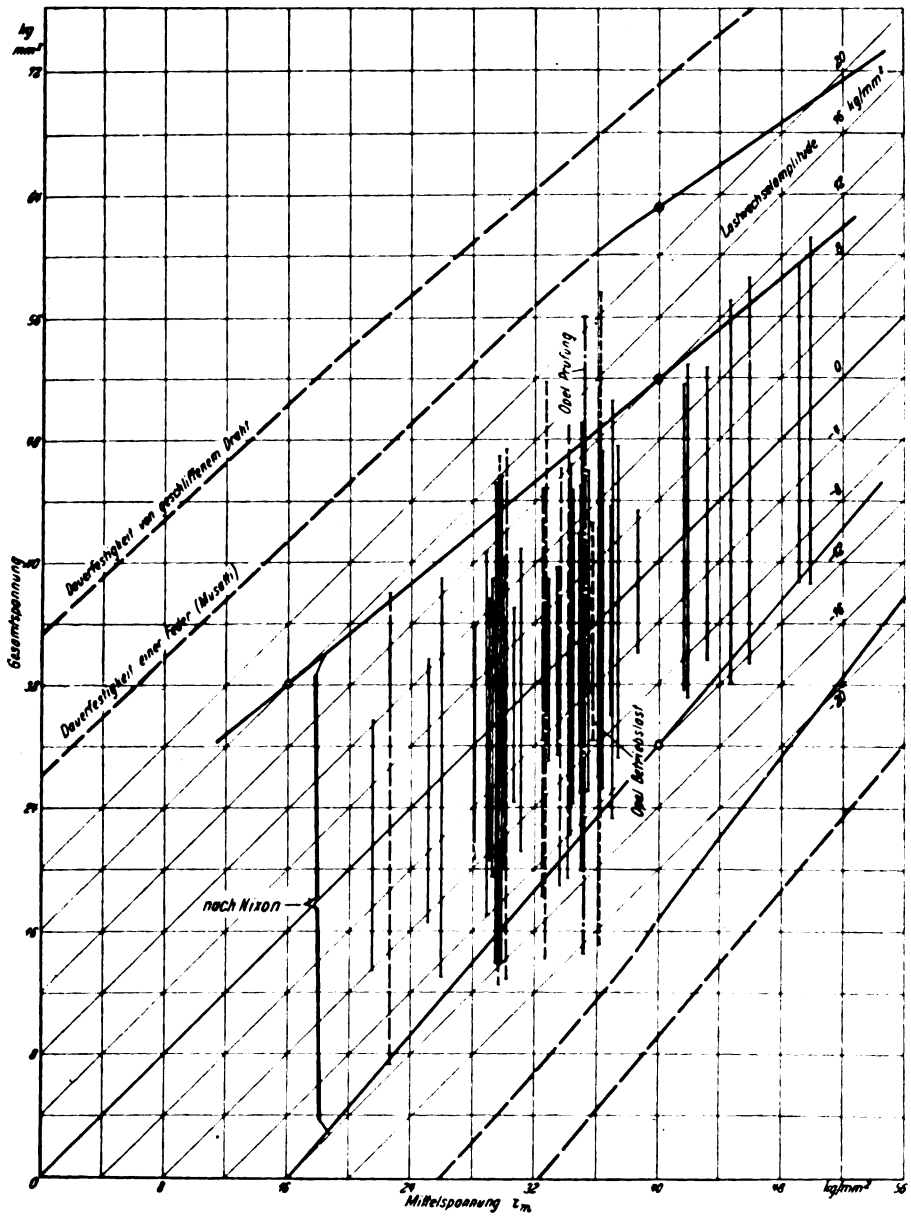


Bild 38a. Lastbereiche einiger deutscher Flugmotoren nach Hußmann, Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung. Eingezeichnet sind die von Nixon [25] empfohlenen Grenzwerte des Lastbereiches.

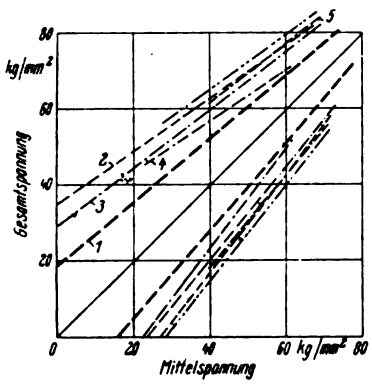


Bild 38b. Einige bisher veröffentlichte Lastgrenzen für Ventilfedern.
1. Empfohlene Grenzwerte von Nixon [25].
2. Äußerste Ermüdungsgrenzen nach Nixon [25].
3. Grenzwerte nach Nelson, USA.
4 u. 5. Dauerfestigkeiten zweier Federn nach Musatti [42].

Der Lastbereich ist

$$U_{kd} = \frac{G}{\pi} \cdot \frac{d}{D^2 \cdot i} \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

G = Gleitmodul = $8{,}1 \cdot 10^5$ kg/cm²,
d = Drahtdurchmesser cm,
D = Windungsdurchmesser cm,
i = Windungszahl,
h = Ventilhub cm.

Führt man in diese Formel die Eigenschwingungszahl ein, so erhält man:

$$U_{kd} = \frac{N \cdot h}{7{,}25} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Hierin ist U_{kd}, wie bereits unter a dargetan, in seiner Größe festgelegt und soll 2400 kg/cm² nicht überschreiten. Dieser Wert wird für die weitere Behandlung der Formel eingesetzt. Die Abhängigkeit zwischen N und h ist in Bild 41 für $U_{kd} = 2200$ und 2400 kg/cm² kurvenmäßig dargestellt. Um nun einen möglichst großen Hub h zu erhalten, müßte N klein gewählt werden. Bei Betrachtung der analysierten Ventilerhebungskurven, Bild 40, zeigt sich, daß die Scheitelwerte der Harmonischen im ganzen gesehen mit der Ordnungszahl der Harmonischen abnehmen, wenn auch die Abnahme wellenförmig vonstatten geht. Umfangreiche eigene Erfahrungen, sowie Erfahrungen an anderer Stelle [25] haben gezeigt, daß im allgemeinen bei obengenanntem Lastbereich die Scheitelwerte oberhalb der 10. Harmonischen eine Feder zu entwerfen gestatten, die an Dauerhaltbarkeit nichts zu wünschen übrig läßt. Die Schwingungen

Digitized by Google

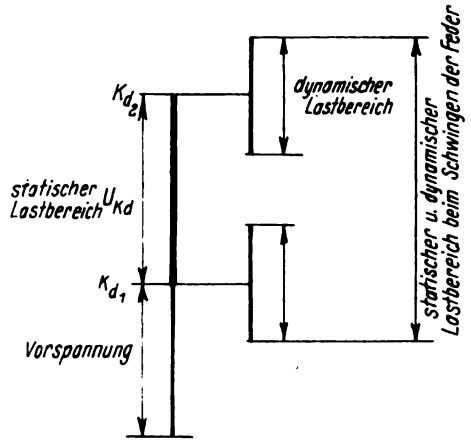


Bild 39. Beanspruchung einer schwingenden Ventilfeder.

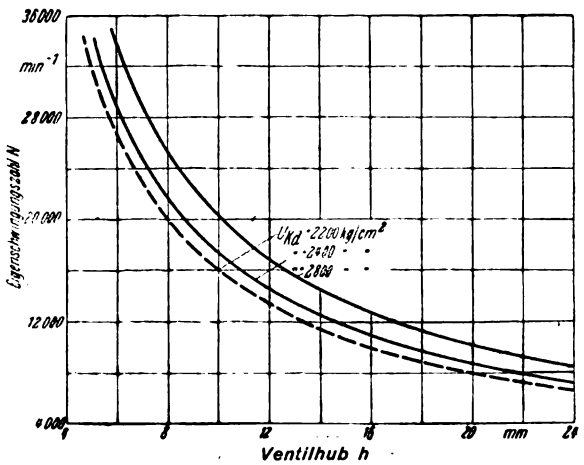


Bild 41. Abhängigkeit zwischen Ventilhub und Eigenschwingungszahl der Ventilfeder für U_{kd} = 2200 kg/cm², = 2400 kg/cm², = 2800 kg/cm².

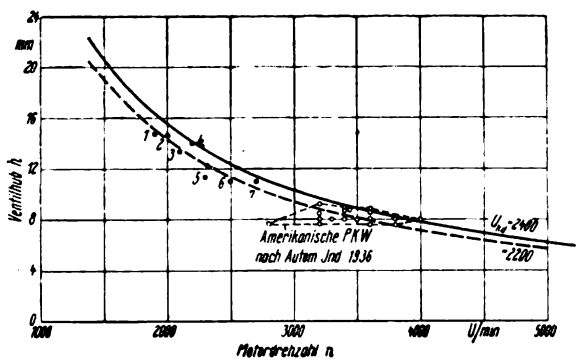


Bild 42. Federanstrengung $n \cdot h = 3100$.
1. Hornet.
2. Armstrong.
3. Wright-Cyclone.
4. As 10 C.
5. Walter Bora.
6. Menasco B 6 S.
7. Rolls Royce.

zweiten und höheren Grades fallen aus dieser Betrachtung heraus, da sie nur sehr kleine Ausschläge ergeben [28, 29], die fast durchweg durch die Eigendämpfung der Ventilfeder aufgenommen werden.

Wählt man die Eigenschwingungszahl

$$N = 5{,}6 \cdot n \quad (n = \text{Motordrehzahl}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

so liegt man zwischen der 11. und 12. Harmonischen. Durch Vereinigung dieser mit der Formel (17) erhält man die grundlegende Gleichung:

$$\boxed{n \cdot h = 3100} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Bild 42 stellt die Abhängigkeit zwischen n und h graphisch dar. Das Produkt $n \cdot h$ = constant, wobei die Konstante

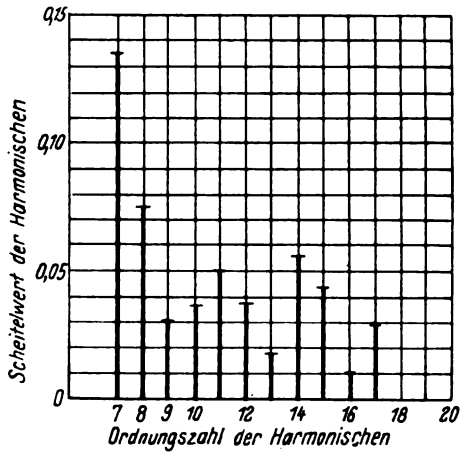


Bild 40a. Harmonische Analyse der in Bild 47 gestrichelt gezeichneten Erhebungskurve.

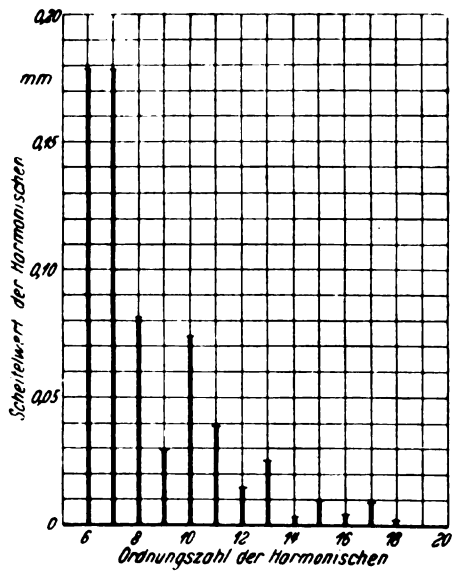


Bild 40b. Harmonische Analyse einer Erhebungskurve nach Hußmann.

durch irgendeine Kombination von Nocken und Feder gegeben ist, ist eine außerordentliche bequeme und übersichtliche Formulierung der von der Feder verlangten Leistung. Die Gleichung besagt aber nicht, daß zu konstant = 3100 nun unbedingt $U_{kd} = 2400$ und $N = 5{,}6\,n$ gehören, vielmehr ist man in der Wahl der Größen in gewissem Grade freizügig; aber immer gehört zu einem bestimmten U_{kd} ein bestimmtes Vielfaches der Motordrehzahl als Eigenschwingungszahl. Z. B. würde zu $U_{kd} = 2700$ ein $N = 6{,}32\,n$ gehören. Das Verfahren, das bisher angewendet wurde, um gefährliche Schwingungsausschläge der Ventilfeder zu umgehen, war folgendes: Man erhöht die Eigenschwingungszahl der Feder und damit ihren Lastbereich, so daß scheinbar die Beanspruchung größer wird. In Wirklichkeit sind aber jetzt die Schwingungsausschläge durch die allgemeine Abnahme der Amplituden mit der Ordnungszahl kleiner, so daß die geringe Schwingungsbeanspruchung der Feder den höheren Lastbereich zuläßt. Dieses Verfahren führt immer zum Ziele, solange die obige Beziehung $n \cdot h = 3100$ eingehalten wird. In diesem Sinne sind auch die in die Abb. 42 eingetragenen Werte einiger ausgeführter bewährter Flugmotoren und einiger amerikanischer Wagenmotoren zu verstehen. Sämtliche Punkte liegen sehr nahe an dieser Kurve im unteren sicheren Anstrengungsbereich. Dort, wo die Kurve überschritten wurde, haben sich in der Regel die größten Schwierigkeiten durch Federbrüche ergeben. Die Gleichung besagt also, daß zu bestimmten erregenden Kräften ein ganz bestimmter statischer Lastbereich gewählt wird, so daß statischer plus dyna-

Digitized by Google

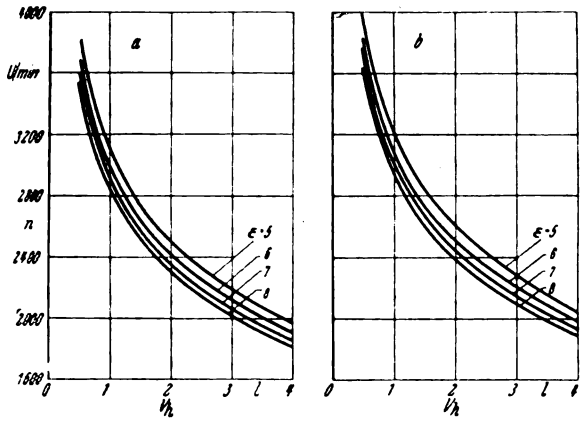


Bild 43. Motordrehzahlen für eine mittlere Gasgeschw. $c_g = 60$ m/s und eine Ventilfederanstrengung $n \cdot h = 3100$. $S/D = 1{,}1$.
a Gleich große Ein- und Auslaßventile.
b $\frac{\text{Einlaßventilfläche}}{\text{Auslaßventilfläche}} = 1{,}4$.

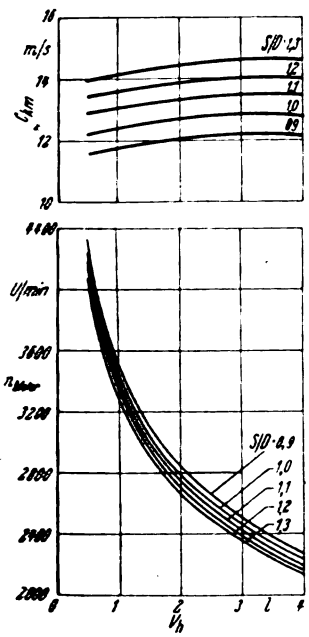


Bild 45. Motordrehzahlen des Zylinderkopfes mit 4 parallelen Ventilen. Federanstrengung $n \cdot h = 3100$. $c_g = 60$ m/s.

mischer Lastbereich in den Grenzen der Dauerhaltbarkeit der Feder liegen. $n \cdot h$ sei fortan als »Federanstrengung« bezeichnet.

c) Bisher erreichbare Grenzdrehzahlen.

Unter Benutzung der drei Gleichungen

$$\frac{V_h \cdot n}{30} = c_g \cdot f$$

$$n \cdot h = 3100$$

$$c_g = 60 \text{ m/s}$$

erhält man die Beziehung

$$n = 1320 \cdot \sqrt{\frac{d}{V_h}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

d = Ventildurchmesser in cm,
V_h = in l.

Sie stellt also Drehzahlen dar, bei denen die mittlere Gasgeschwindigkeit 60 m/s beträgt und die Ventilfeder mit $N = 5{,}6 \cdot n$ einen Lastbereich von 2400 kg/cm² aufweist. Bild 43 (Zahlentafel 2a) mit den Ventilgrößen nach Zahlentafel 1 zeigt die berechneten Drehzahlen für Einlaß/Auslaß = 1 und Einlaß/Auslaß = 1,4; Bild 44 die zu Einlaß/Auslaß = 1,4 gehörigen Kolbengeschwindigkeiten.

In gleicher Weise wurden für den vierventiligen Kopf (parallele und geneigte Ventile) die durch die Feder gegebenen Grenzdrehzahlen ermittelt, Bild 45, Zahlentafel 3.

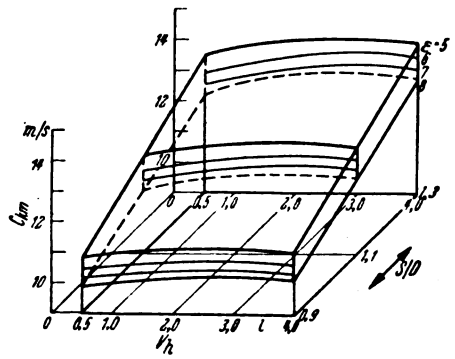


Bild 44. Kolbengeschwindigkeiten zu den Motordrehzahlen in Bild 43. $c_g = 60$ m/s.
Federanstrengung $n \cdot h = 3100$.
$\frac{\text{Einlaßventilfläche}}{\text{Auslaßventilfläche}} = 1{,}4$.

Zahlentafel 3. Drehzahlen des vierventiligen Kopfes.

V_h	S/D	Ventile parallel zur Zylinderachse: Höchstdrehzahlen, durch räumliche Grenzen gegeben	Ventile parallel zur Zylinderachse: Höchste Dauerdrehzahlen, durch die Federgrenze gegeben		Ventile paarweise gegen die Zylinderachse geneigt (Bristol-Bauart): Höchstdrehzahlen, durch räumliche Grenzen gegeben	Ventile paarweise gegen die Zylinderachse geneigt (Bristol-Bauart): Höchste Dauerdrehzahlen, durch die Federgrenze gegeben	
		$c_g = 70$	$c_g = 60$		$c_g = 70$	$c_g = 60$	
		$h = d_e/4{,}35$	$n \cdot h =$		$h = d_e/4{,}35$	$n \cdot h =$	
			3100	4720		3100	4720
0,5	1,3	3490	4090	5060	4020	4250	5250
	1,2	3680	4140	5120	4250	4300	5300
	1,1	3900	4200	5180	4500	4360	5380
	1,0	4150	4260	5260	4800	4440	5480
	0,9	4460	4340	5360	5110	4500	5550
1,0	1,3	2930	3290	4070	3400	3420	4220
	1,2	3090	3340	4120	3610	3470	4280
	1,1	3270	3390	4190	3810	3520	4350
	1,0	3490	3440	4260	4050	3540	4400
	0,9	3740	3500	4330	4350	3640	4490
2,0	1,3	2550	2670	3300	2950	2770	3420
	1,2	2690	2710	3350	3100	2810	3470
	1,1	2860	2750	3400	3280	2850	3520
	1,0	3040	2790	3450	3510	2900	3580
	0,9	3260	2840	3510	3770	2950	3650
3,0	1,3	2310	2360	2910	2690	2450	3020
	1,2	2440	2390	2955	2820	2480	3060
	1,1	2580	2430	3000	3000	2520	3110
	1,0	2750	2465	3050	3200	2560	3160
	0,9	2960	2510	3100	3430	2600	3210
4,0	1,3	2100	2140	2650	2440	2220	2740
	1,2	2220	2170	2690	2570	2250	2780
	1,1	2350	2220	2730	2740	2290	2830
	1,0	2500	2240	2770	2910	2320	2860
	0,9	2680	2280	2820	3130	2370	2920

Bild 46 zeigt den Vergleich des zwei- und vierventiligen Kopfes für $S/D = 1{,}1$. Hält man Bild 36 dagegen, so sieht man, daß der zweiventilige Zylinderkopf jetzt infolge des Federeinflusses geringere Drehzahlen zuläßt als der vierventilige Kopf, dessen kleine Ventilhübe eine bedeutend bessere Ausnutzung der heutigen Federgrenzen gestatten. Im übrigen ist zu erkennen, daß — im Gegensatz zur Untersuchung der räumlichen Grenzen — die Abhängigkeit der Drehzahl von S/D verschwindend klein und der Einfluß von ε in bedeutend geringerem Maße vorhanden ist. Beim Betrachten der mittleren Kolbengeschwindigkeiten fällt der flache Verlauf der Kurven auf, Bild 44, doch auch hier treten die jeweils höchsten erreichbaren Kolbengeschwindigkeiten zwischen Hubräumen von 2,5 bis 3,0 l auf. Also auch hier macht sich der durch die Feder verursachte drehzahlbegrenzende Einfluß der Steuerung bei kleinen und bei sehr großen (über 3,0 l) Zylindern stärker bemerkbar als bei den Zylindern zwischen 2,5 und 3,0 l Hubraum.

Digitized by Google

d) Hußmann-Nocken — Grenzdrehzahlen.

Die Lösung des Problemes der Federdrehzahlgrenze stellt eine der vordringlichsten Aufgaben dar und kann wohl im ganzen durch die Arbeiten von Hußmann/DVL als gelungen bezeichnet werden, zum mindesten für ganz bestimmte Steuerungsaufbauten. Die Ventilerhebungskurve wird in der Weise entwickelt, daß von vornherein bestimmte — zweckmäßig drei nebeneinander liegende — Harmonische ausgeschaltet oder klein gehalten werden [28]. Die Eigenschwingungszahl der Ventilfeder wird dann so gewählt, daß der Betriebsdrehzahlbereich in dieses von erregenden Kräften freie Gebiet fällt. Hierbei sind jedoch einige wichtige Momente beachtenswert:

1. Je niedriger die Ordnungszahl der auszuschaltenden Harmonischen ist, desto kleiner wird das Verhältnis Spitzenkreiswinkel zu Flankenwinkel $\frac{\beta}{\alpha}$[7]) am Nocken, d. h. das Erhebungsdiagramm wird weniger füllig, oder es muß der Öffnungswinkel für ungefähr gleiche Fülligkeit größer werden. Bild 47 und 48 sollen das veranschaulichen. Die schwach gestrichelte Kurve ist Ausgangskurve, die daraus entwickelten »harmonischen« Erhebungskurven sind auf Grund der von Hußmann angegebenen Beziehung

$$a_\mu = \frac{1}{\mu^3 - \mu}\,[b \cdot \sin \mu\, \alpha_B - c \cdot \sin \mu\, \alpha_0]$$

berechnet. Bild 48 zeigt die Abhängigkeit der Amplituden der 9. bis 14. Harmonischen vom Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$.

2. Für diesen Nocken muß ein selbsttätiger Ventilspielausgleich gefordert werden. Messungen haben ergeben, daß kleine Spieländerungen nur eine verhältnismäßig kleine Größenänderung der Amplituden zur Folge haben. Bild 49 zeigt ferner die rechnerische Untersuchung für das in Bild 48 gekennzeichnete Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha} = 1{,}71$, wobei die Spieländerung, wie es fast allgemein üblich ist, durch eine Rampe mit konstanter Ventilgeschwindigkeit aufgenommen wird (in vorliegendem Falle mit 0,4 m/s bei 4000 U/min), Bild 50. Auch hier ändern sich die Amplituden nur sehr wenig. Trotzdem ist ein Unsicherheitsfaktor hineingebracht, der im Hinblick auf die dabei auftretenden Stöße und die Elastizität der gesamten Steuerung schwierig zu beherrschen sein wird. Damit kommen wir zum dritten Punkt:

[7]) Spitzenkreiswinkel = Winkel von der höchsten Erhebung bis zum Wendepunkt der Erhebungskurve,
Flankenwinkel = Winkel vom Öffnungs- bzw. Schließpunkt bis zum Wendepunkt.

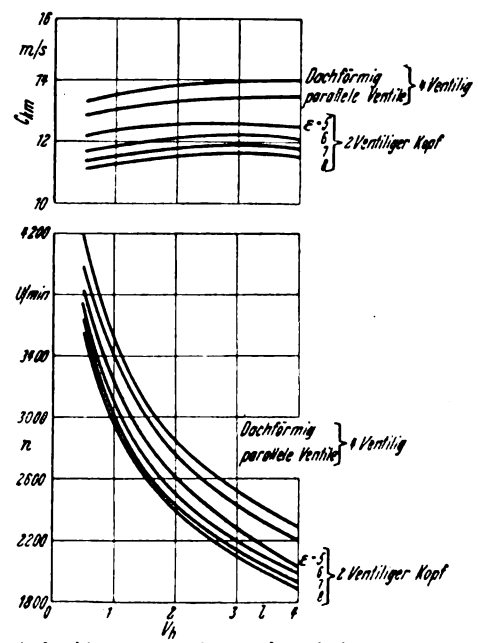


Bild 46. Motordrehzahlen und Kolbengeschwindigkeiten für $S/D = 1{,}1$ und eine Federanstrengung $n \cdot h = 3100$.

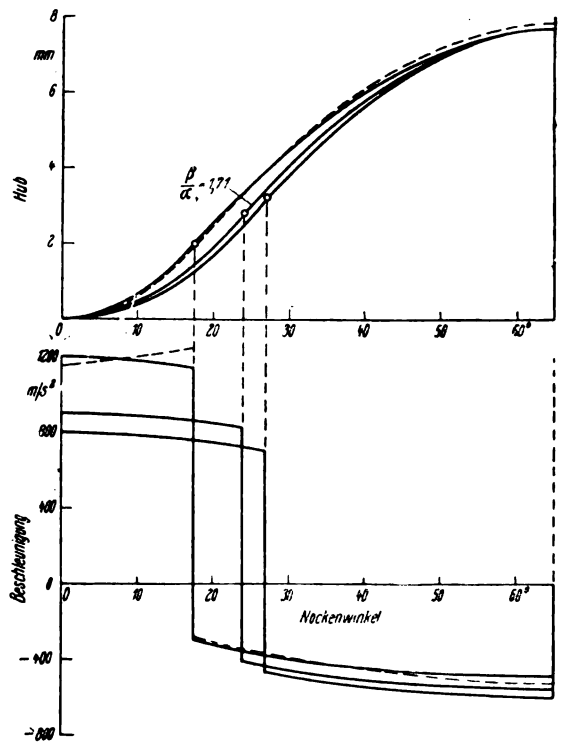


Bild 47. Erhebungskurven und Beschleunigungen bei Änderung des Verhältnisses Spitzenkreiswinkel : Flankenwinkel = $\frac{\beta}{\alpha}$.

3. Die Elastizität der Steuerung. Messungen an hochbelasteten Stoßstangensteuerungen haben ergeben, daß das vom Nocken vorgezeichnete Bewegungsgesetz in keiner Weise bis zum Ventil hin aufrecht erhalten bleibt. Bild 51 gibt die tatsächliche Bewegung des Ventiles gegenüber der Sollkurve wieder. Dabei kann natürlich der Fall eintreten, daß ein richtig entworfener Nocken die geforderten Eigenschaften gänzlich verliert. Es muß deswegen ein starrer Aufbau der Steuerung und weitgehende Beschränkung in der Zahl der Zwischenglieder angestrebt werden. Die obenliegende Nockenwelle, die ja bei wassergekühlten Motoren ausschließlich verwendet wird, scheint dann auch für luftgekühlte Motoren mehr Aufmerksamkeit zu verdienen.

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Drehzahlen für

$$n \cdot h = 3100$$

werden heute tatsächlich erreicht und namentlich bei den kleineren Zylindereinheiten zu überschreiten versucht, was aber — zum mindesten bei Dauerbetrieb — unweigerlich zu

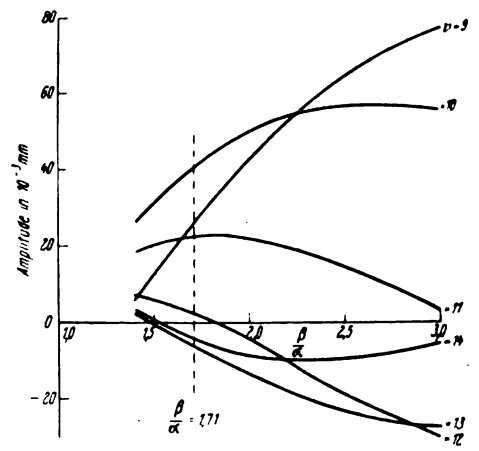


Bild 48. Einfluß von $\frac{\beta}{\alpha}$ auf die Amplituden der Harmonischen der 9. bis 14. Ordnung; aus den Erhebungskurven des Bildes 47.

Digitized by Google

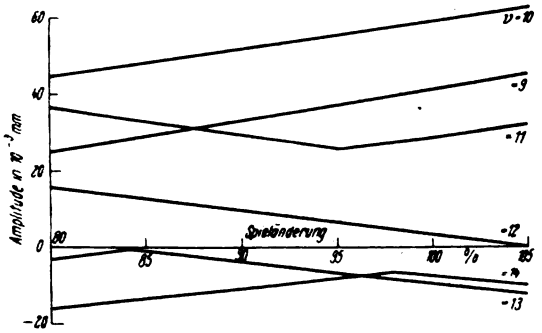


Bild 49. Einfluß der Spieländerung auf die Amplituden der 9. bis 14. Harmonischen. Für $\beta/\alpha = 1{,}71$ (s. Bild 47 u. 48). Um die Spieländerung aufzunehmen, ist an die Erhebungskurve beiderseitig eine Rampe nach Bild 50 angefügt.

Die Werte sind entsprechend dem am Motor vorhandenen Kipphebelverhältnis mit 1,4 multipliziert.

den heute so gefürchteten Federbrüchen führt. Die durch die Arbeiten der DVL gelöste Aufgabe rückt diese angegebenen Drehzahlgrenzen um ein Beträchtliches hinaus.

Durch den Wegfall der kritischen Harmonischen ist es möglich, den rechnerischen Lastbereich der Ventilfeder zu erhöhen, und zwar sei ein

$$U_{kd} = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

als zulässig angenommen.

Der Lastbereich wird hier noch verhältnismäßig niedrig gewählt, da es einmal nicht möglich sein wird, die verlangten Harmonischen restlos zu beseitigen, und zum zweiten im Hinblick auf die oben beschriebene elastische Verformung. Unter günstigen Umständen — Möglichkeit von sehr großen Öffnungswinkeln, besonderer Anfahrnocken bzw. Anfahrstellung der Steuerorgane — dürfte es möglich sein, bis zur 8. Harmonischen hinunter die Amplitude klein zu halten, d. h. jeweils immer die Amplituden von drei nebeneinander liegenden Harmonischen, in diesem Falle der 8., 9. und 10. Ordnung.

Für diese Harmonischen ist am zweckmäßigsten die Eigenschwingungszahl so zu wählen, daß

$$\frac{N}{n_{\text{Nockenwelle}}}$$

zwischen der 8. und 9. Harmonischen liegt, d. h.

$$\frac{N}{n_{\text{Nocken}}} = 8{,}6 \text{ oder } N = 4{,}3 \cdot n_{\text{Motor}} \quad \ldots \quad (21)$$

In Verbindung mit

$$U_{kd} = 2800 = \frac{N \cdot h}{7{,}25}$$

wird

$$N \cdot h = 20350 \quad \ldots \quad (22)$$

$$\text{und } N = 4{,}3 \cdot n = \frac{7{,}25 \cdot U_{kd}}{n} \quad \ldots \quad (23)$$

$$n \cdot h = 4720 \quad \ldots \quad (24)$$

und in Verbindung mit einer Gasgeschwindigkeit von $c_g = 60$ m/s ergibt sich analog der Rechnung auf S. 262

$$n_{\text{Motor}} = 1635 \cdot \sqrt{\frac{d}{V_h}} \quad \ldots \quad (25)$$

Diese Gleichung besagt wieder, daß bei gegebenem Ventildurchmesser und Hubvolumen und bei vorgegebener Gasgeschwindigkeit $c_g = 60$ m/s die Drehzahl gegeben ist, da der Ventilhub durch $n \cdot h = 4720$ festliegt. In Bild 41 ist N in Abhängigkeit von h, in Bild 42 h in Abhängigkeit von n aufgetragen. Zum Vergleich ist die Kurve $n \cdot h = 3100$ der ersten Untersuchung eingezeichnet. Man sieht, daß der DVL-Nocken im günstigsten Falle einen erheblich größeren Hub zuläßt als er bisher mit Sicherheit möglich war. Die Erhöhung beträgt ungefähr 51%.

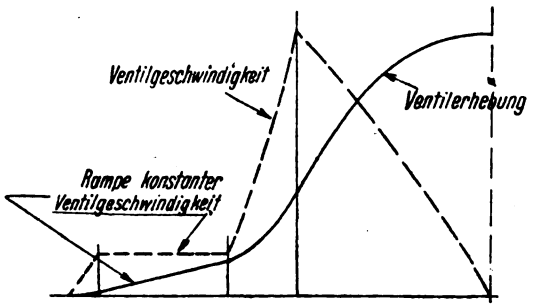


Bild 50. Schema einer Nockenrampe zur Überwindung des Ventilspieles.

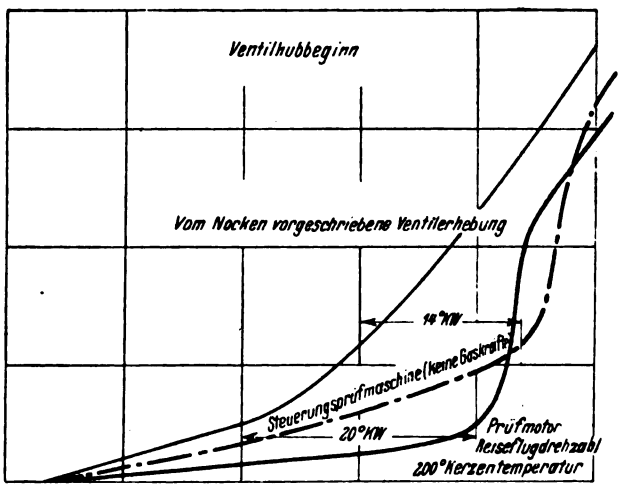


Bild 51. Abweichung der Ventilerhebungskurve von der Sollkurve bei einer hochbelasteten Stoßstangensteuerung.

Bild 53 zeigt die nach obiger Formel berechneten Drehzahlen für gleich große Ventile und für

$$\frac{\text{Einlaßquerschnitt}}{\text{Auslaßquerschnitt}} = 1{,}4.$$

Sie liegen um 24% höher als die bisherigen Federgrenzdrehzahlen.

Die in Abschnitt c und d nach den Formeln

$$n = 1320 \cdot \sqrt{\frac{d}{V_h}} \quad \text{Formel (20)}$$

und

$$n = 1635 \cdot \sqrt{\frac{d}{V_h}} \quad \text{Formel (25)}$$

mit $c_g = 60$ m/s berechneten Drehzahlen sind als Reiseflugdrehzahlen anzusprechen, da die Feder bzw. Feder und Nocken für den Dauerdrehzahlbereich entworfen werden müssen. Die höheren Drehzahlen der Nennleistung und der Kurzleistungen können natürlich wegen ihrer verhältnismäßig kurzen Dauer die Haltbarkeit der Feder nicht gefährden. Legt man die Leistungskurve des Bildes 16 zugrunde, so würde die Höchstdrehzahl $\sim 21\%$ höher liegen, die der Nennleistung $\sim 10\%$. Sind für die Reiseflugdrehzahlen andere Gasgeschwindigkeiten c_g' einzusetzen, so ist in obigen Formeln die rechte Seite mit

$$\sqrt{\frac{c_g'}{60}}$$

zu multiplizieren.

2. Bauart der Steuerung.

a) Drehzahlgrenzen der Stoßstangensteuerung.

Während wassergekühlte Flugmotoren ausschließlich die obenliegende Nockenwelle mit direkter Ventilbetätigung über einen leichten Hohlstössel oder unter Zwischenschaltung eines Schwinghebels aufweisen, werden bei luftgekühlten Stern- wie Reihenmotoren, abgesehen von verschwindend

Digitized by Google

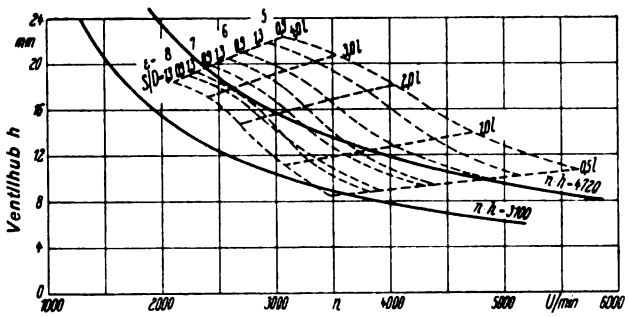


Bild 52. Federanstrengung $n \cdot h = 4720$.
Die Schnittpunkte der gestrichelten Kurven geben die zu den Drehzahlen des Bildes 32 ($E/A = 1{,}4$) gehörigen Ventilhübe an.

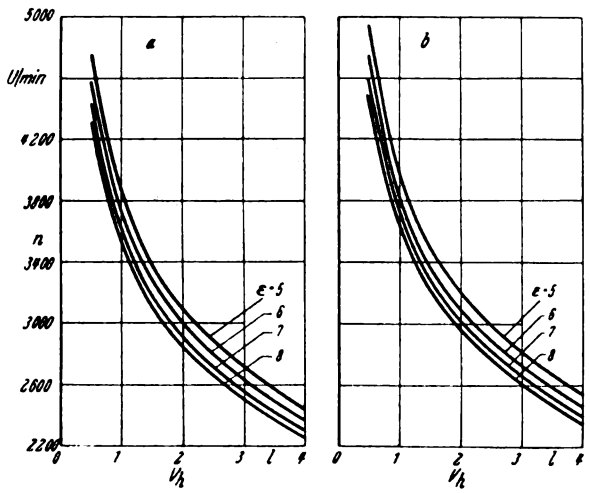


Bild 53. Motordrehzahlen für eine mittlere Gasgeschw. $c_g = 60$ m/s und eine Ventilfederanstrengung $n \cdot h = 4720$. $S/D = 1{,}1$.
Gleichgroße Ein- und Auslaßventile.
$\frac{\text{Einlaßventilfläche}}{\text{Auslaßventilfläche}} = 1{,}4$.

wenigen Ausnahmen, die Ventile über Kipphebel, Stoßstangen und Stößel von dem im Kurbelgehäuse befindlichen Nocken betätigt. Der Stoßstangenantrieb hat den Vorteil eines niedrigen Gewichtes und niedriger Herstellungskosten für sich. Während er beim Sternmotor naturgegeben ist, und der luftgekühlte Reihenmotor eigentlich die Voraussetzung für die obenliegende Nockenwelle mit sich bringt, hat sich die Stoßstange auch bei letzterem bis heute noch nicht verdrängen lassen, obwohl bereits an vielen Stellen mutig der neue Schritt mit interessanten Lösungen gewagt wurde. Abgesehen von den großen auftretenden Ventilspielen hat die Stoßstangensteuerung — wie bereits früher betont — den großen Nachteil der vielen elastischen Glieder zwischen Nocken und Ventil. Die Summe der elastischen Verformungen des Steuerungsaufbaues erreicht bei hohen Drehzahlen Werte, die den einwandfreien Verlauf der Erhebungskurve in Frage stellen. Hierin liegt die Grenze der Stoßstangensteuerung.

Auf Grund der Ergebnisse, die an einem Einliter-Zylinder gemacht wurden, sind für verschiedene Hubräume der zweiventiligen Bauart mit $\frac{S}{D} = 1{,}1$ die Grenzdrehzahlen in der Weise berechnet worden, daß jeweils eine verhältige Verformung bei derselben Massenkraft angenommen wurde. Die Gewichte der Steuerungsteile sind Bild 55 entnommen. Da die Gasgeschwindigkeit dem Ventilhub umgekehrt proportional, die Ventilbeschleunigung jedoch direkt proportional ist, wurde der Ventilhub als variabel eliminiert. Für die Gasgeschwindigkeit wurde in diesem Falle 70 m/s angenommen, da die mechanische Grenze folgerichtigerweise auch an der Leistungsspitze bzw. jenseits dieser liegen soll.

Maßgebend für die elastische Verformung des Steuerungsaufbaues ist die Massenkraft, die durch die Beschleunigung an der Nockenflanke hervorgerufen wird.

Unter der Voraussetzung gleicher Elastizität der Steuerungsaufbauten für alle Zylindergrößen von 0,5 bis 4,0 l Hubräumen kann die gleiche Kraft für gleiche Zusammendrückung angesetzt werden.

Die Ausgangswerte des erwähnten Einzylinders waren:

$G_0 = 0{,}52$ kg,
$b_0 = 2950$ m/s²,
$h_0 = 12{,}2$ mm,
$n_0 = 3800$ U/min.

Durch Umwandlung der drei Gleichungen

$$\frac{V_h}{30 \cdot c_g \cdot \pi \cdot d} = \frac{h}{n}$$

$$b_0 \cdot G_0 = b \cdot G$$

$$b = b_0 \frac{h}{h_0} \cdot \frac{n^2}{n_0}$$

und Einsetzen obiger Werte und $c_g = 70$ m/s erhält man:

$$n = 846 \sqrt[3]{\frac{d}{G \cdot V_h}}$$

wobei d in mm = Ventildurchmesser (Zahlentafel 1),
G in kg = Gewicht der gesamten Steuerteile für die Stoßstangensteuerung (Stößelseite auf Ventilseite bezogen; i Kipphebel = 1,4) (Bild 55),
V_h in l
einzusetzen sind.

Diese Formel gibt also die Drehzahlen an, bei welchen die Gasgeschwindigkeit 70 m/s ist und die Steuerung gerade noch zufriedenstellend arbeiten kann. Ein Spielausgleich dürfte hierbei unbedingt zu empfehlen sein.

Die Rechnung ist in Bild 56 dargestellt.

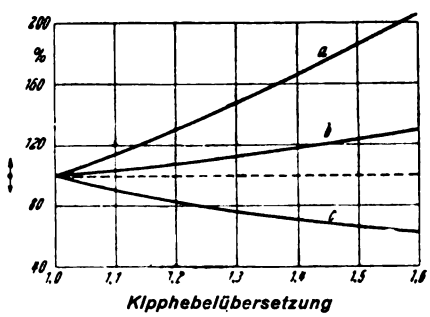


Bild 54. Einfluß der Kipphebelübersetzung auf die Stoßstangenkraft und die Beanspruchung am Nocken.
a) Nockenbeanspruchung in %.
b) Druck auf den Nocken (Stangenkraft) bzw. $p \cdot v$-Wert in %.
c) Gleitgeschwindigkeit zwischen Nockenflanke und Stößel in %.

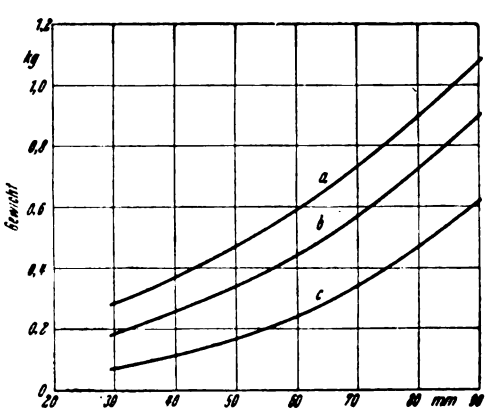


Bild 55. Gewichte der Steuerungsteile.
a) Gewichte der gesamten Steuerungsteile für Stoßstangensteuerung (Stößelseite auf Ventilseite bezogen; $i_{\text{Kipphebel}} = 1{,}4$).
b) Gewicht der bewegten Steuerungsteile der Ventilseite.
c) Ventilgewichte.

Digitized by Google

Sie ergibt für die einzelnen Zylindergrößen nur unwesentliche Drehzahlabweichungen bei $\frac{S}{D} = 0{,}9 - 1{,}3$ und $\varepsilon = 5 - 8$, so daß nur die Kurve für $\frac{S}{D} = 1{,}1$ und $\varepsilon = 6$ gezeichnet ist. Darüber sind noch die Kolbengeschwindigkeiten aufgetragen. Sie zeigen ein leichtes Anwachsen nach den kleinen Zylindereinheiten hin, d. h. im Gegensatz zu allen bisherigen Untersuchungen wird hierbei bei gleicher Triebwerksbeanspruchung (wenn Kolbengeschwindigkeit gleich ist!) die Grenzdrehzahl für die Stoßstangensteuerung bei großen Hubräumen eher erreicht als bei kleinen.

b) Grenzdrehzahlen für obenliegende Nockenwelle.

Für die Grenzen der Drehzahlsteigerung obenliegender Nockenwelle ist einzig und allein die Beanspruchung zwischen Nocken und Stössel bzw. Kipphebel maßgebend. Die vorliegende Betrachtung erstreckt sich auf die übliche Steuerungsanordnung mit einer Nockenwelle für Ein- und Auslaßventile, die unter Zwischenschaltung von Schwinghebeln die Ventile betätigt. Der Ausgangsnocken hat das in Bild 47 gestrichelt gezeichnete Erhebungsdiagramm. Um einen ganz klaren Vergleich zu bekommen, soll die Ähnlichkeit des Nockens für alle Ventilhübe gewahrt bleiben, d. h. mit Änderung des Hubes ändern sich sämtliche Maße des Nockens mit Ausnahme der Nockenbreite, die für alle Fälle gleich bleibt, da die Verbreiterung über ein gewisses Maß hinaus wegen der unvermeidlichen Arbeitsungenauigkeiten die Berührungslänge am Nocken nicht im selben Maße vergrößert.

Um nicht zu große Nockenwellendurchmesser bei den großen Hubräumen zu erhalten, wird die Übersetzung im Kipphebel $i = 1{,}4$ gewählt. Ausgedehnte Versuchsläufe haben gezeigt, daß unter Zugrundelegung der Hertzschen Gleichungen am Einlaßnocken eine Beanspruchung $\sigma = 4700$ kg/cm², am Auslaßnocken $\sigma = 5300$ kg/cm² bei sorgfältigster Herstellung ohne weiteres ausgehalten werden.

Die Betrachtung erstreckt sich auf die Stelle der größten Beschleunigung, d. h. auf den Übergang von der Nockenflanke zur Nockenspitze.

Die Ausgangswerte für die Berechnung der zulässigen Drehzahlen sind folgende:

Nocken: Grundkreisradius . . . . . = 16 mm,
halber Öffnungswinkel . . . . . = 65°,
Flankenradius . . . . . = 125 mm,
Spitzenkreisradius . . . . . = 8,8 »
Hub am Nocken . . . . . = 7,87 »
Stößelradius . . . . . = 50 »
Nockenbreite . . . . . = 12 »
Ventildurchmesser . . . . . = 50 »
hierfür Gewicht der bewegten Steuerungsteile der Ventilseite nach Abb. 55 G_0 . . . . . = 0,34 kg.

In Verbindung mit dem vorher angegebenen Kipphebelverhältnis $i = 1{,}4$ und mit einer Federkraft, die $\sim 45\%$ Überschuß über die Massenkräfte am Spitzenkreis ergibt, wird bei einer Beanspruchung an der Nockenflanke von

$\sigma = 5000$ kg/cm²,

die zulässige Beschleunigung . . . . . $b_0 = 4460$ m/s²;
das entspricht einer Drehzahl von . . $n_0 = 4850$ U/min.

Da das Maß der mittleren Krümmung der beiden sich berührenden Krümmungsflächen mit $\frac{h_0}{h}$ und die auftretende Kraft mit $\frac{h}{h_0}$ sich ändern, fällt für die Beanspruchung der Ventilhub heraus:

$$\sigma^2 = 0{,}35 \frac{P \cdot \frac{h}{h_0} \cdot \varrho \cdot \frac{h_0}{h} \cdot E}{b}.$$

Die auftretende Kraft P soll in allen Fällen gleich bleiben, also ist

$$G_0 \cdot b_0 = G \cdot b.$$

Ferner ist

$$b = b_0 \cdot \frac{n^2}{n_0^2}$$

mithin durch Einsetzen der obigen Werte:

$$n = 2840 \sqrt{\frac{1}{G}}.$$

Die sich hieraus ergebenden Motorgrenzdrehzahlen, sowie die Kolbengeschwindigkeiten für den zweiventiligen Zylinderkopf sind in Bild 57 aufgetragen. Man sieht, daß bei größeren Hubräumen große Kolbengeschwindigkeiten möglich sind oder, anders ausgedrückt, bei gleicher Kolbengeschwindigkeit, d. h. gleicher Triebwerksausnutzung ist die für die Beanspruchung am Nocken maßgebende Grenzdrehzahl bei kleinen Hubräumen eher erreicht als bei großen.

c) Einflüsse der Nockenform und der Kipphebelübersetzung.

Der Einfluß der Ventilerhebungskurve auf den Gaswechselvorgang ist bereits in den vorangegangenen Abschnitten behandelt. Es ist demnach ein möglichst fülliges Diagramm anzustreben, das, wie Bild 37a und b zeigt (Beschleunigungsverlauf!), der Ausbildung der Ventilfeder entgegenkommt. Dem wird jedoch durch die höchstzulässige Beanspruchung an der Nockenflanke, durch die elastische Verformung bei Stoßstangensteuerung und namentlich durch die Forderungen des schwingungsfreien Nockens eine Grenze gesetzt. Der Ausweg ist der größere Öffnungswinkel, der ja auch für den Gaswechselvorgang der schnellaufenden und der Ladermotoren Bedingung ist. Der Einfluß der Änderung des Öffnungswinkels auf die mechanische Beanspruchung ist in Bild 58 dargestellt. Ausgangsnocken ist der Nocken in Bild 47. Um ein eindeutiges Bild zu erhalten, wurde das Hauptkennzeichen des Nockens, das Verhältnis Spitzenkreiswinkel : Flankenwinkel gleich gehalten. Bild 58a zeigt die Änderung des Beschleunigungsverlaufes. In Bild 58b ist der Öffnungswinkel des Ausgangsnockens 260° mit 100% bezeichnet. $\Delta\sigma$ ist die Änderung der Beanspruchung an der Flanke nach der Hertzschen Gleichung. Für die obenliegende Nockenwelle bringt demnach eine Vergrößerung des Öffnungswinkels um 15% nur eine Her-

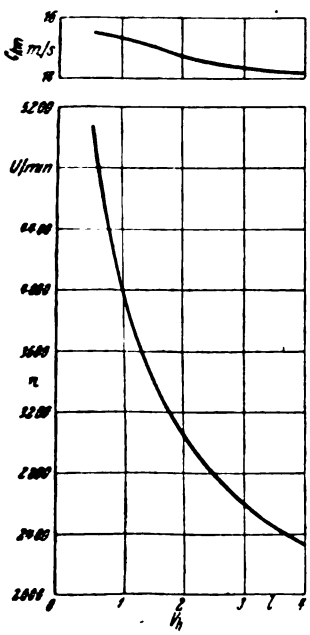


Bild 56. Grenzdrehzahlen für Stoßstangen-Steuerung.

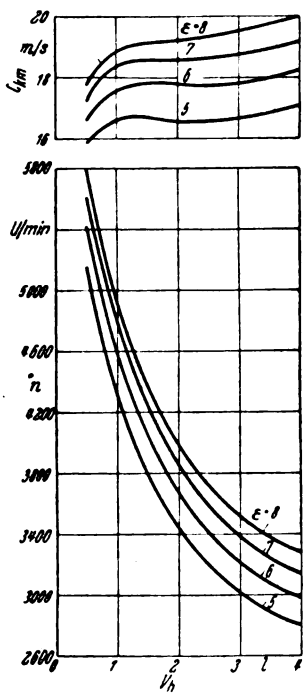


Bild 57. Grenzdrehzahlen für Steuerung mit obenliegender Nockenwelle.

Digitized by Google

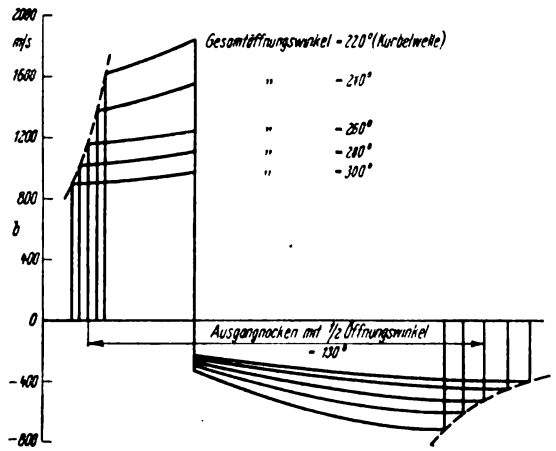


Bild 58a. Einfluß des Öffnungswinkels auf die Beschleunigungswerte. Der Ausgangsnocken ergibt die in Bild 47 gestrichelt gezeichnete Erhebungskurve.

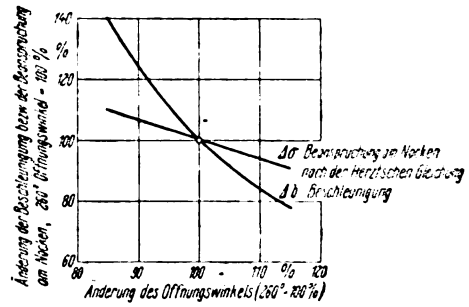


Bild 58b. Verhältniger Einfluß des Öffnungswinkels auf die Beschleunigung und die Beanspruchung am Nocken.

abminderung der Nockenbeanspruchung auf 91%. Dagegen ist der Vorteil für die Stoßstangensteuerung mit 78% gegenüber 100% sehr beträchtlich, denn Δb ist die Änderung der Beschleunigung, mithin der die elastische Verformung des Steuerungsaufbaues beeinflussenden Kraft.

Die Wahl der Nockenform ist unabhängig vom Erhebungsdiagramm, das sich durch unendlich viele Kombinationen von Stößel und Nocken verwirklichen läßt. Aus fabrikatorischen Rücksichten fallen jedoch Hohlflankennocken von vornherein aus und Tangentennocken sind möglichst nicht zu verwenden. Übereinstimmend mit Christian [10] hat Bensinger [31] für den harmonischen Nocken mit Stößelradius $= \infty$ die geringste Beanspruchung an der Flanke berechnet, Bild 59, jedoch hat der flachgekrümmte Stößel den Vorteil, daß er sich genauer herstellen läßt.

Besondere Wichtigkeit kommt bei Stoßstangensteuerungen und Steuerungen mit nur einer obenliegenden Nockenwelle, für die auch die vorangegangene Untersuchung durchgeführt wurde, dem Übersetzungsverhältnis des Kipphebels zu. Es ermöglicht, sobald es größer als 1 ist, noch bei kleinem Nockenwellendurchmesser, der immer aus Gewichtsgründen angestrebt wird, gute Nockenform und ist auch, besonders bei der Nockentrommel des Sternmotors von Vorteil. Mit der Größe der Verhältnisse wachsen aber auch die Beanspruchungen in den Triebwerksteilen, wie Bild 54 zeigt.

Zu eindeutigem Vergleich wurden wiederum bei gleichem Ventilhub sämtliche Maße des Nockens mit der Kipphebelübersetzung geändert, so daß alle Nockenformen ähnlich sind. Das Übersetzungsverhältnis 1 ist gleich 100% gesetzt. Bei einer Änderung von $i = 1$ auf $i = 1{,}5$ wird der Druck auf den Nocken 22% und die Nockenbeanspruchung 86% größer.

Dagegen wird die Gleitgeschwindigkeit zwischen Nockenflanke und Stößel kleiner und das Produkt aus Beanspruchung und Gleitgeschwindigkeit — ähnlich dem pv-Wert der Lagerreibungsarbeit — ändert sich im selben Maße wie die Stangenkraft.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß das Vergrößern des Öffnungswinkels hauptsächlich für die Stoßstangensteuerung und das Verkleinern des Kipphebel-Übersetzungsverhältnisses in der Hauptsache für die Steuerung mit obenliegender Nockenwelle von Vorteil ist.

VI. Zusammenstellung und Vergleich der erreichbaren Grenzdrehzahlen.

Bild 61 zeigt die Zusammenstellung der durch die Einflußfaktoren der Ventilsteuerung bedingten Grenzdrehzahlen für das Hubverhältnis $\frac{S}{D} = 1{,}1$. Hinsichtlich der freigegebenen Ventilquerschnitte ist der zweiventilige Zylinderkopf dem vierventiligen dachförmigen oder mit parallelen Ventilen weitaus überlegen, aber um so einschneidender wirkt bei ihm der drehzahlbeschränkende Einfluß der Ventilfeder durch die bis heute üblichen Nockenformen. Die Drehzahlen des vierventiligen dachförmigen Kopfes liegen infolge seiner kleinen Ventilhübe bei großen Zylindern um 11%, bei klei-

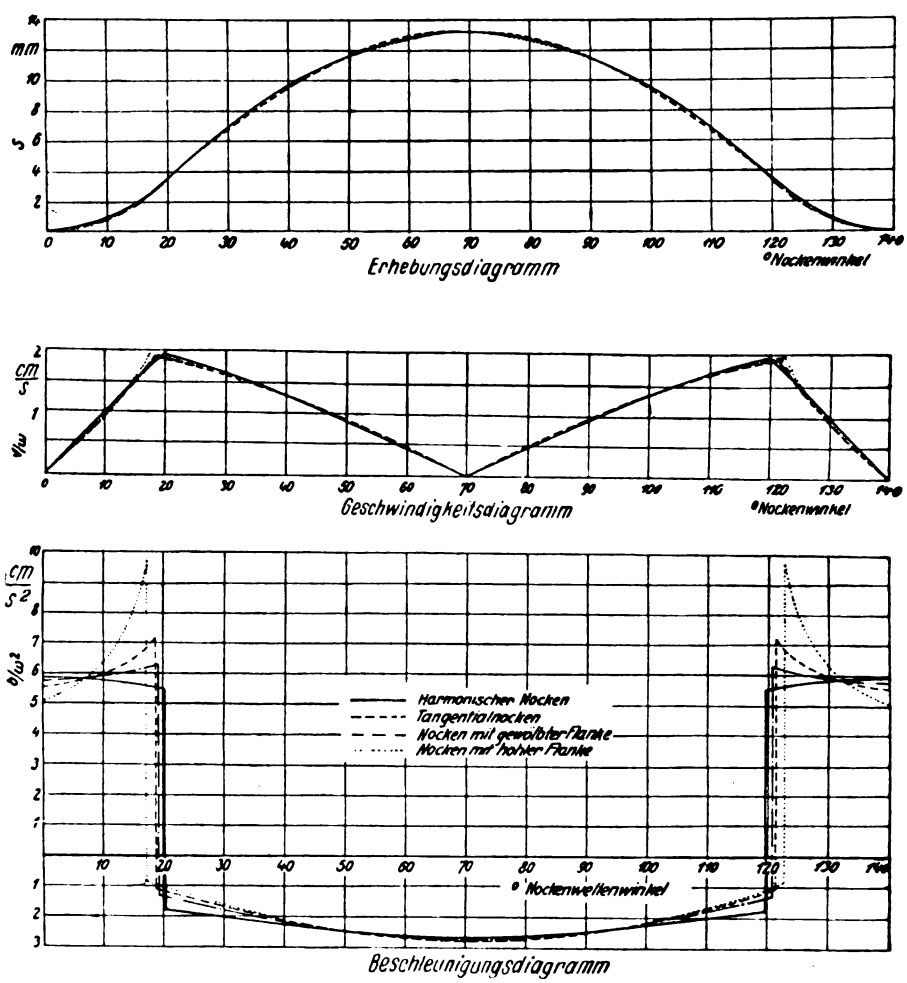


Bild 59. Vergleich verschiedener Nockenformen aus Bensinger, Die Wahl der Nockenform. ATZ (1936), S. 412 bis 414.

Digitized by Google

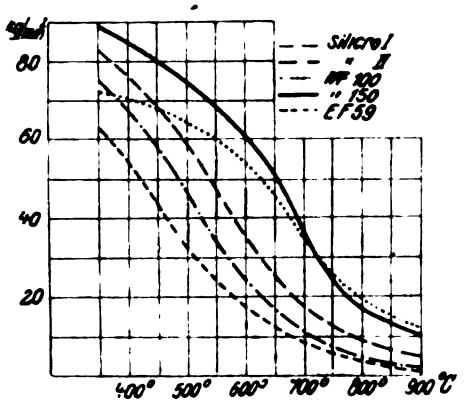


Bild 60. Ventilstähle von Krupp aus ATZ (1934), S. 357.

nen Zylindern um 14%, höher als beim zweiventiligen. Eine beachtenswerte Verbesserung bringt der Hußmann-Nocken, der den zweiventiligen Kopf von 1,75 l Zylinderinhalt an aufwärts die Grenzdrehzahlen der Stoßstangensteuerung überschreiten läßt. Ob bei dieser ein Hinausschieben der Grenzen für den Hußmann-Nocken noch möglich ist, könnte auf Grund der vorliegenden Messungen bezweifelt werden. Für die obenliegende Nockenwelle soll diese Möglichkeit bei genügend steifer Konstruktion nicht in Frage gestellt werden, doch dürften die Grenzdrehzahlen für die Beanspruchung der obenliegenden Nockenwelle kaum erreicht werden.

Die Kolbengeschwindigkeiten zeigen sämtlich — bis auf eine Ausnahme — ihre Maxima zwischen Zylinderinhalten von 2,5 bis 3,5 l bei den freigegebenen Ventilquerschnitten mit erheblich höheren Werten als bei kleinen Zylindern, bei der Federgrenze mit ähnlicher, aber flach verlaufender Kurve. Das bedeutet, daß mit Ausnahme der bei großen Zylindern sich stärker bemerkbar machenden Grenze der Stoßstangensteuerung bei gleicher Steigerung der Triebwerksbeanspruchung die kleinen Zylinder rascher an ihre Steuerungsgrenze kommen.

VII. Werkstoffe und Herstellung.

Auslaßventil und Ventilfeder sind die zwei schwierigsten Bauteile der Viertakt-Ventilsteuerung, deren heutiger Entwicklungsstand beim Auslaßventil einen gewissen Abschluß darstellt, bei der Ventilfeder noch erheblicher Forschungsarbeit bis zur Reife bedarf.

1. Auslaßventil.

Die äußerst schwierigen Bedingungen, unter denen die Auslaßventile arbeiten müssen, sind thermischer, mechanischer und chemischer Natur, wobei namentlich die thermische und chemische Beanspruchung durch die Motoren- und Kraftstoffentwicklung eine erhebliche Steigerung erfahren haben. Ihre Beherrschung verlangt bestimmte Eigenschaften des Werkstoffes:

Warmfestigkeit,
Verschleißfestigkeit,
Zunderfestigkeit und Korrosionsbeständigkeit und
Wärmeleitfähigkeit.

Sorgfältige Konstruktion und Formgebung müssen weiterhin zur Steigerung der Dauerhaltbarkeit beitragen. Messungen ergaben eine Betriebstemperatur des Auslaßventiles von 750 bis 830° und mehr, wobei der Betriebszustand des Motors einen gewissen Einfluß hat:

Bei steigendem ε wird die Temperatur niedriger ([36] sowie H. Oestrich und H. Wolff, DVL). Die höchsten Temperaturen werden in der Nähe des theoretischen Mischungsverhältnisses erreicht, während sie sowohl bei Luft- als auch Kraftstoffüberschuß abnehmen. Ebenso ist bei höchster Motorleistung die Temperatur etwas niedriger.

Da sich nicht alle Werkstoffeigenschaften gleichzeitig verwirklichen lassen, haben sie vom legierungstechnischen Standpunkt eine Wertstufung etwa in obiger Reihenfolge

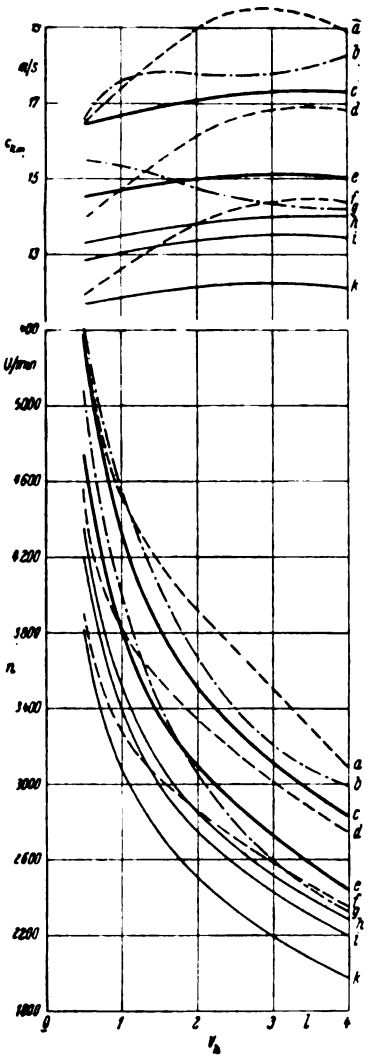


Bild 61. Vergleich sämtlicher berechneter Grenzdrehzahlen für das Hubverhältnis $S/D = 1{,}1$ und für $\frac{\text{Einlaßquerschnitt}}{\text{Auslaßquerschnitt}} = 1{,}4$.

Die Drehzahlen für die Federanstrengung $n \cdot h = 3100$ und $n \cdot h = 4720$ sind Dauerdrehzahlen mit $c_g = 60$ m/s.

Die übrigen Drehzahlen sind Höchstdrehzahlen für die Stoßstangensteuerung und die räuml. Grenzen mit $c_g = 70$ m/s.

Die Drehzahlen des 2ventiligen Kopfes gelten für $\varepsilon = 6$.

a) 2 Ventile, schräg; räumliche Grenze.
b) 2 Ventile, schräg; obenliegende Nockenwelle.
c) 4 Ventile, dachförmig; $n \cdot h = 4720$.
d) 4 Ventile, dachförmig; räuml. Grenze.
e) 2 Ventile, schräg; $n \cdot h = 4720$.
f) 4 Ventile, parallel; räuml. Grenze.
g) 2 Ventile, schräg; Stoßstangensteuerung.
h) 4 Ventile, dachförmig
i) 4 Ventile, parallel
k) 2 Ventile, schräg
} $n \cdot h = 3100$.

erhalten. Wegen ihrer überlegenen Warmfestigkeit werden heute fast ausschließlich austenitische Cr-Ni-Stähle [38, 35, 34] verwendet, so in Deutschland WF 100 von Krupp, Bild 60. Durch ihren hohen Chromgehalt weisen diese Stähle außerdem eine ausreichende Zunderfestigkeit und Korrosionsbeständigkeit auf, die allerdings über 800° rasch abnimmt [38]. Zudem sind sie nicht härtbar und deswegen in ihrer Verschleißfestigkeit nicht ausreichend, obwohl der Wolframzusatz von 2 bis 3,5% den Verschleißwiderstand bis etwa 5% erhöht. Dieser Nachteil wird aber durch Nitrieren des Schaftes aufgehoben. Die an den Sitzflächen hauptsächlich wegen der korrodierenden Wirkung der Bleibenzine vorgesehenen Hartmetallauflagen verbessern den Verschleißwiderstand ebenso wie die Hartmetallplättchen am Ventilkopf. Bristol panzert neuerdings zusätzlich noch die dem Verbrennungsraum zugekehrte Oberfläche des Ventiltellers mit einer hochnickelhaltigen Legierung [39]. Allerdings sind die austenitischen Stähle schlechte Wärme-

Digitized by Google

leiter. Legierungstechnisch eine Verbesserung der Wärmeleitfähigkeit herbeizuführen, ist nicht möglich, aber glücklicherweise auch ohne jede Wichtigkeit, da Versuche gezeigt haben, daß eine wesentliche Senkung der Ventiltemperaturen durch Verwendung von Werkstoffen mit größerer Wärmeleitfähigkeit nicht zu erwarten ist (O. Meiser, DVL, und einige Hinweise in [38]).

Perlitisches GSE mit seiner hohen Wärmeleitfähigkeit und WF 100 erreichten unter gleichen Versuchsbedingungen annähernd gleiche Temperaturen. Besondere Bedeutung kommt dagegen dem Wärmetransport vom Teller zum Schaft und von da zum Zylinderkopf durch Innenkühlung des Ventiles zu. Allgemein wird hierzu Natrium verwendet, das wegen seines niedrigen Schmelzpunktes, seiner hohen Wärmeleitfähigkeit, seines guten Benetzungsvermögens und dadurch, daß es beim Schmelzen keine Spannungen verursacht, besonders geeignet ist. Der Hohlraum erstreckt sich entweder nur auf den Schaft oder auf den Schaft und den Teller; Versuche über die beste Hohlraumform konnten trotz starker Abweichungen voneinander keine nennenswerten Unterschiede in der Ventiltemperatur feststellen (J. Zeyns, DVL). Wright nimmt für seine Hohlraumform eine starke Temperaturverminderung des Mittelteiles innerhalb des Verbrennungsraumes in Anspruch [33]. Die Ventile mit der einfachen Bohrung im Schaft haben den Vorteil einfacher Herstellung. Ihr Teller sei leicht konkav, um einen niedrigen Randdruck zu erzielen und vom Innenraum am wenigsten Wärme aufzunehmen. Tulpenventile zeigten 20 bis 25° höhere Temperaturen (H. Oestrich und H. Wolff, DVL), sind dagegen hinsichtlich ihres günstigsten Spannungsverlaufes den Tellerventilen wesentlich überlegen, da sie am besten einem Körper gleicher Festigkeit nahekommen (Granacher, DVL).

Schließlich ist noch von besonderer Bedeutung die gegenseitige Abstimmung der Werkstoffe an Ventil, Ventilführung und Ventilsitz, wobei sich besonders Cuprodur und Cu-Be für die Ventilführungen und UM 12 für die Ventilsitze bewährt haben.

2. Die Ventilfeder.

Die hohen Beanspruchungen an den Ventilfedern verlangen eine große Wechselfestigkeit des Werkstoffes. Die heute in der Hauptsache verwendeten Kohlenstoffstähle — besonders in Schweden in großer Reinheit erschmolzen — sind in metallurgischer Hinsicht ausreichend gut.

Ursachen für Federbrüche sind zum größten Teil in der Herstellung des Drahtes und der Feder zu suchen. Von besonderem Einfluß ist die Art des Walzens: Walzfehler verschwinden nicht im weiteren Verlauf der Drahtherstellung. Dagegen scheint der Einfluß des Drahtziehens namentlich bei geschliffenen Drähten unerheblich zu sein. Das Schleifen selbst erfordert größte Sorgfalt.

Ölgehärtete Stähle (schwedische Stähle) haben im Gegensatz zu bleipatentierten eine höhere Wechselfestigkeit, obwohl letztere den Vorteil einer geringeren Oberflächenempfindlichkeit haben dürften.

Die meisten Ventilfedern für hochwertige Motoren werden bekanntlich in der Weise hergestellt, daß der Draht nach dem Walzen und Ziehen gehärtet wird, und die Feder aus dem gehärteten Draht gewickelt wird. In der starken Verformung des gehärteten Drahtes könnte ein Nachteil erblickt werden. Es sind auch Federn z. B. die Poldi-Federn bekannt geworden, die — aus legierten Stählen hergestellt — erst an der fertigen Feder vergütet werden. Sie haben eine sehr große Dauerfestigkeit. Jedoch haftet ihnen der Nachteil an, daß die vorgeschriebenen Belastungseigenschaften nur mit großer Mühe eingehalten werden können. Besonders nachteilig wirkt sich diese Schwierigkeit bei den heutigen Flugmotorenventilfedern aus, die wegen der geforderten hohen Eigenschwingungszahlen eine verhältnismäßig geringe Anzahl federnder Windungen haben.

Im allgemeinen dürften die ölschlußgehärteten Drähte die heute geforderten Festigkeitseigenschaften aufweisen, namentlich dann, wenn ihre größere Oberflächenempfindlichkeit durch das in der letzten Zeit angewendete Kugelstrahlverfahren ganz bedeutend herabgesetzt und eine zusätzliche Oberflächenverfestigung erzielt wird.

VIII. Schluß.

Die Wege zu großen Hubraumleistungen sind in ihrer Wechselwirkung in bezug auf den Gaswechselvorgang nicht gleichartig. Die Aufladung ändert den Gaswechselvorgang, dieser wiederum begrenzt die Drehzahl. Dagegen verhalten sich die Mittel, die die Ventilviertaktsteuerung bietet, um die Verluste des Gaswechselvorganges klein zu halten, im großen und ganzen in beiden Fällen gleichsinnig.

Beide — Drehzahlsteigerung und Aufladung — verlangen neben selbstverständlich größten Öffnungsquerschnitten größere Öffnungswinkel. Diese lassen durch geringere mechanische Beanspruchung und geringere Kräfte im Steuerungsaufbau die Drehzahlgrenzen weiter hinausschieben.

Die Erkenntnisse über die Vorgänge bei Aufladung haben durch die einschlägigen Versuche die erforderlichen Erweiterungen erfahren. Zu klären bleibt vor allen Dingen noch die Änderung des besten Verhältnisses — Einlaßquerschnitt zum Auslaßquerschnitt — namentlich bei Erhebungsdiagrammen, wie sie für schnellaufende Maschinen — also geringe Fülligkeit — erforderlich sind. Desgleichen bedarf bei solchen Erhebungsdiagrammen der verhältige Einfluß der Erwärmung der Frischgase und des Füllgrades auf den Liefergrad weiterer klärender Versuche.

Dagegen treten bei der Drehzahlerhöhung durch die Vielzahl der beeinflussenden Faktoren Schwierigkeiten in der Erkenntnis der Zusammenhänge auf. Sie einzeln zu erfassen, ist daher auch ebenfalls Aufgabe dieser Arbeit. Die Untersuchungen wurden zu diesem Zweck auf Zylindergrößen 0,5 bis 4,0 l erstreckt, umfassen also fast alle zur Zeit verwendeten Hubräume. Die übliche Rechnungsgröße der mittleren Gasgeschwindigkeit läßt sich in ihrer einfachsten Form für die wenig unterschiedlichen Erhebungsdiagramme schnellaufender Motoren zur guten Übersicht verwenden. Mit ihr sind die Grenzdrehzahlen aller in Frage kommenden Faktoren berechnet.

Um den Einfluß der Ventilfeder, die den stärksten Anteil an der Drehzahlbegrenzung hat, eindeutig klarzustellen, wurde eine Rechnungsgröße »die Federanstrengung« aufgestellt: Das Produkt

$$\text{Motordrehzahl} \times \text{Ventilhub} = \text{konst.}$$

mit dem Lastwechselbereich als Parameter. Mit Hilfe dieser Federanstrengung wurden nach dem augenblicklichen Stand der Erkenntnisse die heutigen Grenzdrehzahlen der verschiedenen Zylindergrößen sowie die Grenzdrehzahlen des bei der DVL entwickelten Nockens ermittelt.

Hierbei ergab sich, daß heute Drehzahlen erreicht werden, die in vielen Fällen der Grenze $n \cdot h = 3100$ nahekommen, daß aber der Nocken der DVL Drehzahlen erlaubt, die bereits sehr gut entwickelte Motortriebwerke voraussetzen. Damit sind aber auch bei Zylindern über 1,75 l Inhalt die Grenzen der Stoßstangensteuerung endgültig überschritten. Zylinder unter 1 l Inhalt mit obenliegender Nockenwelle dürften die in allen Punkten ausgeglichendste Steuerung aufweisen, da sie bei ungefähr 16,5 m/s Kolbengeschwindigkeit die Grenze der Ventilfeder, die Grenze der freigegebenen Querschnitte und der obenliegenden Nockenwelle nahezu gleichzeitig erreichen. Größere Zylinder erlauben noch etwas höhere Kolbengeschwindigkeit.

Eine legierungstechnische Verbesserung der Ventilfederwerkstoffe ist nach dem heutigen Stand kaum notwendig, dagegen sind Verbesserungen in der Herstellung des Drahtes und der Feder möglich und im höchsten Maße wünschenswert.

Die heutigen Auslaßventilstähle in Verbindung mit Innenkühlung und Hartmetallpanzerung werden voraussichtlich auch bei weiterer Leistungssteigerung den Anforderungen genügen. Eine Reserve bilden noch die kohlenstoff- und eisenarmen Schwermetalle.

Digitized by Google

Abschließend läßt sich also mit Berechtigung aussagen, daß die Viertaktventilsteuerung bei konstruktiv richtiger Ausnutzung der gegebenen Möglichkeiten, d. h. Ausgeglichenheit in allen Punkten — der kommenden Drehzahlsteigerung gewachsen ist, denn letztere kann infolge der Schwierigkeiten beim Triebwerk — ausreichende Kolbenkühlung — nur langsam vorwärtsgetrieben werden. Trotzdem kommt der Entwicklung des wieder in den Vordergrund tretenden Burt-Schiebers eine nicht zu unterschätzende Bedeutung zu, da hierbei vereinfachte Herstellung und Wartung und niedrigere Kosten zu erwarten sind.

IX. Schrifttum.

[1] A. Hansen, Thermodynamische Rechnungsgrundlagen der Verbrennungskraftmaschinen und ihre Anwendung auf den Höhenflugmotor. VDI-Forschungsheft 344.

[2] Hütte, 25. Auflage.

[3] E. S. Taylor, Valve timing of engines having intake pressure higher than exhaust. NACA-Rep. 405.

[4] H. Ricardo, Schnellaufende Verbrennungskraftmaschinen.

[5] O. W. Schey und A. E. Biermann, The effect of valve timing upon the performance of a supercharged engine at altitude and an unsupercharged engine at sea level. NACA-Rep. 390, 1931.

[6] O. W. Schey und A. W. Young, The use of large valve overlap in scavenging a supercharged spark-ignition engine using fuel injection. NACA-Techn. Note 406, 1932.

[7] O. Kurtz, Forschungsaufgaben und Gestaltungsfragen bei der Steigerung der Triebwerksleistung. Luftwissen Bd. 4 (1937), Nr. 4.

[8] F. A. F. Schmidt, Untersuchungen über die Verbrennungsvorgänge bei verschiedenen motorischen Arbeitsverfahren, insbesondere im Hinblick auf den Höhenflug. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, S. II 36.

[9] K. Löhner, Die Reibungswiderstände des Flugmotors. DVL-Bericht Nr. 266, 1931.

[10] M. Christian, Begrenzung der Leistungssteigerung der schnellaufenden Verbrennungsmaschine durch den Steuervorgang. VDI-Forschungsheft 315, 1929.

[11] C. F. Taylor, Entwurf von Kanälen und Ventilen für Flugzeugmotoren. J. Aeron. Sci. (1936), Nr. 4.

[12] K. Schläfke, Zur Kenntnis der Strömungsvorgänge im Durchflußquerschnitt von Tellerventilen. ATZ (1933), S. 28.

[13] Tanaka, Air flow through a suction valve of conical seat. Aeron. Research Institute-Rep. Nr. 50 u. 61, 1929.

[14] Tanaka, Air flow through exhaust valve of conical seat. Aeron. Research Institute-Rep. Nr. 67, 1931.

[15] L. Richter, Strömung durch Kegelventile. ATZ (1932), S. 591.

[16] Schrenk, Über Strömungsarten und Ventilwiderstand. Z. VDI. Bd. 69 (1925), S. 1619.

[17] R. F. Gagg und E. V. Farrar, Höhenleistung von Flugmotoren mit durch Getriebe angetriebenen Ladern. SAE-J. (1934), S. 217.

[18] R. J. Cousins, Die Aufgaben des Auspuffventiles. Aircraft Engineering (1935), Nr. 75.

[19] R. S. Capon, Einige Probleme der Motorenforschung. Vortrag am 12. 10. 1935 auf der Tagung der DVL.

[20] O. Kurtz, Der Luftfahrzeugmotorenbau der Gegenwart und seine Beziehungen zum Kraftfahrzeugmotorenbau. DVL-Bericht Nr. 276, 1932.

[21] F. S. Duesenberg, High-speed high-efficiency engines. SAE-J. (1928), S. 589.

[22] Rolls-Royce Kestrel Engines. Aircraft Engineering (1935), Juli.

[23] Fedden, Entwicklung des Flugmotorenbaues in den nächsten 10 Jahren. SAE-J. (1933), Dez.

[24] F. Goßlau, Motoren mit hoher Hubraumleistung. VLF-Jahrbuch 1935.

[25] Nixon, Berechnung zylindrischer Schraubenfedern aus rundem Draht. Aircraft Engineering (1933), Sept.

[26] E. Lehr, Schwingungen in Ventilfedern. Z. VDI. Bd. 77 (1933), S. 458.

[27] A. Swan and L. G. Savage, The surging of engine valve springs. Engineering Research Spec. Rep. Nr. 10, 1928.

[28] Hußmann, Schwingungen in Ventilfedern. Diss.

[29] Hußmann, Beanspruchung und Konstruktion von schraubenförmigen Ventilfedern. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung S. II 91.

[30] USA-PKW, Automotive Industrie (1936).

[31] Bensinger, Wahl der Nockenform. ATZ (1936), S. 412.

[32] E. W. Joung, Die Möglichkeiten des luftgekühlten Motors in Sternbauart. SAE-J. (1936), S. 234.

[33] C. G. Williams, Versuche über Abnützung von Ventilsitzen. Autom.-Engineers (1934), Juni und Juli, s. auch ATZ (1934), S. 454.

[34] E. R. Gadd, Metallkundliche Aufgaben bei der Herstellung von Flugmotoren. J. R. Aeron. Soc. (1936), S. 622.

[35] R. Jardine und R. S. Jardine, Hochleistungsventile und Zubehörteile. SAE-J. (1935), S. 267.

[36] Flugmotoren-Baustoffe. ATZ (1937), S. 305.

[37] Ventilstähle von Krupp. ATZ (1934), S. 357.

[38] E. Schmidt und H. Mann, Werkstoffe für Auslaßventile. ATZ (1936), S. 303.

[39] M. Christian, Einige Entwicklungsfragen des Flugmotorenbaues. ATZ (1938), S. 153.

[40] P. M. Heldt, Alloys superior to carbon steel in endurance test of valve springs.

[41] H. R. Ricardo, Höhenmotoren. Thermodynamik und Gemischbildung. Reale Accad. d'Ital. 1935. Übersetzung. ZWB-Nr. 249.

[42] J. Musatti und G. Calbiani, Die Schraubenfedern. La metallurgia italiana 1932, Juni/Juli.

[43] E. Drucker, Liefergrad schnellaufender Viertaktvergasermotoren. ATZ (1934), S. 359.

Digitized by Google

Untersuchung der Gaswechselvorgänge verschiedener Ventilsteuerungen und die erzielbaren Grenzwerte von ε, p_{me} und b_e.

Von Th. Hoock, Köln.

Die Leistung großer Flugmotoren wird begrenzt durch das Füllungsgewicht, das bei den hohen Geschwindigkeiten angesaugt werden kann und durch die Klopfneigung, die hauptsächlich durch das heiße Auspuffventil eingeleitet wird. Eine erhebliche Steigerung der Leistung ist möglich, wenn eine Steuerung verwendet wird, die Gaswege mit geringen Widerständen und größeren Durchlässen bietet. Außerdem müssen die Wände des Brennraumes eine niedrige und möglichst gleichmäßige Temperatur erhalten, um auch bei höherer Verdichtung klopffreien Betrieb zu sichern.

Da Versuche zeigen, daß die Klopffestigkeit und der Kolbendruck bei Motoren mit Drehventil wesentlich größer ist als bei gleichen Motoren mit Tellerventilen, werden Meßergebnisse verwendet, um die erzielbaren Grenzwerte für das Verdichtungsverhältnis, den mittleren Kolbendruck und den spezifischen Brennstoffverbrauch großer Flugmotoren zu ermitteln.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Wie läßt sich der Liefergrad der Motoren mit Tellerventilen verbessern?
III. Wie wird der Liefergrad des Motors mit Drehventil verbessert?
IV. Gaswechselvorgänge bei Ventilüberschneidung im oberen Totpunkt.
V. Die Grenzwerte der Verdichtung.
VI. Vergleich der Kolbendrücke verschiedener Ventilsteuerungen.
VII. Welcher Brennstoffverbrauch ist bei Drehventilmotoren zu erreichen?
VIII. Schrifttum.

I. Einleitung.

Der Bearbeitung der Aufgabe, die Entwicklungsmöglichkeiten von Ventilsteuerungen großer Flugmotoren und ihre Grenzwerte zu suchen, stellen sich noch erhebliche Schwierigkeiten entgegen.

Es kann nur der Versuch gemacht werden, aus den wenigen vorliegenden Meßergebnissen an einer neuen Steuerung die dem Verfasser vorschwebenden Möglichkeiten aufzuzeigen, denn ein exakter experimenteller oder rechnerischer Vergleich ist daraus noch nicht möglich.

Es hätte nur einen geringen praktischen Wert z. B. aus den vielen Patentanmeldungen von Ventilsteuerungen das scheinbar Aussichtsreichste herauszugreifen und es in den Kreis der Untersuchung einzubeziehen.

Es erscheint zweckmäßiger, sich auf die Konstruktionen zu beschränken, die auch ausgeführt wurden, über die verläßliche Versuchswerte vorliegen und sich praktisch schon in irgendeiner Form bewährt haben.

Es sollen deshalb nur Steuerungen besprochen werden, die schon soweit ausgereift sind, daß sie eine Nachprüfung von anderen Seiten [1] erfahren konnten. Auf Konstruktionen, über die keine zuverlässigen Messungen vorliegen, ist nicht eingegangen.

Bei dieser Auslese bleiben zur Zeit nur zwei Steuerungen übrig, die einen Anspruch darauf erheben können, die erstrebte Verbesserung der Ventilsteuerung zu bringen, nämlich der Burtgleitschieber [2] und der Walzendrehschieber von Cross [3].

Eine Ventilsteuerung, die die auf einen sehr hohen Entwicklungsstand gebrachte Normalform der Tellerventile verdrängen oder ersetzen will, muß nicht nur eine bessere Füllung bei höheren Kolbengeschwindigkeiten geben, sie muß auch eine klopffestere Brennraumform haben, um die Verdichtung steigern zu können und die Temperaturen müssen sich sicher beherrschen lassen. Dazu kommen noch die Forderungen nach mechanischer Einfachheit für die Ausführung und den Betrieb.

II. Wie läßt sich der Liefergrad der Motoren mit Tellerventilen verbessern?

Die Reibungswiderstände, die beim Ansaugen der Ladung überwunden werden müssen, sind am größten am Vergaserdurchgang und an den Ventilen, denn hier sind die Querschnitte am kleinsten und die Einschnürungen, die Gasgeschwindigkeiten und die Wirbelung am größten.

Eine Verringerung der Widerstände durch Vergrößerung der Ventildurchmesser ist nicht durchführbar und auch der Erhöhung des Ventilhubes werden durch die Beschleunigungskräfte, besonders wenn die Drehzahl noch weiter gesteigert werden soll, eine Grenze gesetzt.

Die Gasgeschwindigkeit an den Ventilen hat daher Grenzwerte erreicht, deren Überschreitung einen schnellen Abfall der Kolbendruckkurve bringt.

Es ist nicht anzunehmen, daß durch Verminderung der Widerstände beim Ansaugen von Luft oder Gemisch und beim Ausschieben der verbrannten Gase die Füllung von Flugmotoren wesentlich verbessert werden kann, nachdem die Form der Gasführungen, die Form der Ventile, Ventildurchmesser und Ventilhub auf Grund der jahrelangen Arbeit der Ingenieure aller Länder auf einen Bestwert gebracht wurden.

Die Reibungswiderstände in den verschieden langen Ansaugleitungen der Reihenmotoren verursachen verschiedene Füllungen der einzelnen Zylinder. Auch die Selbstaufladung der einzelnen Zylinder bei Änderung der Drehzahl wird hierdurch verschieden. Da die Temperatur des mit dem magersten Gemisch arbeitenden Zylinders die Gesamtleistung des Motors bestimmt, ermöglicht die Benzineinspritzung in jeden Zylinder die Füllung auf alle Zylinder besser zu verteilen und damit die Leistung zu steigern. Bei der Benzineinspritzung werden auch die Widerstände vermindert, die beim Vergaserbetrieb durch die hohe Luftgeschwindigkeit am Durchgangsquerschnitt und durch die Wirbelung an der Drossel entstehen.

Auch der notwendige Kompromiß zwischen Brennstoffverbrauch und Ventilzeiten läßt eine Steigerung des Liefergrades nicht zu.

Da das einströmende Gas an den Ventilen die größten Widerstände zu überwinden hat, muß zur Weiterentwicklung ein Weg gefunden werden, sie zu verkleinern. Diese Möglichkeit bieten die Steuerungen, die einen freien, ungehinderten Ein- und Austritt der Gase in den Zylinder gestatten, z. B. der Gleitschieber und der Walzenschieber. Bei diesen trifft die Gassäule beim Passieren der Ventilöffnungen nicht mehr, wie bei dem ganz geöffneten Tellerventil, auf einen hohen Widerstand, den Ventilteller, um den sie mit starker Einschnürung und Wirbelung herum muß, sondern sie kann ohne Widerstand frei hindurchströmen.

Das größte Ladungsgewicht wird erreicht, wenn das Brennstoffgemisch beim Saughub nur soweit erwärmt würde,

Digitized by Google

daß alle Brennstofftröpfchen noch mit Sicherheit verdampft werden. Bei der Überschreitung dieser Temperatur durch Heizung der Frischladung oder Mischen mit den heißen Restgasen wird das Volumen vergrößert und damit das Ladegewicht und der Nutzdruck verkleinert.

Die Mischung des Frischgases mit den Restgasen verursacht die stärkste Erwärmung. Das Verdichtungsverhältnis gibt hierfür ungefähr einen Anhalt. Da das Verdichtungsverhältnis bei Tellerventilmotoren nur $\varepsilon = 6$ bis 7 betragen kann, bleibt noch viel verbrauchtes Gas im Zylinder. Beim Ansaugen wird die Frischladung ferner beheizt durch die Ansaugleitung, den Krümmer des Einlaßventils, die Ventilführungen, die Ventilschäfte und Teller, durch den Kopf, die sehr heißen Auslaßventile, die Zylinderwand nud den heißen Kolbenboden.

Es ergeben sich zwei Möglichkeiten das Ladungsgewicht zu vergrößern, nämlich durch Verminderung der Restgase, also durch Steigerung der Verdichtung oder durch die Wahl einer Steuerung, die infolge der niederen Temperatur im Brennraum auch die Frischladung während des Ansaughubes weniger erwärmt, gleichzeitig die Restgase möglichst ganz ausspült und die höchste Verdichtung zuläßt.

Eine geringe Steigerung der Verdichtung ist besonders bei luftgekühlten Motoren dadurch möglich, daß man die Temperatur im Brennraum senkt.

Der größte Teil der Wärme wird bei luftgekühlten Motoren vom stark verrippten Zylinderkopf abgeführt, während der untere Teil des Zylinders verhältnismäßig niedrige Temperaturen annimmt und an der Kühlwirkung einen prozentual kleinen Anteil hat.

Ersetzt man den Stahlzylinder durch einen Aluminiumzylinder, dann entsteht ein intensiver Wärmefluß vom Zylinderkopf zum Zylinderfuß hin in das Kurbelgehäuse. Das Temperaturniveau zwischen Kopf und Zylinder wird also besser ausgeglichen, als beim Aluminiumkopf mit Stahlzylinder. Da der Aluminiumzylinder etwa dreifachen Querschnitt bei gleichem Gewicht haben kann und auch die Leitfähigkeit des Aluminiums etwa dreimal so groß ist wie die von Stahl, wird die Wärmebelastung des Kopfes wesentlich gesenkt. Hierdurch erhalten die Auspuffventile eine niedrigere Temperatur und die Temperatur des Brennraumes, die die Verdichtungsgrenze festlegt, wird auch niedriger, so daß ε heraufgesetzt werden kann.

Um welchen Betrag das Verdichtungsverhältnis bei großen, luftgekühlten Flugmotoren erhöht werden kann, laßt sich nicht ohne weiteres sagen, weil dies von dem Verhältnis der wirksamen Kühlfläche des Kopfes zu der des Stahlzylinders abhängt.

Die Verwendung von Aluminiumzylindern mit eingepreßten Büchsen aus austenitischem Stahl hat sich im Bau von Motorradmotoren seit einigen Jahren bewährt und geholfen. die Leistungen wesentlich zu steigern. Auch hier bestimmte die hohe Brennraumtemperatur mit dem glühenden Auspuffventil die Grenze für die Leistungssteigerung. Das Verdichtungsverhältnis eines 350-cm³-Rennmotors kann mit Hilfe des Aluminiumzylinders auf einen Wert von $\varepsilon = 8{,}3$ gesteigert werden, unter Verwendung eines Brennstoffes 50% Benzin, 50% Benzol, OZ rund 85. Die Leistung eines solchen Motors beträgt 32 PS bei $n = 7000$, er hat also einen mittleren Nutzdruck $p_{me} = 11{,}8$ kg/cm². Dies ist ein sehr beachtliches Ergebnis für einen Motor ohne Lader bei einer Kolbengeschwindigkeit von rd. 20 m/s.

Die Ausführung mit Stahllaufbüchse im Aluminiumzylinder ist jedoch nicht die beste Lösung, denn die Wärme muß durch die Büchse und durch den sehr engen Spalt, der zwischen Büchse und Zylinder auch bei glattesten Oberflachen bestehen bleibt, hindurch. Die Wärmeleitfähigkeit des austenitischen Stahls beträgt aber nur etwa ¼ bis ⅕ von Grauguß. Der Wärmefluß durch die Büchse hindurch ist also schlecht und die Ableitung der Kolbenwärme durch die Ringe wird auch eingeengt.

Eine bessere Lösung stellt der Aluminiumzylinder von Cross ohne Laufbüchse dar. Hierbei laufen die gehärteten Kolbenringe direkt in der Bohrung des Aluminiumzylinders, während der Aluminiumkolben durch die Kolbenringe oben und unten zentrisch geführt wird, so daß sich Kolben und Zylinderlauffläche nicht berühren. Beschreibung dieser Ausführung siehe Motorkritik (1936), Heft 4.

Versuche an einem englischen luftgekühlten Motorradmotor haben eine Temperatursenkung um 40° am Kopf ergeben.

Versuche, die zur Nachprüfung in Deutschland angestellt wurden, ergaben an einem 400-cm³-Motor, bei dem der Gußzylinder durch einen Aluminiumzylinder ohne Laufbüchse ersetzt wurde, trotz der Trennfuge zwischen beiden, also mit einem schlechten Wärmeübergang, daß das Verdichtungsverhältnis fast auf eine ganze Einheit von $\varepsilon = 5{,}6$ auf 6,5 gesteigert werden konnte. Dabei waren die Temperaturen von Ventil und Kolben, infolge des höheren thermischen Wirkungsgrades und des größeren Wärmegefälles vom Brennraum radial durch den Aluminiumzylinder zur Kühlluft, niedriger als beim Gußzylinder, was durch das Aussehen dieser Teile im Dauerbetrieb klar ersichtlich war.

Je besser der Kontakt zwischen Kopf und Zylinder ist, um so intensiver ist der Temperaturausgleich zwischen beiden. Der Bestwert wird erreicht, wenn Zylinderkopf und Zylinder aus einem Stück einer geeigneten Aluminiumlegierung gegossen werden.

Da die Versuche mit dem Cross-Aluminiumzylinder bei kleinen Motoren recht beachtliche Ergebnisse gebracht haben, würde es sich lohnen, durch genaue Vergleichsmessungen auch die erzielbaren Vorteile bei einem größeren Einzylinder festzustellen.

Für luftgekühlte Motoren mit Tellerventilen wäre damit eine verhältnismäßig einfache Lösung gegeben, die Verdichtung und die Leistung etwas zu steigern, den Brennstoffverbrauch zu senken und die Zeiten zwischen Überholungen zu verlängern.

Eine Erhöhung des Nutzdruckes durch weitere Steigerung der Verdichtung ist mit Hilfe eines Aluminiumzylinders bei den hohen Temperaturen der Auspuffventile nicht möglich.

Das Ideal ist zweifelsohne der Brennraum, bei dem alle Flächen die gleiche Temperatur haben. Wenn also ein Weg gefunden würde, die Temperatur der Auspuffventile auf etwa 300° zu vermindern, dann könnte das Verdichtungsverhältnis bedeutend erhöht werden.

Versuche mit Cross-Drehventilmotoren [3], in denen dieser Idealzustand annähernd verwirklicht ist, haben gezeigt, daß es möglich ist, beim Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 1:11$ und darüber ein Brennstoffgemisch mit Benzin OZ 65 dauernd klopffrei zu verbrennen. Die Temperatur der den Brennraum einschließenden Flächen muß dabei sehr niedrig sein, denn das Steuerorgan konnte dauernd seinen dünnen Schmierfilm halten, ohne zu verbrennen oder zu verkoken. Die Versuche wurden an luftgekühlten, kleinen Einheiten gemacht, die im praktischen Betrieb nur intermittierend belastet werden. Zur Bestimmung der Grenzwerte von Verdichtung, Liefergrad, Nutzdruck, Drehzahl, Temperatur und Verbrauch an großen, luftgekühlten Einheiten müßten Versuche durchgeführt werden.

Bei Flüssigkeitskühlung ist die Beherrschung der Temperatur zur Sicherung der Schmierung des Steuerorgans sehr viel einfacher, so daß die Aufrechterhaltung der maximalen Temperatur von etwa 180° für die Schmierflächen leicht möglich ist, wie Versuche an wassergekühlten Wagenmotoren bereits gezeigt haben.

Eine weitere Erhöhung des Ladungsgewichtes ist also nur noch möglich durch Verwendung einer Steuerung, die einen kühleren Brennraum hat. Das bedeutet aber eine völlige Abkehr von der Steuerung mit Tellerventilen.

III. Wie wird der Liefergrad des Motors mit Drehventil verbessert?

Da diese Steuerung erst am Beginn ihrer Entwicklung steht, liegen Forschungsergebnisse nicht vor, so daß exakte Vergleiche nicht angestellt werden können.

Digitized by Google

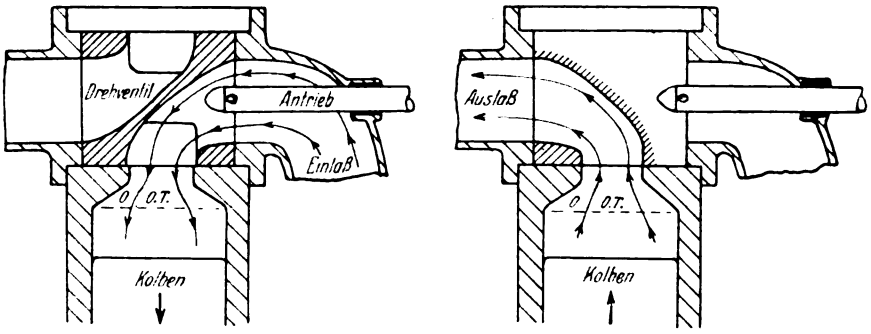


Bild 1. Ein- und Ausströmen der Gase durch den rechteckigen, uneingeengten Querschnitt eines Drehventils.

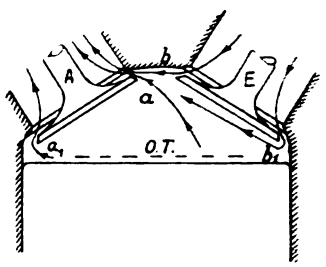


Bild 2. Gasbewegung in einem Tellerventil-Motor im o.T.

a und a_1 ausströmende Restgase, b und b_1 einströmende Frischgase, b Frischgase, die bei der Ventil-Überschneidung in den Auspuff entweichen.

Es kann also nur aufgezeigt werden, wie die Gase bei der Cross-Drehventilsteuerung verlaufen und welche Vorteile sich gegenüber der Ventilsteuerung ergeben.

Wir können uns dabei auf die Wege der Gase im Drehventil und Verdichtungsraum beschränken, denn die Zu- und Ableitungen bleiben wie bei der Tellerventilsteuerung, (Bild 1).

Das Frischgas strömt in einem weiten Krümmer zentral in das Drehventil ein und trifft dabei auf die zentrisch mit dem Drehventil laufende Antriebswelle und den Querarm mit stromlinienförmigem Querschnitt. Der Durchgangsquerschnitt an dieser Stelle kann immer so reichlich gewählt werden, daß nur ein geringer Verlust durch Wirbelung entsteht.

Das Frischgas trifft dann auf einen zweiten Krümmer, die Trennwand im Drehventil mit glatter Oberfläche ohne Vorsprünge. Diese Fläche war durch die Auspuffgase auf etwa 200° erwärmt und sorgt jetzt für die Verdampfung des Gemisches.

Der Druckverlust von dem Ansaugkrümmer bis zum Eintritt in die Öffnung des Zylinders wird etwa dem Verlust in der Ventilglocke beim Tellerventil entsprechen.

Der Reibungswiderstand beim Durchgang durch die große und glatte Gasöffnung im Zylinder ist der geringste, der erreicht werden kann. Die Form des Verdichtungsraumes kann die günstigste Form einer Düse erhalten.

In den Zwischenstellungen des Ventils wird das Gas wohl um die Kanten des Drehventils wirbeln (Bild 3). Die Wirbel werden durch den engen Einlaß zum Verdichtungsraum jedoch zusammengehalten. Die Flächen, die die Gase bestreichen, sind kleiner als beim Tellerventil und da auch die Temperaturen niedriger sind, wird auch das Frischgas weniger erwärmt.

Durch das zentrale Einströmen wird die Wirbelung kleiner als beim Tellerventil und das Gas nimmt weniger Wärme von der Zylinderwand auf. Die Erwärmung des Gases durch den Kolbenboden ist die gleiche wie beim Tellerventil.

Wir erhalten also bei dieser Steuerung die geringste Volumenvergrößerung und das höchste Ladungsgewicht.

Das Ausschieben der verbrannten Gase erfolgt durch dieselbe Öffnung mit glatter Oberfläche und ohne Wirbelung, so daß auch die Widerstände klein sind. Die Widerstände, die sonst beim Herumströmen der Gase um den Auspuffventilteller entstehen, fallen ganz fort.

Die Gase treffen dann auf die Trennwand im Drehschieber, die ganz glatt ist, werden um 90° abgelenkt und fließen ohne jede Einschnürung und Wirbelung in den Auspuff.

Durch die gleichförmige Drehbewegung des Schiebers erfolgt das Öffnen und Schließen schneller und mit größerem Querschnitt als bei der Tellerventilsteuerung.

Die Summe der Reinungswiderstände wird also wesentlich geringer sein als beim Tellerventil.

Die Gasgeschwindigkeit in der Zylinderöffnung ist sehr klein, weil nur eine Öffnung für Ein- und Auslaß nötig ist. Die Vergrößerung des freien, glatten Querschnittes auf 25 bis 30% der Kolbenfläche ermöglicht Gasgeschwindigkeiten, die bei 12 m/s Kolbengeschwindigkeit 40 bis 48 m/s und 50 bis 60 m/s bei 16 m/s Kolbengeschwindigkeit betragen, also erheblich niedriger sind als beim Tellerventil und auch beim Burtschieber.

IV. Gaswechselvorgänge bei Ventilüberschneidung im oberen Totpunkt.

a) Tellerventilsteuerung.

Das Schließen des Auslaßventiles nach o.T. wird dazu benutzt, die Frischladung durch die Strömungsenergie der Auspuffgase zu beschleunigen, um die Pumpverluste zu verkleinern.

Während des Ausschiebens der Gase fließen diese in Richtung a—a_1 (Bild 2). Da der Ventilhub, durch die Nockenform bestimmt, in der Nähe des o.T. klein ist, vergrößern sich die Widerstände am Ringspalt, so daß der Abflußder Gase behindert wird.

Sobald sich das Einlaßventil öffnet, wird das Frischgas beschleunigt und strömt in den Brennraum. Entsprechend den Widerständen am Einlaßventil verteilt sich der Gasstrom aber nicht gleichmäßig um den Ventilteller, sondern nimmt den Weg des kleinsten Widerstandes, nämlich über den inneren Rand der Ventile, strömt also hauptsächlich in Richtung b. Dabei wird der obere Teil des Brennraumes gut gespült.

Ein Teil der Frischgase strömt um die äußere Seite des Randes bei b_1 herum, strebt der Richtung a nach und spült dabei den Raum unter dem Einlaßventil. Der Raum unter dem Auslaßventil zwischen a—a_1 wird also schlecht gespült und bleibt mit Restgas gefüllt.

Ein späteres Schließen des Auslaßventils könnte eine bessere Spülung bringen, aber auch höheren Verbrauch.

Inzwischen ist der Kolben nach unten gegangen und versucht das Gas bei b anzusaugen. Dies gelingt ihm erst, wenn er einen so großen Unterdruck erzeugt hat, um die Bewegung des Gases in Richtung b zu überwinden und in den Brennraum zu lenken.

Schließt das Auspuffventil, dann fließt das Frischgas mit starker Wirbelung weiter über die sehr heiße Stelle des Kopfes zwischen den Ventilen, an den glühenden Auspuffventilen vorbei in den Brennraum.

Wir können also feststellen, daß ein großer Betrag Restgase im großen Brennraum (ε = 6 bis 7) verbleibt, welches die Füllung verschlechtert und daß durch den Pumpverlust die angesaugte Füllung kleiner wird. Mit dem Gewicht und der Güte der Füllung ist die Druckkurve des Tellerventilmotors b in Abschnitt VI erhalten.

Die bereits im Kopf kräftig angeheizten Gase folgen dann dem abwärtsgehenden Kolben und streichen mit starker Wirbelung an der Zylinderwand entlang, um sich nochmals auf den heißen Kolbenboden durchzuwirbeln und zu erhitzen. Wahrscheinlich wird durch diese Wirbelung im Saughub auch eine Drehbewegung der Gase erzwungen, die nur auf Kosten der Pumparbeit erfolgen kann.

b) Cross-Drehventilsteuerung.

Hier werden die Frischgase gezwungen, einen anderen Weg zu nehmen als beim kugeligen Brennraum der Ventilsteuerung.

Digitized by Google

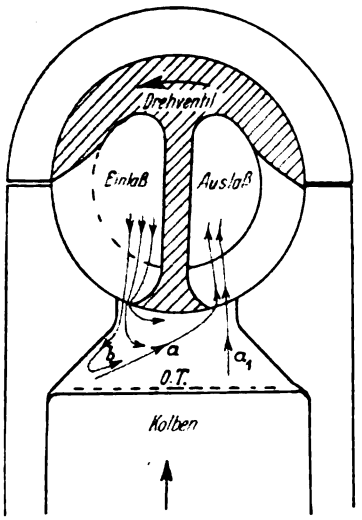


Bild 3 (links). Gasbewegung beim Drehventil-Motor im o. T. a und a_1 ausströmende Restgase, b einströmende Frischgase. Die Mittelwand des Drehventils richtet die Frischgase, so daß der Brennraum gut ausgespült wird.

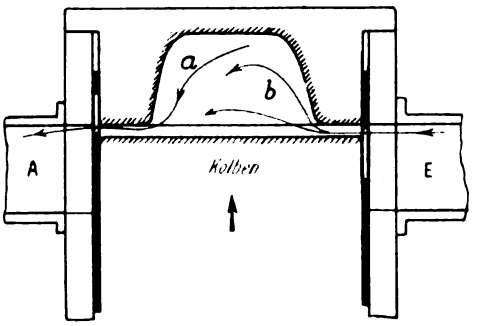


Bild 4. Gasbewegung beim Motor mit Burtschieber im o. T. a ausströmende Restgase, b Frischgase, die den Brennraum ausspülen.

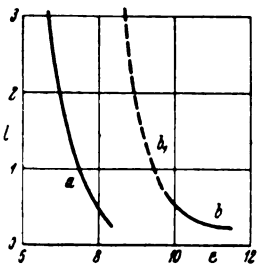


Bild 5.

a Verdichtungsverhältnis von Motoren mit Tellerventilen bei OZ 85 in Abhängigkeit vom Zylinderinhalt.

b Verdichtungsverhältnis von Motoren mit Cross-Drehventil bei OZ 65 und 0,25—0,5 l Zylinderinhalt.

b_1 Verdichtungsverhältnis von Motoren mit Cross-Drehventil bei OZ 74—87 und größerem Zylinderinhalt.

Wenn die Auslaßöffnung zu schließen beginnt, strömen die verbrannten Gase in Richtung a—a_1 (Bild 3) in den Auslaß. Sobald die Einlaßseite öffnet, werden die Frischgase durch die Auspuffgase beschleunigt, streichen aber dabei nicht so bequem wie bei den Tellerventilen (Bild 2) auf kürzestem Wege direkt in den Auslaß, sondern behalten, durch die Mittelwand des Drehventils gezwungen, ihre Bewegungsrichtung bei und spülen die linke Seite des Brennraumes bei b aus, um sich dann der Bewegungsrichtung der Auspuffgase a—a_1 anzuschließen.

Es wird auch ein Teil der Frischgase um die Kante der Mittelwand des Drehventils herumwirbeln, aber die nachdrückende Gassäule kann bei besten Ventilzeiten den kleinen Brennraum ($\varepsilon = 11{,}5$) bis zum Schließen der Auslaßöffnung fast ganz von den Restgasen reinigen. Hierbei spielt die größere Geschwindigkeit, mit der das Drehventil schließt und öffnet und die günstigeren Zeitquerschnitte gegenüber der Nockenbetätigung eine maßgebliche Rolle.

Diese gute Ausspülung der Restgase gibt ein reines Gasgemisch und den bestmöglichen Wärmeinhalt der Füllung.

Beim Drehventilmotor wird also der Nutzdruck größer sein als sich bei einem Vergleich mit einem Tellerventilmotor bei gleicher Verdichtung rechnerisch ergibt.

Da weniger Frischgas direkt in den Auspuff gelangt, ist auch der Brennstoffverbrauch bei dieser Steuerung günstiger als beim Tellerventil mit gleicher Verdichtung.

c) Burtschieber.

Beim Burtschieber in den Bristolmotoren strömt das Frischgas auf der einen Seite ein und auf der gegenüberliegenden Seite aus. Solange die Auslaßschlitze im o.T. geöffnet sind, strömt das verbrannte Gas über die linke Seite des Kolbens entlang, wobei ein weiterer Teil der verbrannten Gase aus dem in der Mitte über dem Kolben liegenden Verdichtungsraum mit entfernt wird (a in Bild 4).

Beim Öffnen der Einlaßschlitze folgt das Frischgas dem Strom der Auspuffgase nach der anderen Seite des Kolbens. Dabei muß das Frischgas den stark zurücktretenden Verdichtungsraum durch Wirbelung ausspülen. Mangels Konstruktionseinzelheiten kann die Wirksamkeit der Spülung nicht nachgeprüft werden.

Der Liefergrad wird aber nicht so groß werden können wie bei der Cross-Drehventilsteuerung, weil Restgase in dem zurückspringenden Verdichtungsraum bleiben, die beim Saughub die Reinheit und den Wärmewert der Ladung vermindern. Die Pumpverluste sind kleiner als bei Tellerventilen, weil der Frischgasstrom sich leichter in den Zylinder ablenken läßt.

Es ist anzunehmen, daß der Spülverlust auch kleiner ist als bei den Tellerventilmotoren gleicher Bohrung, denn der Einlaß der Gase liegt vom Auslaß immer um die Bohrung entfernt. Dieses Maß ist um ein Vielfaches größer als die Entfernung zwischen Einlaß- und Auslaßventil (Bild 2). Der sich hierbei ergebende geringere Brennstoffverlust drückt sich auch in dem für die Bristolmotoren angegebenen niedrigen Verbrauch aus.

Aus der Bewegungsrichtung der Gase beim Burtschieber ergeben sich auch die Nachteile dieser Steuerung in bezug auf die Wärmebeherrschung. Da die Frischgase immer durch die Schlitze auf der einen Seite eintreten, wird der Aluminiumzylinder, der Stahlschieber und der Kolben auf der einen Seite dauernd gekühlt, während auf der anderen Seite Kolben, Schieber und Zylinder durch die Auspuffgase nur erwärmt werden. Es ist deshalb äußerst schwierig den Kolben und den Schieber zylindrisch und rund zu erhalten. Die Überlastbarkeit dieser Motorform ist sehr eng begrenzt.

V. Die Grenzwerte der Verdichtung.

Bei der Untersuchung der Gaswechselvorgänge bei der Tellerventilsteuerung fanden wir, daß die Temperaturen im Brennraum für die Brennstoffe zu hoch sind und verhindern die Füllung oder die Verdichtung zu steigern.

Um einen Anhalt über die Größe des bereits erreichten und später zu erwartenden Verdichtungsverhältnisses bei Ventilsteuerungen zu bekommen, ist die Kurve a in Bild 5 gezeichnet. Sie zeigt die Abhängigkeit des Verdichtungsverhältnisses ε vom Zylinderinhalt bester Tellerventilmotoren.

Kleine luftgekühlte Motorradrennmotoren können $\varepsilon = 8$ bis 8,3 erhalten, bei einem Betrieb mit 50% Benzol und 50% Benzin. Die Oktanzahl dieses Gemisches beträgt etwa 85, hat also etwa eine Klopffestigkeit wie Benzin OZ 87.

Bei großen Flugmotoren liegt der Höchstwert für die Verdichtung bei $\varepsilon = 5$ bis 7, für einen Zylinderhubraum von 2 bis 3 l.

Bei kleinen luftgekühlten Motoren mit Cross-Drehventil dagegen kann die Verdichtung bei klopffreiem Betrieb und einem Brennstoff OZ 65 bis auf $\varepsilon = 11{,}5$ gesteigert werden.

Nach Versuchen an verschiedenen Motoren liegen die Grenzwerte für Motorengrößen von

250 cm³ bei $\varepsilon = 11{,}5$,
350 cm³ » $\varepsilon = 10{,}5$ bis 11,
500 cm³ » $\varepsilon = 10$.

Eine weitere Steigerung von ε mit einem Brennstoff OZ 80 bis 85 bringt auch keine Vorteile, weil der mechanische Wirkungsgrad durch die hohen Drücke wieder schlechter wird.

Da anzunehmen ist, daß die Gasverteilung auf die einzelnen Zylinder in Zukunft durch Benzineinspritzung in jeden Zylinder eine ebenso gute Leistung für jeden Zylinder ergeben wird wie bei den geprüften kleinen Einzylindermotoren, kann man die Kurve b in die punktierte Form b_1 verlängern. Es erscheint also angängig die so gefundenen Grenzwerte für Motoren mit Cross-Drehventil auch auf größere Einheiten anzuwenden.

Digitized by Google

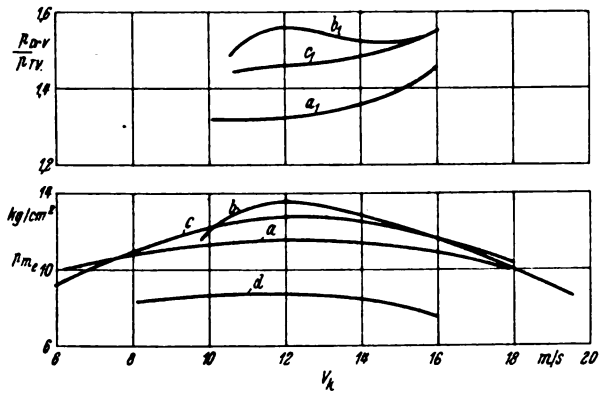


Bild 6 unten. Mittlere Kolbendrücke verschiedener Motorrad-Motoren in Abhängigkeit der mittleren Kolbengeschwindigkeit.

a 0,25 1-Zylinder-Motor mit Cross-Drehventil,
b 0,35 1- » » » » » »
c 0,35 1- » » » » » »
d 0,5 2- » » » Tellerventilen.

Bild 6 oben. a_1 b_1 c_1 Verhältnis des mittleren Kolbendruckes der Motoren mit Cross-Drehventil zu dem Kolbendruck des Tellerventil-Motors *d*.

Es ergibt sich hieraus, daß Motoren mit Cross-Drehventilsteuerung bei 2 bis 3 l Hubraum mit einem Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 9$ gebaut werden können, bei Verwendung eines Brennstoffes OZ 87.

Solange keine Versuche an großen, luftgekühlten Einzylindern vorliegen, um die Temperaturbeherrschung beurteilen zu können, kann diese Zahl nur als Schätzung gewertet werden. Es können aber keine Gründe gegeben werden, warum diese geschätzten Werte nicht zu erreichen wären. Bei wassergekühlten Motoren kann die Verdichtung vielleicht noch gesteigert werden, da die Beherrschung der Wärme hierbei sicherer ist als bei den luftgekühlten Motoren.

Die Grenzwerte der Verdichtung für Motoren mit Burtschieber werden etwa in der Mitte zwischen den Kurven *a* und b_1 liegen.

VI. Vergleich der Kolbendrücke verschiedener Ventilsteuerungen.

In Zahlentafel 1 und 2 sind die aus der Bremsung ermittelten Leistungen und Nutzdrücke von drei Cross-Drehventilmotoren und zwei Tellerventilmotoren eingetragen.

Um auch einen Vergleich der Kolbendrücke bei den kleinen Motoren mit Cross-Walzenventil mit großen Flugmotoren zu ermöglichen, würde der mittlere Kolbendruck in Abhängigkeit von der mittleren Kolbengeschwindigkeit aufgetragen.

Die Kurven *a*, *b*, *c* in Bild 6 zeigen die Kolbendrücke p_{me} von drei luftgekühlten Einzylinder-Motorradmotoren.

Zum ersten Vergleich dient die Druckkurve *d* eines englischen Triumph-2-Zylinder-Motorradmotors, luftgekühlt, mit einem Vergaser, 63 mm Bohrung, 80 mm Hub, 497 cm³, $\varepsilon = 1:7{,}2$. Dieser Motor wurde gewählt, weil er eine anerkannte Spitzenleistung der englischen Motorrad-Industrie darstellt. Seine Kolbendruckkurve verläuft sehr flach, so daß ein $p_{me} = 8$ kg/cm² noch bei 15 m/s Kolbengeschwindigkeit erreicht wird. Seine Leistung beträgt 25 PS bei $n = 5800$ U/min.

Der Kolbendruck des BMW-Motors R 5, 500 cm³, 2-Zylinder, mit einem Vergaser pro Zylinder, hat einen Kolbendruck $p_{me} = 8{,}3$ kg/cm² bei $n = 5500$ U/min entsprechend 12,5 m/s Kolbengeschwindigkeit.

Beim Vergleich der Kurven fällt zuerst auf, daß die Kolbendrücke der Motoren mit Drehventil viel höher liegen als die der Motoren mit Tellerventilen.

Die erzielte Steigerung ist durch die Verhältniszahl ausgedrückt:

Zahlentafel 2. Kolbendrücke und Gasgeschwindigkeiten der Cross-Drehventilmotoren.

mittlere Kolbengeschwindigkeit v_k		Motor *a* 250 cm³ 62 × 82	Motor *b* 350 cm³ 70 × 90	Motor *c* 350 cm³ 71 × 88
12 m/s	p_{me} kg/cm²	11,5	13,6	12,7
	n U/min	4400	4000	4100
	v_g m/s	48	43	43
14 m/s	p_{me} kg/cm²	11,3	12,7	12,4
	n U/min	5100	4650	4800
	v_g m/s	56	50	50
16 m/s	p_{me} kg/cm²	10,8	11,3	11,6
	n U/min	5850	5350	5450
	v_g m/s	64	58	58
18 m/s	p_{me} kg/cm²	10,2	9,9	10,4
	n U/min	6600	6000	6150
	v_g m/s	72	65	65
19,5 m/s	p_{me} kg/cm²		8,8	
	n U/min	—	6500	—
	v_g m/s		70	
Ventilöffnung / Kolbenfläche	%	25,2	27,7	27,7

Zahlentafel 1. Leistung und Nutzdrücke von Motorradmotoren.

	Motor *a*		Motor *b*		Motor *c*		Motor *d*		Motor *e*	
Hersteller	Cross		Cross		Cross		Triumph		BMW	
Zyl.-Zahl	1		1		1		2		2	
Zyl.-Volumen	247		348		348		497		494	
Bohr. u. Hub	62 × 82		70 × 90		71 × 88		63 × 80		68 × 68	
n	PS	p_{me}	PS	p_{me}	PS	p_{me}	PS	p_{me}	PS	p_{me}
2000	5,4	9,8	—	—	7,2	9,3	—	—		
3000	9,1	10,9	—	—	13,5	11,6	14,0	8,45		
4000	12,6	11,4	21,0	13,6	19,7	12,7	19,1	8,65		
5000	15,4	11,2	23,2	12,0	23,3	12,0	23,6	8,55		
5500	16,6	10,9	23,2	10,9	24,3	11,4	25,0	8,2	25	8,3
6000	17,4	10,5	23,1	10,0	25	10,7	25,2	7,6		
6500	17,5	9,75	22,0	8,75	—	—	—	—		
Verdichtung	$\varepsilon = 11$		11		11,5		7,2		6,7	
Ventil-Dmr.	55 mm		68 mm		68 mm		—		—	
Ventilöffnung	2,8 × 2,8 = 7,8 cm²		3,2 × 3,2 = 10,2 cm²		3,2 × 3,2 = 10,2 cm²		—		—	
Ventilzeiten	$E_ö$ 19° vor o. T. E_s 60° nach u. T. $A_ö$ 60° vor u. T. A_s 19° nach o. T.		$E_ö$ 20° vor o. T. E_s 50° nach u. T. $A_ö$ 50° vor u. T. A_s 20° nach o. T.		$E_ö$ 12° vor o. T. E_s 45° nach u. T. $A_ö$ 45° vor u. T. A_s 12° nach o. T.					

Digitized by Google

Die Höchstwerte betragen:

		Verhältniszahl: $\frac{p_{Dr.V.}}{p_{T.V.}}$
a) 250 cm³	11,5 kg	1,32
b) 350 cm³ m. Drehventilen	13,6 kg	1,56
c) 350 cm³	12,7 kg	1,46
d) 497 cm³ m. Tellerventilen	8,7 kg	1,0

Kolbendrücke von dieser Höhe sind bisher von keinem anderen Motor ohne Überladung erreicht worden. Diese Ergebnisse sind um so bemerkenswerter, weil die Motoren bei der hohen Verdichtung noch klopffrei mit einem Benzin OZ 65 arbeiten. Die Brennraumform ist also sehr klopffest.

Die Druckkurve *a* (Bild 6) mit einem Maximum von 11,5 kg/cm² verläuft besonders flach, da bei dem Entwurf dieses Motors [4] (Baujahr 1935) eine Touren-Charakteristik, d. h. ein weiter Regelbereich angestrebt wurde, so daß der Motor im Kraftrad eine Geschwindigkeitsregelung im direkten Gang von 12 bis 132 km/h zuließ.

Bei dem Motor *b* (Baujahr 1937) [4] dagegen wurde der Höchstwert von 13,6 kg/cm² dadurch erreicht, daß die günstigste Länge des steil nach oben gerichteten Ansaugstutzens (Fallstromvergaser) experimentell bestimmt wurde, um durch Abstimmung die Schwingungen der Gassäule die Selbstaufladung bei $n = 4000$ U/min auf ein Optimum zu bringen.

Dieses Ergebnis hat aber zur Folge, daß die Druckkurve vom Höchstwert bei kleineren und größeren Kolbengeschwindigkeiten schnell abfällt. Auf einen weiten Regelbereich des Motors wurde bewußt verzichtet, denn der Motor diente Sportzwecken und der sich durch die Selbstaufladung ergebende höhere Brennstoffverbrauch war ohne Bedeutung.

Der 350 cm³-Motor *c* (Baujahr 1938) unterscheidet sich außer in den Ventilzeiten von dem Motor *b* noch dadurch, daß der Ansaugstutzen kürzer war und horizontal verlief. Die Druckkurve *c* verläuft jetzt wieder flacher, die Selbstaufladung ist nicht mehr so deutlich erkennbar. Der Motor gestattete einen ebenso großen Regelbereich wie Motor *a*, nämlich von 19 bis 145 km/h. Die Kurve *c* zeigt ferner, daß der Motor mit Drehventil erst bei $V_k = 19{,}5$ m/s auf den Wert $p_{me} = 8{,}8$ kg/cm² fällt, den der Tellerventilmotor *d* als Höchstwert bei $V_k = 12$ m/s erreichte. Der Brennstoffverbrauch erreichte seinen niedrigsten Wert von 180 g_0PS h bei $n = 3800$ U/min.

Interessant ist das Zusammenfallen der Höchstwerte aller vier Motoren bei etwa 12 m/s Kolbengeschwindigkeit. Diese Tatsache ermöglicht einen Vergleich mit den Meßwerten großer Flugmotoren, die ja auch gewöhnlich ihren höchsten Kolbendruck bei 12 bis 13 m/s Kolbengeschwindigkeit erreichen.

Leider entzieht sich noch der genauen Untersuchung, welchen Anteil die Verdichtung und die bessere Füllung auf die Drucksteigerung hat.

Wir beschränken uns deshalb darauf, einen Vergleich der Kolbendrücke der vier Motoren untereinander anzustellen, um einen Einblick zu erhalten, wie die Drehventilmotoren sich bei Kolbengeschwindigkeiten über 12 m/s gegenüber dem Motor mit Tellerventilen verhalten.

Zu diesem Zweck wird die Verhältniszahl der Kolbendrücke bei verschiedenen Kolbengeschwindigkeiten berechnet. Die Kurven *a*, *b*, *c* in Bild 6 zeigen die Drucksteigerungen $p_{Dr.V.} : p_{T.V.}$ der drei Drehventilmotoren gegenüber dem Tellerventilmotor Kurve *d*.

Bei 12 m/s steigt der Druck beim Motor *a* schon um das 1,32fache, er wird bei 16 m/s sogar 1,45mal so groß, hieraus ist deutlich die bessere Füllung des Drehventilmotors gegenüber dem Tellerventilmotor erkennbar. Leider endet die Kurve *d* bei 16 m/s, sonst würde sich der Vorteil des Drehventils bei Kolbengeschwindigkeiten bis 20 m/s noch deutlicher zeigen.

Die Druckkurve des Motors *c* steigt noch stärker, denn es konnten hier bereits frühere Erfahrungen in der Konstruktion verwertet werden. Der Druck steigt bei 12 m/s im Verhältnis 12,7:8,7 = 1,46 und bei 16 m/s auf 11,6:7,5 = 1,55 (s. Kurve c_1).

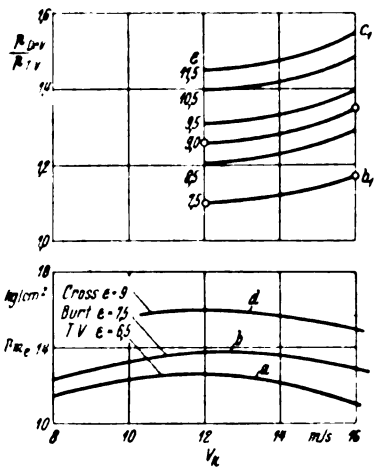


Bild 7 unten. Mittlere Kolbendrücke großer Flugmotoren in Abhängigkeit der mittleren Kolbengeschwindigkeit.
a Motor mit Tellerventil,
b » » Burtschieber,
d » » Cross-Drehventil.

Bild 7 oben. Verhältnis der mittleren Kolbendrücke bei Motoren mit Cross- oder Burtschieber (b_1) bei verschiedenen Verdichtungsverhältnissen.

Bei dem Rennmotor *b* liegt eine große Drucksteigerung (Kurve b_1) wohl bei 12 m/s, aber diese war durch die Selbstaufladung erzwungen. Die Drucksteigerung bei 16 m/s dagegen fällt mit der Kurve des Motors *c* zusammen; der Verlauf der Kurve b_1 ist also ungefähr der gleiche wie bei dem Motor c_1.

Zum zweiten Vergleich wird die von Kurtz [5] durchgeführte Gegenüberstellung eines sehr guten Flugmotors mit Ventilsteuerung und einem mit Schiebersteuerung benutzt, die ein ähnliches Bild gibt.

In Bild 7 ist *a* die Druckkurve des Tellerventilmotors, die oberhalb 12 m/s Kolbengeschwindigkeit stark absinkt, während die Druckkurve *b* des Schiebermotors bis 16 m/s noch flach verläuft. Die Kolbendrücke, Kolben- und Gasgeschwindigkeiten sind in Zahlentafel 3 eingetragen.

Zahlentafel 8.

		Tellerventil $\varepsilon = 6{,}5$	Burtschieber $\varepsilon = 7{,}5$
$n = 2300$	p_{me}	12,7 kg/cm²	13,9 kg/cm²
	v_k	12 m/s	12 m/s
	v_g	60 m/s	85 m/s
$n = 3000$	p_{me}	11,0 kg/cm²	12,9 kg/cm²
	v_k	16 m/s	16 m/s
	v_g	78 m/s	110 m/s

Bei 12 m/s ist die Steigerung des Nutzdruckes des Schiebermotors ~ 10%, bei 16 m/s ist der Gewinn aber auf 17% (Verhältniszahl 1,17) gestiegen.

Trägt man wieder die Verhältniszahlen beider Drücke in Bild 7 ein, dann erhält man eine Kurve b_1, die eine ähnliche Form der Motoren mit Drehventil in Bild 6 hat.

Setzt man den Wirkungsgrad des Wärmeumsatzes beim Burtschieber gleich dem des Drehventilmotors, dann kann man einen Überschlag machen, welche Drucksteigerungen bei anderen Verdichtungen zu erzielen sind. Dabei ist zu berücksichtigen, daß von einer Verdichtung $\varepsilon = 6$ bis 6,5 ausgegangen war.

Werte für $\varepsilon = 8{,}5$, 9,5 und 10,5 sind zwischen die früher gefundenen Verhältniszahlen Kurve b_1 (Burtschieber = 7,5) und c_1 (Drehschieber $\varepsilon = 11{,}5$) eingezeichnet. Eine Korrektur ist vorgenommen, um zu berücksichtigen, daß eine Steigerung von $\varepsilon = 6{,}5$ auf 8,5 einen größeren Druckgewinn bringen wird als eine Steigerung von $\varepsilon = 10{,}5$ auf 11,5.

Wünscht man z. B. zu wissen, welchen Kolbendruck bei der höchstzulässigen Verdichtung $\varepsilon = 9$ ein Motor mit Dreh-

Digitized by Google

ventil haben wird, dann ist nur nötig, den am Tellerventilmotor gemessenen Wert mit dem aus der Kurvenschar abgelesenen Wert, also mit etwa 1,35, zu multiplizieren.

Bei einem Drehventilmotor würde man also bei $n = 3000$ U/min und einer Kolbengeschwindigkeit $v_k = 16$ m/s und einer Verdichtung $\varepsilon = 9$ den mittleren Kolbendruck bei 1,2facher Überladung erhöhen können auf $11 \cdot 1{,}35 = 15$ kg/cm². Bei $n = 2300$ U/min und 12 m/s Kolbengeschwindigkeit war der erzielte Kolbendruck p_{me} 12,7 kg/cm², er würde bei $\varepsilon = 9$ mit Drehventilsteuerung auf das 1,26fache oder $1{,}26 : 12{,}7 = 16$ kg/cm² steigen. Mit diesen zwei Werten ist die Nutzdruckkurve *d* eines solchen Motors gezeichnet.

Gegenüber dem Motor mit Burtschieber würde die Steigerung geringer, weil er schon $\varepsilon = 7{,}5$ hatte und eine bessere Füllung erhält; sie beträgt nur noch etwa 15% bei 12 m/s und bei 16 m/s Kolbengeschwindigkeit.

Es wäre also möglich, mit einem Nutzdruck $p_{me} = 15$ kg/cm² aus einem 2-l-Zylinderhubraum 100 PS oder 50 PS/l zu erreichen bei $n = 3000$ U/min. Ein 12-Zylindermotor würde also 1200 PS leisten.

Für 1000 PS Startleistung bei $n = 3000$ U/min und $p_{me} = 15$ kg/cm² und 1,2 Überladung wären 20 l Gesamthubraum erforderlich oder 1,66 l je Zylinder.

Will man die Kolbengeschwindigkeit $v_k = 16$ m/s voll ausnutzen, dann erhält man eine Zylinderbohrung von 115 mm. Die hohe thermische Belastung des Kolbens würde also keine Schwierigkeiten machen. Ein Zylinder dieser Größe würde ein Drehventil von etwa 100 mm Dmr. erhalten, mit einer Ventilöffnung $5 \cdot 7 = 35$ cm², die $35 : 104 = 33{,}5\%$ der Kolbenfläche ausmacht. Die mittlere Gasgeschwindigkeit am Ventil würde dann nur 48 m/s sein. Bei dem Motor mit Burtschieber erreichte die Gasgeschwindigkeit bei $v_k = 16$ m/s mehr als das Doppelte, nämlich $v_g = 110$ m/s und bei dem Tellerventilmotor war $v_g = 78$ m/s.

VII. Welcher Brennstoffverbrauch ist bei Drehventilmotoren zu erreichen?

Um einen Anhalt zu geben, welcher Brennstoffverbrauch bei großen Flugmotoren mit Cross-Drehventil zu erwarten ist, sind in Bild 8 einige Kurven zusammengestellt.

Kurve *a* zeigt den Verbrauch kleiner, luftgekühlter Motorradmotoren mit halbkugelförmigem Brennraum und Tellerventilen. Die Kurve *b* gilt für große Flugmotoren mit

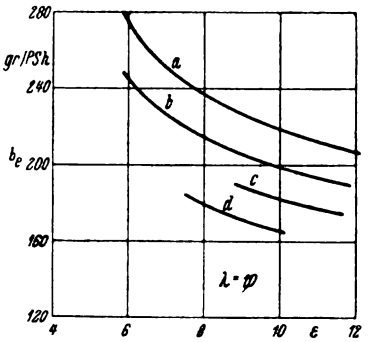


Bild 8. Spezifischer Brennstoffverbrauch in Abhängigkeit des Verdichtungsverhältnisses.
a kleine Tellerventil-Motoren, *c* kleine Motoren mit Cross-Drehventil,
b große » » , *d* große » » » » .

einem mechanischen Wirkungsgrad $\eta_m = 0{,}82$ und einer Luftüberschußzahl $\lambda = 1$. Für höhere Verdichtungen, über die keine Meßergebnisse vorliegen, ist die Kurve *b* verlängert worden, entsprechend dem erzielbaren thermischen Wirkungsgrad η_i.

Die Kurve *c* kann von kleinen Motoren mit Cross-Drehventil erreicht werden, wenn Ventilzeiten und Vergaser sorgfältig abgestimmt werden.

Die Kurve *d* stellt die geschätzten Werte für den effektiven Brennstoffverbrauch b_e dar für große Flugmotoren mit $\varepsilon = 8$ bis 10, die nach Ansicht des Verfassers erreicht werden können, wenn diese Konstruktion einige Entwicklung durchgemacht hat.

VIII. Schrifttum.

[1] G. Müller, Das Motorrad Bd. 17) (1937 Heft 36 S. 1452. Motor Cycling 28. April 1937.
[2] M. Christian, Forschungsarbeiten DVI Heft 315, 1929; O. Kurtz, Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung II, 11; H. R. Ricardo, Vortrag Hauptversammlung Lilienthal-Ges. 1937.
[3] R. C. Cross, J. I. A. E. (1935) Dez. S. 296; Th. Hoock, ATZ (1937) Heft 22.
[4] Schnitt durch Motoren *a* und *b* s. ATZ (1938) S. 346 Bild 24, 25.
[5] O. Kurtz, Luftwissen Bd. 4 (1937) Nr. 4 S. 116.

Digitized by Google

East Engin. Library

JUL 27 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 6 enthält Arbeiten von: A. Teichmann S. 283-308, W. Fabricius S. 309-317, M. Schuler und K. Magnus S. 318-325, Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38 S. 326, K. Dziewior S. 326-338, U. Theile S. 339-347

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 6 SEITE 283 BIS 348 | MÜNCHEN, 20. 6. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Gedankengänge zur Flatterberechnung. Von A. Teichmann . . . . . Seite 283

Wechselwirkung zwischen anliegender und abgerissener Strömung. Von W. Fabricius. . . . . Seite 309

Dämpfungsarten für die Schwingungen des Kreiselhorizontes und ihre Wirkungen im Kurvenflug. Von M. Schuler und K. Magnus . . . . . Seite 318

Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38 . . . . . Seite 326

Zusammenstellung der bekannt gewordenen Vorschläge zur Abstandsbestimmung und zur Rückstrahlpeilung auf funktechnischem Wege und ihre kritische Betrachtung. Von K. Dziewior . . . . . Seite 326

Höhenmeßverfahren auf funkentechnischer Grundlage. Von U. Theile . Seite 339

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern: bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 20. Juni 1939 Lfg. 6

Gedankengänge zur Flatterberechnung.

Von Alfred Teichmann.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Festigkeit.

Die bekannte Erscheinung des Flatterns von Trag- und Leitwerken sowie das Wesen der Flatterberechnung wird dargelegt; dabei wird allgemein auf den Ansatz harmonisch zeitabhängiger Kräfte und Formänderungen, insbesondere der Luftkräfte, eingegangen. Anschließend wird besprochen, wie Flugzeugkonstruktionen durch geeignete Vorstellungen über ihre mechanischen Eigenschaften der Flatterberechnung zugänglich gemacht werden können, wobei diese beliebig zwischen roher und weitgehender Näherung abstufbar sein soll. Für naheliegende Vorstellungen dieser Art wird das Wesen der in Frage kommenden Ansätze erläutert.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Grundlagen.
A. Schwingungen im Luftstrom.
1. Vorbemerkung.
2. Veranschaulichung.
3. Harmonisches Flattern.
B. Kräfte am harmonisch schwingenden System.
1. Harmonische Belastung und Bewegung.
2. Luftkräfte.
3. Formänderungen.
C. Wesen der Flatterberechnung.
1. Flatterkriterien.
2. Schrittweise zunehmende Näherung.
3. Lösung der Gleichungen.
4. Flatter- und Eigenschwingungszustände.
III. Aufstellung der Flatterberechnung.
A. Ersatzsysteme.
1. Arten der Ersatzsysteme.
2. Bedeutung der Ersatzsysteme.
B. Anpassung der Ersatzsysteme.
1. Wesen der Anpassung.
2. Anpassungsgleichungen.
3. Durchführung der Anpassung.
C. Aufstellung von Berechnungsansätzen für verschiedene Feder-Masse-Systeme im Luftstrom.
1. Vorbemerkung.
2. Stabzugartige Systeme.
3. Teilkörpersysteme.
4. Systeme vorgegebener Formänderungsfähigkeit.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Trag- und Leitwerke beginnen zu »flattern« oder geraten in »angefachte Schwingungen«, wenn ihre Anblasegeschwindigkeit mit ihren mechanischen und aerodynamischen Kenngrößen gewisse kritische Kombinationen bildet. Die große Anzahl der dabei eingehenden Kenngrößen, die Empfindlichkeit mancher Konstruktionen schon gegenüber kleinen Änderungen der einzelnen Kenngrößen, die Ungenauigkeit, mit der die einzelnen Kenngrößen einer Konstruktion zu ermitteln sind, schließlich noch die Unsicherheit aller Rechnungsansätze über instationäre Strömungen machen es gewöhnlich unmöglich, genaue Zahlenwerte der »kritischen Geschwindigkeit« vorauszuberechnen (bei der das Flattern einsetzt). — Nichtsdestoweniger muß aber bei der Entwicklung einer Flugzeugkonstruktion versucht werden, eine Vorstellung über ihre Flattereigenschaften zu gewinnen, also irgendwelche Zahlenwerte für die Größenordnung der kritischen Geschwindigkeit zu errechnen; denn nur so ergibt sich eine Möglichkeit, die Flattereigenschaften der betreffenden Flugzeugkonstruktion mit denen anderer Bauweisen zu vergleichen oder bestimmte konstruktive Maßnahmen hinsichtlich ihrer Auswirkung auf die Flattereigenschaften zu verfolgen.

Um im Einzelfall Rechnungen solcher Art vornehmen zu können, müssen Verfahren verfügbar sein, die es gestatten, grundsätzlich jede Kenngröße, die von Bedeutung werden kann, zu berücksichtigen. In Anbetracht des Zeitaufwandes solcher Rechnungen und im Hinblick auf ihre geringe Zuverlässigkeit muß es aber auch ohne weiteres möglich sein, die verfügbaren Ansätze in jedem beliebigen Maße — bis zu rohen Überschlagsrechnungen — zu vereinfachen.

In kommender Zeit sind verschiedene Abhandlungen über solche Berechnungsmöglichkeiten zu erwarten. Deshalb sollen die vorliegenden Ausführungen einen allgemein gehaltenen Überblick über die wesentlichen Gedankengänge geben, auf denen die in Frage kommenden Berechnungsverfahren beruhen. Gemäß der Vielseitigkeit des Flatterproblems handelt es sich dabei sowohl um Überlegungen aus der allgemeinen Schwingungslehre als auch um Betrachtungen aus der Strömungslehre, Statik und Festigkeitslehre.

Um den Vertretern der verschiedenen Fachgebiete die Gedankengänge brauchbarer Flatterberechnungen leicht zugänglich zu machen, war es notwendig, manche Einzelheiten verhältnismäßig eingehend zu behandeln, obwohl sie vielleicht dem Vertreter des einen oder anderen der genannten Fachgebiete selbstverständlich erscheinen mögen. Verzichtet wurde dagegen — dem Rahmen einer allgemeinen Gedankenübersicht entsprechend — auf die Entwicklung von gebrauchsfertigen Berechnungsansätzen und daher auch auf die Wiedergabe von Einzelbeispielen. Ausführungen solcher Art, außerdem auch die Behandlung zahlreicher Vereinfachungen, die im praktischen Einzelfall zweckmäßig sein werden, sollen Gegenstand kommender Abhandlungen sein.

II. Grundlagen.

A. Schwingungen im Luftstrom.

1. Vorbemerkung.

Die Gleichungen zur Beschreibung der Schwingungseigenschaften eines Feder-Masse-Systems im Luftstrom werden meist als die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen inneren Kräften, Luft- und (gedachten) Trägheitskräften angeschrieben; oft ist es zweckmäßig, sie als Ausdrücke für das Prinzip der virtuellen Verrückungen darzustellen.

Digitized by Google

Meist kann angenommen werden, das schwingende System sei ein »System von n Freiheitsgraden« derart, daß alle denkbaren Verschiebungszustände des Systems durch Angabe von n »Verschiebungsanteilen« vollständig beschrieben werden können. Als Verschiebungsanteile dienen die zeitabhängigen Beträge $w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n$ von n Wegen, Drehungen oder irgendwelchen Gruppen aus solchen Größen. Im letzteren Falle bedeutet der Zahlenwert von w_i den Maßstabfaktor, mit dem der irgendwie definierte Einheitszustand einer durch »i« gekennzeichneten Verschiebungs-»Gruppe« vervielfacht werden soll.

Berechnungsansätze, die unter Annahme eines Systems von n Freiheitsgraden abgeleitet sind, können in die räumlich-zeitlichen Differential- und Integralgleichungen des wirklichen Systems oder in die daraus folgenden Entwicklungen übergeführt werden, indem die Anzahl n der berücksichtigten Freiheitsgrade unbegrenzt erhöht wird, entsprechend der stetigen Verteilung aller Verformungsmöglichkeiten. Allgemein aufgezogene Berechnungsansätze der geschilderten Art können somit beliebig zwischen »überschläglichen« und »genaueren« Darstellungen abgestuft werden, je nachdem welche und wie viele Freiheitsgrade Berücksichtigung finden.

Die nachfolgenden Ausführungen setzen Kleinheit der Verschiebungen gegenüber den Systemabmessungen voraus.

2. Veranschaulichung.

Die wichtigsten Schwingungseigenschaften eines Feder-Masse-Systems von n Freiheitsgraden im Luftstrom lassen sich an den Lösungen einer Gruppe von n simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach der Zeit t veranschaulichen:

$$w_1 = w_{1a}(t) + \ldots w_{1k}(t) + \ldots w_{1n}(t) + w_1^*(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w_i = w_{ia}(t) + \ldots w_{ik}(t) + \ldots w_{in}(t) + w_i^*(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n = w_{na}(t) + \ldots w_{nk}(t) + \ldots w_{nn}(t) + w_n^*(t)$$

mit:

$$w_{ik}(t) = w'_{ik}\, e^{\delta_k t} \cdot \cos \omega_k t - w''_{ik}\, e^{\delta_k t} \cdot \sin \omega_k t$$
$$\underline{\underline{R}}\ (w'_{ik} + j\, w''_{ik})\, e^{\delta_k t} \cdot e^{j \omega_k t}$$
$$\underline{\underline{R}}\ \mathfrak{w}_{ik}\, e^{\delta_k t} \cdot e^{j \omega_k t} = |\mathfrak{w}_{ik}|\, e^{\delta_k t} \cdot e^{j \varphi_k} \cdot e^{j \omega_k t}.$$

Hierbei besagt das Zeichen $\underline{\underline{R}}$, daß von dem dahinter stehenden komplexen Ausdruck nur der Realteil als Ausdruck für die wirkliche Schwingung betrachtet werden soll; im übrigen kennzeichnet (s. Bild 1):

j die imaginäre Einheit[1]),

k einen der n »Hauptschwingungszustände«[2]) des Systems, beschrieben durch die untereinander stehenden Größen $w_{1k}, \ldots, w_{ik}, \ldots, w_{nk}$,

ω_k die Kreisfrequenz[3]) des Hauptschwingungszustands k, $= 2\pi n_k$, wo n_k = Frequenz,

δ_k den $\frac{-\omega_k}{2\pi}$ fachen Betrag des »logarithmischen Dekrements ϑ_k«, entsprechend dem sich die Amplituden des irgendwie angestoßenen Hauptschwingungszustands k innerhalb einer Periodendauer $T_k = 2\pi/\omega_k$ ändern,

$$= -\frac{\omega_k}{2\pi} \cdot \vartheta_k = -\frac{\omega_k}{2\pi} \cdot \ln \frac{|\mathfrak{w}_{ik}| \cdot e^{\delta_k t}}{|\mathfrak{w}_{ik}| \cdot e^{\delta_k (t + 2\pi/\omega_k)}},$$

φ_k den Phasenwinkel $w_{ik}(t)$ gegen eine Vergleichsschwingung mit derselben Kreisfrequenz ω_k,

* den »erzwungenen« Schwingungsanteil, hervorgerufen und näher bestimmt durch etwa wirksame Erregerkräfte,

$w'_{ik} e^{\delta_k t}$, $w''_{ik} e^{\delta_k t}$ die Amplituden der nach $\cos \omega_k t$ und $\sin \omega_k t$ fortschreitenden Bestandteile von $w_{ik}(t)$,

$|\mathfrak{w}_{ik}|\, e^{\delta_k t}$ die Amplitude von $w_{ik}(t)$
$$= \sqrt{w'^2_{ik} + w''^2_{ik}}\, e^{\delta_k t},$$

$\mathfrak{w}_{ik}\, e^{\delta_k t}$ die sog. komplexe Amplitude von $w_{ik}(t)$
$$= (w'_{ik} + j\, w''_{ik}) \cdot e^{\delta_k t}.$$

Die Exponenten δ_k der einzelnen Hauptschwingungszustände k fallen gewöhnlich negativ aus; d. h. die irgendwie angestoßene, dann sich selbst überlassene Schwingung nimmt mit der Zeit ab: »Abklingende« oder »gedämpfte« Schwingung. Einer oder mehrere der Exponenten δ_k können bei bestimmten Geschwindigkeiten des Luftstroms durch Null hindurchgehen und dann positiv werden; dann nehmen die Amplituden des zugehörigen Hauptschwingungszustands k mit fortschreitender Zeit unbegrenzt zu: »Angefachte« oder »selbsterregte« Schwingung. — Zu einer Fluggeschwindigkeit, bei der ein Exponent δ_k gerade gleich Null wird, gehört ein Hauptschwingungszustand mit zeitlich konstanten Amplituden: $w_{ik} \underline{\underline{R}}\ \mathfrak{w}_{ik} \cdot e^{j \omega_k t}$ (s. Bild 1 u. 2). Solche Übergangszustände zwischen Dämpfung und Anfachung werden im folgenden kurz als »Flatterzustände« bezeichnet.

Die tatsächlichen Erscheinungen des Flatterns weichen in zahlreichen Einzelheiten von den Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der Zeit ab:

Der Eintritt des Flatterns erfolgt gewöhnlich bei einer höheren Geschwindigkeitsstufe als das Aufhören. Die Schwingungsausschläge oberhalb der Einsatzgrenze des Flatterns steigen nicht unbegrenzt an, können aber die Festigkeitsgrenzen des schwingenden Systems wesentlich überschreiten. Gewöhnlich erfolgt der Einsatz des Flatterns schlagartiger, als nach den Lösungen der voranstehend angedeuteten zeitlichen Differentialgleichungen zu erwarten wäre.

In Wirklichkeit ergeben sich natürlich auch keine rein harmonischen Schwingungen als Übergänge zwischen Dämpfung und Anfachung. Trotzdem werden im folgenden harmonische Übergangszustände zwischen Dämpfung und Anfachung vorausgesetzt; denn nur dann können einfache Zusammenhänge zwischen Bewegungen und Kräften angesetzt werden.

[1]) s. DIN 1302 (Zur Vermeidung von Verwechslungen mit laufenden Zeigern »i«).

[2]) Einzelne dieser Hauptschwingungszustände können in unbeschleunigte Bewegungszustände entarten (III B 2).

[3]) s. DIN 1304.

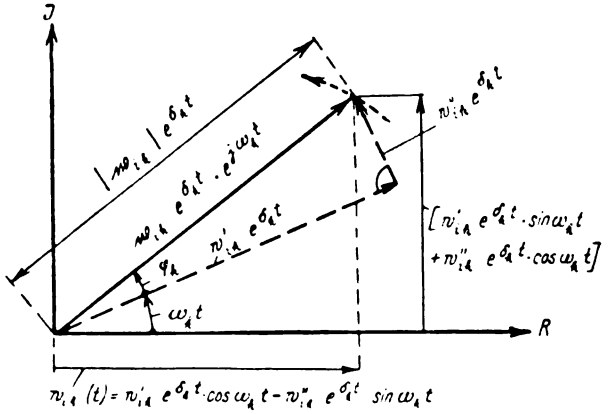


Bild 1. Schwingung $w_{ik}(t)$.

3. Harmonisches Flattern.

Für einen rein harmonischen Schwingungszustand des Feder-Masse-Systems im Luftstrom (d. h. bei $\delta_k = 0$) gilt unter Fortlassung des vorher gebrauchten Zeigers k (s. Bild 2):

$$w_i(t) = w'_i \cdot \cos \omega t - w''_i \cdot \sin \omega t$$
$$\underline{\underline{R}}\ (w'_i + j\, w''_i) \cdot e^{j \omega t} = \mathfrak{w}_i \cdot e^{j \omega t},$$
$$w'_i,\ w''_i,\ |\mathfrak{w}_i|,\ \mathfrak{w}_i = \text{Amplituden (s. II A 2).}$$

Vorausgesetzt wird, daß zu harmonischen Bewegungen auch harmonische innere Kräfte P^r und Luftkräfte P^L gehören (s. II B) und daß etwa vorhandene Erregerkräfte P^* ebenfalls harmonisch ablaufen, d. h. allgemein:

$$P_i(t) = P'_i \cdot \cos \omega t - P''_i \cdot \sin \omega t$$
$$\underline{\underline{R}}\ (P'_i + j\, P''_i) \cdot e^{j \omega t} = \mathfrak{P}_i \cdot e^{j \omega t}.$$

Digitized by Google

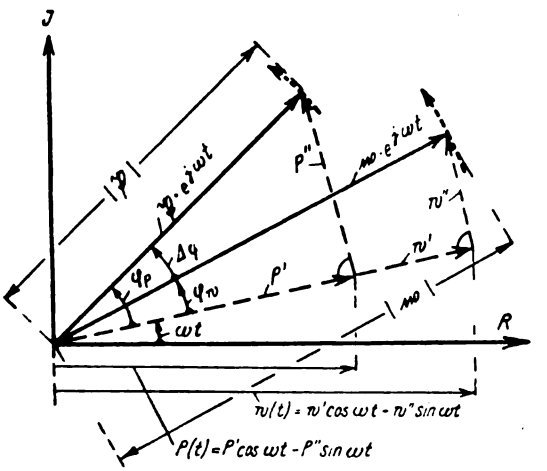


Bild 2. Harmonische Bewegung und Belastung.

Dann werden die Erscheinungen am Feder-Masse-System im Luftstrom durch die »harmonischen Grundgleichungen« vom folgenden Aufbau beschrieben:

a) in reeller Schreibweise ($2n$ Gleichungen)

$w'_1 \ldots w'_i \ldots w'_n$	$w''_1 \ldots w''_i \ldots w''_n$		
$a'_{11} \ldots a'_{1i} \ldots a'_{1n}$	$-a''_{11} \ldots -a''_{1i} \ldots -a''_{1n}$	P'^*_1	$= 0$
$a'_{i1} \quad a'_{ii} \quad a'_{in}$	$-a''_{i1} \quad -a''_{ii} \quad -a''_{in}$	P'^*_i	$= 0$
$a'_{n1} \quad a'_{ni} \quad a'_{nn}$	$-a''_{n1} \quad -a''_{ni} \quad -a''_{nn}$	P'^*_n	$= 0$
$a''_{11} \quad a''_{1i} \quad a''_{1n}$	$a'_{11} \quad a'_{1i} \quad a'_{1n}$	P''^*_1	$= 0$
$a''_{i1} \quad a''_{ii} \quad a''_{in}$	$a'_{i1} \quad a'_{ii} \quad a'_{in}$	P''^*_i	$= 0$
$a''_{n1} \quad a''_{ni} \quad a''_{nn}$	$a'_{n1} \quad a'_{ni} \quad a'_{nn}$	P''^*_n	$= 0$

zu lesen:

$$a'_{11} w'_1 + \ldots + a'_{1i} w'_i + \ldots + a'_{1n} w'_n - a''_{11} w''_1 - \ldots + P'^*_1 = 0$$

usw.

b) in komplexer Schreibweise (n Gleichungen)

$\mathfrak{w}_1 \ldots \mathfrak{w}_i \ldots \mathfrak{w}_n$		
$a_{11} \ldots a_{1i} \ldots a_{1n}$	$\mathfrak{P}^*_1$	$= 0$
$a_{i1} \ldots a_{ii} \ldots a_{in}$	$\mathfrak{P}^*_i$	$= 0$
$a_{n1} \ldots a_{ni} \ldots a_{nn}$	$\mathfrak{P}^*_n$	$= 0$

Die reelle Darstellungsweise folgt aus der komplexen durch Einführung von:

$$\mathfrak{w}_i = w'_i + j\, w''_i, \quad a_{ik} = a'_{ik} + j\, a''_{ik}, \quad \mathfrak{P}_i^* = P'^*_i + j\, P''^*_i.$$

Die komplexe Darstellungsweise folgt aus der reellen, indem die Zeilen der unteren Hälfte mit der imaginären Einheit vervielfacht und zu den entsprechenden Zeilen der oberen Hälfte addiert werden.

Im homogenen Fall $P'^* = P''^* = \mathfrak{P}^* = 0$ werden die harmonischen Grundgleichungen als »Flattergleichungen« bezeichnet.

Die Aufstellung der harmonischen Grundgleichungen und damit der Flattergleichungen ist für verschiedene Arten des Feder-Masse-Systems in III C näher beschrieben. Wie dort ersichtlich, setzen sich in diesen Gleichungen die Beiwerte a_{ik} der Amplituden aus Anteilen verschiedener Bedeutung zusammen:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a'_{ik} + j\, a''_{ik} \\ &= a^F_{ik} + a^L_{ik} + a^T_{ik} \\ &= a^F_{ik} + [a'^{LS}_{ik} + a'^{LR}_{ik}] + a^T_{ik}; \text{ ausführlicher:} \end{aligned}$$

$$a_{ik} = (a'^F_{ik} + j\, a''^F_{ik}) + [(a'^{LS}_{ik} + j\, a''^{LS}_{ik}) + (a'^{LR}_{ik} + j\, a''^{LR}_{ik})] + a'^T_{ik}$$
$$(a''^T_{ik} = 0)^4).$$

Die einzelnen Anteile a^F_{ik}, a^L_{ik}, a^T_{ik} werden entsprechend ihrer mechanischen Bedeutung als Formänderungs-, Luftkraft- und Trägheitsglieder bezeichnet. Zweckmäßig werden dabei die Luftkraftglieder a^L_{ik} noch unterteilt in je ein Luftkraft-Strömungsglied a^{LS}_{ik}, das bei verschwindender Anblasegeschwindigkeit entfällt, und ein Luftkraft-Restglied a^{LR}_{ik}, das auch bei verschwindender Anblasegeschwindigkeit endlich bleibt. Die Anteile a'^F_{ik} und a''^F_{ik} der Formänderungsglieder werden Federglieder und Bauteil-Dämpfungsglieder genannt. Der Anteil a'^{LR}_{ik} der Luftkraftglieder wird Luftkraft-Trägheitsglied genannt.

Wird auf unendlich viele Freiheitsgrade übergegangen, so ergeben sich aus den harmonischen Grundgleichungen und Flattergleichungen Systeme von simultanen, rein räumlichen Differentialgleichungen 4. Ordnung oder entsprechende Systeme von Integralgleichungen.

B. Kräfte am harmonisch schwingenden System.

1. Harmonische Belastung und Bewegung.

Für harmonisch ablaufende Bewegungen $w(t)$ und Belastungen $P(t)$ ist zu schreiben (s. Bild 2):

$$w(t) = w' \cdot \cos \omega t - w'' \cdot \sin \omega t$$
$$\underline{\underline{K}}\ \mathfrak{w}(t) = (w' + j\, w'') \cdot e^{j\omega t} = \mathfrak{w} \cdot e^{j\omega t} = |\mathfrak{w}|\, e^{j\varphi_w} \cdot e^{j\omega t},$$
$$P(t) = P' \cdot \cos \omega t - P'' \cdot \sin \omega t$$
$$\underline{\underline{K}}\ \mathfrak{P}(t) = (P' + j\, P'') \cdot e^{j\omega t} = \mathfrak{P} \cdot e^{j\omega t} = |\mathfrak{P}|\, e^{j\varphi_P} \cdot e^{j\omega t}.$$

Dabei kennzeichnen (s. Bild 2):

$w(t)$ den Betrag bzw. Maßstab einer Drehung, eines Weges oder einer Gruppe aus solchen Größen,

$P(t)$ den Betrag bzw. Maßstab einer Kraft, eines Momentes oder einer Gruppe aus solchen Größen,

w', w'', $|\mathfrak{w}|$, $\mathfrak{w}$ und P', P'', $|\mathfrak{P}|$, $\mathfrak{P}$ die Amplituden (s. II A 2),

$\mathfrak{w}(t)$, $\mathfrak{P}(t)$ den sog. komplexen Bewegungs- und Belastungsablauf,

φ_w, φ_P den Phasenwinkel von $w(t)$ und $P(t)$ gegen eine Vergleichsschwingung mit derselben Kreisfrequenz ω; diese Vergleichsschwingung hatte zu einer Zeit $t = 0$ gerade ihren Nulldurchgang.

Wird unterstellt, daß zu harmonischen Bewegungen auch harmonische Belastungen gehören und umgekehrt, so gilt für den Zusammenhang zwischen Belastung und Bewegung:

$$P(t) \underset{K}{\frac{\mathfrak{P}(t)}{\mathfrak{w}(t)}} \cdot \mathfrak{w}(t) = (C' + j\, C'') \cdot \mathfrak{w}(t) = |\mathfrak{C}| \cdot \mathfrak{w}(t) = |\mathfrak{C}|\, e^{j\,\angle\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{w}(t)$$
$$\underline{\underline{K}}\ C' \cdot \mathfrak{w}(t) + \frac{1}{\omega} C'' \cdot \dot{\mathfrak{w}}(t) \qquad \left[\text{weil } \frac{\dot{\mathfrak{w}}(t)}{\omega} = j\, \mathfrak{w}(t)\right],$$
$$w(t) \underset{K}{\frac{\mathfrak{w}(t)}{\mathfrak{P}(t)}} \cdot \mathfrak{P}(t) = (\hat{C}' + j\, \hat{C}'') \cdot \mathfrak{P}(t) = \hat{\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{P}(t) = |\hat{\mathfrak{C}}|\, e^{j\,\angle\hat{\mathfrak{C}}} \cdot \mathfrak{P}(t)$$
$$\underline{\underline{K}}\ \hat{C}' \cdot \mathfrak{P}(t) + \frac{1}{\omega} \hat{C}'' \cdot \dot{\mathfrak{P}}(t) \qquad \left[\text{weil } \frac{\dot{\mathfrak{P}}(t)}{\omega} = j\, \mathfrak{P}(t)\right],$$

wobei:

$\mathfrak{C}$, $\hat{\mathfrak{C}}$ = Amplitudenverhältnis zwischen Belastungs- und Bewegungsablauf und umgekehrt,

$$|\mathfrak{C}| = \sqrt{C'^2 + C''^2} = \frac{|\mathfrak{P}|}{|\mathfrak{w}|}, \quad |\hat{\mathfrak{C}}| = \sqrt{\hat{C}'^2 + \hat{C}''^2} = \frac{|\mathfrak{w}|}{|\mathfrak{P}|},$$

$\Delta\varphi$, $\Delta\hat{\varphi}$ = Phasenverschiebung der Belastung gegen die Bewegung (gemessen von der Bewegung aus) und umgekehrt (gemessen von der Belastung aus), wobei

$$\Delta\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{C''}{C'} = \omega\,(t_P - t_w),$$

$$\Delta\hat{\varphi} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\hat{C}''}{\hat{C}'} = \omega\,(t_w - t_P) = -\Delta\varphi,$$

[4]) Die Glieder a''^{LR}_{ik} werden bei den üblichen Ansätzen der Strömungslehre zu Null.

Digitized by Google

t_P, t_w = Zeitpunkte, zu denen ein ausgezeichneter Wert der Belastung und der entsprechende Wert der Bewegung durchlaufen werden (z. B. die Nulldurchgänge).

Zu gegebenem $\mathfrak{C}$, $\hat{\mathfrak{C}}$, $\Delta\varphi$, $\Delta\hat{\varphi}$ gehört:

$$C' = |\mathfrak{C}| \cos \Delta\varphi, \qquad \hat{C}' = |\hat{\mathfrak{C}}| \cos \Delta\hat{\varphi} = |\hat{\mathfrak{C}}| \cos \Delta\varphi,$$

$$C'' = |\mathfrak{C}| \sin \Delta\varphi, \qquad \hat{C}'' = |\hat{\mathfrak{C}}| \sin \Delta\hat{\varphi} = -|\hat{\mathfrak{C}}| \sin \Delta\varphi.$$

Gewöhnlich gehört zu einem rein harmonischen Bewegungsablauf $w(t)$ in Wirklichkeit ein zwar periodischer, aber nicht rein harmonischer Belastungsablauf $P(t)$ und umgekehrt[5]). Trotzdem können die etwa versuchsmäßig gefundenen Beziehungen zwischen $P(t)$ und $w(t)$ angenähert durch ein harmonisches Gesetz dargestellt werden, indem hinsichtlich des Belastungs- bzw. Bewegungsablaufs z. B. kleinste quadratische Abweichung zwischen Versuchsergebnis und harmonischem Ansatz über die Dauer einer Periode gefordert wird. Dann müssen die nachfolgend eingeführten Integralausdrücke E und V für den harmonischen Näherungsausdruck dieselben Werte haben wie für den wirklichen Ablauf:

$$E = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) \cdot \dot{w}(t) \cdot dt \quad \left(= \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) \cdot dw\right),$$

$$V = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) \cdot w(t) \cdot dt.$$

Sofern $P(t)$, $\dot{w}(t)$, $w(t)$ Komponenten gleichen Richtungssinnes darstellen, bedeutet E die Arbeit von $P(t)$ bei einer Periode der Bewegung $w(t)$.

Für den wirklichen Ablauf ergeben sich diese Werte durch Quadratur über die Dauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ einer Periode[6]), und im harmonischen Näherungsausdruck ist zu setzen:

$$|\mathfrak{C}| = \frac{\sqrt{V^2\omega^2 + E^2}}{\pi\,|\mathfrak{w}|^2}, \qquad |\hat{\mathfrak{C}}| = \frac{\sqrt{V^2\omega^2 + E^2}}{\pi\,|\mathfrak{P}|^2},$$

$$\Delta\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{E}{\omega V}, \qquad \Delta\hat{\varphi} = \operatorname{arc\,tg}\frac{-E}{\omega V},$$

oder:

$$C' = \frac{\omega V}{\pi\,|\mathfrak{w}|^2}, \qquad \hat{C}' = \frac{\omega V}{\pi\,|\mathfrak{P}|^2},$$

$$C'' = \frac{E}{\pi\,|\mathfrak{w}|^2}, \qquad \hat{C}'' = \frac{-E}{\pi\,|\mathfrak{P}|^2}.$$

Hierdurch können Schwingungsvorgänge an Systemen mit Lagerspiel oder mit ungleichmäßiger bzw. nichtlinearer Federungscharakteristik harmonischen Näherungsberechnungen zugänglich gemacht werden.

Die Größen C'' und $\hat{C}''$ kennzeichnen also — soweit sie sich auf die Darstellung gleichgerichteter Belastungs- und Bewegungskomponenten beziehen — die von der Belastungskomponente während einer Periode geleistete Arbeit: Positives C'' und negatives $\hat{C}''$ bedeuten positive Arbeit der Belastung zur Überwindung der (inneren) Bauteildämpfung oder der (äußeren) Luftdämpfung. Bei positiver Arbeit von $P(t)$ ist $0 < \Delta\varphi < \pi$ (s. Bild 2), d. h. »die Belastung eilt der Bewegung voraus«.

Im allgemeinen ist die Belastung $P(t)$ eine Funktion von mehreren Bewegungsanteilen $w_1(t)$, $w_2(t)$, ···, die Bewegung $w(t)$ eine Funktion von mehreren Belastungsanteilen $P_1(t)$, $P_2(t)$, ···. Wird dann außer harmonischer Abhängigkeit auch noch lineare Abhängigkeit zwischen den einzelnen Bewegungs- und Belastungsanteilen vorausgesetzt, so gilt für irgendeine Belastung:

$$P_i(t) \mathrel{\overset{=}{k}} \mathfrak{C}_{i1} \cdot \mathfrak{w}_1(t) + \mathfrak{C}_{i2} \cdot \mathfrak{w}_2(t) + \cdots,$$

für irgendeine Bewegung:

$$w_i(t) \mathrel{\overset{=}{k}} \hat{\mathfrak{C}}_{i1} \cdot \mathfrak{P}_1(t) + \hat{\mathfrak{C}}_{i2} \cdot \mathfrak{P}_2(t) + \cdots.$$

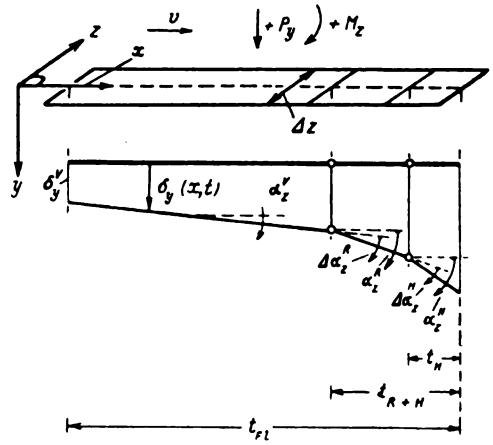


Bild 3. Bezeichnungen am Flügelstreifen parallel der Anblaserichtung x.

2. Luftkräfte.

Die Luftkräfte und -momente an irgendeinem Streifen (s. Bild 3), der — z. B. an einem Flügel — parallel zur Anblaserichtung x abgegrenzt ist, setzen sich aus mehreren Bestandteilen verschiedener physikalischer Bedeutung zusammen. Für die auf irgendeinen Bereich des Streifens entfallende Luftkraftkomponente senkrecht zur Anblaserichtung gilt:

$$P_y(t, v, \omega) = \varrho\, t_{Fl}\, \Delta z \cdot [\omega^2 t_{Fl}^2 \cdot P_y^{(0)}(t, \omega_r) + \omega\, v\, t_{Fl} \cdot P_y^{(1)}(t, \omega_r) + v^2 \cdot P_y^{(2)}(t, \omega_r) + R_y],$$

wobei:

Δz = Breite, t_{Fl} = Tiefe } des betrachteten Streifens (einschl. etwa vorhandener Ruderabschnitte),

ϱ, t, v, ω = Luftdichte, Zeit, Anblasegeschwindigkeit, Kreisfrequenz,

$\omega_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega\, t_{Fl}}{v}$ = »bezogene« Frequenz,

$P_y^\nu(t, \omega_r)$ = »bezogener«, d. h. durch Abspalten geeigneter Größen (s. oben) dimensionsfrei gemachter Betrag (Maßstab) des νten Bestandteils von $P_y(t, v, \omega)$; der νte Bestandteil von $P_y(t, v, \omega)$ ist jeweils gekennzeichnet durch einen Koeffizienten $\omega^2 t_{Fl}^2$, $\omega\, v\, t_{Fl}$, v^2 usw. (s. auch R_y),

R_y = Glieder, die mit oben nicht angeführten Kombinationen der Größen ω, v von der Dimension m^2/s^2 eingehen.

Entsprechendes gilt für örtliche, sog. laufende Luftkräfte $p_y(t, v, \omega)$ (bezogen auf die Längeneinheit) und für Luftmomente $M_z(t, v, \omega)$; nur ist dann vor dem Ausdruck [ ] zu setzen: »1« bzw. »t_{Fl}^2« statt »t_{Fl}«.

Die einzelnen Bestandteile der Luftkräfte und -momente werden als Funktionen von t und ω_r in erster Linie durch die Bewegung und das Profil des betrachteten Streifens bestimmt, darüber hinaus aber auch durch die Bewegungen, Profile und Lagen aller übrigen Streifen, aus denen sich das Gesamtsystem zusammensetzt.

Die zur Anblaserichtung senkrechten Bewegungen $\delta_y(x, t)$ werden als Überlagerung von mehreren Bewegungs-Anteilen $\delta_{y\lambda}(x, t)$ aufgefaßt:

$$\delta_y(x, t) = \sum_\lambda \delta_{y\lambda}(x, t) \mathrel{\overset{=}{k}} t_{Fl} \sum_\lambda g_\lambda \cdot f_\lambda(x) \cdot e^{j\omega t},$$

wobei (s. Bild 4):

x = Koordinate in Anblaserichtung,

$g_\lambda = g'_\lambda + j g''_\lambda$ = komplexe Maßstabamplitude,

$f_\lambda(x)$ = angesetzte Verteilungsfunktion

} des Bewegungsanteils $\delta_{y\lambda}(x, t)$.

[5]) d. h.: Die gebräuchliche Darstellung von Schwingungsvorgängen durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach der Zeit mit konstanten Beiwerten entspricht nur unvollkommen der Wirklichkeit.

[6]) Bei rein harmonischem Bewegungs- und Belastungsablauf gilt:

$$E = \pi\,[w' \cdot P'' - w'' \cdot P'] = \pi \cdot [\mathfrak{w}\,\mathfrak{P}] = \pi \cdot \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{P} \cdot \sin \Delta\varphi,$$

$$V = \frac{\pi}{\omega}\,[w' \cdot P' + w'' \cdot P''] = \frac{\pi}{\omega} \cdot (\mathfrak{w}\,\mathfrak{P}) = \frac{\pi}{\omega} \cdot \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{P} \cdot \cos \Delta\varphi.$$

Digitized by Google

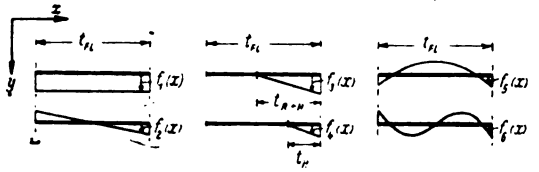


Bild 4. Beispiele für Verteilungsfunktionen $f_\lambda(x)$ zur Darstellung der Bewegung $\delta_y(x,t)$ eines Flügelstreifens.

Als Bewegungsanteile $\delta_{y\lambda}(x, t)$ kommen z. B. in Frage: harmonisch zeitabhängige Schlag- und Drehbewegung, Formänderungen nach zweigliedrigen Geradenzügen und nach Jacobischen Polynomen (s. Dietze [9]). Die Überlagerung von Profiländerungen nach zweigliedrigen Geradenzügen, deren Knickpunkte verschieden liegen, zusätzlich zur Schlag- und Drehbewegung, beschreibt Bewegungen nach mehrgliedrigen Geradenzügen; dabei entspricht der zweigliedrige Geradenzug dem Flügel mit Ruder, der dreigliedrige dem Flügel mit Ruder und Hilfsruder. Die Überlagerung von Jacobischen Polynomen verschiedenen Grades beschreibt stetige Profilverkrümmungen.

Werden die einzelnen Bereiche, in die z. B. ein Flügelstreifen durch die Ruder- und Hilfsruderkanten aufgeteilt wird, je in sich als starr angesehen, so wird in gebräuchlicher Darstellungsweise zweckmäßig gesetzt:

$$\mathfrak{g}_0 = \bar{\delta}_y^{\nu}, \quad \mathfrak{g}_1 = \bar{\alpha}_z^{\nu}, \quad \mathfrak{g}_2 = \Delta\,\bar{\alpha}_z'' = \bar{\alpha}_z'' - \bar{\alpha}_z^{\nu},$$
$$\mathfrak{g}_3 = \Delta\,\bar{\alpha}_z''' = \bar{\alpha}_z''' - \bar{\alpha}_z'' \text{ (s. Bild 3)}^{7}).$$

Soll irgendeine gegebene Bewegung $\delta_y^{\nu}(x, t)$ entsprechend voranstehendem dargestellt werden, so können die Maßstabamplituden $\mathfrak{g}_\lambda$ durch die Forderung kleinster quadratischer Abweichung zwischen gegebener und angesetzter Bewegung festgelegt werden: $\int (\delta_y^{\nu} - \Sigma\delta_{y\lambda})^2\,dx = \text{Minimum}$ ($\int$ erstreckt über die Länge t_{Fl} des Streifens). Hierbei kann es vorteilhaft ausgenutzt werden, daß die etwa anzusetzenden Jacobischen Polynome durch Erweiterung mit $q(x) = [x(t_{Fl} - x)]^{-\frac{1}{4}}$ in orthogonale Funktionen übergehen; die Forderung kleinster quadratischer Abweichung ist dann auf die mit $q^2(x)$ erweiterte Bewegung zu beziehen (s. [9]). — Bei unstetiger Formänderung des Streifens, etwa bei Doppelflügeln, Flügeln mit Spaltrudern usw., müssen die Bewegungsgesetze der einzelnen Teile des betrachteten Streifens je für sich nach Gesetzmäßigkeiten der voranstehenden Art angesetzt werden.

Bei voranstehender Darstellungsweise der Bewegung ergeben sich die Luftkraft $P_y(t, v, \omega)$ und die »bezogenen« Beträge $P_y^{\nu}(t, \omega_\tau)$ der verschiedenen Luftkraftbestandteile in erster Näherung als Überlagerungen von mehreren Anteilen $P_{y\lambda}(t, v, \omega)$ bzw. $P_{y\lambda}^{\nu}(t, \omega_\tau)$ entsprechend den einzelnen Bewegungsanteilen $\delta_{y\lambda}(t)$:

$$P_y(t, v, \omega) = \sum_\lambda P_{y\lambda}(t, v, \omega)$$
$$\overset{\kappa}{=} \sum_\lambda \mathfrak{P}_{y\lambda}(v, \omega)\cdot e^{j\omega t} = \Big[\sum_\lambda \mathfrak{g}_\lambda\,\mathfrak{C}_\lambda(v, \omega) + \mathfrak{J}\Big]\cdot e^{j\omega t},$$

bzw.

$$P_y^{\nu}(t, \omega_\tau) = \sum_\lambda P_{y\lambda}^{\nu}(t, \omega_\tau)$$
$$\overset{\kappa}{=} \sum_\lambda \mathfrak{P}_{y\lambda}^{\nu}(\omega_\tau)\cdot e^{j\omega t} = \Big[\sum_\lambda \mathfrak{g}_\lambda\,\mathfrak{C}_\lambda^{\nu}(\omega_\tau) + \mathfrak{J}^{\nu}\Big]\cdot e^{j\omega t},$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_{y\lambda}(v, \omega) &= P'_{y\lambda}(v, \omega) + jP''_{y\lambda}(v, \omega)\\ &= \text{komplexe Amplitude}\\ \mathfrak{C}_\lambda(v, \omega) &= C'_\lambda(v, \omega) + j\,C''_\lambda(v, \omega)\\ &= \text{komplexer Beiwert}\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}\text{der Luftkraft}\\ P_{y\lambda}(t, v, \omega)\\ \text{(dimensionsbehaftet).}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_{y\lambda}^{\nu}(\omega_\tau) &= P_{y\lambda}^{\prime\nu}(\omega_\tau) + j\,P_{y\lambda}^{\prime\prime\nu}(\omega_\tau)\\ &= \text{komplexe Amplitude}\\ \mathfrak{C}_\lambda^{\nu}(\omega_\tau) &= C_\lambda^{\prime\nu}(\omega_\tau) + j\,C_\lambda^{\prime\prime\nu}(\omega_\tau)\\ &= \text{komplexer Beiwert}\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}\text{des Luftkraftanteils}\\ P_{y\lambda}^{\nu}(t, \omega_\tau)\\ \text{(dimensionsfrei),}\end{matrix}$$

$\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^{\nu}$ = weitere Glieder, die mit den Maßstabamplituden aller übrigen Streifen des Systems multipliziert eingehen.

Entsprechendes wie für die Luftkräfte $P_y(t, v, \omega)$, $P_y^{\nu}(t, \omega_\tau)$ gilt für die örtlichen sog. laufenden Luftkräfte $p_y(t, v, \omega)$, $p_y(t, \omega_\tau)$ und die Luftmomente $M_z(t, v, \omega)$, $M_z^{\nu}(t, \omega_\tau)$.

Nach II B 1 können die Beiwerte $\mathfrak{C}_\lambda(v, \omega)$ bzw. $\mathfrak{C}_\lambda^{\nu}(\omega_\tau)$ aus den Integralen V und E versuchsmäßig aufgenommener Kraft-Weg-Schaubilder gewonnen werden.

Vernachlässigung der Glieder $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^{\nu}$ bedeutet, daß die Luftkräfte des betrachteten Flügelstreifens so angesetzt werden, wie sie sich ergeben würden, wenn dieser Streifen zu einem unendlich breiten Rechteckflügel gehörte, bei dem alle Querschnitte einander gleich sind und einander gleiche Bewegungen ausführen: sog. »ebenes Problem«. Die Vernachlässigung der Glieder $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^{\nu}$ soll nach Küßner [11] bei den in Frage kommenden Flatterfrequenzen gewöhnlich zulässig sein oder sich wenigstens durch »Wirkungszahlen« η, etwa von der Größenordnung 0,9, angenähert berücksichtigen lassen[8]). Im Grenzfall $\omega = 0$ (d. h. für aperiodisches Auskippen in stationärer Strömung) wird η wohl kleinere Beträge als 0,9 annehmen; angenähert wird dann gelten: $\eta \sim \frac{\zeta}{1 + 2\zeta F/b^2}$, wobei F = Flügelfläche, b = Spannweite, $\zeta \sim 0{,}9$.

Praktisch wird es oft möglich sein, das Profil des betrachteten Flügelstreifens als unendlich dünn, also als Linie aufzufassen. Unter verschiedenen Voraussetzungen (z. B. über hinreichende Kleinheit der Bewegungen) lassen sich dann die Größen $\mathfrak{C}_\lambda^{\nu}(\omega_\tau)$ des ebenen Problems (s. oben) unter Verwendung von Zylinderfunktionen des Argumentes ω_τ darstellen; dabei setzen sich die Luftkräfte und -Momente nur aus 3 verschiedenartigen Bestandteilen $P_y^{\nu}(t, \omega_\tau)$ usw. zusammen, die, wie oben angedeutet, mit ω^2, ωv und v^2 behaftet sind. Ausführliches hierzu s. z. B. bei Dietze [9], ferner in [1] bis [5]. Bei Untersuchungen grundsätzlicher Art werden vielfach vereinfachte Ansätze über die Luftkräfte ausreichen, wie sie sich z. B. ergeben, wenn die eingehenden Zylinderfunktionen des Arguments ω_τ durch konstante Beträge ersetzt werden; vgl. dazu Leiß [19].

3. Formänderungen.

Die Formänderungen eines Systemabschnitts, der irgendwie gegen das Gesamtsystem abgegrenzt ist (s. Bild 5) — also die Bewegungskomponenten δ_ξ, δ_η, $\delta_\zeta(\xi, \eta, \zeta, t)$ der Abschnitts-Oberflächenpunkte gegen ein Koordinatensystem ξ, η, ζ, das durch drei beliebige Punkte des Abschnitts gelegt ist —, werden zweckmäßig als Überlagerung von mehreren Formänderungs-Anteilen $\delta_{\xi\mu}$, $\delta_{\eta\mu}$, $\delta_{\zeta\mu}$ aufgefaßt; z. B. die Formänderungen in einer Richtung $\bar{s} = \xi, \eta$ oder ζ:

$$\delta_{\bar{s}}(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_\mu \delta_{\bar{s}\mu}(\xi, \eta, \zeta, t)$$
$$\overset{\kappa}{=} r\cdot \sum_\mu \mathfrak{A}_{\bar{s}\mu}^{\delta}\cdot f_{\bar{s}\mu}^{\delta}(\xi, \eta, \zeta)\cdot e^{j\omega t},$$

wobei (s. Bild 5 u. 6):

r = irgendeine Längenabmessung des Abschnitts (eingeführt, um hinter dem Summenzeichen dimensionsfreie Ausdrücke zu erhalten),

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_{\bar{s}\mu}^{\delta} &= A_{\bar{s}\mu}^{\prime\delta} + jA_{\bar{s}\mu}^{\prime\prime\delta}\\ &= \text{komplexe Maßstabamplitude}\\ f_{\bar{s}\mu}^{\delta}(\xi, \eta, \zeta)\\ &= \text{angesetzte Verteilungsfunktion}\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}\text{des Formände-}\\ \text{rungsanteils}\\ \delta_{\bar{s}\mu}.\end{matrix}$$

Die zu irgendeiner Formänderung des Abschnitts gehörige Abschnittsbelastung, dargestellt durch die an seiner

[7]) Passende Definition der Verteilungsfunktionen $f_0(x), \ldots, f_3(x)$ vorausgesetzt. — $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ entsprechen den Größen $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ in [9]. — Der Querstrich über den Zeichen δ und α kennzeichnet die komplexe Darstellung.

[8]) In [11] ist zunächst $\eta = 0{,}7$ angenommen.

Digitized by Google

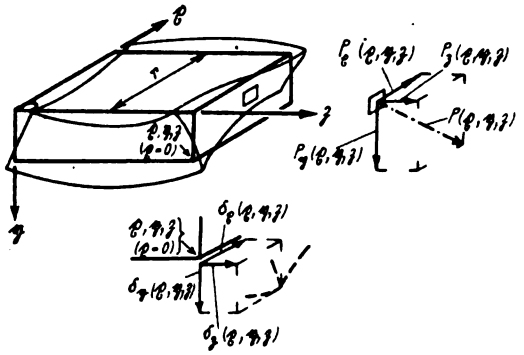


Bild 5. Bezeichnungen am Systemabschnitt.

Begrenzung (örtlich oder über einen Bereich verteilt) angreifenden Kraftkomponenten P_ξ, P_η, $P_\zeta(\xi, \eta, \zeta, t)$, wird in entsprechender Weise als Überlagerung von mehreren Belastungsanteilen $P_{\xi\varkappa}$, $P_{\eta\varkappa}$, $P_{\zeta\varkappa}$ aufgefaßt; z. B. die Abschnittsbelastung in einer Richtung $\mathfrak{s} = \xi$, η oder ζ:

$$P_\mathfrak{s}(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_\varkappa P_{\mathfrak{s}\varkappa}(\xi, \eta, \zeta, t) = Q \cdot \sum_\varkappa \mathfrak{A}^P_{\mathfrak{s}\varkappa} \cdot f^P_{\mathfrak{s}\varkappa}(\xi, \eta, \zeta) \cdot e^{j\omega t},$$

wobei (s. Bild 5 u. 6):

Q = irgendeine für alle Größen $P_{\xi\varkappa}$, $P_{\eta\varkappa}$, $P_{\zeta\varkappa}$ gleiche Kraft (eingeführt, um hinter dem Summenzeichen dimensionsfreie Ausdrücke zu erhalten),

$\mathfrak{A}^P_{\mathfrak{s}\varkappa} = A'^P_{\mathfrak{s}\varkappa} + j A''^P_{\mathfrak{s}\varkappa}$ = komplexe Maßstabamplitude } des Belastungsanteils $P_{\mathfrak{s}\varkappa}$.

$f^P_{\mathfrak{s}\varkappa}(\xi, \eta, \zeta)$ = Verteilungsfunktion

Beispiele für Verteilungsfunktionen von Formänderungs- und Belastungsanteilen sind in Bild 6 dargestellt. Stets müssen die Belastungsanteile $P_{\mathfrak{s}\varkappa}(\xi, \eta, \zeta, t)$ so gewählt sein, daß sie Gleichgewichtszustände darstellen.

Soll irgendein vorgegebener Ablauf δ_ξ, δ_η, $\delta_\zeta(\xi, \eta, \zeta, t)$ oder P_ξ, P_η, $P_\zeta(\xi, \eta, \zeta, t)$ entsprechend dem Voranstehenden dargestellt werden, so können die Maßstabamplituden $\mathfrak{A}^\delta_{\mathfrak{s}\mu}$ oder $\mathfrak{A}^P_{\mathfrak{s}\varkappa}$ durch die Forderung kleinster quadratischer Abweichung zwischen gegebenem und angesetztem Ablauf festgelegt werden (s. z. B. II B 2). Hierzu ist es vorteilhaft, wenn die einzelnen Verteilungsfunktionen $f^\delta_{\mathfrak{s}\mu}$ bzw. $f^P_{\mathfrak{s}\varkappa}$ je untereinander orthogonal sind (s. III C 2 a).

Für die einzelnen Anteile der Abschnittsbelastung in Abhängigkeit von der Formänderung gelten Ausdrücke der Art[9]):

$$\mathfrak{A}^P_{\mathfrak{s}\varkappa} = \sum_{\mathfrak{s}\mu} \mathfrak{C}_{\mathfrak{s}\varkappa, \mathfrak{s}\mu} \cdot \mathfrak{A}^\delta_{\mathfrak{s}\mu} = \sum_{\mathfrak{s}\mu} (C'_{\mathfrak{s}\varkappa, \mathfrak{s}\mu} + j C''_{\mathfrak{s}\varkappa, \mathfrak{s}\mu}) \cdot (A'^\delta_{\mathfrak{s}\mu} + j A''^\delta_{\mathfrak{s}\mu}).$$

Für die einzelnen Formänderungsanteile in Abhängigkeit von der Abschnittsbelastung gelten Ausdrücke der Art[9]):

$$\mathfrak{A}^\delta_{\mathfrak{s}\mu} = \sum_{\mathfrak{s}\varkappa} \hat{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{s}\mu, \mathfrak{s}\varkappa} \cdot \mathfrak{A}^P_{\mathfrak{s}\varkappa} = \sum_{\mathfrak{s}\varkappa} (\hat{C}'_{\mathfrak{s}\mu, \mathfrak{s}\varkappa} + j \hat{C}''_{\mathfrak{s}\mu, \mathfrak{s}\varkappa}) \cdot (A'^P_{\mathfrak{s}\varkappa} + j A''^P_{\mathfrak{s}\varkappa}).$$

Entsprechend II B 1 können die Beiwerte $\mathfrak{C}_{\mathfrak{s}\varkappa, \mathfrak{s}\mu}$ und $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{s}\mu, \mathfrak{s}\varkappa}$ aus den Integralen V und E versuchsmäßig aufgenommener Kraft-Weg-Schaubilder gewonnen werden. [Der Zusammenhang zwischen den Beiwerten $C'_{\mathfrak{s}\varkappa, \mathfrak{s}\mu}$, $\hat{C}'_{\mathfrak{s}\mu, \mathfrak{s}\varkappa}$ und der Formänderungsarbeit sowie die daraus sich ergebenden Folgerungen werden in kommenden Arbeiten behandelt.]

Über den Zusammenhang zwischen Federung und Dämpfung werden gewöhnlich gewisse Annahmen getroffen, z. B.:

[9]) $\sum_{\mathfrak{s}\mu}$, $\sum_{\mathfrak{s}\varkappa}$ erstreckt über alle Kombinationen $\mathfrak{s}\mu$ bzw. $\mathfrak{s}\varkappa$ mit $\mathfrak{s} = \xi, \eta, \zeta$; $\mu = 1, 2, \ldots$; $\varkappa = 1, 2, \ldots$.

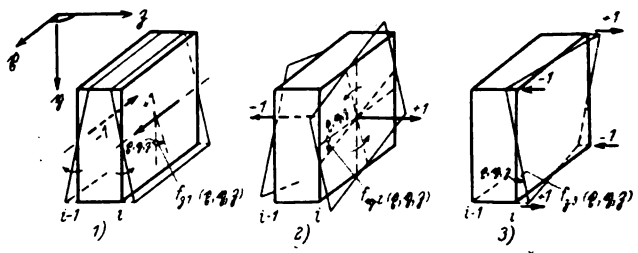


Bild 6. Beispiele für Verteilungsfunktionen $f(\xi, \eta, \zeta)$, d. h. $f^\delta(\xi, \eta, \zeta)$ oder $f^P(\xi, \eta, \zeta)$, nebst Kennzeichnung durch Vektor-Symbole.
1) Biegung, 2) Verdrillung, 3) einseitige Verwölbung nach einem hyperbolischen Paraboloid. — Vgl. auch III C 2 a.

$$\frac{C''}{C'} = -\frac{\hat{C}''}{\hat{C}'} = \frac{E}{\omega V} = \gamma_a, \quad \text{a)}$$

$$= \omega \cdot \gamma_b, \quad \text{b)}$$

$$= \frac{1}{|\mathfrak{A}^\delta|} \cdot \gamma_c, \quad \text{c)}$$

wobei γ_a, γ_b, γ_c gewisse Dämpfungszahlen bedeuten. Wird abkürzend gesetzt: Zeiger k statt $\mathfrak{s}\varkappa$, Zeiger m statt $\mathfrak{s}\mu$, so gilt hiernach, z. B. für die Abschnittsbelastung in Abhängigkeit von der Formänderung:

$$\mathfrak{A}'_k(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_m C'_{k,m} \left[1 + j \frac{C''_{k,m}}{C'_{k,m}}\right] \mathfrak{A}^\delta_m$$

$$\text{a)} \quad = \sum_m C'_{k,m} \left[\mathfrak{A}^\delta_m + \frac{\gamma_a}{\omega} \dot{\mathfrak{A}}^\delta_m\right],$$

$$\text{b)} \quad = \sum_m C'_{k,m} \left[\mathfrak{A}^\delta_m + \gamma_b \dot{\mathfrak{A}}^\delta_m\right],$$

$$\text{c)} \quad = \sum_m C'_{k,m} \left[\mathfrak{A}^\delta_m + \frac{\gamma_c}{\omega |\mathfrak{A}^\delta_m|} \dot{\mathfrak{A}}^\delta_m\right],$$

wobei $\dot{\mathfrak{A}}^\delta_m = j\omega \mathfrak{A}^\delta_m$ = Geschwindigkeitsamplitude von δ_m.

Annahme a) soll für Werkstoffe und Flugzeugkonstruktionen gewöhnlich zutreffen (s. Küßner [11], v. Schlippe [13]).

Annahme b) kann bei künstlichen Dämpferkonstruktionen, wie sie zur Vermeidung des Flatterns z. B. zwischen Flügel und Ruder denkbar sind, zutreffen.

Annahme c) soll insbesondere für Steuerungen zutreffen (s. Küßner [12], v. Schlippe [13]), indem bei solchen Systemen der Ausdruck V proportional dem Quadrat der Amplituden, die Dämpfungsarbeit E dagegen proportional den Amplituden selbst ausfällt. Die Annahme stellt wegen des Eingehens von $|\mathfrak{A}^\delta_m|$ in den Nenner keine lineare Beziehung zwischen Beanspruchungen und Formänderungen dar. Rechnungen damit werden deshalb zweckmäßig zuerst mit angenommenen Beträgen C''/C' (z. B. = 0) durchgeführt; entsprechend den sich ergebenden Amplituden werden dann Wiederholungsrechnungen mit verbesserten Beträgen C''/C' vorgenommen.

C. Wesen der Flatterberechnung.

1. Flatterkriterien.

a) Nennerdeterminante. — Die Flattergleichungen (s. II A 3) enthalten in ihren Beiwerten die Anblasegeschwindigkeit v und die Kreisfrequenz ω. Die denkbaren harmonischen Flatterzustände sind gekennzeichnet durch »kritische« Wertepaare v_{kr}, ω_{kr}, die »kritischen Geschwindigkeiten« und »Flatter-Kreisfrequenzen«, mit denen die (homogenen) Flattergleichungen von Null verschiedene Amplituden w_i', w_i'' als Lösungen zulassen; dabei bleiben Maßstab und Phase der in Frage kommenden Lösungsgruppen offen. (Die Phasenverschiebungen zwischen den einzelnen Bewegungsanteilen liegen aber eindeutig fest!) — Ohne Interesse sind hierbei im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen die durch $v = 0$ und bestimmte Beträge $\omega = \omega_{E1}, \omega_{E2}, \ldots$ gekennzeichneten »Eigenschwingungs«-Zustände des dämpfungsfrei gedachten Systems (s. auch II C 4 und III B 2). Zu beachten ist aber, daß ungünstige Kombinationen der einzelnen Parameter bei dämpfungsfrei gedachten Systemen dazu führen können, daß die kritische

Digitized by Google

Geschwindigkeit, bei der das Flattern einsetzt, auf Null absinkt. Ob im Einzelfall solches zutrifft, kann nötigenfalls durch kleine Variationen beliebiger Parameter festgestellt werden, die gegebenenfalls zu kritischen Geschwindigkeiten in der Nähe von Null führen.

Die Wertepaare v_{kr}, ω_{kr} sind dadurch bestimmt, daß die (komplexe) Nennerdeterminante $\Delta(v, \omega) = \Delta'(v, \omega) + j\Delta''(v, \omega)$ der Flattergleichungen den Wert Null annimmt:

$$\Delta'(v_{kr}, \omega_{kr}) = 0, \qquad \Delta''(v_{kr}, \omega_{kr}) = 0.$$

Zwecks Ermittlung von v_{kr} können also für eine Folge von Kreisfrequenzen ω diejenigen Geschwindigkeiten $v_a(\omega)$ und $v_b(\omega)$ durch Probieren aufgesucht und über ω aufgetragen werden, mit denen die Gleichungen $\Delta' = 0$ bzw. $\Delta'' = 0$ erfüllt werden. Die Schnittpunkte der Kurven $v_a(\omega)$ und $v_b(\omega)$ stellen in ihren Abszissen und Ordinaten die Werte ω_{kr} und v_{kr} dar. — Hiervon sind zahlreiche Abwandlungen möglich.

b) Harmonische Grundgleichungen. — Da die (nicht homogenen) harmonischen Grundgleichungen dieselbe Nennerdeterminante haben wie die Flattergleichungen, kann voranstehendes Flatterkriterium auch dahingehend ausgesprochen werden, daß die harmonischen Grundgleichungen unendlich große Amplituden w_i', w_i'' als Lösungen ergeben, wenn die Beträge $v = v_{kr}$ und $\omega = \omega_{kr}$ eingesetzt werden[10]) (vorausgesetzt, daß nicht bestimmte Orthogonalitätsbedingungen zwischen dem Erregungszustand und der Flatterform erfüllt sind). Zwecks Ermittlung von v_{kr} kann also zunächst irgendeine Erregung angesetzt werden, z. B. $P_1'^* = P_2'^* = \ldots = 1$; dann können zu einer Folge von Anblasegeschwindigkeiten v diejenigen Kreisfrequenzen $\omega^*(v)$ durch Probieren aufgesucht werden, bei denen eine oder mehrere der Unbekannten w_i', w_i'' Größtwerte ihrer Absolutbeträge annehmen. Diese Werte $\omega^*(v)$, über v aufgetragen, ergeben Kurven, längs denen die Unendlichkeitsstellen der Unbekannten w_i', w_i'' durch systematisches Probieren näher aufzusuchen sind. Die Abszissen und Ordinaten dieser Unendlichkeitstellen sind die Werte v_{kr} und ω_{kr}. — Auch hiervon sind zahlreiche Abwandlungen möglich.

2. Schrittweise zunehmende Näherung.

Die Anzahl der Rechnungsgänge wird meist am kleinsten, wenn unmittelbar an den Flattergleichungen selbst festgestellt wird, unter welchen Umständen sie von Null verschiedene Amplituden als Lösungen zulassen. Dabei wird zweckmäßig von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß sich die kinetische Energie eines schwingenden Systems in jedem Zeitelement dt um denjenigen Arbeitsbetrag ändert, den die Formänderungskräfte $p^F dV$ und Luftkräfte $p^L do$ des Systems an dessen Volumen- und Oberflächenelementen dV, do leisten:

$$dK = dE^F + dE^L.$$

Die Bewegung und Belastung sei harmonisch zeitabhängig und es bedeuten:

w^F, w^L, w^T die Wegkomponenten der einzelnen Volumen- bzw. Oberflächenelemente im Sinne der Kräfte p^F, p^L, p^T (s. oben), wobei:

$p^T dV = \omega^2 \mu w^T dV$ = Trägheitskräfte am Volumenelement dV,

μ = örtliche Massendichte.

Dann lautet die voranstehende Energiebedingung

$$\int p^F \cdot \dot{w}^F dV + \int p^L \cdot \dot{w}^L do + \int p^T \cdot \dot{w}^T dV = 0;$$

dabei erstrecken sich die Integrale über alle Volumen- und Oberflächenelemente des Systems.

Nach Einführung des harmonischen Bewegungsgesetzes kann dafür geschrieben werden

$$L_1 \cdot \cos^2 \omega t + L_2 \cdot \sin^2 \omega t + L_3 \cdot \cos \omega t \sin \omega t = 0,$$

wobei:

$$L_1 = \int p'^F \cdot w''^F dV + \int p'^L \cdot w''^L do + \int p'^T \cdot w''^T dV,$$

$$L_2 = -\int p''^F \cdot w'^F dV - \int p''^L \cdot w''^L do - \int p''^T \cdot w'^T dV,$$

$$L_3 = \int (p'^F \cdot w'^F - p''^F \cdot w''^F) dV + \int (p'^L \cdot w'^L - p''^L \cdot w''^L) do + \int (p'^T \cdot w'^T - p''^T \cdot w''^T) dV,$$

allgemein

$$L_\nu = L_\nu^F + L_\nu^L + L_\nu^T, \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Voranstehende Gleichung kann nur dann dauernd erfüllt sein, wenn

$$L_1 = L_2 = L_3 = 0.$$

Unter Verwendung dieser Energiebedingung ergibt sich folgende Möglichkeit zum Aufsuchen von v_{kr} aus den harmonischen Grundgleichungen des Systems mit n Freiheitsgraden:

Eine Schwingungsform $\overline{w}_1, \ldots \overline{w}_i, \ldots \overline{w}_n$, zusammengesetzt aus zwei Teilformen $\overline{w}_1', \ldots \overline{w}_i', \ldots \overline{w}_n'$ und $\overline{w}_1'', \ldots \overline{w}_i'', \ldots \overline{w}_n''$, die nach $\cos \omega t$ bzw. nach $\sin \omega t$ fortschreiten (s. II A 3), wird angenommen; die Maßstäbe der beiden Teilformen werden zunächst beliebig zu m_1 und m_2 gewählt. Die Amplituden der Schwingungsform werden in voranstehende Energiegleichung eingesetzt; v und ω sowie das Maßstabverhältnis m_2/m_1 werden als die drei Unbekannten der drei Energiebedingungen $L_1 = L_2 = L_3 = 0$ angesehen (m_1 bleibt dabei als »Gesamtmaßstab« natürlich offen, s. II C 1 a). Die daraus sich ergebenden Beträge v, ω, m_2/m_1 werden als erste Näherung $\overline{v}_{kr}$, $\overline{\omega}_{kr}$, $\overline{m}_2/\overline{m}_1$ für v_{kr}, ω_{kr}, m_2/m_1 angesprochen; zur Bestimmung einer weiteren Näherung wird $\overline{v}_{kr}$, $\overline{\omega}_{kr}$ in die Flattergleichungen eingesetzt, und nach einem der folgenden Verfahren a) oder b) wird daraus ein verbesserter Ansatz $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_i, \ldots, \mathfrak{w}_n$ gewonnen. Wie vorher ergibt sich damit eine Wertegruppe $\overline{v}_{kr}$, ω_{kr}, m_2/m_1 als zweite Näherung für v_{kr}, ω_{kr}, m_2/m_1 usf.

Verfahren a) und b) zur Ermittlung der verbesserten Schwingungsform $\mathfrak{w}_i$ aus einem Ansatz $\overline{\mathfrak{w}}_i$:

a) In den luftkraft- und trägheitsabhängigen Teilausdrücken $a_{ki}^L \mathfrak{w}_i$ und $a_{ki}^T \mathfrak{w}_i$ der Flattergleichungen (s. II A 3) werden die Größen $\mathfrak{w}_i$, d. h. w_i' und w_i'', unter Beachtung des gefundenen Betrages $\overline{m}_2/\overline{m}_1$ durch die Ansatzwerte $\overline{\mathfrak{w}}_i$, d. h. $\overline{w}_i'$ und $\overline{w}_i'' \cdot \overline{m}_2/\overline{m}_1$, ersetzt. Dann sind die Gleichungen nicht mehr homogen und liefern daher nach Einsetzen von $\overline{v}_{kr}$, $\overline{\omega}_{kr}$ eine bestimmte Lösungsgruppe für die stehengelassenen Unbekannten $\mathfrak{w}_i$, d. h. w_i' und w_i'', in den Teilausdrücken $a_{ki}^L \mathfrak{w}_i$. Diese Lösungen werden als verbesserte Ansätze $\mathfrak{w}_i$, d. h. w_i' und w_i'', angesprochen. (Dieses Vorgehen ist analog der Auflösung von Differentialgleichungen in schrittweise zunehmender Näherung; denn beim Übergang auf ein System mit unendlich vielen, stetig verteilten Freiheitsgraden werden die Teilausdrücke $a_{ki}^L \mathfrak{w}_i$ zu den Gliedern niedrigster Integrations- bzw. höchster Differentationsstufe.)

b) Die gefundenen Werte $\overline{v}_{kr}$, $\overline{\omega}_{kr}$ sowie die Ansatzwerte $\overline{\mathfrak{w}}_i$ unter Berücksichtigung von $\overline{m}_2/\overline{m}_1$, d. h. $\overline{w}_i'$ und $\overline{w}_i'' \cdot \overline{m}_2/\overline{m}_1$, werden in die Flattergleichungen eingesetzt; damit ergeben die linken Seiten irgendwelche Ausdrücke $\overline{c}_k'$, $\overline{c}_k'' \gtrless 0$. Die Quadratsumme $\Sigma \overline{c}_k'^2 + \Sigma \overline{c}_k''^2$ wird als Maß für die Abweichung des gewählten Ansatzes von der »richtigen« Lösung angesehen, und der gesuchte verbesserte Ansatz $\overline{\mathfrak{w}}_i = \overline{\mathfrak{w}}_i + \delta \overline{\mathfrak{w}}_i$ wird so bestimmt, daß damit die Quadratsumme der sich ergebenden neuen Beträge $\overline{\overline{c}}_k'$ und $\overline{\overline{c}}_k''$, d. h. $\Sigma \overline{\overline{c}}_k'^2 + \Sigma \overline{\overline{c}}_k''^2$, möglichst klein ausfällt. Um dabei aber den trivialen Fall $\mathfrak{w} = 0$ auszuschalten, werden nur solche Wertegruppen $\mathfrak{w}_i = \overline{\mathfrak{w}}_i + \delta \overline{\mathfrak{w}}_i$ zugelassen, deren Quadratsumme (entsprechend der Freiheit des Maßstabes) einen vorgegebenen Betrag, z. B. 1, hat (Nebenbedingung). Unter Vernachlässigung aller Produkte $\delta \overline{\mathfrak{w}}_k \cdot \delta \overline{\mathfrak{w}}_i$ einschl. $\delta \overline{\mathfrak{w}}_k^2$ ergibt dieses $2n + 1$ nicht-homogene lineare Gleichungen mit $2n$ Unbekannten $\delta \overline{w}_i'$, $\delta \overline{w}_i''$ und einer daneben eingehenden Unbekannten λ:

[10]) Einzelne Größen w_i', w_i'' können aber auch zu Null werden.

Digitized by Google

$\ldots, \quad \delta\overline{w}_i', \quad \ldots$	$\ldots, \quad \delta\overline{w}_i'', \quad \ldots$	λ		
$\ldots, \quad \sum_k (\bar{a}_{ki}'\bar{a}_{kr}' + \bar{a}_{ki}''\bar{a}_{kr}''), \ldots$	$\ldots, \sum_k (\bar{a}_{ki}'\bar{a}_{kr}'' - \bar{a}_{ki}''\bar{a}_{kr}'), \ldots$	$-\overline{w}_r'$	$\sum_k (\bar{c}_{ki}'\bar{a}_{kr}' + \bar{c}_{ki}''\bar{a}_{kr}'')$	$=0$
$\ldots, -\sum_k (\bar{a}_{ki}'\bar{a}_{kr}'' - \bar{a}_{ki}''\bar{a}_{kr}'), \ldots$	$\ldots, \sum_k (\bar{a}_{ki}'\bar{a}_{kr}' + \bar{a}_{ki}''\bar{a}_{kr}''), \ldots$	$-\overline{w}_r''$	$-\sum_k (\bar{c}_{ki}'\bar{a}_{kx}'' - \bar{c}_{ki}''\bar{a}_{kr}')$	$=0$
$\ldots, \quad -\overline{w}_i', \quad \ldots$	$\ldots, \quad -\overline{w}_i'', \quad \ldots$	0	$\frac{1}{2}\left[1 - \sum_i (\overline{w}_i'^2 + \overline{w}_i''^2)\right]$	$=0$

(Zu lesen wie die Gleichungen in II A 3.)

Daraus $w_i = \overline{w}_i + \delta\overline{w}_i$.

3. Lösung der Gleichungen.

Die angedeuteten Möglichkeiten zum Aufsuchen der kritischen Geschwindigkeit erfordern die wiederholte Auflösung von Determinanten oder von Systemen linearer Gleichungen. Mit kleinstem Zeitaufwand können solche Rechnungen durchgeführt werden, wenn dazu geeignete Vorrichtungen verfügbar sind. Bei Verwendung von elektrischen Einrichtungen, wie sie insbesondere von Mallock [29] und Cauer [30] beschrieben wurden, erfordert z. B. die Auflösung von 10 Gleichungen mit 10 Unbekannten noch keine Stunde Arbeitsaufwand.

4. Flatter- und Eigenschwingungszustände.

Bei Flügeln mit Ruder stimmen die Frequenzen und Schwingungsformen von Flatterzuständen oft weitgehend mit Frequenzen und Schwingungsformen bestimmter Eigenschwingungszustände überein (s. II C 1a und III B 2). Es wäre jedoch sinnwidrig, deshalb die Flatterzustände etwa als abgewandelte Eigenschwingungszustände aufzufassen. Bei vereinfachter Darstellung geeigneter Sonderfälle kann das Flatterkriterium nämlich leicht in folgende Form gebracht werden:

$$\Delta'(v, \omega) = 0, \qquad \Delta''(v, \omega) = v \cdot \overline{\Delta}''(v, \omega) = 0;$$

dann gehen die Kreisfrequenzen von Eigenschwingungszuständen (zu $v = 0$) allein aus der ersten Gleichung hervor, da die zweite mit $v = 0$ verschwindet. Die Kreisfrequenzen von Flatterzuständen dagegen (zu Werten $v_i \geqq 0$) können als Funktionen von v aus dem zweiten Faktor der zweiten Gleichung ausgerechnet werden und machen dann, in die erste Gleichung eingesetzt, diese zur Bestimmungsgleichung von v_{kr}. Eigen- und Flatter-Kreisfrequenzen sind also verschiedenartig in den Flattergleichungen enthalten und kennzeichnen somit grundsätzlich verschiedene Schwingungszustände.

III. Aufstellung der Flatterberechnung.

A. Ersatzsysteme.

1. Arten der Ersatzsysteme.

Da es praktisch unmöglich ist, bei einer Flatterberechnung alle mechanischen Eigenschaften einer Flugzeugkonstruktion zu erfassen, wird zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit normalerweise ein »Ersatzsystem« an Stelle der wirklichen Flugzeugkonstruktion betrachtet, das nur diejenigen mechanischen Eigenschaften der wirklichen Konstruktion aufweist, die als wesentlich angesehen werden. Drei nachfolgend beschriebene Auffassungsmöglichkeiten über das Wesen solcher Ersatzsysteme liegen besonders nahe: Stabzugartige Systeme, Teilkörpersysteme, Systeme vorgegebener Formänderungsfähigkeit. Natürlich kommen auch Kombinationen aus diesen drei Arten in Frage.

Ein stabzugartiges System (s. Bild 7) entsteht, indem z. B. ein Flügel in eine Anzahl von Abschnitten aufgeteilt gedacht wird, die steif miteinander verbunden sind und von denen jeder gewisse Formänderungs-, Luftkraft- und Trägheitseigenschaften besitzt.

Ein Teilkörpersystem (s. Bild 9 u. 10) entsteht, indem eine Anzahl von flügelartigen oder sonstwie gestalteten starren Körpern mit Hilfe von verformbaren oder z. T. auch starren Verbindungsgliedern zu einem Gesamtsystem vereinigt wird. Die einzelnen Teilkörper seien dabei bestimmten Abschnitten der wirklichen Flugzeugkonstruktion zugeordnet.

Ein System vorgegebener Formänderungsfähigkeit (s. Bild 11) liegt vor, wenn vorausgesetzt wird, ein System könne seine Form nur nach bestimmten vorgegebenen »Elementarformen« und nach linearen Kombinationen dieser verändern, ohne daß näher ausgesprochen wird, welcher konstruktive Systemaufbau tatsächlich zu diesen Formänderungseigenschaften führen würde. Die vorgegebenen Elementarformen der Formänderungsfähigkeit und daneben die Bewegungsformen, die das System ohne gleichzeitige Formänderung ausführen kann, kennzeichnen dann (soweit sie voneinander linear unabhängig sind) die einzelnen Freiheitsgrade des Systems.

2. Bedeutung der Ersatzsysteme.

a) Stabzugartige Systeme. — Die Vorstellung eines stabzugartigen Systems ist offenbar besonders geeignet, um unmittelbar aus der Konstruktion eines Flugzeugsystems Aussagen über dessen mechanische Eigenschaften zu machen. Zu diesem Zweck muß die Abschnittsteilung so eng gewählt werden, daß die Formänderungs- und sonstigen Eigenschaften der einzelnen Abschnitte einigermaßen sicher aus deren Gestalt und konstruktivem Aufbau geschätzt werden können. Die übliche Behandlung von Holmen usw. nach den Differentialgleichungen der Biege- und Drill-Linie des Stabes stellt den Grenzfall dieser Betrachtungsweise für unendlich kleine Abschnittsteilung dar. — Vereinfachte Sonderfälle ergeben sich, wenn das stabzugartige System in abwechselnder Folge aus zwei Arten von Abschnitten aufgebaut gedacht wird, wobei die Abschnitte der einen Art unendlich kurz sind, die anderen dagegen endliche Länge besitzen. Dann kann angenommen werden, daß die unendlich kurzen Abschnitte alle Formänderungseigenschaften in sich vereinigen (sog. »elastische Gelenke«), während die endlich langen Abschnitte starre Gebilde darstellen, an denen die Luft- und Trägheitskräfte angreifen (s. Bild 8a). Oder es wird angenommen, die unendlich kurzen

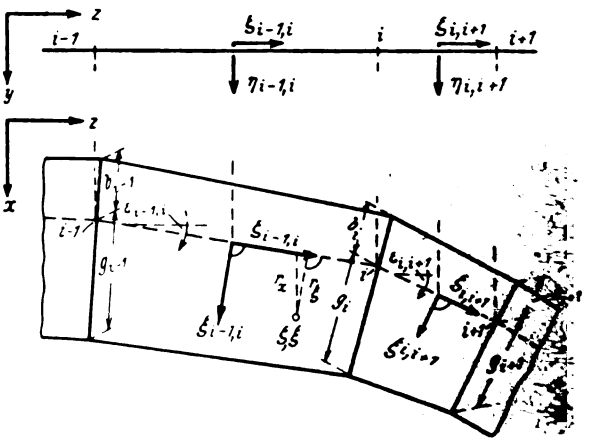


Bild 7. Stabzugartiges System (positive Drehrichtung z x).

Digitized by Google

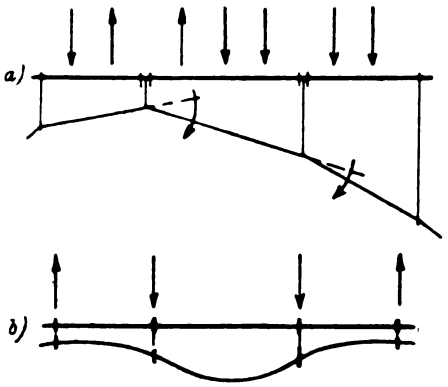


Bild 8. Besondere Stabzugsysteme.

Abschnitte seien starr und stellen die Angriffsstellen der dort konzentrierten Luft- und Trägheitskräfte dar, während die endlich langen Abschnitte die Federungseigenschaften des Systems tragen (s. Bild 8b). Beide Auffassungen können auch kombiniert werden.

b) Teilkörpersysteme. — Die Vorstellung eines Teilkörpersystems erscheint besonders geeignet, um daran grundsätzliche Untersuchungen über die Auswirkung baulicher Maßnahmen durchzuführen (z. B. über den Einfluß von Rudern und Hilfsrudern, Massen und Steifigkeiten, Lagen von Schwerachsen, elastischen Achsen u. dgl.); denn die einzelnen Maßnahmen können übersichtlich durch die gegenseitige Anordnung der Teilkörper, durch die Annahme von Federungsgliedern, Massenwerten usw., zum Ausdruck gebracht werden. Zu Untersuchungen solcher Art wird es oft genügen, die einzelnen Teilkörper nur hinter- und untereinander angeordnet zu denken (s. Bild 9 u. 10) und dabei vorauszusetzen, die einzelnen Teilkörper seien zylindrisch, und zwar mit Erzeugenden senkrecht zu einer Ebene xy, und so geführt, daß sie nur Bewegungen parallel zu dieser Bezugsebene ausführen können: Teilkörpersysteme im Sinne des ebenen Problems. Bei einem System entsprechend Bild 10 kann Teilkörper »1« etwa als Verkörperung des Flugzeugrumpfes und eines Tragwerkmittelstücks angesehen werden, während das Teilkörperpaar »2, 3«, gleichwertig einer in sich knickbaren Platte, das übrige Tragwerk mit Ruder wiedergibt. Einfache Systeme solcher Art benutzt z. B. Leiß bei der grundsätzlichen Untersuchung baulicher Einflüsse [19]. Als Teilkörpersystem kann auch der in Bild 8a dargestellte Sonderfall eines stabzugartigen Systems aufgefaßt werden. — Zur Erfassung verwickelter Anordnungen kann es zweckmäßig sein, masselos gedachte Teilkörper aus rein geometrischen Gründen in das System aufzunehmen.

c) Systeme vorgegebener Formänderungsfähigkeit. — Die Vorstellung eines Systems vorgegebener Formänderungsfähigkeit bringt den Vorteil, daß bei geschickt angesetzten Elementarformen der Formänderungsfähigkeit schon mit wenig Freiheitsgraden alles Wesentliche erfaßt werden kann, daß also die Beachtung weiterer Freiheitsgrade dann nur noch eine geringfügige Verbesserung darstellt. Beispielsweise liegt eine solche Betrachtungsweise nahe, wenn eine Reihe von Eigenschwingungsformen der wirklichen Flugzeugkonstruktion bekannt ist und Aussicht besteht, daß die Flatterform angenähert als lineare Kombination dieser Eigenschwingungsformen dargestellt werden kann, etwa als lineare Kombination einer Biege- und einer Drillschwingung nebst einer Schwingung des freien Ruders oder des elastischen Systems Ruder + Steuerung (s. Bild 11).

Die Vorstellung von Systemen vorgegebener Formänderungsfähigkeit ist die mechanische Ausdeutung der bekannten Verfahren von Rayleigh, Ritz, Galerkin. Selbstverständlich können die einzelnen Elementarformen auch so gewählt werden, daß ein System vorgegebener Formänderungsfähigkeit gleichbedeutend einem stabzugartigen System oder einem Teilkörpersystem ist. Ein wesentlicher

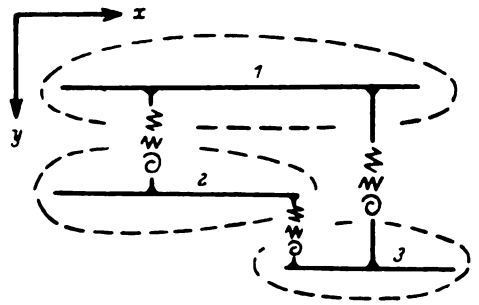


Bild 9. Teilkörper-System.

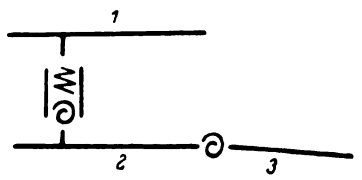


Bild 10. Teilkörper-System für Flügelschlag, Flügeldrehung und Ruderdrehung.

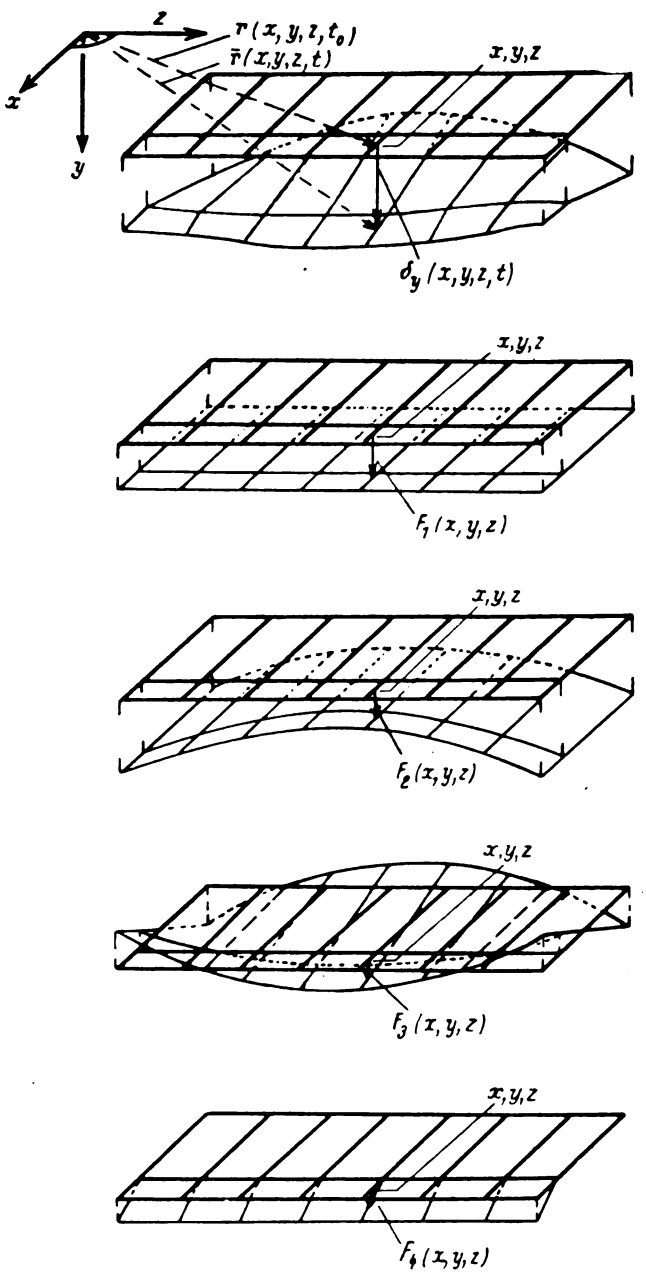


Bild 11. Beispiel für die Überlagerung eines Bewegungszustandes $\delta_y(x, y, z, t)$ aus mehreren Elementarformen F_1, F_2, F_3, F_4.

Digitized by Google

Unterschied gegenüber a) und b) liegt aber darin, daß dort von einer bestimmten konstruktiven Vorstellung ausgegangen wird, aus der bestimmte Formänderungsfähigkeiten des Systems folgen, während hier von vornherein die Formänderungseigenschaften als gegeben angesehen sind.

d) Kombinierte Verwendung verschiedener Vorstellungen. — Zu den einzelnen Teilstufen einer Flatterrechnung können verschiedene Vorstellungen über das Wesen des betrachteten Ersatzsystems Verwendung finden. Beispielsweise können an Hand der Konstruktionszeichnungen zunächst die Eigenschwingungszustände unter Annahme eines eng unterteilten stabzugartigen Systems ermittelt werden; anschließend kann die Abschätzung der kritischen Geschwindigkeit unter Vorstellung eines Systems vorgegebener Formänderungsfähigkeit erfolgen, wobei die vorher errechneten Eigenschwingungsformen als Elementarformen der Formänderungsfähigkeit angesetzt werden.

Bei den einzelnen Arten solcher Systeme besteht immer die Möglichkeit, zu unendlich vielen Freiheitsgraden überzugehen, entsprechend der in Wirklichkeit stetigen Verteilung der Verformungsmöglichkeiten.

Soll ein System unter Vorstellung einer gewissen Anzahl von Freiheitsgraden in schrittweise zunehmender Näherung im Sinne von IIC2 berechnet werden, so kann es vorteilhaft sein, zuerst eine vorbereitende Rechnung unter Vorstellung eines Systems mit möglichst wenig Freiheitsgraden durchzuführen und die dabei sich ergebende Flatterform als Ausgangsform ..., $\overline{w}_i'$, ..., $\overline{w}_i''$, ... für die schrittweise zunehmende Näherung zu benutzen.

B. Anpassung der Ersatzsysteme.

1. Wesen der Anpassung.

Ersatzsysteme stellen oft erhebliche Vereinfachungen gegenüber der wirklichen Flugzeugkonstruktion dar. In solchen Fällen ist es unmöglich, ohne nähere Rechnungen abzuschätzen, welche Zahlenwerte für die einzelnen Parameter eines solchen Ersatzsystems anzusetzen sind, damit dieses einigermaßen der wirklichen Flugzeugkonstruktion als gleichwertig gelten kann. Die folgenden Ausführungen geben einen Überblick über Möglichkeiten, nach denen eine solche »Anpassung« des Ersatzsystems vorgenommen werden kann. Die Ausführungen gelten nicht nur für rein rechnerische Flatteruntersuchungen, sondern auch für den Fall, daß vereinfachte Modelle im Sinne von Ersatzsystemen an Stelle von voll wirklichkeitsgetreuen Modellen zu Windkanalversuchen Verwendung finden sollen.

Die mechanischen Eigenschaften eines Systems von n Freiheitsgraden gelangen zunächst im Aufbau der Beiwerte a_{ik} seiner harmonischen Grundgleichungen zum Ausdruck (s. IIA3). Um also ein Ersatzsystem möglichst weit an die wirkliche Flugzeugkonstruktion »anzupassen«, müssen die Beiwerte seiner harmonischen Grundgleichung so festgelegt werden, daß es — nach diesen Gleichungen — mit der wirklichen Flugzeugkonstruktion in so vielen mechanischen (einschl. aerodynamischen) Eigenschaften übereinstimmt, wie verfügbare Parameter in den Beiwerten seiner harmonischen Grundgleichungen enthalten sind. Beispielsweise kann Übereinstimmung des Ersatzsystems mit der wirklichen Flugzeugkonstruktion in Eigenschaften folgender Art verlangt werden: In seinen Eigenfrequenzen, ferner in Amplitudenverhältnissen, statischen Verschiebungen, Luftkräften bei irgendwelchen Schwingungs-, Belastungs- oder Bewegungszuständen — bzw. in Gruppen- oder Integralwerten solcher Größen —, in Formänderungs-, Bauteildämpfungs- und Luftkraftarbeiten (s. auch IIIB3e). Gelegentlich kann es auch notwendig sein, Übereinstimmung in Massen, Massenträgheitsmomenten, Schwerpunktslagen usw. zu verlangen.

Ein symmetrisches Flugzeug kann symmetrisch und antisymmetrisch schwingen. Beim symmetrischen Flugzeug sind für symmetrische und antisymmetrische Schwingungen verschiedene Bestimmungsgrößen maßgebend; daher werden zur Flatteruntersuchung eines symmetrischen Flugzeugs zweckmäßig zwei Ersatzsysteme in Betracht gezogen, wobei die Anpassung des einen auf Grund von symmetrischen Vorgängen, die des anderen auf Grund von antisymmetrischen Vorgängen erfolgt.

2. Anpassungsgleichungen.

a) Allgemeines. — Zur Anpassung eines Ersatzsystems an die wirkliche Flugzeugkonstruktion stehen verschiedene Gruppen von »Anpassungsgleichungen« zur Verfügung, die, wie auch die Flattergleichungen, durch Streichen bestimmter Glieder, teils auch in Verbindung mit einigen Umformungen, aus den harmonischen Grundgleichungen (s. IIA3) hervorgehen.

b) Luftkraftgleichungen usw. — Werden in den harmonischen Grundgleichungen die Formänderungs- und Trägheitsglieder gestrichen und wird $\mathfrak{P}_i$ statt $\mathfrak{P}_i^*$ geschrieben, so verbleiben die »Luftkraftgleichungen«:

$$\sum_k a_{ik}^{L}(v,\omega)\cdot \mathfrak{w}_k + \mathfrak{P}_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Für einen gegebenen harmonischen Bewegungsablauf $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_k, \ldots, \mathfrak{w}_n$ beschreiben diese Gleichungen in ihren Absolutgliedern $\mathfrak{P}_i$ die Luftkräfte des Ersatzsystems. — Im Sonderfall $v = 0$ entfallen die Glieder $a_{ik}^{L,s}$, und aus den allgemeinen Luftkraftgleichungen werden die »Luftkraftrestgleichungen«:

$$\sum_k a_{ik}^{L,R}(0,\omega)\cdot \mathfrak{w}_k + \mathfrak{P}_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Diese Gleichungen beschreiben in ihren Absolutgliedern $\mathfrak{P}_i$ die Luftkräfte des Ersatzsystems bei einem gegebenen harmonischen Bewegungsablauf $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_k, \ldots, \mathfrak{w}_n$ bei Anblasegeschwindigkeit $v = 0$. — Im Sonderfall $\omega = 0$ entfallen die Glieder $a_{ik}^{\prime\prime L,s}$, $a_{ik}^{L,R}$, und aus den allgemeinen Luftkraftgleichungen werden die »Gleichungen für stationäre Strömung«:

$$\sum_k a_{ik}^{\prime L,s}(v,0)\cdot w_k' + P_i' = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Diese Gleichungen beschreiben in ihren Absolutgliedern P_i' die Luftkräfte des Ersatzsystems bei einem gegebenen zeitunabhängigen Verschiebungszustand $w_1', \ldots, w_k', \ldots, w_n'$.

c) Standschwingungsgleichungen usw. — Werden in den harmonischen Grundgleichungen die Luftkraft-Strömungsglieder gestrichen, so verbleiben die »Standschwingungsgleichungen«:

$$\sum_k \left[a_{ik}^{F}(\omega) + a_{ik}^{T}(\omega) + a_{ik}^{L,R}(\omega)\right]\mathfrak{w}_k + \mathfrak{P}_i^* = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Für einen gegebenen Erregungszustand $\mathfrak{P}_1^*, \ldots, \mathfrak{P}_i^*, \ldots, \mathfrak{P}_n^*$ beschreiben diese Gleichungen den harmonischen Verschiebungsablauf $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_k, \ldots, \mathfrak{w}_n$ des Ersatzsystems unter der Voraussetzung, daß die das System umgebende Luft keine anderen Bewegungen ausführt, als durch die Schwingungen des Systems hervorgerufen werden. — Im Sonderfall $\omega = 0$ entfallen alle Glieder $a_{ik}^{\prime\prime F}$, a_{ik}^{T}, $a_{ik}^{L,R}$, und aus den Standschwingungsgleichungen werden die »Gleichungen für ruhende Belastung«:

$$\sum_k a_{ik}^{\prime F}\cdot w_k' + P_i^* = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Diese Gleichungen beschreiben die Verschiebungen des Ersatzsystems bei gegebener zeitunabhängiger Belastung. Mangels irgendwelcher Trägheitsglieder haben sie nur dann einen Sinn, wenn die gegebene Belastung für sich im Gleichgewicht steht. — Im allgemeinsten Falle besitze das betrachtete System $g \geq 0$ kräftefreie Gelenke oder sonstige kräftefreie Verschiebungsmöglichkeiten innerhalb seines Verbandes, weiterhin sei es in $f \geq 0$ Fesseln gelagert[11]) ($f = 0$: freies System). Besitzt das System in diesem Zustand n Freiheitsgrade der Verschieblichkeit einschließlich Formänderungsfähigkeit, so sind von den zuletzt genannten Gleichungen nur $m = n - (6 + g) + f$ voneinander unabhängig, falls $f \leq 6 + g$ ist; dagegen sind alle Gleichungen voneinander

[11]) Unter der Voraussetzung, daß jede der gezählten Fesseln so angeordnet ist, daß sie tatsächlich eine Bewegungsmöglichkeit unterdrückt.

Digitized by Google

unabhängig, wenn $f \gtrless 6 + g$ ist[12]). — Stets kann aus den ursprünglichen n Gleichungen eine Gruppe von m voneinander unabhängigen Gleichungen mit m neuen Unbekannten $\breve{w}_i'$ gemacht werden, sei es durch willkürliche Verfügung über $n - m$ der ursprünglichen Größen w_i' (z. B. Nullsetzung) oder über irgendwelche Kombinationen davon, sei es durch geeignete Kombination der n ursprünglichen Gleichungen untereinander derart, daß — unter Ausnutzung der Gleichgewichtsbedingungen — m Gleichungen übrigbleiben, die gerade noch m unabhängige Kombinationen $\breve{w}_i'$ der Größen w_i' enthalten. In solcher Gestalt werden die in Rede stehenden Gleichungen als »Federungsgleichungen« bezeichnet:

$$\sum_k \breve{a}_{ik}'^{F} \cdot \breve{w}_k + \breve{P}_i'^{*} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m = \begin{cases} n - (6+g) + f & \text{bei } f < 6 + g, \\ n & \text{bei } f \geq 6 + g. \end{cases}$$

In obengenannten Standschwingungsgleichungen sind die Dämpfungsglieder a_{ik}'' und die Unbekannten w_k'' gewöhnlich klein gegen die Glieder a_{ik}' und w_k'. Es liegt daher nahe, die Produkte $a_{ik}'' w_k''$ zu vernachlässigen. Dann entfallen in den ersten n der $2n$ Standschwingungsgleichungen alle Glieder a_{ik}''. Die so vereinfachten ersten n Standschwingungsgleichungen werden als »Feder-Masse-Gleichungen« bezeichnet:

$$\sum_k [a_{ik}'^{F} + a_{ik}'^{T}(\omega) + a_{ik}'^{I,R}(\omega)]\, w_k' + P_i'^{*} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Im Sonderfall $\omega = 0$ gehen diese Gleichungen wieder in die »Federungsgleichungen« über (s. oben).

Sind die Absolutglieder der Feder-Masse-Gleichungen gleich Null, so werden diese Gleichungen als »Eigenschwingungsgleichungen« bezeichnet:

$$\sum_k [a_{ik}'^{F} + a_{ik}'^{T}(\omega) + a_{ik}'^{I,R}(\omega)]\, w_k' = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese Gleichungen beschreiben die Schwingungen des irgendwie angestoßenen, dann aber sich selbst überlassenen ungedämpften Ersatzsystems für den Fall, daß die das System umgebende Luft keine anderen Bewegungen ausführt, als durch die Schwingungen des Systems hervorgerufen werden. — Als Gruppe von n homogenen Gleichungen mit n Unbekannten w_k' gestatten die Eigenschwingungsgleichungen nur dann von Null verschiedene Amplituden, wenn die durch $a_{ik}'^{T}$ und $a_{ik}'^{I,R}$ (s. IIA3) eingehende Kreisfrequenz ω gleich irgendeiner der »Eigen-Kreisfrequenzen« $\omega_{E1}, \omega_{E2}, \ldots$ des Ersatzsystems gesetzt wird (s. IIC1a und IIC4). Beim freien oder unvollkommen gefesselten System (s. oben) sind von diesen Eigenkreisfrequenzen nur $m \leq n$ ungleich Null. Die gleich Null ausfallenden Eigenfrequenzen entsprechen den $n - m$ voneinander linear unabhängigen Bewegungszuständen, die das System nach geeignetem Anstoß beschleunigungsfrei ausführen kann (Trägheitsgesetz).

Die restlichen n der $2n$ Standschwingungsgleichungen enthalten nur die Produkte $a_{ik}'' w_k'$ und $a_{ik}' w_k''$, die bei kleiner Dämpfung beide klein und daher nicht zu vernachlässigen sind. Diese Gleichungen werden als »Dämpfungsgleichungen« bezeichnet:

$$\sum_k [a_{ik}''^{F}(\omega) + a_{ik}''^{I,R}(\omega)]\, w_k' + \sum_k [a_{ik}'^{F} + a_{ik}'^{T}(\omega) + a_{ik}'^{I,R}(\omega)]\, w_k'' + P_i''^{*} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Durchführung der Anpassung.

a) Grundsätzliches. — Die Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ in den $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Standschwingungs-} \end{Bmatrix}$Gleichungen des Ersatzsystems haben die Bedeutung von bestimmten $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Verschiebungs-} \end{Bmatrix}$Amplituden, von Gruppen- oder Integralwerten solcher Größen, je nachdem welche Vorstellung über das Ersatzsystem im Einzelfall zur Aufstellung der $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Standschwingungs-} \end{Bmatrix}$Gleichungen führte. Die Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ werden durch die $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Standschwingungs-} \end{Bmatrix}$Gleichungen in Abhängigkeit von harmonischen $\begin{Bmatrix} \text{Bewegungs-} \\ \text{Belastungs-} \end{Bmatrix}$Zuständen $\begin{Bmatrix} w_i', w_i'' \\ P_i'^{*}, P_i''^{*} \end{Bmatrix}$, zugleich aber auch (durch die einzelnen Beiwerte a_{ik}) in Abhängigkeit von $\begin{Bmatrix} \omega \text{ und } v \\ \omega \end{Bmatrix}$, beschrieben. — Nach vorangehendem ist das Ersatzsystem offenbar dann der wirklichen Flugzeugkonstruktion hinsichtlich seiner $\begin{Bmatrix} \text{Luft-} \\ \text{Formänderungs- und} \\ \text{kraft-} \\ \text{Trägheits-} \end{Bmatrix}$Eigenschaften »angepaßt«, wenn sich die Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ aus seinen $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Standschwingungs-} \end{Bmatrix}$Gleichungen für gegebene harmonische $\begin{Bmatrix} \text{Bewegungs-} \\ \text{Belastungs-} \end{Bmatrix}$Zustände gleich entsprechenden $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Verschiebungs-} \end{Bmatrix}$Amplituden der wirklichen Flugzeugkonstruktion (bzw. Gruppen- oder Integralwerten solcher Größen) ergeben. Als solche Vergleichsgrößen kommen bestimmte $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Verschiebungs-} \end{Bmatrix}$Amplituden in Frage (bzw. Gruppen- oder Integralwerte solcher Größen), die an der wirklichen Flugzeugkonstruktion auftreten, wenn diese nacheinander $\begin{Bmatrix} \text{eine Reihe von harmonischen Bewegungen} \\ \text{durch eine Reihe von harmonischen Belastungs-} \end{Bmatrix}$ im Luftstrom ausführt zuständen erregt wird, die den genannten $\begin{Bmatrix} \text{Bewegungs-} \\ \text{Belastungs-} \end{Bmatrix}$Zuständen des Ersatzsystems als »entsprechend« angesehen werden.

Die zu solcher Anpassung benötigten Luftkraftamplituden zu gegebenen Bewegungszuständen der wirklichen Flugzeugkonstruktion seien aus eingehenden aerodynamischen Berechnungen des wirklichen Systems oder aus Windkanalversuchen an geeigneten Modellen bekannt. Die weiterhin benötigten Verschiebungsamplituden zu gegebenen harmonischen Belastungszuständen der wirklichen Flugzeugkonstruktion seien etwa aus Rechnungen im Sinne von IIIA2a bekannt, bei denen die wirkliche Flugzeugkonstruktion als hinreichend eng unterteiltes stabzugartiges System aufgefaßt wird, oder aber aus geeigneten Belastungs- und Schwingungsversuchen mit der (bereits fertigen) Flugzeugkonstruktion.

Jeder harmonisch zeitabhängige $\begin{Bmatrix} \text{Bewegungs-} \\ \text{Belastungs-} \end{Bmatrix}$Zustand eines Systems mit n Freiheitsgraden ist als lineare Kombination von irgendwelchen n linear voneinander unabhängigen $\begin{Bmatrix} \text{Bewegungs-} \\ \text{Belastungs-} \end{Bmatrix}$Zuständen darstellbar, von denen jeder durch $2n$ Größen $\begin{Bmatrix} w_i', w_i'' \\ P_i'^{*}, P_i''^{*} \end{Bmatrix}$ gegeben ist (dabei können z. B. alle Größen $\begin{Bmatrix} w_i'' \\ P_i''^{*} \end{Bmatrix}$ gleich Null sein). Somit ist die Gesamtzahl der denkbaren Anpassungsbedingungen des Ersatzsystems erfüllt, wenn die voranstehend ausgesprochene Angleichung der Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ für irgendwelche n harmonische $\begin{Bmatrix} \text{Bewegungs-} \\ \text{Belastungs-} \end{Bmatrix}$Zustände des Ersatzsystems verwirklicht wird. — Zu jedem dieser Zustände gehören $2n$ $\begin{Bmatrix} \text{Luft-} \\ \text{Stand-} \\ \text{kraft-} \\ \text{schwingungs-} \end{Bmatrix}$Gleichungen (des Ersatzsystems). Also sind bei dieser Art der Anpassung $n \cdot 2n = 2n^2$ Anpassungsbedingungen sowohl für die Luftkraftgleichungen als auch für die Standschwingungsgleichungen denkbar; in diesen sind die Größen $\begin{Bmatrix} w_i', w_i'' \\ P_i'^{*}, P_i''^{*} \end{Bmatrix}$ und die zugehörigen Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ als Zahlenwerte festgelegt zu denken; die Beiwerte a_{ik}', a_{ik}'' sind als die passend zu bestimmenden Unbekannten anzusehen.

[12]) Systeme im Sinne des ebenen Problems (s. III A 2) sind wenigstens in $f = 3$ Fesseln geführt, die Bewegungen außerhalb der Systemebene verhindern.

Digitized by Google

Insbesondere kommen zur Durchführung der Anpassung auch die Standschwingungsgleichungen des Sonderfalls $\omega = 0$, also die m Federungsgleichungen, in Frage; dann bedeuten die Größen $\breve{w}_i'$ statische Verschiebungsgrößen des Ersatzsystems, die für m (s. IIIB2) gegebene Gleichgewichtszustände gleich bestimmten Verschiebungswerten sein sollen, wie sie an der wirklichen Flugzeugkonstruktion auftreten, wenn diese nacheinander durch eine Reihe von Gleichgewichtszuständen belastet wird, die den genannten Belastungszuständen des Ersatzsystems als »entsprechend« angesehen werden.

b) Die Luftkraftglieder. — Die $2n^2$ Luftkraftglieder $a_{ik}'^{L}(v, \omega)$, $a_{ik}''^{L}(v, \omega)$ des Ersatzsystems (vgl. die Luftkraftgleichungen in IIIB2) können durch die denkbaren $2n^2$ Anpassungsbedingungen der Luftkraftgleichungen gerade eindeutig als Funktionen von ω und v festgelegt werden, wenn die Vergleichsgrößen $\mathfrak{P}_i$ von der wirklichen Flugzeugkonstruktion her in Abhängigkeit von ω und v gegeben sind. Im Sonderfall $v = 0$ ergeben sich die Luftkraft-Restglieder $a_{ik}^{L\,R}(0, \omega)$. Dann folgen die Luftkraft-Strömungsglieder zu $a_{ik}^{L\,S}(v, \omega) = a_{ik}^{L}(v, \omega) - a_{ik}^{L\,R}(0, \omega)$. Oft wird es aber naheliegen, schon von vornherein irgendwelche Annahmen über die Luftkraftglieder zu treffen (z. B. Voraussetzung gewisser Gesetzmäßigkeiten entspr. IIB2, Nullsetzung oder Gleichsetzung einzelner Glieder usw.). Unter Umständen dienen dann die Anpassungsbedingungen nur noch dazu, gewisse maßgebliche Flügeltiefen, Abschnittsbreiten usw. festzulegen, die als bauliche Parameter des Ersatzsystems in vorgegebene Gesetze für die einzelnen Luftkraftglieder einzusetzen sind. Bei Einführung solcher Annahmen ist die Anzahl der aus den Anpassungsbedingungen auszurechnenden Größen $a_{ik}'^{L}$, $a_{ik}''^{L}$ stets kleiner als die Anzahl der formal aufstellbaren Anpassungsbedingungen (s. IIIB3d).

c) Die Formänderungs- und Trägheitsglieder. α) Mit Berücksichtigung von $a_{ik}'' w_k''$. — Bestände freie Verfügbarkeit der $2n^2$ Ausdrücke $a_{ik}'^{T} + a_{ik}'^{T}(\omega) + a_{ik}'^{L\,R}(\omega)$, $a_{ik}''^{T}(\omega) + a_{ik}''^{L\,R}(\omega)$ des Ersatzsystems (vgl. die Standschwingungsgleichungen in IIIB2), so könnten diese durch geeignete $2n^2$ Anpassungsbedingungen der Standschwingungsgleichungen gerade eindeutig als Funktionen von ω festgelegt werden, wenn die Vergleichsgrößen $\mathfrak{w}_i$ von der wirklichen Flugzeugkonstruktion her in Abhängigkeit von ω gegeben sind. Bei Kenntnis der Glieder $a_{ik}^{L\,R}(\omega)$ nach IIIB3b können durch deren Subtraktion die Teilglieder $a_{ik}'^{L}(\omega) + a_{ik}'^{T}(\omega)$ ermittelt werden.

Neben Anpassungsbedingungen entsprechend IIIB3a kann auch noch die Forderung erhoben werden, daß die m Resonanzfrequenzen des Ersatzsystems mit m Resonanzfrequenzen der wirklichen Flugzeugkonstruktion übereinstimmen[13]), wobei letztere wiederum aus Rechnungen im Sinne von IIIA2a oder aus Versuchen bekannt seien. Praktisch bedeutet die Forderung, die Nennerdeterminante der Standschwingungsgleichungen des Ersatzsystems soll mit m Kreisfrequenzen, die von der wirklichen Flugzeugkonstruktion her gegeben sind, Kleinstwerte ihres Absolutbetrages annehmen (vorausgesetzt, daß beim Übergang zu einem Resonanzzustand die Nennerdeterminante gegenüber den Zählerdeterminanten die wesentliche Rolle spielt). Diese m Anpassungsbedingungen sind nicht linear in den Größen $a_{ik}'^{T} + a_{ik}'^{T}(\omega) + a_{ik}'^{L\,R}(\omega)$, $a_{ik}''^{T}(\omega) + a_{ik}''^{L\,R}(\omega)$.

Stets ist $a_{ik}'^{T}(\omega) = \omega^2 \cdot \bar{a}_{ik}'^{T}$ (wobei der Querstrich über a_{ik} die Unabhängigkeit der betreffenden Glieder von ω andeuten soll).

Weiterhin werde vereinfachend (s. IIB2) gesetzt:

$$a_{ik}^{L}(\omega) \approx \bar{a}_{ik}'^{F} + j \cdot \omega \cdot \bar{a}_{ik}''^{F},$$
$$a_{ik}^{L\,R}(\omega) \approx \omega^2 \cdot \bar{a}_{ik}'^{L\,R}.$$

Bei dieser Einführung sind die Glieder a_{ik}'' einheitlich mit ω, die Glieder a_{ik}' dagegen teils mit ω^2 behaftet, teils von ω unabhängig. Dabei ist die zahlenmäßige Abhängigkeit aller Größen $a_{ik}'^{T} + a_{ik}'^{L\,R}$, $a_{ik}'^{F}$, $a_{ik}''^{T}$ von ω festgelegt, wenn die gewählten Anpassungsbedingungen bei irgendeinem Zahlenwert $\omega > 0$ und bei $\omega = 0$ erfüllt werden. Nach ersterem sind formal $n \cdot 2n$ Anpassungsgleichungen in Gestalt der vollständigen Standschwingungsgleichungen mit einem $\omega > 0$ denkbar; nach letzterem ergeben sich weitere $m \cdot m$ Anpassungsgleichungen entsprechend der Anzahl unabhängiger Federungsgleichungen und Gleichgewichtszustände im Sonderfall $\omega = 0$ (s. IIIB2). Die Anpassungsgleichungen des Sonderfalls $\omega = 0$ (Federungsgleichungen) enthalten entsprechend ihrer Entstehung aus n Standschwingungsgleichungen (s. IIIB2c) gewisse Kombinationen $\breve{a}_{ik}'^{F}$ der Beiwerte $a_{ik}'^{F}$. Nach Festlegung der Werte $\breve{a}_{ik}'^{F}$ aus den Anpassungsgleichungen folgen die gesuchten Beiwerte $a_{ik}'^{F}$, indem die Schritte, die von den ursprünglichen n Standschwingungsgleichungen zu den m Federungsgleichungen im Sonderfall $\omega = 0$ führten, rückwärts durchlaufen werden.

Die Anteile $a_{ik}'^{T}$ und $a_{ik}''^{T}$ sind Ausdrücke in denjenigen Parametern, die die Federungs- und Masseneigenschaften des Ersatzsystems beschreiben, und die Anzahl dieser Parameter ist stets kleiner als die formal auftretende Anzahl der Beiwerte $a_{ik}'^{F}$ und $a_{ik}''^{T}$. Dieses gelangt z. B. darin zum Ausdruck, daß durch Multiplikation der einzelnen Gleichungen stets herbeigeführt werden kann $a_{ik}'^{T} = a_{ki}'^{T}$, $a_{ik}'^{F} = a_{ki}'^{F}$ bzw. $\breve{a}_{ik}'^{F} = \breve{a}_{ki}'^{F}$ und (bei Gültigkeit der zu Ende von IIB2 erwähnten Luftkraftgesetze) auch $a_{ik}'^{L\,R} = a_{ki}'^{L\,R}$. Unabhängig hiervon bestehen je nach dem Wesen des betrachteten Ersatzsystems gewöhnlich noch weitere Beziehungen der Art $a_{ik} = a_{mn}$ und werden einzelne Glieder $a_{ik}'^{T}$ und $a_{ik}''^{T}$ systembedingt zu Null. Auch wird es oft geboten sein, geeignete Verfügungen über die einzelnen Beiwertanteile zu treffen, z. B. Einführungen der Art $a_{ik}''^{T} = a_{ki}''^{T}$ (entsprechend $a_{ik}'^{F} = a_{ki}'^{F}$), oder Nullsetzung unwichtiger Glieder (letzteres gilt insbesondere für Glieder $a_{ik}'^{L\,R}$ und $a_{ik}''^{L\,R}$). — Hiernach ist die Zahl der noch aus den Anpassungsbedingungen auszurechnenden Größen $a_{ik}^{F} + a_{ik}^{T} + a_{ik}^{L\,R}$ bzw. ihrer einzelnen Teilglieder stets kleiner als die Anzahl der formal aufstellbaren Anpassungsgleichungen (s. IIIB3d), zumal da außer den zuletzt besprochenen $2n^2 + m^2$ Anpassungsgleichungen noch die vorher erwähnten Resonanzbedingungen sowie unmittelbare Forderungen über Massen, Massenträgheitsmomente und Schwerpunktslagen (s. IIIB1) gestellt werden können.

β) Ohne Berücksichtigung von $a_{ik}'' w_k''$. — Gewöhnlich wird es zulässig sein, die Dämpfungsglieder $a_{ik}''^{F}$ als klein anzusehen. Zur Anpassung für $\omega > 0$ kann dann von den n Eigenschwingungs- und n Dämpfungsgleichungen ausgegangen werden, statt von den $2n$ vollständigen Standschwingungsgleichungen. An die Stelle der m Resonanzbedingungen treten dann m (wiederum nicht lineare) Eigenfrequenz-Bedingungen; diese besagen, daß die m Eigenfrequenzen des Ersatzsystems, die sich bei vernachlässigter Dämpfung aus dessen Eigenschwingungsgleichungen ergeben, m Beträge annehmen sollen, die als Eigenfrequenzen bzw. als Resonanzfrequenzen der wirklichen Flugzeugkonstruktion anderweitig berechnet oder versuchsmäßig gefunden seien. — Bei Verwendung der n Eigenschwingungs- und n Dämpfungsgleichungen, wiederum in Verbindung mit den m Federungsgleichungen, ist beispielsweise folgender Weg zur Anpassung des Ersatzsystems denkbar:

Zunächst werden die Beiwerte $\breve{a}_{ik}'^{F}$ der Federungsgleichungen gemäß Abschn. IIIB3a derart bestimmt, daß eine Reihe von Verschiebungsgrößen des Ersatzsystems bei ausgewählten Belastungszuständen (Gleichgewichtszuständen) gleich wird bestimmten Verschiebungsgrößen der wirklichen Flugzeugkonstruktion bei entsprechenden Belastungszuständen dieser. Aus den Beiwerten $\breve{a}_{ik}'^{F}$ werden die gesuchten Größen $a_{ik}'^{F}$ durch geeignete Umformung errechnet.

Nach Einsetzen der Federungsanteile $a_{ik}'^{F}$ in die Eigenschwingungsgleichungen werden die Trägheitsanteile $a_{ik}'^{T} + a_{ik}'^{L\,R}$ so ermittelt, daß

[13]) Auch könnte gefordert werden, daß irgendwie angestoßene Schwingungen des Ersatzsystems gleichartig abklingen wie die der wirklichen Flugzeugkonstruktion; damit würde aber die hier getroffene Beschränkung auf harmonische Schwingungen überschritten.

Digitized by Google

1. die m Eigenfrequenzen des Ersatzsystems gleich m Eigen- bzw. Resonanzfrequenzen des wirklichen Systems sind und daß

2. eine Reihe von Amplituden des Ersatzsystems bei dessen Eigenschwingungszuständen mit bestimmten Amplituden der wirklichen Flugzeugkonstruktion übereinstimmt, die an dieser bei entsprechenden Eigenschwingungs- bzw. Resonanzschwingungen auftreten.

Sind die Glieder $a'^{I,R}_{ik}$ bereits bekannt, z. B. nach III B 3 b, so können sie von den Beträgen $a'^{T}_{ik} + a'^{I,R}_{ik}$ subtrahiert werden, so daß dann die Glieder a'^{T}_{ik} festliegen.

Nach Einsetzen der Federungsanteile a'^{F}_{ik} und der Trägheitsanteile $a'^{T}_{ik} + a'^{I,R}_{ik}$ in die Dämpfungsgleichungen werden aus diesen die Dämpfungsanteile a''^{F}_{ik} so bestimmt, daß eine Reihe von Amplituden des Ersatzsystems bei ausgewählten harmonisch zeitabhängigen Belastungszuständen mit irgendeiner geeigneten Kreisfrequenz ω gleich wird bestimmten Amplituden der wirklichen Flugzeugkonstruktion bei entsprechenden harmonischen Belastungszuständen.

d) Erfüllung der Anpassungsbedingungen. — Wie bereits verschiedentlich erwähnt, ist die Anzahl $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$ der formal »aufstellbaren« Anpassungsbedingungen nach den $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Standschwingungs-} \end{Bmatrix}$ Gleichungen durchweg größer als die Anzahl $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ der »offenen«, d. h. der tatsächlich als unbekannt anzusprechenden Beiwerte a'_{ik}, a''_{ik} (entsprechend dem vorangehend Gesagten seien $\begin{Bmatrix} r_1 - g_1 \\ r_2 - g_2 \end{Bmatrix}$ der Beiwerte zahlenmäßig oder durch irgendwelche Beziehungen mit den offenen Beiwerten festgelegt). Somit sind nur $\begin{Bmatrix} g_1 < r_1 \\ g_2 < r_2 \end{Bmatrix}$ Anpassungsbedingungen erfüllbar. — Sollen also Widersprüche vermieden werden, so kann in den denkbaren Anpassungsgleichungen aus den $\begin{Bmatrix} \text{Luftkraft-} \\ \text{Standschwingungs-} \end{Bmatrix}$ Gleichungen, Eigenfrequenzbedingungen usw.[14]) nur über $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ der einzusetzenden Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ nach Maßgabe der wirklichen Flugzeugkonstruktion verfügt werden. Die übrigen $\begin{Bmatrix} r_1 - g_1 \\ r_2 - g_2 \end{Bmatrix}$ Werte $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ werden neben den $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ offenen Beiwerten a'_{ik}, a''_{ik} als weitere »Unbekannte« der Anpassungsgleichungen angesprochen. Dann enthalten die $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$ Anpassungsgleichungen gerade $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$ Unbekannte, von denen letzten Endes natürlich nur die $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ Größen a'_{ik}, a''_{ik} interessieren.

Unter Inkaufnahme von Überbestimmungen besteht aber auch die Möglichkeit, über alle $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$ Größen $\begin{Bmatrix} P_i', P_i'' \\ w_i', w_i'' \end{Bmatrix}$ nach Maßgabe der wirklichen Flugzeugkonstruktion zu verfügen. Würde dann für die offenen $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ Beiwerte a'_{ik}, a''_{ik} (s. oben) irgendeine Wertegruppe als »Näherungslösung« des überbestimmten Systems von Anpassungsgleichungen eingesetzt, so ergäben sich auf den rechten Seiten der einzelnen Gleichungen irgendwelche Werte c_i statt 0. Es liegt nahe, die $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ offenen Beiwerte a'_{ik}, a''_{ik} derart zu bestimmen, daß sie den Ausdruck Σc_i^2 zu einem Minimum machen. Damit ergeben sich $\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$ Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung von a'_{ik}, a''_{ik}.

e) Bemerkung. — Im vorangehenden wurde die Frage offengelassen, welche der denkbaren Anpassungsbedingungen im Einzelfall als die zweckmäßigsten anzusehen sind. Ausführungen darüber werden in kommenden Arbeiten gebracht. Auch wird dort behandelt, wie die Luftkraftglieder (abweichend von III B 3 b) aus Schwingungszuständen zu ermitteln sind, die sich bei gegebenen harmonischen Erregungskräften im Luftstrom systemabhängig einstellen.

[14]) Federungs-, Eigenschwingungs-, Dämpfungsgleichungen, Resonanzbedingungen.

C. Aufstellung von Berechnungsansätzen für verschiedene Feder-Masse-Systeme im Luftstrom.

1. Vorbemerkung.

Eine Flatterberechnung erfordert die Behandlung von drei Teilaufgaben:

a) Bestimmung von kennzeichnenden mechanischen Eigenschaften der wirklichen Flugzeugkonstruktion oder eines sehr eng gegliederten Ersatzsystems, um die Grundlagen zur Aufstellung eines vereinfachten Ersatzsystems zu gewinnen (s. III A 2 a und d).

b) Nähere Festlegung des vereinfachten Ersatzsystems und seine »Anpassung« an die wirkliche Flugzeugkonstruktion (s. III A und B).

c) Aufsuchen der niedrigsten kritischen Geschwindigkeit des Ersatzsystems (s. II C).

Alle Ansätze zur Durchführung von Aufgabe a, b, c können schematisch vorgenommen werden, wenn die harmonischen Grundgleichungen (s. II A 3) und nötigenfalls noch die in II C 2 erwähnten energetischen Ausdrücke für das jeweils betrachtete System vorliegen. Einzelheiten hierzu enthält III C 2 bis 4 für die drei Auffassungsarten nach III A 1. Praktisch wird es meistens möglich sein, je nach dem Aufbau des betrachteten Systems weitgehende Vereinfachungen gegenüber dem Folgenden zu treffen.

Die folgenden Ausführungen behalten ihre Gültigkeit, wenn zu unendlich vielen Freiheitsgraden entsprechend der stetigen Verteilung der Verformungsmöglichkeiten jeder Flugzeugkonstruktion übergegangen werden soll. Aus den Gleichungen für stabzugartige Systeme, Teilkörpersysteme, Systeme vorgegebener Formänderungsfähigkeit ergeben sich dann Differential- und Integralgleichungen. Soweit solche Übergänge vorgenommen werden, wird es sich praktisch gewöhnlich um irgendwie vereinfachte Systeme handeln, wie z. B. bei den Darstellungen von Küssner [11]. Einzelfragen solcher Art werden im folgenden nicht behandelt; sie werden Gegenstand kommender Arbeiten sein.

Die im folgenden vorkommenden Belastungs- und Verschiebungsgrößen sind, soweit nicht als Amplituden gekennzeichnet, harmonisch zeitabhängig. Das Argument t ist jedoch nur dann beigefügt, wenn die Zeitabhängigkeit besonders betont werden soll.

2. Stabzugartige Systeme.

a) Allgemeines. — Im folgenden wird ein Koordinatensystem x, y, z für das gesamte System, daneben eine Reihe von Hilfskoordinatensystemen ξ, η, ζ für die einzelnen Abschnitte, benutzt (s. Bild 7). Die Achsen ζ heißen Abschnittsachsen. In zwei benachbarten Abschnitten $i-1$, i und i, $i+1$ treffen sie sich auf der gemeinsamen Abschnittsgrenze i im »Eckpunkt«, der ebenfalls mit i bezeichnet wird. (Abschnittsgrenze = Abschnittsgrenzfläche.)

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf Systeme, bei denen alle Abschnittsachsen in einer Ebene liegen und alle Abschnittsgrenzen dazu senkrecht stehen. Die Abschnittsachsen seien so angeordnet, daß sie die Projektionen der Abschnittsgrenzen auf die Systemebene alle im gleichen Verhältnis unterteilen (s. Bild 7).

Für die Fläche irgendeiner Abschnittsgrenze i seien c, r die Trägheitshauptachsen, q die dazu senkrechte Achse. Bei Einführung von c, r, q als Koordinatensystem seien p_c, p_r, p_q, δ_c, δ_r, δ_q (c, r) die Belastungs- und Verschiebungskomponenten an den einzelnen Stellen c, r der Fläche. Als »resultierende« Kräfte P_s, Momente M_s, Verzerrungs- und Wölbkraftgruppen U_s im Sinne jeder der drei Achsen $s = c$, r oder q gelten dann die Maßstäbe von ebenen und hyperbolisch-paraboloidischen »Teilbelastungsformen $f^{(\nu)}$«, wobei die einzelnen Teilbelastungsformen zweckmäßig so

Digitized by Google

einander überlagert zu denken sind, daß die Quadratsumme der Abweichungen zwischen der so entstandenen Gesamtform und der wirklichen Belastungsverteilung $p_s(c, r)$ ein Minimum wird. In gleicher Weise werden »mittlere« Wege δ_s, Drehungen α_s, Verzerrungen und Verwölbungen u_s als Maßstäbe einander überlagerter »Teilverschiebungsformen $f_s^{(\nu)}$« eingeführt. Als Formen der Teilbelastungen und Teilverschiebungen dienen im einzelnen[15]):

1. Ebenen $f_s^{(1)}(c, r)$, parallel der Abschnittsgrenze und gegen diese im Sinne von $+s$ verschoben; so normiert, daß $f_s^{(1)} \cdot F$ (F = Fläche der Abschnittsgrenze), d. h. die Teilkraft $P_s^{(1)}$, gleich 1, — bzw. daß $f_s^{(1)}$, d. h. der Teilweg $\delta_s(^1)$, gleich 1.

2. Ebenen $f_{q,c}^{(2)}(c, r)$, $f_{q,r}^{(2)}(c, r)$, durch die Achsen c und r hindurchgehend und gegen die Abschnittsgrenze im positiven Sinne gedreht, ferner das Verteilungsgesetz der örtlichen Wege einer verzerrungsfreien positiven Querschnittsdrehung um q, gegeben durch die c- und r-Komponenten $f_{c,q}^{(2)}(c, r)$ und $f_{r,q}^{(2)}(c, r)$; so normiert, daß

$$\int f_{q,c}^{(2)} \cdot r \cdot dF, \quad \int -f_{q,r}^{(2)} \cdot c \cdot dF, \quad \int (f_{r,q}^{(2)} \cdot c - f_{c,q}^{(2)} \cdot r)\, dF$$

(erstreckt über die ganze Fläche der Abschnittsgrenze), d. h. die Teilmomente M_c, M_r, M_q, gleich 1, — bzw. daß

$$f_{q,c}^{(2)} \cdot \frac{1}{r}, \quad -f_{q,r}^{(2)} \cdot \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{2}\left(f_{r,q}^{(2)} \cdot \frac{1}{c} - f_{c,q}^{(2)} \cdot \frac{1}{r}\right),$$

d. h. die Tangenten der Teildrehungen $\alpha_c^{(2)}$, $\alpha_r^{(2)}$, $\alpha_q^{(2)}$, gleich 1.

3. Hyperbolische Paraboloide $f_s^{(3)}(c, r)$ — mit $s = c, r$: »Verzerrungen innerhalb der Abschnittsgrenze«, mit $s = q$: »Verwölbung«; mit Null-Linien, die in der Abschnittsgrenze aufeinander senkrecht stehen und so gegen den Flächenschwerpunkt verschoben bzw. gegen die Achsen c, r gedreht sind, daß $f_s^{(3)}(c, r)$ orthogonal zu $f_s^{(1)}$ und $f_s^{(2)}$ ist; so normiert, daß $\int f_s^{(3)}\, dF$ (erstreckt über den positiven Quadranten der Abschnittsgrenze) gleich 1.

Bei den so erklärten Belastungs- und Verschiebungsgrößen der Abschnittsgrenze sind P und δ im Schwerpunkt angreifend bzw. gemessen zu denken.

Demgegenüber ist im folgenden durchweg die Rede von Belastungs- und Verschiebungsgrößen, bezogen auf den »Eckpunkt« i in der Abschnittsgrenze (Zeiger i, $i-1$ usw.). Dabei sind also P_i und δ_i in i angreifend bzw. gemessen zu denken. — Wird z. B. vereinfachend angenommen, daß die Nullinien der Flächen $f_s^{(3)}(c, r)$ mit den Trägheitshauptachsen annähernd zusammenfallen (wie z. B. im Bild 6) und werden die Verzerrungen (innerhalb der Abschnittsgrenze) außer acht gelassen, so gilt:

[15]) Die nachfolgend genannten Funktionen $f_s^{(1)}$, $f_s^{(2)}$, $f_s^{(3)}$ sind teils wegen der Deutung von c, r, q als Trägheitshauptachsen, teils wegen besonderer Definition von $f_s^{(3)}$ zueinander orthogonal, d. h. $\int f_a^{(\nu)} f_b^{(\mu)}\, dF = 0$ für $a \neq b$ oder $\nu \neq \mu$.

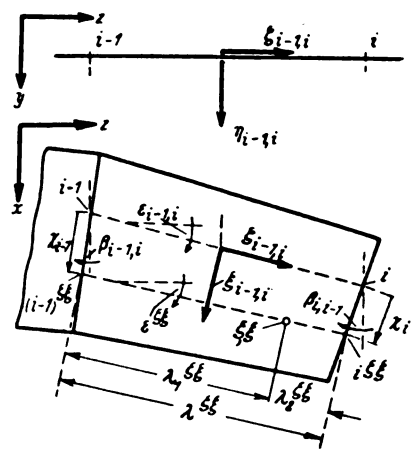


Bild 12. Erklärung zu den Interpolationsformeln.

$P_{ri} = P_r$	$\delta_{ri} = \delta_r + \alpha_q \cdot c_i$
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
$M_{ci} = M_c - P_q \cdot r_i$	$\alpha_{ci} = \alpha_c + u_q \cdot c_i \cdot \frac{4}{F_i}$
. . . . .	. . . . .
$M_{qi} = M_q - P_r \cdot c_i + P_c \cdot r_i$	$\alpha_{qi} = \alpha_q$
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
$U_{qi} = U_q$	$u_{qi} = u_q$

mit c_i, r_i = Koordinaten des Eckpunkts i,
F_i = Fläche der Abschnittsgrenze i.

Die im folgenden besprochenen Belastungs- und Verschiebungsgrößen der Abschnittsgrenze sind bedarfsweise dargestellt durch Komponenten im Sinne der Koordinaten x, y, z oder ξ, η, ζ, teils auch der Koordinaten c, r, q. — Näher verfolgt werden nur die Wege δ_y und Drehungen α_z, α_x senkrecht zur Stabzugebene sowie die Querschnittsverwölbungen u_q senkrecht zur Abschnittsgrenze, ferner die entsprechenden Kräfte P_y, Momente M_z, M_x und Wölbkraftgruppen U_q (s. Bild 6, 13 bis 15).

Unter diesen Voraussetzungen (und nach Elimination der Verwölbungen) werden die Schwingungen des stabzugartigen Systems letzten Endes durch die Wegkomponenten δ_{yi} der Eckpunkte und die Drehungskomponenten α_{zi}, α_{xi} der zugehörigen Abschnittsgrenzen an den Eckpunkten beschrieben; denn die Aufteilung einer gegebenen Flugzeugkonstruktion in einzelne Abschnitte (s. III A 1 und 2a) gibt die Möglichkeit, alle Bewegungen innerhalb des einzelnen Abschnitts angenähert durch Interpolation zwischen den Bewegungen der Abschnittsgrenzen zu erfassen. — Für die Bewegungskomponenten δ_y, α_z, α_x irgendeiner Stelle ζ, ξ (s. Bild 12) ergibt die Interpolation beispielsweise die in

Tafel 1. Interpolationsformeln.

(Zu allen Größen ε, λ, λ_1, λ_2 gehört rechts oben der Zeiger $\zeta\,\xi$; Erklärung s. in Bild 12.)

	$\delta_{y\,i-1}^{\zeta\,\xi}$	$\alpha_{z\,i-1}^{\zeta\,\xi}$	$\alpha_{x\,i-1}^{\zeta\,\xi}$	$\delta_{yi}^{\zeta\,\xi}$	$\alpha_{zi}^{\zeta\,\xi}$	$\alpha_{xi}^{\zeta\,\xi}$
$\delta_y(\zeta, \xi) =$	$\frac{\lambda_2^2}{\lambda^3} \cdot (3\lambda_1 + \lambda_2)$	$-\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2^2}{\lambda^2} \cdot \sin\varepsilon$	$\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2^2}{\lambda^2} \cdot \cos\varepsilon$	$\frac{\lambda_1^2}{\lambda^3} \cdot (3\lambda_2 + \lambda_1)$	$\frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1^2}{\lambda^2} \cdot \sin\varepsilon$	$-\frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1^2}{\lambda^2} \cdot \cos\varepsilon$
$\alpha_z(\zeta, \xi) =$	$\frac{6\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^3} \cdot \sin\varepsilon$	$\frac{\lambda_2}{\lambda} \cdot \cos^2\varepsilon$ $-\frac{\lambda_2}{\lambda^2}(2\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \sin^2\varepsilon$	$\frac{3\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\varepsilon$	$-\frac{6\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^3} \cdot \sin\varepsilon$	$\frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \cos^2\varepsilon$ $-\frac{\lambda_1}{\lambda^2}(2\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \sin^2\varepsilon$	$\frac{3\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^2} \cdot \cos\varepsilon$ $\times \sin\varepsilon$
$\alpha_x(\zeta, \xi) =$	$-\frac{6\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^3} \cdot \cos\varepsilon$	$\frac{3\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\varepsilon$	$\frac{\lambda_2}{\lambda} \cdot \sin^2\varepsilon$ $-\frac{\lambda_2}{\lambda^2}(2\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \cos^2\varepsilon$	$\frac{6\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^3} \cdot \cos\varepsilon$	$\frac{3\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\varepsilon$	$\frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \sin^2\varepsilon$ $-\frac{\lambda_1}{\lambda^2}(2\lambda_2 - \lambda_1)$ $\times \cos^2\varepsilon$

(Zu lesen wie die Gleichungen in II A 3.)

Digitized by Google

Tafel 1 zusammengestellten Ausdrücke. Dabei bedeuten (s. Bild 12):

$\delta_{yi-1}^{\zeta\xi}$, $\alpha_{zi-1}^{\zeta\xi}$ usw. die Weg- und Drehungskomponenten derjenigen Stellen $(i-1)^{\zeta\xi}$ und $i^{\zeta\xi}$, wo die Abschnittsgrenzen $i-1$ und i von derjenigen Geraden getroffen werden, die durch ζ, ξ hindurchgehend beide Abschnittsgrenzen $i-1$ und i in gleichem Verhältnis teilt, z. B.:

$$\delta_{yi}^{\zeta\xi} = \delta_{yi} + \alpha_{zi} \cdot \chi_i \cdot \cos\beta_{i,i-1} + \alpha_{xi} \cdot \chi_i \cdot \sin\beta_{i,i-1},$$

$$\alpha_{zi}^{\zeta\xi} = \alpha_{zi} - u_{qi} \cdot \chi_i \cdot \frac{4}{f_i \cdot h_i} \cdot \sin\beta_{i,i-1},$$

$$\alpha_{xi}^{\zeta\xi} = \alpha_{xi} + u_{qi} \cdot \chi_i \cdot \frac{4}{f_i \cdot h_i} \cdot \cos\beta_{i,i-1}.$$

Zu χ_i, f_i, h_i und $\beta_{i,i-1}$ s. Bild 12 u. 15. Das Eingehen von u_{qi} entspricht der obengenannten Vereinfachung über die Null-Linie der Fläche $f_*^{(3)}(c,r)$.

Gewöhnlich wird es schon genügen, an den einzelnen Stellen ζ, ξ nur solche Bewegungen anzunehmen, wie sie sich ergeben, wenn jede Stelle ζ, ξ durch einen starren Arm r_ξ oder r_x, d. h. parallel ξ oder x (Flugrichtung!), mit einer Stelle der Abschnittsachse verbunden wäre (s. Bild 7, ferner IIIC2f und g).

Zur Aufstellung der harmonischen Grundgleichungen eines stabzugartigen Systems wird zweckmäßig davon ausgegangen, daß die auf jede Abschnittsgrenze wirkenden Kräfte Gleichgewichtszustände bilden: »Gleichgewichtsbedingungen« in IIIC2b. In diesen Gleichgewichtsbedingungen müssen zunächst alle eingehenden Größen durch die Wege, Drehungen, Verwölbungen δ_{yi}, α_{zi}, α_{xi}, u_{qi} der Abschnittsgrenzen, durch entsprechende Größen (δ_{yi}^{κ})[16]), α_{zi}^{κ}, (α_{xi}^{κ}) der Ruder und durch die etwa wirksamen Erregerkräfte ausgedrückt werden. Insgesamt stehen dabei zur Verfügung: Die Schnitt-, Feld- und Umformungsgleichungen, die Formänderungsgleichungen sowie Ausdrücke für die Luft- und Trägheitskräfte (s. IIIC2b bis g). Dazu treten im Einzelfall noch die jeweils zutreffenden Nebenbedingungen in Gestalt von Symmetrie- und Auflagerbedingungen, Aussagen über das Verschwinden von Momenten und Kräften an Endquerschnitten usw. — Sollen die harmonischen Grundgleichungen letzten Endes nur in einer bestimmten Auswahl der obengenannten Größen δ, α, u dargestellt werden, z. B. nur in den Größen δ_{yi}, α_{zi}, α_{zi}^{κ}, so müssen weiterhin die übrigen Amplituden eliminiert werden. (Voraussetzung ist hierbei, daß die zu eliminierenden Größen keinen wesentlichen Einfluß auf den Betrag der kleinsten kritischen Geschwindigkeit haben!)

b) Schnittgleichungen.

α) Gleichgewichtsbedingungen an der Abschnittsgrenze i (s. Bild 13 u. 15).

Die »Schnitt«-Kräfte P^l, P^r, -Momente M^l, M^r und -Wölbkraftgruppen U^l, U^r, die zwei benachbarte Abschnitte von links und rechts her an ihrer gemeinsamen Grenze i aufeinander ausüben, stehen im Gleichgewicht mit etwa daselbst angreifenden Einzelkräften P^a, -Momenten M^a, -Wölbkraftgruppen U^a bzw. untereinander. Die in Frage kommenden Größen P^a, M^a, U^a setzen sich allgemein zusammen aus Erreger-, Luftkraft- und Trägheitsanteilen: $P^a = P^e + P^L + P^T$ usw.

Kraft: $P_{yi}^l + P_{yi}^r + P_{yi}^a = 0,$

Momente: $M_{xi}^l + M_{xi}^r + M_{zi}^a = 0,$

$M_{xi}^l + M_{xi}^r + M_{xi}^a = 0,$

Wölbkraftgruppe: $U_{qi}^l + U_{qi}^r + U_{qi}^a = 0.$

[16]) Größen δ_{yi}^{κ} und α_{zi}^{κ} treten als »Unbekannte« der harmonischen Grundgleichungen nur dann auf, wenn die Ruderlagerung infolge nennenswerter Nachgiebigkeit Schlag- und Drehbewegungen im Sinne y und x gegen den davorliegenden Flügelteil zuläßt, wenn also die Größen δ_{yi}^{κ} und α_{zi}^{κ} nicht schon rein geometrisch durch die Größen δ_{yi}, α_{zi}, α_{xi}, α_{xi}^{κ} bestimmt sind (s. Bild 3).

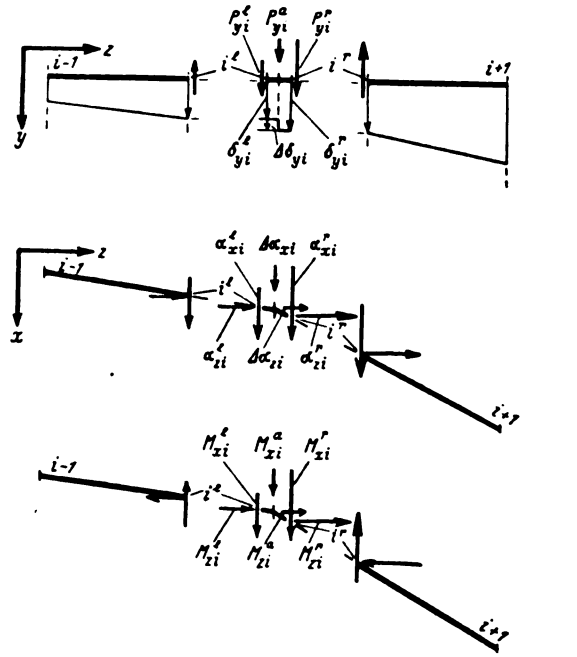


Bild 13. Erklärung zu den Schnitt-Gleichungen.

β) Stetigkeitsbedingungen an der Abschnittsgrenze i (s. Bild 13 u. 15)[17]).

Die Wege δ^l, δ^r, Drehungen α^l, α^r, Wölbungen u^l, u^r links und rechts von der gemeinsamen Grenze i zweier Abschnitte gehen daselbst stetig ineinander über, oder die einander zugewandten Schnittufer bei i klaffen infolge von Gelenken oder sonstigen Verschiebungsmöglichkeiten um Weg-, Drehungs-, Wölbungsdifferenzen $\Delta\delta$, $\Delta\alpha$, Δu.

Weg: $\delta_{yi}^l + \Delta\delta_{yi} = \delta_{yi}^r,$

Drehungen: $\alpha_{zi}^l + \Delta\alpha_{zi} = \alpha_{zi}^r,$

$\alpha_{xi}^l + \Delta\alpha_{xi} = \alpha_{xi}^r,$

Wölbung: $u_{qi}^l + \Delta u_{qi} = u_{qi}^r.$

c) Feldgleichungen.

α) Gleichgewichtsbedingungen des Abschnitts $i-1$, i (s. Bild 14 u. 15).

Die »Schnitt«-Kräfte $P_{\eta i-1,i}$, $P_{\eta i,i-1}$ (angreifend in den Eckpunkten $i-1$ und i) und »Schnitt«-Momente

[17]) Gleichgewichts- und Stetigkeits-Bedingungen sind einander dual zugeordnet.

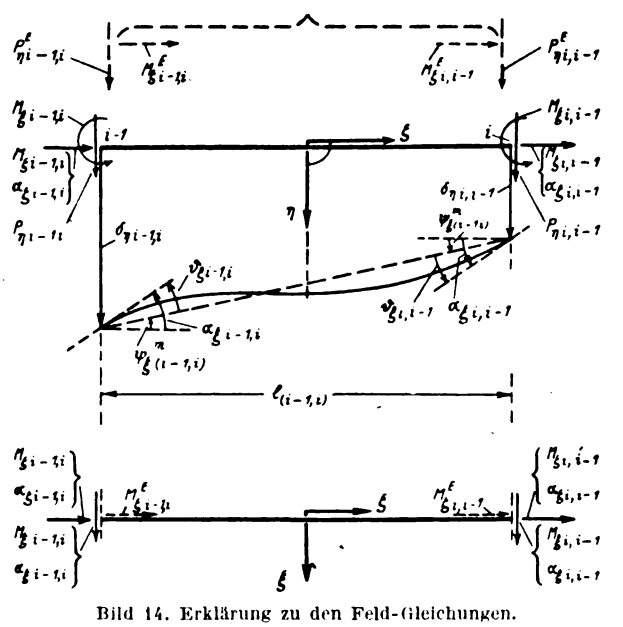


Bild 14. Erklärung zu den Feld-Gleichungen.

Digitized by Google

$M_{i-1,i}$, $M_{i,i-1}$ an den beiden Abschnittsgrenzen $i-1$ und i sind mit der »Feld«-Belastung des Abschnitts und untereinander durch Gleichgewichtsbedingungen verknüpft. Die Feldbelastung des Abschnitts umfaßt alle Erreger-, Luftkraft- und Trägheitskräfte (nebst Momenten), die zwischen den Grenzen $i-1$ und i wirksam sind, mit Ausnahme derjenigen Einzelkräfte (und -momente), die bereits in den Schnittgleichungen als Größen P^a_{yi}, M^a_{zi}, M^a_{xi}, U^a_{qi} usw. berücksichtigt sind. Zum Ausdruck gelangt die Feldbelastung in den Feldgleichungen in Gestalt von zwei Ersatzkräften $P^E_{\eta i-1,i}$, $P^E_{\eta i,i-1}$ (angreifend zu denken unmittelbar neben den Eckpunkten $i-1$ und i; s. Bild 14) und zwei einander gleichen Ersatzmomenten $M^E_{\zeta i-1,i} = M^E_{\zeta i,i-1}$ (angreifend zu denken unmittelbar neben den Abschnittsgrenzen $i-1$ und i; s. Bild 14). $M^E_{\zeta i-1,i} + M^E_{\zeta i,i-1} = M^{Ers}_{\zeta(i-1,i)}$[18]).

Die Ersatzlasten sind in ihren Beträgen so festzulegen, daß ihre resultierende Kraft sowie ihre resultierenden Momente bezüglich zweier beliebiger Achsen der Stabzugebene (und damit bezüglich jeder Achse dieser Ebene) gleich den entsprechenden Resultierenden der tatsächlichen Feldbelastung sind.

Kräfte und Momente:

$$P_{\eta i-1,i} = -Q^m_{\eta(i-1,i)} - P^E_{\eta i-1,i}$$

$$P_{\eta i,i-1} = \quad Q^m_{\eta(i-1,i)} - P^E_{\eta i,i-1}$$

$$M_{\zeta i-1,i} + M_{\zeta i,i-1} = -M^{Ers}_{\zeta(i-1,i)} = -(M^E_{\zeta i-1,i} + M^E_{\zeta i,i-1});$$

dabei folgt $Q^m_{\eta(i-1,i)}$, die »mittlere Querkraft in $i-1$, i«, aus:

$$M_{\xi i-1,i} + M_{\xi i,i-1} = +Q^m_{\eta(i-1,i)} \cdot l_{(i-1,i)}.$$

Von besonderer Bedeutung für die Formänderungseigenschaften des Stabzugabschnitts ist:

$$M_{\zeta i,i-1} - M_{\zeta i-1,i} = 2\,T^m_{\zeta(i-1,i)}$$[19]),

$T^m_{\zeta(i-1,i)}$ = »mittleres Drillmoment in $i-1$, i«.

[18]) Einklammerung des Zeigers i—1, i bedeutet, daß die betreffende Größe keinem der Endpunkte i—1 oder i, sondern dem ganzen Abschnitt i—1, i zugeordnet ist.

[19]) Die Notwendigkeit der »2« in der oben ausgesprochenen Definition für das mittlere Drillmoment $T^m_{\zeta(i-1,i)} = \frac{1}{2}(M_{\zeta i,i-1} - M_{\zeta i-1,i})$ beruht darin, daß bei dieser Definition beide Enden des Stabes gleichartig betrachtet werden. Wird in der meist üblichen Weise von einem Stab ausgegangen, der an einem Ende, z. B. i—1, eingespannt und am anderen Ende i durch ein Moment $M_{\zeta i,i-1}$ belastet wird, so gilt in üblicher Schreibweise $T_{\zeta(i-1,i)} = M_{\zeta i,i-1}$, — bei gleichartiger Betrachtung des belastenden Moments $M_{\zeta i,i-1}$ und des Einspannmoments $M_{\zeta i-1,i}$ also wie oben $T^m_{\zeta(i-1,i)} = \frac{1}{2}(M_{\zeta i,i-1} - M_{\zeta i-1,i})$. Man beachte die duale Beziehung in III C 2 c β.

β) Geometrische Bedingungen des Abschnitts $i-1, i$ (s. Bild 14 u. 15)[20]).

Die Wege $\delta_{\eta i-1,i}$, $\delta_{\eta i,i-1}$ (gemessen in den Eckpunkten $i-1$ und i) und Drehungen $\alpha_{i-1,i}$, $\alpha_{i,i-1}$ an den beiden Abschnittsgrenzen $i-1$ und i (gemessen in den Eckpunkten $i-1$ und i) sind mit den Formänderungen des Abschnitts in sich durch geometrische Bedingungen verknüpft. Die Formänderungen des Abschnitts gelangen dabei durch die beiden »Endneigungen« $\vartheta_{\xi i-1,i}$, $\vartheta_{\xi i,i-1}$ (gemessen an den Eckpunkten $i-1$ und i) und die »Verdrillung« $\gamma_{\zeta(i-1,i)}$ zum Ausdruck (s. Bild 14 u. 15).

Wege und Drehungen:

$$\alpha_{\xi i-1,i} = \psi^m_{\xi(i-1,i)} + \vartheta_{\xi i-1,i},$$

$$\alpha_{\xi i,i-1} = \psi^m_{\xi(i-1,i)} + \vartheta_{\xi i,i-1},$$

$$\alpha_{\zeta i,i-1} - \alpha_{\zeta i-1,i} = \gamma_{\zeta(i-1,i)};$$

dabei folgt $\psi^m_{\xi(i-1,i)}$, die »mittlere Neigung oder Sehnenneigung von $i-1$, i«, aus:

$$\delta_{\eta i,i-1} - \delta_{\eta i-1,i} = \psi^m_{\xi(i-1,i)} \cdot l_{(i-1,i)}.$$

Gelegentlich kommt noch in Frage:

$$\alpha_{\zeta i-1,i} + \alpha_{\zeta i,i-1} = 2\,\alpha^m_{\zeta(i-1,i)},$$

$\alpha^m_{\zeta(i-1,i)}$ = »mittlere Drehung von $i-1, i$ um die Abschnittsachse«.

d) Umformungsgleichungen. — Die Schnittgleichungen sind in anderen Komponenten dargestellt als die Feldgleichungen und die Angaben in III C 2 e. Die Beziehungen zwischen den beiden Darstellungsweisen gelangen durch die folgenden Umformungsgleichungen zum Ausdruck.

Die Umformungsgleichungen zur Verbindung von Abschnitt $i-1, i$ und Abschnittsgrenze i. (Man ergänze Zeiger $i-1, i$ zur Größe ε und Zeiger $i, i-1$ zur Größe φ, s. Bild 13 u. 15.)

Schnittkräfte und -momente

$$P'_{yi} = -P_{\eta i,i-1},$$

$$M'_{zi} = -M_{\zeta i,i-1}\cos\varepsilon + M_{\xi i,i-1}\sin\varepsilon,$$

$$M'_{xi} = -M_{\zeta i,i-1}\sin\varepsilon - M_{\xi i,i-1}\cos\varepsilon,$$

$$U'_{qi} = -U_{\zeta i,i-1} \cdot \frac{1}{\cos\varphi}.$$

[20]) Gleichgewichts- und geometrische Bedingungen sind einander dual zugeordnet. Die Beziehungen zwischen den beiden Gleichungsarten werden ersichtlich, wenn Verschiebungen und Belastungen in allen sechs Koordinaten berücksichtigt werden.

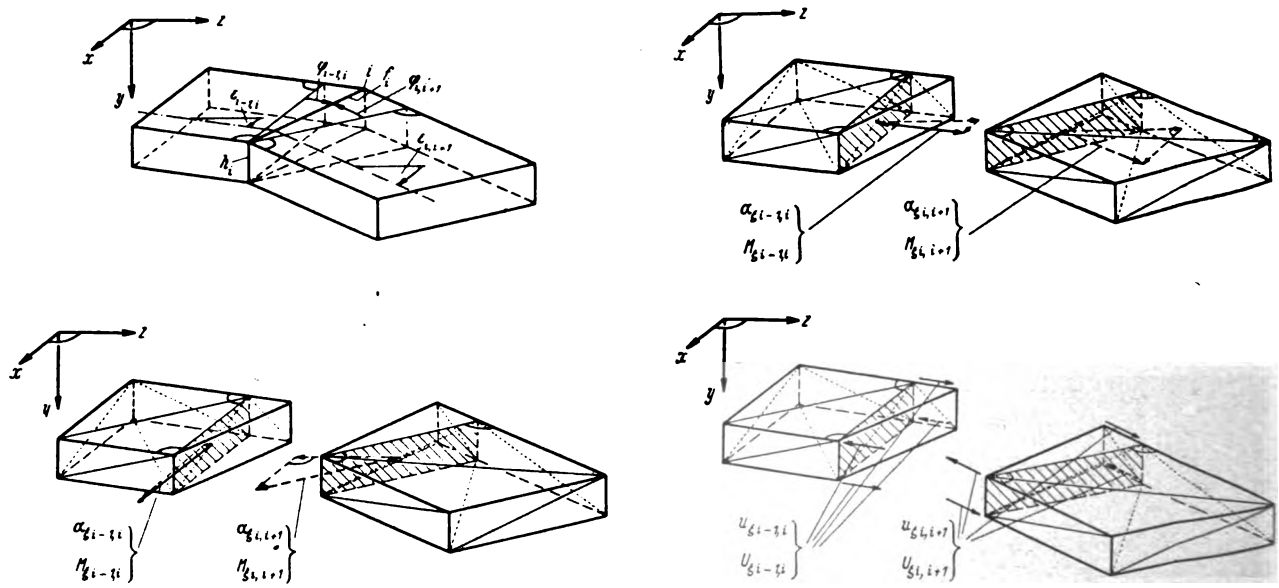


Bild 15. Erklärung zu den Umformungs-Gleichungen.

Digitized by Google

Verschiebungen

$$\delta'_{y\,i} = \delta_{l\,i,i-1},$$
$$\alpha'_{z\,i} = \alpha_{\zeta\,i,i-1}\cos\varepsilon - \alpha_{\xi\,i,i-1}\sin\varepsilon,$$
$$\alpha'_{x\,i} = \alpha_{\zeta\,i,i-1}\sin\varepsilon + \alpha_{\xi\,i,i-1}\cos\varepsilon,$$
$$u'_{q\,i} = u_{\zeta\,i,i-1}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}.$$

Die Umformungsgleichungen zur Verbindung von Abschnittsgrenze i und Abschnitt i, $i+1$ ergeben sich aus den voranstehenden Gleichungen, indem gesetzt wird:

Zeiger r statt l; Zeiger i, $i+1$ statt $i-1$, i und i, $i-1$.

e) Formänderungsgleichungen. — Die Formänderungseigenschaften des einzelnen Stabzugabschnitts seien hinreichend zu beschreiben durch Biegung senkrecht zur Stabzugebene, Verdrillung und Verwölbung im Sinne von Bild 6, 14, 15, d. h. durch:

Endneigungen $\vartheta_{\xi\,i-1,i}$, $\vartheta_{\xi\,i,i-1}$, Verdrillungen $\gamma_{\zeta(i-1,i)}$, Verwölbungen $u_{\zeta\,i-1,i}$, $u_{\zeta\,i,i-1}$, Schnittmomente $M_{\xi\,i-1,i}$ $M_{\xi\,i,i-1}$, mittlere Drillmomente $T'''_{\zeta(i-1,i)}$, Wölbkraftgruppen $U_{\zeta\,i-1,i}$, $U_{\zeta\,i,i-1}$ nach IIIC2c und d. Solche Eigenschaften werden z. B. durch einen Systemaufbau nach Bild 16 veranschaulicht. Das dort wiedergegebene Gebilde wäre im Sonderfall eines geradlinigen Rohrholmflügels auf den verdreh- und biegesteifen Mittelstab m zu beschränken, im Sonderfall eines reinen Holm-Rippenrost-Flügels (mit nicht verdrehsteifen Holmen) dagegen auf die nur biegesteifen Seitenstäbe n (nebst Rippen).

Zur Erklärung der genannten Größen $\vartheta, \gamma, u, M, T, U$ in Verbindung mit IIIC2c und d sind die Ausführungen im Anfang von IIIC2a zu beachten.

Schema der Formänderungsgleichungen eines Abschnitts $i-1, i$.

Schreibweise α). »Kräftemethode«, d. h.

$$\vartheta, \gamma, u = f(M, T, U;\ \vartheta^0, \gamma^0, u^0).$$

	$M_{\xi\,i-1,i}$	$M_{\xi\,i,i-1}$	$T'''_{\zeta(i-1,i)}$	$U_{\zeta\,i-1,i}$	$U_{\zeta\,i,i-1}$	
$\vartheta_{\xi\,i-1,i} =$	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	$\vartheta^0_{\xi\,i-1,i}$
$\vartheta_{\xi\,i,i-1} =$	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	$\vartheta^0_{\xi\,i,i-1}$
$\gamma_{\zeta(i-1,i)} =$	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	$\gamma^0_{\zeta(i-1,i)}$
$u_{\zeta\,i-1,i} =$	δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	$u^0_{\zeta\,i-1,i}$
$u_{\zeta\,i,i-1} =$	δ_{51}	δ_{52}	δ_{51}	δ_{51}	δ_{55}	$u^0_{\zeta\,i,i-1}$

Schreibweise β). »Deformationsmethode«, d. h.

$$M, T, U = g(\vartheta, \gamma, u;\ M^0, T^0, U^0).$$

	$\vartheta_{\xi\,i-1,i}$	$\vartheta_{\xi\,i,i-1}$	$\gamma_{\zeta(i-1,i)}$	$u_{\zeta\,i-1,i}$	$u_{\zeta\,i,i-1}$	
$M_{\xi\,i-1,i} =$	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{14}	Z_{15}	$M^0_{\xi\,i-1,i}$
$M_{\xi\,i,i-1} =$	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{24}	Z_{25}	$M^0_{\xi\,i,i-1}$
$T'''_{\zeta(i-1,i)} =$	Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}	Z_{34}	Z_{35}	$T'''^0_{\zeta(i-1,i)}$
$U_{\zeta\,i-1,i} =$	Z_{41}	Z_{42}	Z_{43}	Z_{44}	Z_{45}	$U^0_{\zeta\,i-1,i}$
$U_{\zeta\,i,i-1} =$	Z_{51}	Z_{52}	Z_{53}	Z_{54}	Z_{55}	$U^0_{\zeta\,i,i-1}$

In gebräuchlicher Weise bedeuten hierbei:

$\left\{\begin{matrix}\vartheta^0, \gamma^0, u^0\\ M^0, T^0, U^0\end{matrix}\right\}$: diejenigen Beträge $\left\{\begin{matrix}\vartheta, \gamma, u\\ M, T, U\end{matrix}\right\}$ (s. Bild 6, 14 u. 15),

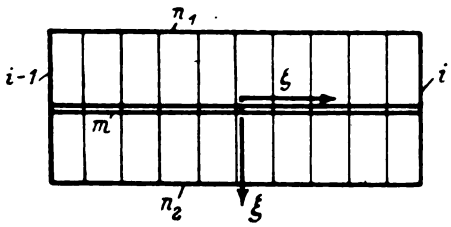


Bild 16. Beispiel für den denkbaren Aufbau eines Stabzugabschnitts.

die sich am Stabzugabschnitt ergeben, wenn er — losgelöst vom Gesamtsystem — $\left\{\begin{matrix}\text{als freies}\\ \text{an seinen Endquerschnitten in einem Gebilde}\\ \text{vollkommen starren Körper eingespannt}\end{matrix}\right\}$ durch die Feldbelastung aus Erreger-, Luft- und Trägheitskräften belastet wird, die ihm als Teil des schwingenden Stabzugs zukommen würde, und zugleich (zwecks Herstellung eines Gleichgewichtszustandes am Einzelabschnitt selbst) durch eine Gruppe von Kräften und Momenten entgegengesetzt gleich den Ersatzlasten, die nach Abschnitt IIIC2c die Feldbelastung wiedergeben.

δ_{mn}, z. B. δ_{45}: die Größe $u_{\zeta\,i-1,i}$, wie sie sich am Einzelabschnitt (neben anderen Verschiebungsgrößen) ergibt, wenn er — losgelöst vom Gesamtsystem — als freies Gebilde durch die Gleichgewichtsgruppe $U_{\zeta\,i,i-1} = 1$ belastet wird.

Z_{mn}, z. B. Z_{54}: die Größe $U_{\zeta\,i,i-1}$, wie sie sich am Einzelabschnitt (neben anderen Belastungsgrößen) ergibt, wenn er — losgelöst vom Gesamtsystem — an seinen Endquerschnitten in einem willkürlich verformbaren Körper eingespannt wird und wenn dieser Körper alsdann eine Formänderung im Sinne und vom Maßstab $u_{\zeta\,i-1,i} = 1$ ausführt (sonst aber starr bleibt).

Bei Gültigkeit linearer Zusammenhänge zwischen Formänderungen und Kräften gilt:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}, \qquad Z_{mn} = Z_{nm}.$$

Fünf der voranstehenden zehn Formänderungsgleichungen genügen zur eindeutigen Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Größen $\vartheta, \gamma, u, M, T, U$. (Dabei müssen die zur Beschreibung ausgewählten Gleichungen linear voneinander unabhängig sein.)

Gelegentlich wird es notwendig sein, den Stabzugabschnitt im Sinne einzelner Größen $\vartheta, \gamma, u, M, T, U$ als unendlich starr oder als unendlich nachgiebig anzusehen, also Gültigkeit einzelner, z. B. $k \leqq 5$, der folgenden zehn Starrheits- (α) und Nachgiebigkeitsbedingungen (β) vorauszusetzen:

α) $\vartheta_{\xi\,i-1,i}$, $\vartheta_{\xi\,i,i-1}$, $\gamma_{\zeta(i-1,i)}$, $u_{\zeta\,i-1,i}$, $u_{\zeta\,i,i-1} = 0$,

β) $M_{\xi\,i-1,i}$, $M_{\xi\,i,i-1}$, $T'''_{\zeta(i-1,i)}$, $U_{\zeta\,i-1,i}$, $U_{\zeta\,i,i-1} = 0$.

Bei Gültigkeit solcher Bedingungen α und β wird jedesmal eine Gleichung der Kräftemethode bzw. eine Gleichung der Deformationsmethode identisch Null; zugleich werden jedesmal die Größen Z_{mn} einer Gleichung der Deformationsmethode bzw. die Größen δ_{mn} einer Gleichung der Kräftemethode unendlich groß[21]).

Soll also eine angesetzte Rechnung beim Übergang zu solchen Fällen nicht versagen, so müssen die fünf zur Beschreibung ausgewählten Formänderungsgleichungen diejenigen k Gleichungen der Kräftemethode bzw. der Deformationsmethode enthalten, die beim Übergang zur Starrheit bzw. zur Nachgiebigkeit identisch Null werden; denn andernfalls würden unendlich große Beiwerte auftreten und die Gleichungen im Grenzfall unbrauchbar machen. (An die Stelle der verschwindenden k Formänderungsgleichungen treten die k Starrheits- und Nachgiebigkeitsbedingungen, die den betreffenden Grenzfall kennzeichnen, s. oben.)

Starrheiten und Nachgiebigkeiten können allgemeiner auch dahingehend auszusprechen sein, daß irgendwelche lineare Kombinationen der Größen ϑ, γ, u bzw. M, T, U zu Null werden. Dann gelten z. B. $k \leqq 5$ Bedingungen der folgenden Gestalt:

$$\alpha)\ A^0_r \equiv c_{r1}\vartheta_{\xi\,i-1,i} + c_{r2}\vartheta_{\xi\,i,i-1} + c_{r3}\gamma_{\zeta(i-1,i)} + c_{r4}u_{\zeta\,i-1,i} + c_{r5}u_{\zeta\,i,i-1} = 0,$$

$$\beta)\ \Theta^0_r \equiv C_{r1}M_{\xi\,i-1,i} + C_{r2}M_{\xi\,i,i-1} + C_{r3}T'''_{\zeta(i-1,i)} + C_{r4}U_{\zeta\,i-1,i} + C_{r5}U_{\zeta\,i,i-1} = 0.$$

Sollen die Formänderungsgleichungen nicht versagen, wenn $k \leqq 5$ solcher Bedingungen Platz greifen, so ist es zu-

[21]) Die nachfolgenden Ausführungen zum Übergang auf die genannten Sonderfälle, desgleichen auch die Ausführungen in IIIC2h, erübrigen sich natürlich, wenn die Rechnungsansätze von vornherein unter Berücksichtigung der Starrheiten und Nachgiebigkeiten aufgezogen werden.

Digitized by Google

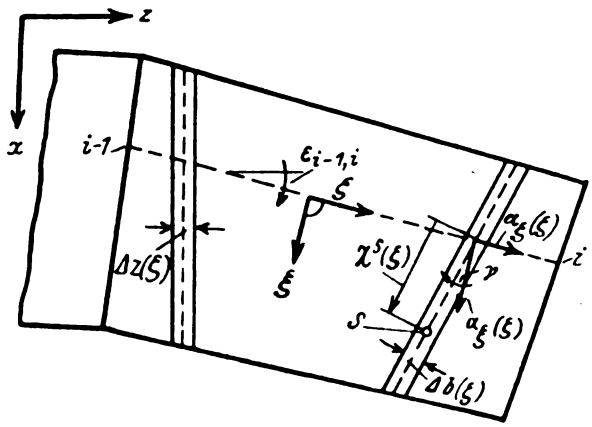


Bild 17. Aufteilung eines Systemabschnitts in Streifen.

nächst notwendig, die ursprünglichen Formänderungsgleichungen durch geeignete Kombination so umzuschreiben, daß an die Stelle von k Größen ϑ, γ, u, M, T, U diejenigen k Kombinationen Δ_r^0, Θ_r^0 treten, die beim Übergang zur Starrheit oder zur Nachgiebigkeit verschwinden; weiterhin ist die vorzunehmende Kombination der ursprünglichen Formänderungsgleichungen dadurch festgelegt, daß an die Stelle der übrigen $5+5-k$ Größen ϑ, γ, u, M, T, U neue Größen Δ_r, Θ_r treten müssen, die zu den betreffenden Größen Δ_r^0, Θ_r^0 — zweckmäßig auch untereinander — »orthogonal« sind, womit folgendes gesagt sein soll:

Bedeuten $\delta_s(\Delta_r^0)$, $\delta_s(\Delta_t)$ bzw. $\sigma_s(\Theta_r^0)$, $\sigma_s(\Theta_t)$ die zu zwei Zuständen $\Delta_r^0=1$, $\Delta_t=1$ bzw. $\Theta_r^0=1$, $\Theta_t=1$ gehörigen Weg- und Spannungskomponenten parallel einer Richtung $s=x,y,z$, so muß für $r\neq t$ sein:

$$\sum_s \int \delta_s(\Delta_t)\cdot\delta_s(\Delta_r^0)\cdot df=0,$$

$$\sum_s \int \sigma_s(\Theta_t)\cdot\sigma_s(\Theta_r^0)\cdot df=0.$$

(Die Integrale erstrecken sich über die beiden Grenzflächen $i-1$ und i.)

Für die neuen Formänderungsgleichungen gilt weiterhin Entsprechendes wie im vorangehenden.

f) Ausdrücke für die Luftkräfte. — Zur Aufstellung der Luftkräfte wird das System nebst etwa zugehörigen Rudern, Hilfsrudern usw. zweckmäßig in schmale Streifen parallel der Anblaserichtung x aufgeteilt (s. Bild 17). Die Wirkung der Luftkräfte im Stabzugabschnitt vor etwa vorhandenen Rudern wird dann durch eine zusammenhängende Kraft- und Momentenbelegung der Abschnittsachse wiedergegeben. Nach IIB2 ergeben sich dafür Ausdrücke der Art:

$$p_{i_i}^L(\zeta)=p_y^L(\zeta)\overset{k}{=}\frac{1}{\Delta z(\zeta)}[\mathfrak{g}_0\cdot\mathfrak{C}_0^p+\mathfrak{g}_1\cdot\mathfrak{C}_1^p+\ldots]_\zeta\cdot e^{j\omega t},$$

$$\left.\begin{aligned} m_\zeta^L(\zeta)&=m_z^L(\zeta)\cdot\cos\varepsilon_{i-1,i}\\ m_\xi^L(\zeta)&=-m_z^L(\zeta)\cdot\sin\varepsilon_{i-1,i}\end{aligned}\right\}\text{ mit:}$$

$$m_z^L(\zeta)\overset{k}{=}\frac{1}{\Delta z(\zeta)}[\mathfrak{g}_0\cdot\mathfrak{C}_0^m+\mathfrak{g}_1\cdot\mathfrak{C}_1^m+\ldots.]_\zeta\cdot e^{j\omega t}.$$

Darin bedeuten (s. Bild 17):

$\Delta z(\zeta)$ die Breite des Streifens, dessen Mittellinie die Abschnittsachse an der Stelle ζ schneidet,

$\mathfrak{g}_i$ die Maßstabamplituden der einzelnen Bewegungsanteile $f_i(x)$, aus denen die Gesamtbewegung des genannten Streifens nebst etwa zugehörigen Ruderabschnitten zwecks formelmäßiger Erfassung der Luftkräfte nach IIB2 zusammengesetzt zu denken ist, auszudrücken in den Größen δ_{yi}, α_{zi}, α_{xi} der Abschnittsgrenzen und (δ_{yi}^K)[22]), α_{zi}^K, (α_{xi}^K) der Ruder-Abschnittsgrenzen,

[22]) s. Fußnote 15.

$\mathfrak{C}_\lambda^p$, $\mathfrak{C}_\lambda^m$ die Beiwerte der Luftkräfte und -momente, die bei den einzelnen Bewegungsanteilen $f_\lambda(x)$ am Streifenbereich vor den etwa vorhandenen Rudern wirken, $\mathfrak{C}_\lambda^m$ bezogen auf die Parallele zu z durch die Stelle ζ der Abschnittsachse (s. IIB2).

Die Wirkung der Luftkräfte im Bereich irgendwelcher Ruder wird gemäß IIB2 in gleichartiger Weise wiedergegeben. Werden für Ruder, Hilfsruder usw. eigene Abschnittsachsen ζ^R eingeführt, so ergeben die Ruderluftkräfte eine entsprechende Belegung dieser Achsen; diese erzeugt an den Ruderanschlußstellen Auflagerkräfte und -momente in Abhängigkeit von den Wegen und Drehungen δ_{yi}, α_{zi}, α_{xi} der Abschnittsgrenzen und δ_{yi}^R, α_{zi}^R, α_{xi}^R der Ruderabschnittsgrenzen. Gemäß der jeweils vorliegenden Konstruktion bewirken diese Auflagerkräfte und -momente weiterhin eine Belegung der Abschnittsachse ζ mit Einzelkräften $P_{i,n}^L$ und -momenten $M_{\zeta n}^L$, $M_{\xi n}^L$ an konstruktiv gegebenen Stellen n zusätzlich[23]) zur vorhergenannten Kraft- und Momentenbelegung p_ζ^L, m_ζ^L, $m_\xi^L(\zeta)$.

g) Ausdrücke für die Trägheitskräfte. — Bei Aufteilung des betrachteten Abschnitts in schmale Streifen, die im wesentlichen senkrecht zur Abschnittsachse verlaufen (s. Bild 17), wird die Trägheitswirkung eines vor etwa vorhandenen Ruderabschnitten liegenden Bereichs durch folgende Kraft- und Momentenbelegung der Abschnittsachse wiedergegeben:

$$p_{i_i}^T(\zeta)=-\frac{\omega^2}{\Delta b(\zeta)}\int\mu\cdot\delta_{i_i}\cdot\Delta b\,d\chi$$

$$\overset{(=)}{=}-\frac{\omega^2}{\Delta b(\zeta)}\mathcal{M}(\zeta)\{\delta_{i_i}+\chi^s[\alpha_\zeta\cos\gamma+\alpha_\xi\sin\gamma]\}_\zeta,$$

$$m_\zeta^T(\zeta)=-\frac{\omega^2}{\Delta b(\zeta)}\int[\mu\cdot\delta_{i_i}\cdot\chi\cos\gamma+\vartheta_\zeta\cdot\alpha_\zeta-\vartheta_{\zeta\xi}\cdot\alpha_\xi]\Delta b\,d\chi$$

$$\overset{(=)}{=}-\frac{\omega^2}{\Delta b(\zeta)}[\Theta_\zeta\cdot\alpha_\zeta-\Theta_{\zeta\xi}\cdot\alpha_\xi]_\zeta+p_{i_i}^T(\zeta)\cdot\chi^s(\zeta)\cos\gamma,$$

$$m_\xi^T(\zeta)=-\frac{\omega^2}{\Delta b(\zeta)}\int[\mu\cdot\delta_{i_i}\cdot\chi\sin\gamma+\vartheta_\xi\cdot\alpha_\xi-\vartheta_{\zeta\xi}\cdot\alpha_\zeta]\Delta b\,d\chi$$

$$\overset{(=)}{=}-\frac{\omega^2}{\Delta b(\zeta)}[\Theta_\xi\cdot\alpha_\xi-\Theta_{\zeta\xi}\cdot\alpha_\zeta]_\zeta+p_{i_i}^T(\zeta)\cdot\chi^s(\zeta)\sin\gamma;$$

dabei bedeuten (s. Bild 17):

$\delta_{i_i}=\delta_y$, $\alpha_\zeta=\alpha_z\cos\varepsilon+\alpha_x\sin\varepsilon$, $\alpha_\xi=-\alpha_z\sin\varepsilon+\alpha_x\cos\varepsilon$ die Verschiebungsamplituden der Stelle ζ auf der Abschnittsachse, gemäß IIIC2a auszudrücken in den Größen δ_{yi}, α_{zi}, α_{xi} der Abschnittsgrenzen,

χ die Koordinate längs der Streifenmittellinie,

$\Delta b\,d\chi$ die Fläche des Streifenelements an der Stelle χ,

$\Delta b(\zeta)$ die mittlere Breite des Streifens, dessen Mittellinie die Abschnittsachse an der Stelle ζ schneidet,

μ die auf die Flächeneinheit bezogene Masse des Streifenelements,

ϑ_ζ, ϑ_ξ, $\vartheta_{\zeta\xi}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Massen-Trägheitsmomente und -Zentrifugalmomente des Streifenelements bezüglich seiner Schwerachsen parallel ζ und ξ,

$\mathcal{M}(\zeta)$ die Masse des Streifens,

Θ_ζ, Θ_ξ, $\Theta_{\zeta\xi}(\zeta)$ die Massen-Trägheitsmomente und -Zentrifugalmomente des Streifens bezüglich seiner Schwerachsen parallel ζ und ξ,

$\chi^s(\zeta)$ die Entfernung des Streifenschwerpunkts von der Abschnittsachse, gemessen längs der Streifenmittellinie.

Die voranstehenden Integrale erstrecken sich über den jeweils betrachteten Streifenbereich vor den etwa zugehörigen Ruderabschnitten. — Die eingeklammerten Gleichheitszeichen gelten, wenn der betrachtete Streifenbereich (vor etwa vorhandenen Rudern) als in sich starr angesehen wird.

Werden für Ruder, Hilfsruder usw. wie in IIIC2f eigene Abschnittsachsen ζ^R eingeführt, so ergibt die Trägheitswirkung der Ruder usw. eine entsprechende Belegung

[23]) Soweit diese Einzelkräfte und -momente auf Abschnittsgrenzen zu liegen kommen, werden sie zweckmäßig nach III C 2 c als Einzelbelastungen P_y^*, M_ζ^*, M_ξ^* in die Schnittgleichungen eingeführt, also aus der »Feldbelastung« herausgenommen.

Digitized by Google

dieser Achsen; dazu gehören an den Ruderanschlußstellen Auflagerkräfte und -momente in Abhängigkeit von den Wegen und Drehungen $\delta^R_{\eta i}$, $\alpha^R_{\zeta i}$, $\alpha^R_{\xi i}$ der Ruderabschnittsgrenzen. Gemäß der jeweils vorliegenden Konstruktion bewirken diese Auflagerkräfte und -momente weiterhin eine Belegung der betrachteten Abschnittsachse ζ mit Einzelkräften $P^T_{\eta n}$ und -momenten $M^T_{\zeta n}$, $M^T_{\xi n}$ an konstruktiv gegebenen Stellen n zusätzlich[24]) zur vorhergenannten Kraft- und Momentenbelegung p^T_η, m^T_ζ, $m^T_\xi(\zeta)$.

h) Die harmonischen Grundgleichungen beim Übergang zu teilweise starren Systemen[25]). — Wird von einem stabzugartigen System mit n Freiheitsgraden auf ein stabzugartiges System mit nur $n-f$ Freiheitsgraden übergegangen, indem f Federungsgrößen des ursprünglichen Systems unendlich starr gemacht werden, so treten entsprechend IIIC2e an die Stelle von f Formänderungsgleichungen f rein geometrische Starrheitsbedingungen. Bei Aufstellung der harmonischen Grundgleichungen (s. IIIC2a) bleiben also in den Gleichgewichtsbedingungen zunächst neben n Verschiebungsamplituden noch f Kraftamplituden übrig, weil deren vorher mögliche Elimination (mit Hilfe von f Formänderungsgleichungen) jetzt ausfällt. Den $n+f$ Verschiebungs- und Kraftamplituden entsprechen die n Gleichgewichtsbedingungen (s. IIIC2bα) nebst f Starrheitsbedingungen.

Zur Elimination der übriggebliebenen f Kraftamplituden müssen jetzt f der Gleichgewichtsbedingungen aus IIIC2bα herangezogen werden, und die f (rein geometrischen) Starrheitsbedingungen können benutzt werden, um f Verschiebungsamplituden zu eliminieren. — Dann bleiben die harmonischen Grundgleichungen übrig, und zwar in Gestalt von $n-f$ Gleichgewichtsbedingungen mit nur $n-f$ Verschiebungsamplituden, entsprechend dem durchgeführten Übergang auf ein System mit $n-f$ Freiheitsgraden.

i) Energetische Ausdrücke. — Zur Berechnung der nach IIC2 benötigten energetischen Ausdrücke L_ν gilt hinsichtlich eines Abschnitts $i-1, i$ folgendes:

α) Größen p^F und w^F.

Als Größen p'^F, p''^F gelten die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der 5 Belastungsgruppen:

$P^F_1, \ldots, P^F_5$, der Reihe nach $= M_{\xi\, i-1,i}$, $M_{\xi\, i,i-1}$, $T^m_{\zeta(i-1,i)}$, $U_{\zeta\, i-1,i}$, $U_{\zeta\, i,i-1}$ nach IIIC2e.

Als Wegkomponenten w'^F, w''^F gelten sinngemäß die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der 5 Verschiebungsgruppen:

$w^F_1, \ldots, w^F_5$, der Reihe nach $= \vartheta_{\xi\, i-1,i}$, $\vartheta_{\xi\, i,i-1}$, $\gamma_{\zeta(i-1,i)}$, $u_{\zeta\, i-1,i}$, $u_{\zeta\, i,i-1}$ nach IIIC2e.

Dabei ergeben sich die Integralausdrücke L^F_ν in IIC2 als Summenausdrücke $\sum_{r=1}^{5} P'^F_r \cdot w''^F_r$ usw.

β) Größen $\begin{Bmatrix} p^L \text{ und } w^L \\ p^T \text{ und } w^T \end{Bmatrix}$.

Wird vorausgesetzt, der einzelne Streifenabschnitt vor etwa vorhandenen Rudern sei in sich starr, so gelten als Größen $\begin{Bmatrix} p'^L, p''^L \\ p'^T, p''^T \end{Bmatrix}$ die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$ Belastungen längs der Abschnittsachse:

$$\begin{Bmatrix} P^L_1, P^L_2, P^L_3(\zeta), \text{der Reihe nach} = p^L_\eta, m^L_\zeta, m^L_\xi(\zeta) \text{ nach IIIC2f} \\ P^T_1, P^T_2, P^T_3(\zeta), \text{der Reihe nach} = p^T_\eta, m^T_\zeta, m^T_\xi(\zeta) \text{ nach IIIC2g} \end{Bmatrix}.$$

Als Wegkomponenten $\begin{Bmatrix} w'^L, w''^L \\ w'^T, w''^T \end{Bmatrix}$ gelten sinngemäß die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$ Verschiebungslinien längs der Abschnittsachse:

$$\begin{Bmatrix} w^L_1, w^L_2, w^L_3(\zeta), \text{der Reihe nach} = \delta_\eta, \alpha_\zeta, \alpha_\xi(\zeta) \\ w^T_1, w^T_2, w^T_3(\zeta), \text{der Reihe nach} = \delta_\eta, \alpha_\zeta, \alpha_\xi(\zeta) \end{Bmatrix}.$$

Dabei ergeben sich die Integrale $\begin{Bmatrix} L^L_\nu \\ L^T_\nu \end{Bmatrix}$ in IIC2 zu

$$\begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^{3} \int P'^L_r(\zeta) \cdot w''^L_r(\zeta) \cdot d\zeta \text{ usw.} \\ \sum_{r=1}^{3} \int P'^T_r(\zeta) \cdot w''^T_r(\zeta) \cdot d\zeta \text{ usw.} \end{Bmatrix}.$$

γ) Bemerkung. Im voranstehenden sind alle Belastungen und Bewegungen auszudrücken in denjenigen Größen δ_{yi}, α_{zi}, α_{xi}, ..., in denen letzten Endes die harmonischen Grundgleichungen dargestellt sind (s. IIIC2a). — Gleiches wie für den Stabzugabschnitt vor etwa vorhandenen Rudern gilt auch für die Abschnitte von Rudern, Hilfsrudern usw. (s. auch IIIC2f und g).

3. Teilkörpersysteme.

a) Allgemeines. — Im folgenden wird ein Koordinatensystem x, y, z für das gesamte System benutzt (s. Bild 9, 10, 18). Ferner wird zu jedem Teilkörper i ein starr mit ihm verbundener Bezugspunkt ausgewählt, der ebenfalls mit i bezeichnet wird. Die Wegkomponenten δ_{xi}, δ_{yi} dieser Punkte i und die Drehungskomponenten α_{zi} der einzelnen Teilkörper beschreiben dann den Schwingungszustand.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf Teilkörpersysteme im Sinne des ebenen Problems (s. IIIA2b); dabei kennzeichnet jeder Bezugspunkt i eine bestimmte Bezugsachse parallel z.

Zur Aufstellung der harmonischen Grundgleichungen eines Teilkörpersystems wird zweckmäßig davon ausgegangen, daß die am einzelnen Teilkörper wirkenden Kräfte einen Gleichgewichtszustand bilden: »Gleichgewichtsbedingungen« in IIIC3b. In diesen Gleichgewichtsbedingungen müssen alle eingehenden Größen durch die Wege δ_{xi}, δ_{yi}, Drehungen α_{zi} und die etwa wirksamen Erregerkräfte ausgedrückt werden. Insgesamt stehen dabei zur Verfügung: Die Teilkörper-, Formänderungs- und Verknüpfungs-Gleichungen sowie Angaben über die Luft- und Trägheitskräfte (s. IIIC3b bis f). Dazu treten im Einzelfall noch die jeweils zutreffenden Nebenbedingungen in Gestalt von Symmetrie- und Auflagerbedingungen, Aussagen über das Verschwinden von Momenten und Kräften an Endquerschnitten usw. — Sollen die harmonischen Grundgleichungen letzten Endes nur in einer bestimmten Auswahl der obengenannten Größen δ_{xi}, δ_{yi}, α_{zi} dargestellt werden, so müssen weiterhin die übrigen Amplituden eliminiert werden. (Voraussetzung ist hierbei, daß die zu eliminierenden Größen keinen wesentlichen Einfluß auf den Betrag der kleinsten kritischen Geschwindigkeit haben!)

b) Teilkörpergleichungen.

α) Gleichgewichtsbedingungen des Teilkörpers i (s. Bild 18).

Die an einem Teilkörper i von allen übrigen Teilkörpern k her wirkenden »Schnitt«-Kräfte P^k_i und -Momente M^k_i stehen im Gleichgewicht mit den am Teilkörper i angreifenden »äußeren« Kräften P^a_i und Momenten M^a_i bzw. untereinander. Die in Frage kommenden Größen P^a_i, M^a_i setzen sich allgemein zusammen aus Erreger-, Luftkraft- und Trägheitsanteilen: $P^a_i = P^*_i + P^L_i + P^T_i$. Alle Kräfte am Teilkörper i werden (unter Einführung entsprechender Momente) am Bezugspunkt i angesetzt.

Kräfte:
$$\sum_k P^k_{x\,i} + P^a_{x\,i} = 0,$$
$$\sum_k P^k_{y\,i} + P^a_{y\,i} = 0,$$

Momente:
$$\sum_k M^k_{z\,i} + M^a_{z\,i} = 0.$$

[24]) s. Fußnote 23.
[25]) s. Fußnote 21.

Digitized by Google

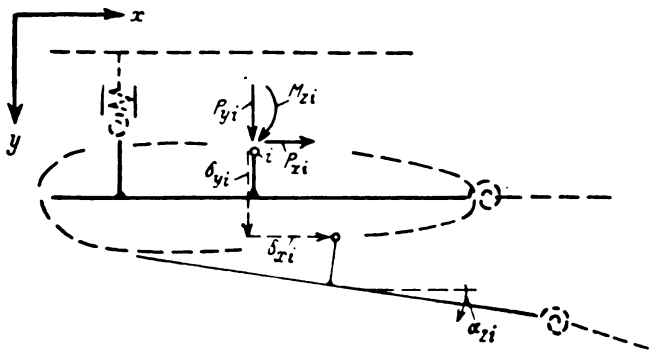


Bild 18. Erklärung zu den Teilkörper-Gleichungen.

β) Stetigkeitsbedingungen am Teilkörper i[26]). — Ist der einzelne Teilkörper in sich verformbar, etwa so, daß er längs einer Schnittlinie klaffen kann, und wird der Bezugspunkt i einmal als i^l dem einen Teilkörperabschnitt und einmal als i^r dem anderen Abschnitt zugeordnet, so unterscheiden sich die Bewegungen δ_i^l, α_i^l und δ_i^r, α_i^r links und rechts von dieser Schnittlinie um den Betrag $\Delta\delta_i$, $\Delta\alpha_i$ dieses Klaffens. (Diese Bedingungen sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt; sie haben keine Bedeutung, wenn an Stelle eines Teilkörpers mit der genannten Formänderungsfähigkeit zwei oder mehr in sich starre Teilkörper betrachtet werden, die in geeigneter Weise beweglich miteinander verbunden sind.)

Wege: $\delta_{xi}^r = \delta_{xi}^l + \Delta\delta_{xi}$,

$\delta_{yi}^r = \delta_{yi}^l + \Delta\delta_{yi}$,

Drehung: $\alpha_{zi}^r = \alpha_{zi}^l + \Delta\alpha_{zi}$.

c) Formänderungsgleichungen. — Wird für je zwei Teilkörper i und k ein gemeinsamer Bezugspunkt ik gewählt und wird dieser einmal dem Teilkörper i und einmal dem Teilkörper k zugeordnet, so werden entsprechend Bild 19 die Formänderungseigenschaften der Verbindungskonstruktionen zwischen den beiden Teilkörpern i und k beschrieben durch Weg- und Drehungsgruppen j_{xik}, j_{yik}, φ_{zik}, Kraft- und Momentengruppen S_{xik}, S_{yik}, B_{zik}. Solche Formänderungseigenschaften könnten z. B. durch Anordnungen nach Bild 20 zustandekommen. An die Stelle der dort angegebenen statisch bestimmten Verbindungsmöglichkeiten können natürlich auch statisch unbestimmte Konstruktionen treten, z. B. indem weitere Verbindungsglieder hinzugenommen werden.

Schema der Formänderungsgleichungen für die Verbindung von zwei Teilkörpern i und k.

Schreibweise α). »Kräftemethode«, d. h.

$$j, \varphi = f(S, B).$$

	S_{xik}	S_{yik}	B_{zik}
$j_{xik} =$	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}
$j_{yik} =$	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}
$\varphi_{zik} =$	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}

Schreibweise β). »Deformationsmethode«, d. h.

$$S, B = g(j, \varphi).$$

	j_{xik}	j_{yik}	φ_{zik}
$S_{xik} =$	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
$S_{yik} =$	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}
$B_{zik} =$	Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}

In gebräuchlicher Weise bedeuten hierbei:

δ_{mn}, z. B. δ_{13}: die Größe j_{xik}, wie sie sich an der Verbindung zwischen Teilkörper i und k (neben anderen Verschiebungsgrößen) ergibt, wenn die Verbindungskonstruktion — losgelöst vom Gesamtsystem — als freies Gebilde mit der Gleichgewichtsgruppe $B_{zik} = 1$ belastet wird.

Z_{mn}, z. B. Z_{31}: die Größe B_{zik}, wie sie sich an der Verbindung zwischen Teilkörper i und k (neben anderen Belastungsgrößen) ergibt, wenn die Verbindungskonstruktion — losgelöst vom Gesamtsystem — an ihren Anschlußstellen in einem willkürlich verformbaren Körper eingespannt wird und wenn dieser Körper alsdann eine Formänderung im Sinne und vom Maßstab $j_{xik} = 1$ ausführt (sonst aber starr bleibt).

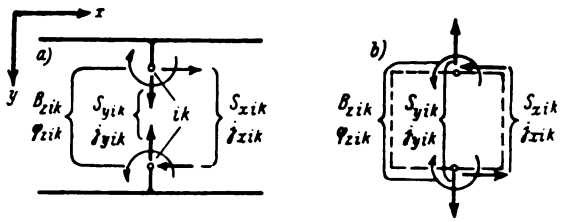


Bild 19. Erklärung zu den Formänderungs-Gleichungen (Belastungs- und Verschiebungszustände *a)* an den Teilkörpern, *b)* an der Verbindungskonstruktion).

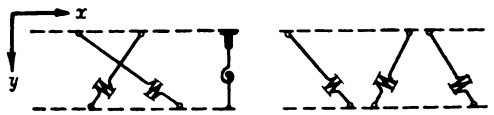


Bild 20. Beispiele für den denkbaren Aufbau der Verbindungskonstruktion zwischen zwei Teilkörpern.

Bei Gültigkeit linearer Zusammenhänge zwischen Formänderungen und Kräften gilt

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}, \quad Z_{mn} = Z_{nm}.$$

Drei der vorstehenden sechs Formänderungsgleichungen genügen zur eindeutigen Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Größen j_{xik}, j_{yik}, φ_{zik}, S_{xik}, S_{yik}, B_{zik}. (Dabei müssen die zur Beschreibung ausgewählten Gleichungen linear voneinander unabhängig sein.)

Oft wird es notwendig sein, einzelne der Fesseln zwischen zwei Teilkörpern i und k als unendlich starr oder als unendlich nachgiebig anzusehen: Z. B. Ruderanschlüsse als unendlich starr im Sinne von j_y bzw. S_y, als unendlich nachgiebig im Sinne von φ_z bzw. B_z. Handelt es sich dabei um Fesseln im Sinne der Größen j, φ, S, B, so gelten einzelne, z. B. $s \overset{\leq}{(=)} 3$, der folgenden 6 Starrheits- (α) und Nachgiebigkeitsbedingungen (β):

$$\alpha) \; j_{xik}, \; j_{yik}, \; \varphi_{zik} = 0,$$
$$\beta) \; S_{xik}, \; S_{yik}, \; B_{zik} = 0.$$

Sollen etwa schräg zum Koordinatensystem xy gelegene Stäbe starr oder unendlich nachgiebig werden, oder sollen sonstwie denkbare Starrheiten bzw. Nachgiebigkeiten Platz greifen, so ergeben sich $s \overset{\leq}{(=)} 3$ allgemeinere Starrheits- und Nachgiebigkeitsbedingungen der Gestalt:

$$\alpha) \; \Delta_r^0 \equiv c_{r1} j_{xik} + c_{r2} j_{yik} + c_{r3} \varphi_{zik} = 0,$$
$$\beta) \; \Theta_r^0 \equiv C_{r1} S_{xik} + C_{r2} S_{yik} + C_{r3} B_{zik} = 0;$$

denn jede Formänderungs- und Belastungsgröße der Verbindungskonstruktion zwischen zwei Teilkörpern i und k ist als lineare Kombination der oben eingeführten Bewegungs- und Belastungsgruppen j, φ, S, B darstellbar.

Zur weiteren Behandlung der in Rede stehenden Sonderfälle gilt Gleiches wie in IIIC2e.

d) Verknüpfungsgleichungen. — Zwischen den Größen S, B, j, φ der Formänderungsgleichungen und den Größen P^k, M^k, δ, α der Teilkörpergleichungen gelten die Verknüpfungsgleichungen[27]) (s. Bild 18 u. 19):

[26]) Gleichgewichts- und Stetigkeitsbedingungen sind einander dual zugeordnet. Vgl. Fußnote 20.

[27]) Die Verknüpfungsgleichungen des Teilkörpersystems entsprechen den Feld- und Umformungsgleichungen des stabzugartigen Systems.

Digitized by Google

$$P^k_{x_i} = +(\pm |S_{xik}|),$$
$$P^k_{y_i} = +(\pm |S_{yik}|),$$
$$M^k_{z_i} = +(\pm |B_{zik}|) - (\pm |S_{xik}|)(y_{ik} - y_i) + (\pm |S_{yik}|)(x_{ik} - x_i),$$
$$j_{xik} = \pm |(\delta_{xi} - \delta_{xk}) - \alpha_{zi}(y_{ik} - y_i) + \alpha_{zk}(y_{ik} - y_k),$$
$$j_{yik} = \pm |(\delta_{yi} - \delta_{yk}) + \alpha_{zi}(x_{ik} - x_i) - \alpha_{zk}(x_{ik} - x_k),$$
$$\varphi_{zik} = \pm |\alpha_{zi} - \alpha_{zk}|.$$

Dabei sind die Vorzeichen + oder — sinngemäß einzusetzen, je nachdem, ob der Reihe nach zu positivem S_{ik}, B_{ik}, j_{ik}, φ_{ik} ein positives oder negatives P^k_i, M^k_i, δ_i, α_i gehört (s. z. B. Bild 18 u. 19).

e) Ausdrücke für die Luftkräfte. — Soweit die einzelnen Teilkörper aerodynamisch maßgeblichen Teilen einer Flugzeugkonstruktion zugeordnet sind, ist vorauszusetzen, daß sie dementsprechend eine aerodynamisch wirksame Gestalt besitzen; Flügelabschnitte mit Rudern werden dabei durch geeignet angeordnete Teilkörperpaare oder -tripel wiedergegeben, wobei die einzelnen Teilkörper nach Bedarf frei oder federnd drehbar miteinander verbunden sein können und aerodynamisch etwa wie eine in sich knickbare Platte wirken. Gehört ein Teilkörper i z. B. einem solchen Teilkörpertripel an (Flügelabschnitt mit Ruder und Hilfsruder, s. Bild 3 u. 21), so gilt nach IIB2 für die an seinem Bezugspunkt i anzusetzende Luftkraftkomponente $P^L_{y_i}$ und für das Luftmoment $M^L_{z_i}$ ($P^L_{x_i}$ vernachlässigt):

$$P^L_{y_i} \overline{=} [\bar\delta^V_y \cdot \mathfrak{C}^P_{0i} + \bar\alpha^V_z \cdot \mathfrak{C}^P_{1i} + \Delta\bar\alpha^R_z \cdot \mathfrak{C}^P_{2i} + \Delta\bar\alpha^H_z \cdot \mathfrak{C}^P_{3i} + \ldots] e^{j\omega t},$$
$$M^L_{z_i} \overline{=} [\bar\delta^V_y \cdot \mathfrak{C}^M_{0i} + \bar\alpha^V_z \cdot \mathfrak{C}^M_{1i} + \Delta\bar\alpha^R_z \cdot \mathfrak{C}^M_{2i} + \Delta\bar\alpha^H_z \cdot \mathfrak{C}^M_{3i} + \ldots] e^{j\omega t}.$$

Dabei deuten die Punkte weitere Teilglieder an, die z. B. dann auftreten, wenn noch eine aerodynamische Beeinflussung des Teilkörpers i durch weitere Teilkörper berücksichtigt werden soll, die nicht mehr zum angenommenen Tripel gehören. (Auflagerkräfte und -momente der Ruder wie in IIIC2f sind hier nicht unmittelbar zur Luftkraftbelastung hinzuzunehmen; denn sie gehen hier im Rahmen der Schnittkräfte und -momente $P^k_{x_i}$, $P^k_{y_i}$, $M^k_{z_i}$ über die Gleichgewichtsbedingungen der Teilkörper in die Rechnung ein, s. IIIC3b. — Die Größen $\bar\delta^V_y$, $\bar\alpha^V_z$, $\Delta\bar\alpha^R_z$, $\Delta\bar\alpha^H_z$ nach Bild 3 sind durch die Größen $\bar\delta_{y_i}$, ..., $\bar\alpha_{z\,i+2}$ nach Bild 21 auszudrücken.)

f) Ausdrücke für die Trägheitskräfte. — Die an der Bezugsachse i eines Teilkörpers i anzusetzenden Trägheitskräfte und das zugehörige Moment sind (s. Bild 22):

$$P^T_{x_i} = \omega^2 \mathcal{M}_i [\delta_{xi} + \alpha_{zi}(y_i - y_i^S)],$$
$$P^T_{y_i} = \omega^2 \mathcal{M}_i [\delta_{yi} - \alpha_{zi}(x_i - x_i^S)],$$
$$M^T_{z_i} = \omega^2 \{\mathcal{M}_i [\delta_{xi}(y_i - y_i^S) - \delta_{yi}(x_i - x_i^S)] + \alpha_{zi} [\Theta_{zi} + \mathcal{M}_i (x_i - x_i^S)^2 + \mathcal{M}_i (y_i - y_i^S)^2]\},$$

wobei

$\mathcal{M}_i$ = Masse des Teilkörpers i,
Θ_{zi} = Massenträgheitsmoment des Teilkörpers i bezüglich seiner Schwerachse parallel z,

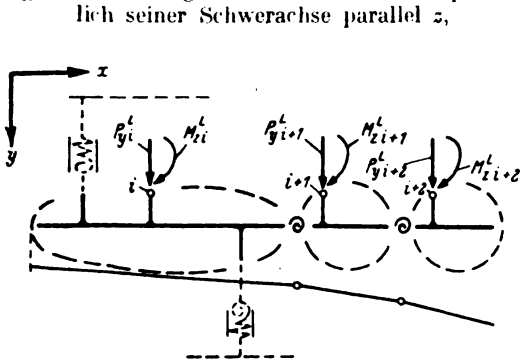


Bild 21. Erklärung zum Ansatz der Luftkräfte (Teilkörper-Tripel).

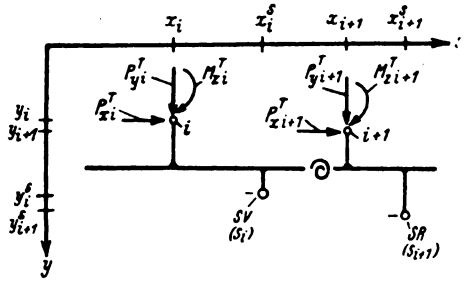


Bild 22. Erklärung zum Ansatz der Trägheitskräfte.

x^S_i, y^S_i = Koordinaten der Teilkörper-Schwerachse parallel z.

(Auflagerkräfte und -momente der Ruder wie in IIIC2g sind auch hier nicht einzusetzen, vgl. IIIC3e).

g) Die harmonischen Grundgleichungen beim Übergang zu teilweise starren Systemen. — Hier gilt Gleiches wie in IIIC2h.

h) Energetische Ausdrücke. — Zur Berechnung der nach IIC2 benötigten energetischen Ausdrücke L_r gilt hinsichtlich eines Teilkörpers i bzw. einer Verbindungskonstruktion ik folgendes:

α) Größen p^F und w^F.

Als Größen p'^F, p''^F gelten die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der 3 Belastungsgruppen:

P^F_1, P^F_2, P^F_3, der Reihe nach $= S_{xik}$, S_{yik}, B_{zik} nach IIIC3c.

Als Wegkomponenten w'^F, w''^F gelten sinngemäß die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der 3 Verschiebungsgruppen:

w^F_1, w^F_2, w^F_3, der Reihe nach $= j_{xik}$, j_{yik}, φ_{zik} nach IIIC3c.

Dabei ergeben sich die Integralausdrücke L^F_r in IIC2 als Summenausdrücke $\sum_{r=1}^{3} P'^F_r \cdot w''^F_r$ usw.

β) Größen $\left\{\begin{matrix} p^L \text{ und } w^L \\ p^T \text{ und } w^T \end{matrix}\right\}$.

Als Größen $\left\{\begin{matrix} p'^L, p''^L \\ p'^T, p''^T \end{matrix}\right\}$ gelten die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right\}$ Belastungen:

$\left\{\begin{matrix} P^L_1, P^L_2, & \text{der Reihe nach} = P^L_{y_i}, M^L_{z_i} & \text{nach IIIC3e} \\ P^T_1, P^T_2, P^T_3, & \text{der Reihe nach} = P^T_{x_i}, P^T_{y_i}, M^T_{z_i} & \text{nach IIIC3f} \end{matrix}\right\}$.

Als Wegkomponenten $\left\{\begin{matrix} w'^L, w''^L \\ w'^T, w''^T \end{matrix}\right\}$ gelten sinngemäß die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right\}$ Verschiebungen:

$$\left\{\begin{matrix} w^L_1, w^L_2, & \text{der Reihe nach} = \delta_{yi}, \alpha_{zi} \\ w^T_1, w^T_2, w^T_3, & \text{der Reihe nach} = \delta_{xi}, \delta_{yi}, \alpha_{zi} \end{matrix}\right\}.$$

Dabei ergeben sich die Integralausdrücke $\left\{\begin{matrix} L^L_r \\ L^T_r \end{matrix}\right\}$ in IIC2 als Summenausdrücke

$$\sum_{r=1}^{2} P'^L_r \cdot w''^L_r \text{ usw.}, \qquad \sum_{r=1}^{3} P'^T_r \cdot w''^T_r \text{ usw.}$$

γ) Bemerkung. Im vorangehenden sind alle Belastungen und Bewegungen auszudrücken in denjenigen Größen δ_{xi}, δ_{yi}, α_{zi}, in denen letztèn Endes die harmonischen Grundgleichungen dargestellt sind (s. IIIC3a).

4. Systeme vorgegebener Formänderungsfähigkeit.

a) Allgemeines. — Im folgenden wird ein Koordinatensystem x, y, z für das gesamte System benutzt (s. Bild 11).

Digitized by Google

Gemäß der Erklärung eines Systems vorgegebener Formänderungsfähigkeit nach IIIa1 und 2c gilt für die Bewegungskomponente eines Systempunktes x, y, z in einer Richtung S (z. B. x, y oder z):

$$\delta_S(x,y,z,t) \mathrel{\overline{\underline{R}}} \bar{\delta}_S(x,y,z)\cdot e^{j\omega t} \mathrel{\overline{\underline{R}}} \sum_\nu \bar{\delta}_{S\nu}\cdot e^{j\omega t} = \sum_\nu \delta q_{S\nu}\cdot F_{S\nu}(x,y,z)\cdot e^{j\omega t}.$$

Zu $F_{S\nu}(x, y, z)$ und zu $\delta q_{S\nu}$ gilt folgendes:

Die »Elementarformen« $F_{S\nu}(x, y, z)$ der Formänderungsfähigkeit des Systems sind Scharen von Wegkomponenten der einzelnen Systempunkte parallel den Richtungen S (d. h. x, y, z). — Bei Flugzeugkonstruktionen mit Rudern, Hilfsrudern usw. ist es notwendig, einen Teil der Elementarformen $F_{S\nu}(x, y, z)$ im Bereich der Ruder durch andere Gesetzmäßigkeiten zu definieren, als im Bereich der übrigen Konstruktion, z. B., wie F in Bild 11, im Ruderbereich als Drehung um die Ruderachse, im übrigen zu Null. (Näheres zur Festlegung der Elementarformen s. in IIIC4c. Eine Elementarform $F_{S\nu}$ kann als S-Komponente eines räumlichen Vektorgebildes $\overline{F_\nu}$ aufgefaßt werden, das jedem Punkt des betrachteten Systems einen räumlichen Verschiebungsvektor zuordnet. Umgekehrt können irgendwelche Gruppen aus einzelnen Elementarformen beliebiger Richtungen S gebildet werden; die so entstehenden linearen Vektorgebilde stellen dann neue Elementarformen dar, die an Stelle der ursprünglichen benutzt werden können.)

Die Größen $\delta q_{S\nu} = \delta q'_{S\nu} + j\,\delta q''_{S\nu}$ sind die komplexen Amplituden, mit denen sich die Maßstäbe der einzelnen Elementarformen $F_{S\nu}(x, y, z)$ harmonisch zeitabhängig ändern; sie werden zweckmäßig als Änderungsamplituden »verallgemeinerter Koordinaten« $q_{S\nu}(t)$ aufgefaßt:

$$q_{S\nu}(t) \mathrel{\overline{\underline{R}}} q_{S\nu}(0) + \delta q_{S\nu}\cdot e^{j\omega t}.$$

Zur Aufstellung der harmonischen Grundgleichungen wird zweckmäßig von den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ausgegangen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K(t)}{\partial \dot{q}_i(t)}\right) - \frac{\partial K(t)}{\partial q_i(t)} = H_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dabei bedeuten (s. Bild 11):

$i = 1, 2, \ldots, n$ der Reihe nach alle nach obiger Darstellungsweise in Frage kommenden Kombinationen Sv, d. h. $x1, \ldots, x\nu, \ldots, y1, \ldots, y\nu, \ldots, z1, \ldots, z\nu, \ldots$,

$K(t)$ die kinetische Energie des Systems zur Zeit t $= \sum_S \int \frac{1}{2}\,\dot{\delta}_S^2(x,y,z,t)\cdot\mu(x,y,z)\,dV$, erstreckt über alle Volumenelemente des Systems, wobei:

$\mu(x, y, z)$ = Massenbelegung an der Stelle x, y, z, bezogen auf die Volumeneinheit,

$H_i(t)$ die »verallgemeinerte« Kraft bezüglich der verallgemeinerten Koordinate $q_i(t)$,

$= \int\left(\bar{p}(x,y,z,t)\cdot\frac{\partial \bar{r}(x,y,z,t)}{\partial q_i(t)}\right)\cdot dV$, erstreckt über alle Volumenelemente des Systems, wobei:

$\bar{p}(x, y, z, t)$ = wirksamer Gesamtkraftvektor am Volumenelement dV bei x, y, z zur Zeit t, bezogen auf die Volumeneinheit, zusammengesetzt aus Formänderungs-, Luft- und etwa wirksamen Erregerkräften[28]),

$\bar{r}(x, y, z, t)$ = Ortsvektor des Volumenelements dV bei x, y, z zur Zeit t;

$\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right)$ ist als inneres Produkt aufzufassen.

Im Falle harmonischer Schwingungen schreiben sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in Gestalt der nachfolgend angedeuteten »Arbeitsgleichungen«. Darin sind zwecks endgültiger Schreibweise als »harmonische Grundgleichungen« die zunächst auftretenden Arbeitsausdrücke noch durch die einzelnen Elementarformen F_i und die etwa wirksamen Erregerkräfte auszudrücken. Insgesamt stehen dabei zur Verfügung: Die Arbeitsgleichungen, Angaben über die Formänderungen und Formänderungskräfte, Angaben über die Luft- und Trägheitskräfte (s. IIIC4b bis e). — Sollen die harmonischen Grundgleichungen letzten Endes nur in einer bestimmten Auswahl der obengenannten Größen δq_i geschrieben werden, so müssen weiterhin die übrigen Amplituden eliminiert werden. (Voraussetzung ist hierbei, daß die zu eliminierenden Größen keinen wesentlichen Einfluß auf den Betrag der kleinsten kritischen Geschwindigkeit haben!)

b) Arbeitsgleichungen. — Die Einführung des harmonischen Ansatzes $q_i(t) \mathrel{\overline{\underline{R}}} q_i(0) + \delta q_i\cdot e^{j\omega t}$ in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen liefert die »Arbeitsgleichungen«:

$$\mathfrak{E}_k^* + \sum_i \delta q_i\cdot(\mathfrak{E}_{ik}^F + \mathfrak{E}_{ik}^I + E_{ik}'^T) = 0, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n, \\ k = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix}$$

mit

$$\mathfrak{E}_k^* = E_k'^* + j\,E_k''^*,\quad \mathfrak{E}_{ik}^F = E_{ik}'^F + j\,E_{ik}''^F,\quad \mathfrak{E}_{ik}^I = E_{ik}'^I + j\,E_{ik}''^I.$$

Darin bedeuten $E_k'^*, E_k''^*, E_{ik}'^F, E_{ik}''^F, E_{ik}'^I, E_{ik}''^I, E_{ik}'^T$ der Reihe nach die sog. virtuellen Arbeiten der etwa wirksamen Erregerkräfte P'^*, P''^* bzw. der Formänderungs-, Luft- und Trägheitskräfte $P_i'^F, P_i''^F, P_i'^I, P_i''^I, P_i'^T$ eines »Bewegungszustandes $i = 1$«, geleistet bei einer gedachten Verschiebung (einschl. Formänderung) des Systems um einen »Verschiebungszustand $k = 1$«. Hierbei ist gegeben:

Der etwa wirksame Erregungszustand durch:

$$P^*(t) \mathrel{\overline{\underline{R}}} \mathfrak{P}^*\cdot e^{j\omega t} = P'^*\cdot\cos\omega t - P''^*\cdot\sin\omega t,$$

der Bewegungszustand $i = 1$ durch:

$$\delta_i(x,y,z,t) \mathrel{\overline{\underline{R}}} 1\cdot F_i(x,y,z)\cdot e^{j\omega t} = F_i(x,y,z)\cdot\cos\omega t,$$

der Verschiebungszustand $k = 1$ durch:

$$\delta_k(x,y,z) = 1\cdot F_k(x,y,z).$$

Danach gilt:

$$\mathfrak{E}_k^* = E_k'^* + j\,E_k''^* = \sum_r P'^*_{(k)r}\cdot F_k(x_r,y_r,z_r) + j\sum_r P''^*_{(k)r}\cdot F_k(x_r,y_r,z_r),$$

$$\mathfrak{E}_{ik}^F = E_{ik}'^F + j\,E_{ik}''^F = \int p'^F_{(k)i}(x,y,z)\cdot F_k(x,y,z)\cdot dV + j\int p''^F_{(k)i}(x,y,z)\cdot F_k(x,y,z)\cdot dV,$$

$$\mathfrak{E}_{ik}^I = E_{ik}'^I + j\,E_{ik}''^I = \int p'^I_{(k)i}(x,y,z)\cdot F_k(x,y,z)\cdot do + j\int p''^I_{(k)i}(x,y,z)\cdot F_k(x,y,z)\cdot do,$$

$$E_{ik}'^T = \omega^2\int F_{(k)i}(x,y,z)\cdot F_k(x,y,z)\cdot\mu(x,y,z)\cdot dV,$$

wobei:

$P'^*_{(k)r} + j\,P''^*_{(k)r} = \mathfrak{P}_{(k)r}$ = Erregerkraft-Komponente im Sinne von F_k an einer Stelle r des Systems,

$p'^F_{(k)i} + j\,p''^F_{(k)i} = \mathfrak{p}^F_{(k)i}$ = Formänderungskraft-Komponenten beim Zustand $i = 1$ im Sinne von F_k am Volumenelement dV, bezogen auf die Volumeneinheit,

$p'^I_{(k)i} + j\,p''^I_{(k)i} = \mathfrak{p}^I_{(k)i}$ = Luftkraft-Komponenten beim Zustand $i = 1$ im Sinne von F_k am Oberflächenelement do, bezogen auf die Flächeneinheit,

$\mu(x, y, z)$ = Massenbelegung an der Stelle x, y, z, bezogen auf die Volumeneinheit,

$F_{(k)i}$ = Ordinaten-Komponenten der Elementarformen F_i im Sinne von F_k am Volumenelement dV[29]).

Näheres zur Ermittlung der vorgenannten Integrale s. in IIIC4c bis e.

[28]) Trägheitskräfte zur Herstellung eines Gleichgewichtszustandes sind bei dieser Schreibweise der mechanischen Grundgleichungen nicht einzuführen; denn die Massenwirkung kommt hier bereits in der kinetischen Energie zum Ausdruck. — In den nachfolgenden »Arbeitsgleichungen« dagegen treten die Trägheitskräfte wieder in der auch sonst zweckmäßigen Schreibweise auf.

[29]) d. h. nur diejenigen Elementarformen F_i (bzw. $F_{S\nu}$, s. IIIC4a) gehen hier ein, die parallel zu F_k sind.

Digitized by Google

c) **Formänderungen und Formänderungskräfte.** — An Stelle von Formänderungsgleichungen, die bei stabzugartigen Systemen sowie bei Teilkörpersystemen als gegeben anzusehen waren, könnten bei Systemen vorgegebener Formänderungsfähigkeit beispielsweise die Beträge der virtuellen Arbeiten $E_{ik}'^{F}$ und $E_{ik}''^{F}$ als Ausdrücke für die Wirkung der Formänderungskräfte unmittelbar gegeben sein. Diese Beträge könnten etwa aus Rechnungen gefunden sein, bei denen die Flugzeugkonstruktion gemäß III A 2a als eng unterteiltes stabzugartiges System betrachtet wurde.

Die Wirkung der Formänderungskräfte kann aber auch zum Ausdruck gebracht werden, indem den einzelnen Elementar-»Formen« $F_i(x, y, z)$ der Formänderungsfähigkeit des Systems bestimmte Elementar-»Belastungen« $G_i(x, y, z)$ zugeordnet werden. Dann wird also ausgesprochen, das System führe harmonisch zeitabhängige Verschiebungen der Form $\delta_i(x, y, z, t) = 1 \cdot F_i(x, y, z) \cdot \cos \omega t$ aus, wenn an ihm harmonisch zeitabhängige Belastungen $G_i(x, y, z, t) = G_i' \cdot \cos \omega t - G_i'' \cdot \sin \omega t$ wirken[30]). Diese Belastungen sind dabei als Gleichgewichtszustände zu denken, zusammengesetzt aus Trägheits- und Erregerkräften. — Ebenso wie die Belastungen G_i', G_i'' gehören auch die Formänderungskräfte $p_i'^{F}$, $p_i''^{F}$ (in den Integralen $E_{ik}'^{F}$, $E_{ik}''^{F}$, s. III C 4 b) zum Verschiebungszustand $F_i(x, y, z)$. Wegen dieser Zusammengehörigkeit der Kräfte G_i', G_i'' und $p_i'^{F}$, $p_i''^{F}$ gilt nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$E_{ik}'^{F} = \int p_{(i)}'^{F}(x, y, z) \cdot F_k(x, y, z) \cdot dV = -\int G_{(i)}'(x, y, z) \cdot F_k(x, y, z) \cdot d\,o \text{ (bzw. } dV),$$

$$E_{ik}''^{F} = \int p_{(i)}''^{F}(x, y, z) \cdot F_k(x, y, z) \cdot dV = -\int G_{(i)}''(x, y, z) \cdot F_k(x, y, z) \cdot d\,o \text{ (bzw. } dV).$$

Dabei bedeuten $G_{(i)}'$, $G_{(i)}''$ die Komponenten von G_i', G_i'' parallel der Richtung von F_k am Oberflächenelement do bzw. Volumenelement dV, bezogen auf die Flächen- bzw. Volumeneinheit.

Hiernach sind die Integralausdrücke $E_{ik}'^{F}$, $E_{ik}''^{F}$ ohne näheres Eingehen auf die Formänderungskräfte $p_i'^{F}$, $p_i''^{F}$ zu ermitteln, wenn die zu den einzelnen Elementarformen F_i der Formänderungsfähigkeit gehörigen Elementarbelastungen G_i bekannt sind. Die Kenntnis derart zusammengehöriger Paare F_i und G_i könnte etwa aus gesonderten Betrachtungen gemäß folgendem Gedankengang stammen, der davon ausgeht, daß es stets einfacher ist, Formänderungen zu einer gegebenen Belastung zu bestimmen, als umgekehrt die Belastung zu einer gegebenen Formänderung:

An der Flugzeugkonstruktion werden zunächst n harmonische »Ausgangs«-Belastungen angenommen (Gleichgewichtszustände, zusammengesetzt zu denken aus Erreger- und Trägheitskräften):

$$\Gamma\lambda(x, y, z, t) = \Gamma_\lambda' \cdot \cos \omega t - \Gamma_\lambda'' \cdot \sin \omega t \;\underset{\kappa}{=}\; \bar{\Gamma}_\lambda \cdot e^{j\omega t}$$

(z. B. mit $\Gamma_\lambda'' = 0$); dazu werden die harmonisch zeitabhängigen Formänderungszustände, die »Ausgangs«-Verschiebungen

$$\delta_\lambda^{\Gamma}(x, y, z, t) = \delta_\lambda'^{\Gamma} \cdot \cos \omega t - \delta_\lambda''^{\Gamma} \cdot \sin \omega t \;\underset{\kappa}{=}\; \bar{\delta}_\lambda^{\Gamma} \cdot e^{j\omega t}$$

ermittelt (etwa indem die Flugzeugkonstruktion entsprechend III A 2a als eng unterteiltes stabzugartiges System betrachtet wird, oder indem geeignete Belastungsversuche durchgeführt werden)[31]).

Weiterhin werden n Elementarformen $F_i(x, y, z)$ festgelegt, die letzten Endes die Formänderungsfähigkeit des Systems zum Ausdruck bringen sollen.

Darauf werden die Verschiebungszustände δ_λ^{Γ} zunächst (angenähert) als lineare Kombinationen der gewählten Elementarformen der Formänderungsfähigkeit ausgedrückt:

$$\delta_\lambda^{\Gamma}(x, y, z, t) \overset{(\sim)}{\approx} \sum_k (\alpha_{\lambda k}' \cdot F_k) \cdot \cos \omega t - \sum_k (\alpha_{\lambda k}'' \cdot F_k) \cdot \sin \omega t \underset{\kappa}{\approx}^{(\sim)} \sum_k (\bar{\alpha}_{\lambda k} \cdot F_k) \cdot e^{j\omega t},$$

wobei die Kombinationskoeffizienten $\alpha_{\lambda k}'$, $\alpha_{\lambda k}''$ etwa durch die Forderung kleinster quadratischer Abweichung zwischen δ_λ^{Γ} und dem Näherungsausdruck festgelegt sind, d. h. durch

$$\int [\delta_\lambda'^{\Gamma} - \sum_k \alpha_{\lambda k}' \cdot F_k]^2 \cdot dV = \text{Min.},$$

$$\int [\delta_\lambda''^{\Gamma} - \sum_k \alpha_{\lambda k}'' \cdot F_k]^2 \cdot dV = \text{Min.}$$

Dann ergibt sich die der Elementarform F_i zugeordnete Elementarbelastung G_i als diejenige Kombination der gewählten Ausgangsbelastungen Γ_λ,

$$G_i \;\underset{\kappa}{=}\; \sum_\lambda c_{\lambda i} \cdot \bar{\Gamma}_\lambda \cdot e^{j\omega t},$$

bei der die zugehörige Formänderung δ_i' gleich $1 \cdot F_i \cdot \cos \omega t$ wird:

$$\delta_i'(x, y, z, t) \;\underset{\kappa}{=}\; \sum_\lambda (c_{\lambda i} \cdot \bar{\delta}_\lambda^{\Gamma}) \cdot e^{j\omega t} = \sum_\lambda c_{\lambda i} \cdot (\sum_k \bar{\alpha}_{\lambda k} \cdot F_k) \cdot e^{j\omega t}.$$

Das ergibt für die Kombinationskoeffizienten $c_{\lambda i} = c_{\lambda i}' + j c_{\lambda i}''$ die $2n$-Gleichungen:

$$\sum_\lambda (c_{\lambda i}' \alpha_{\lambda k}' - c_{\lambda i}'' \alpha_{\lambda k}'') = 1 \text{ für } k = i, \quad = 0 \;\text{»}\; k \gtrless i,$$

$$\sum_\lambda (c_{\lambda i}' \alpha_{\lambda k}'' + c_{\lambda i}'' \alpha_{\lambda k}') = 0.$$

In komplexer Schreibweise:

$$\sum_\lambda c_{\lambda i} \bar{\alpha}_{\lambda k} = 1 \text{ für } k = i, \quad = 0 \;\text{»}\; k \gtrless i.$$

(Bei der Aufstellung zusammengehöriger Paare F_i, G_i kann es sich als vorteilhaft erweisen, wenn an Stelle der zu x, y oder z parallelen Elementarformen F_i lineare Vektorgebilde benutzt werden. Vgl. die diesbezügliche Bemerkung in III C 4a.)

Praktisch wird es oft möglich sein, unter nur geringen Vernachlässigungen den einzelnen Verschiebungszustand $\delta_{\lambda i}^{\Gamma}$ als parallel einer der Koordinatenrichtungen anzusehen und ihn dann unmittelbar als Elementarform F_λ mit zugehöriger Elementarform Γ_λ anzusprechen.

Es liegt nahe, die Ausgangsbelastungen Γ_λ in Gestalt von einfachen Gleichgewichtsgruppen, gebildet aus Einzelkräften und Einzelmomenten, zu wählen. Die zu solchen Ausgangsbelastungen gehörigen Verschiebungszustände werden oft als »Einflußflächen« der Formänderung bezeichnet.

Insbesondere aber liegt es nahe, von den Eigenschwingungszuständen des Systems auszugehen und (umgekehrt wie im vorangehendem) als Ausgangsverschiebungen eine Reihe von Eigenschwingungsformen der Flugzeugkonstruktion zu wählen. Diese könnten etwa aus Rechnungen bekannt sein, bei denen die Flugzeugkonstruktion als eng unterteiltes stabzugartiges System aufgefaßt wurde, oder aus Resonanzversuchen mit der wirklichen Flugzeugkonstruktion, wobei die Resonanzschwingungsformen als angenähert gleich den Eigenschwingungsformen angesehen wurden. Die diesen Ausgangsverschiebungen δ_λ^{Γ} zugeordneten Belastungszustände Γ_λ sind unmittelbar gegeben als die bei den einzelnen Eigenschwingungszuständen wirksamen Trägheitskraftbelastungen des Systems:

$$\bar{\Gamma}_\lambda = \Gamma_\lambda' = -\omega_\lambda^2 \cdot \mu(x, y, z) \cdot \delta_\lambda^{\Gamma}(x, y, z).$$

Sie sind also ohne weiteres bekannt, wenn die Massenbelegung des Systems und außer den einzelnen Eigenschwingungsformen auch die zugehörigen Eigenfrequenzen bekannt sind.

Bei praktischen Rechnungen wird die Berücksichtigung der Dämpfung oft nur überschlagsweise erfolgen. Dann liegt es nahe, für das ganze System mit konstanten Dämpfungszahlen zu rechnen, also einfach zu setzen:

[30]) Der Zeiger i in G_i kennzeichnet lediglich die Zuordnung von G_i zur Elementarform F_i und nicht etwa richtungsmäßige Übereinstimmung des linearen Vektorgebildes G_i mit F_i.

[31]) Bei Wahl $\Gamma_\lambda' \neq 0$, $\Gamma_\lambda'' = 0$ wird nur beim dämpfungsfreien System $\delta_\lambda''^{\Gamma} = 0$.

Digitized by Google

$$E''^{F}_{ik} = \gamma_{ik} \cdot E'^{F}_{ik},$$

wobei die Größen γ_{ik} irgendwie geschätzte Dämpfungszahlen bedeuten (s. II B 3).

d) Ausdrücke für die Luftkräfte. — Zur Ermittlung der Integrale $\mathfrak{E}^{L}_{ik}$ in III C 4 b wird das System zweckmäßig in schmale Streifen parallel der Flugrichtung (x) aufgeteilt (s. Bild 23). Für die örtliche Luftkraft an einer Stelle x eines solchen Streifens, bezogen auf die Flächeneinheit, gelten gemäß II B 2 Ausdrücke der Art:

$$p^{L}_{yi}(z, x) = [\mathfrak{g}_{0i}(z) \cdot \mathfrak{C}_0(z, x) + \mathfrak{g}_{1i}(z) \cdot \mathfrak{C}_1(z, x) + \ldots] \cdot e^{j\omega t};$$

dabei bedeuten:

$\mathfrak{g}_{\lambda i}(z)$ die Maßstabamplituden der einzelnen Bewegungsanteile $f_{\lambda i}(z, x)$, aus denen die Gesamtbewegung des Streifens nebst etwa zugehörigen Ruderabschnitten beim Zustand »i« zwecks formelmäßiger Erfassung der Luftkräfte nach II B 2 zusammengesetzt zu denken ist (normalerweise wird es möglich sein, die einzelnen Bereiche, in die der Streifen durch die Ruderkanten zerlegt wird, in sich als starr anzusehen, s. Bild 3 und II B 2),

$\mathfrak{C}_\lambda(z, x)$ die Beiwerte der örtlichen Luftkräfte bei x für die einzelnen Bewegungsanteile $f_{\lambda i}(z, x)$ (s. Voranstehendes).

Die Integrale $\mathfrak{E}^{L}_{ik}$ ergeben sich dann durch numerische Quadratur über die betrachtete Tragfläche.

Wird der Verlauf von F_k innerhalb der einzelnen Bereiche, in die der Streifen durch die Ruderkanten zerlegt wird, als geradlinig angesehen, so kann die obige flächenhafte Quadratur zur Ermittlung von $\mathfrak{E}^{L}_{ik}$ durch eine gewöhnliche Quadratur bzw. Summation ersetzt werden; z. B. ist dann für einen Flügel mit Ruder:

$$\mathfrak{E}^{L}_{ik} = \sum_m (\mathfrak{P}^{LV}_{yi} \cdot \bar{\delta}^{oV}_{yk} + \mathfrak{M}^{LoV}_{zi} \cdot \bar{\alpha}^{V}_{xk} + \mathfrak{P}^{LR}_{yi} \cdot \bar{\delta}^{oR}_{yk} + \mathfrak{M}^{LoR}_{zi} \cdot \bar{\alpha}^{R}_{xk})_m;$$

dabei bedeuten:

m die Nummer des einzelnen Streifens,

$\bar{\delta}^{oV}_{yk}$, $\bar{\delta}^{oR}_{yk}$ und $\bar{\alpha}^{V}_{xk}$, $\bar{\alpha}^{R}_{xk}$ die zum Zustand k gehörigen Weg- und Drehungsamplituden des Streifenbereiches vor dem Ruder bzw. am Ruder, $\bar{\delta}^{oV}_{yk}$, $\bar{\delta}^{oR}_{yk}$ gemessen an gewählten Bezugspunkten oV bzw. oR, alle Größen entsprechend einer geknickten Geraden an Stelle von F_k (s. Bild 3), wobei die geknickte Gerade z. B. durch die Forderung kleinster quadratischer Abweichung von F_k festgelegt sei (s. II B 2),

$\mathfrak{P}^{LV}_{yi}$, $\mathfrak{M}^{LoV}_{zi}$ und $\mathfrak{P}^{LR}_{yi}$, $\mathfrak{M}^{LoR}_{zi}$ die zum Zustand i gehörigen Luftkräfte und -momente des Streifenbereichs vor dem Ruder bzw. am Ruder, $\mathfrak{M}^{LoV}_{xi}$, $\mathfrak{M}^{LoR}_{xi}$ bezogen auf die Parallele zu z durch die gewählten Bezugspunkte oV und oR. — Für die Größen $\mathfrak{P}^{LV}_{yi}$, $\mathfrak{P}^{LR}_{yi}$, $\mathfrak{M}^{LoV}_{zi}$, $\mathfrak{M}^{LoR}_{zi}$ des einzelnen Streifens gelten nach II B 2 Ausdrücke der Art:

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{g}_{0i} \cdot \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{g}_{1i} \cdot \mathfrak{C}_1 + \ldots,$$

wobei:

$\mathfrak{R}_i$ der Reihe nach = $\mathfrak{P}^{LV}_{yi}$, $\mathfrak{P}^{LR}_{yi}$, $\mathfrak{M}^{LoV}_{zi}$, $\mathfrak{M}^{LoR}_{zi}$

$\mathfrak{g}_{\lambda i}$ = wie oben,

$\mathfrak{C}_\lambda$ = Beiwerte zu den Größen $\mathfrak{R}_i$ für die einzelnen Bewegungsanteile $f_{\lambda i}(z, x)$ (s. oben).

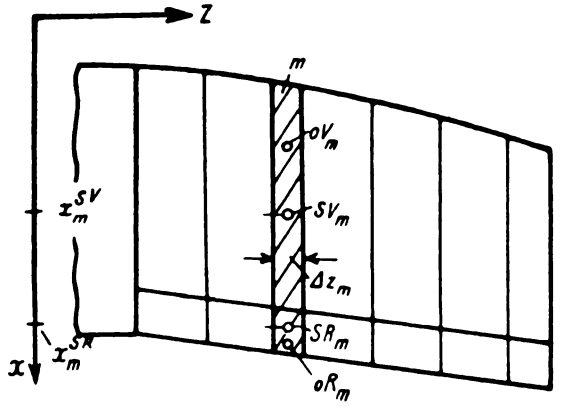


Bild 23. Aufteilung eines Systems in Streifen.

e) Ausdrücke für die Trägheitskräfte. — Die Integrale E'^{T}_{ik} in III C 4 b ergeben sich durch Quadratur über die Massenbelegung $\mu(x, y, z)$. — Handelt es sich um eine flügelartige Konstruktion, die praktisch als eben anzusprechen ist, so kann an die Stelle von $\mu(x, y, z) \cdot dV$ gesetzt werden: $\mu(z, x) \cdot dF$, wobei $\mu(z, x)$ = Massenbelegung, bezogen auf die Flächeneinheit.

Bei Aufteilung des betrachteten Systems in schmale Streifen, die beispielsweise parallel zur Flugrichtung laufen (s. Bild 23), wird es normalerweise möglich sein, die einzelnen Bereiche, in die die Streifen durch die Ruderkanten zerlegt werden, zur Ermittlung der Integralausdrücke E'^{T}_{ik} je für sich als starr anzusehen (s. Bild 3). Ähnlich wie in III C 4 d kann dann die flächenhafte Quadratur zur Ermittlung von E'^{T}_{ik} durch eine gewöhnliche Quadratur bzw. Summation ersetzt werden; z. B. ist dann für einen Flügel mit Ruder:

$$E'^{T}_{ik} = \sum_m (P^{TV}_{yi} \cdot \delta^{SV}_{yk} + M^{TSV}_{zi} \cdot \alpha^{V}_{xk} + M^{TSV}_{xi} \cdot \alpha^{V}_{xk} + P^{TR}_{yi} \cdot \delta^{SR}_{yk} + M^{TSR}_{zi} \cdot \alpha^{R}_{xk} + M^{TSR}_{xi} \cdot \alpha^{R}_{xk})_m$$

(annähernd ebener Aufbau des Systems vorausgesetzt);

dabei bedeuten (s. Bild 23):

m die Nummer des einzelnen Streifens,

δ^{SV}_{yk}, ..., α^{R}_{xk} die zum Zustand k gehörigen Weg- und Drehungsamplituden des Streifenbereiches vor dem Ruder bzw. am Ruder, δ^{SV}_{yk}, δ^{SR}_{yk} gemessen an den Schwerpunkten der einzelnen Streifenbereiche (s. III C 4 d),

P^{TV}_{yi}, ..., M^{TSR}_{xi} die zum Zustand i gehörigen Trägheitskräfte nebst Momenten des Streifenbereichs vor dem Ruder bzw. am Ruder, M^{TSV}_{zi}, M^{TSR}_{xi} bezogen auf die Parallele zu z bzw. x durch die Schwerpunkte SV und SR. — Für die Größen P^{TV}_{yi}, ..., M^{TSR}_{xi} des einzelnen Streifens gilt:

$$P^{TV}_{yi} = \omega^2 \mathcal{M}^{V} \cdot \delta^{SV}_{yi},$$

. . . . . .

$$M^{TSV}_{xi} = \omega^2 (\Theta^{V}_{z} \cdot \alpha^{V}_{xi} - \Theta^{V}_{zx} \cdot \alpha^{V}_{xi}),$$

. . . . . .

$$M^{TSR}_{xi} = \omega^2 (\Theta^{R}_{z} \cdot \alpha^{R}_{xi} - \Theta^{R}_{zx} \cdot \alpha^{R}_{xi}),$$

wobei:

$\mathcal{M}^{V}$, ..., Θ^{R}_{zx} = Massen, Massen-Trägheitsmomente und -Zentrifugalmomente der einzelnen Streifenbereiche, Θ^{V}_{z}, ..., Θ^{R}_{zx} bezogen auf die Schwerachsen des einzelnen Streifenbereichs parallel z und x.

f) Energetische Ausdrücke. — Zur Berechnung der nach II C 2 benötigten energetischen Ausdrücke L_ν gilt folgendes:

α) Größen p^{F} und w^{F}.

Als Größen p'^{F}, p''^{F} gelten die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der Belastung:

$$P^{F}(x, y, z, t) = \sum_i \delta q_i \cdot \mathfrak{G}_i(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \text{ mit } \mathfrak{G}_i = G'_i + jG''_i \text{ nach III C 4 c.}$$

Als Wegkomponenten w'^{F}, w''^{F} gelten sinngemäß die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der Verschiebung:

$$w^{F}(x, y, z, t) = \sum_i \delta q_i \cdot F_i(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \text{ mit } F_i \text{ nach III C 4 a.}$$

Dabei ergeben sich die Integralausdrücke L^{ν}_{ν} in II C 2 zu

$$\int P'^{F}(x, y, z) \cdot w''^{F}(x, y, z)\, dV \text{ usw.}$$

β) Größen $\begin{cases} p^{I} \text{ und } w^{I} \\ p^{II} \text{ und } w^{II} \end{cases}$.

Wird vorausgesetzt, die einzelnen Bereiche, in die der Streifen (s. III C 4 d und e) durch die Ruderkanten zerlegt wird, seien in sich starr, so gelten als Größen $\begin{cases} p'^{I}, p''^{I} \\ p'^{II}, p''^{II} \end{cases}$ die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der Belastungen:

Digitized by Google

$\left.\begin{matrix}(P_1^L, \ldots, P_4^L)_m, \text{ der Reihe nach} = (P_y^{LV}, M_x^{LoV}, P_y^{LR}, M_z^{LoK})_m \\ \text{nach III C 4 d,}\end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix}(P_1^T, \ldots, P_4^T)_m, \text{ der Reihe nach} = (P_y^{TV}, M_x^{TSV}, P_y^{TR}, M_z^{TSK})_m \\ \text{nach III C 4 e.}\end{matrix}\right\}$

Als Wegkomponenten $\begin{Bmatrix} w'^L, & w''^L \\ w'^T, & w''^T \end{Bmatrix}$ gelten sinngemäß die Amplituden der cos ωt- und sin ωt-Bestandteile der Verschiebungen:

$\left.\begin{matrix}(w_1^L, \ldots, w_4^L)_m, \text{ der Reihe nach} = (\delta_y^{aV}, \alpha_x^V, \delta_y^{aR}, \alpha_x^R)_m \text{ nach} \\ \text{III C 4 d,}\end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix}(w_1^T, \ldots, w_4^T)_m, \text{ der Reihe nach} = (\delta_y^{SV}, \alpha_x^V, \delta_y^{SR}, \alpha_x^R)_m \text{ nach} \\ \text{III C 4 e.}\end{matrix}\right\}$

Dabei ergeben sich die Integrale $\begin{Bmatrix} L_v^L \\ L_v^T \end{Bmatrix}$ in II C 2 als Summenausdrücke $\left\{\begin{matrix} \sum_{r=1}^{4} \sum_m (P_r'^L \cdot w_r''^L)_m \text{ usw.} \\ \sum_{r=1}^{4} \sum_m (P_r'^T \cdot w_r''^T)_m \text{ usw.} \end{matrix}\right\}$.

γ) Bemerkung. Im voranstehenden sind alle Belastungen und Bewegungen auszudrücken in denjenigen Größen δq_i, in denen letzten Endes die harmonischen Grundgleichungen dargestellt sind (s. III C 4 a). — Ist der Ausgangszustand $\overline{w}_i'$, $\overline{w}_i''$ (s. II C 2) nicht in Amplituden $\delta q_i'$, $\delta q_i''$ gegeben, sondern etwa in Weg- und Drehungsamplituden $\delta_y(z, x)$, $\varkappa_z(z, x)$, so müssen diese zunächst gemäß III C 4 a in Größen $\delta q_i'$, $\delta q_i''$ ausgedrückt werden, beispielsweise gemäß kleinster quadratischer Abweichung zwischen der angenommenen Flatterform und dem Näherungsausdruck $\sum_i \delta q_i \cdot F_i$.

IV. Zusammenfassung.

Soll beim Entwurf eines Flugzeugs eine Vorstellung darüber gewonnen werden, ob sich irgendwelche konstruktive Maßnahmen günstig oder ungünstig auf die Flattergefahr auswirken, oder sollen die Flattereigenschaften des noch nicht flugerprobten Flugzeugs allgemein beurteilt werden — etwa im Vergleich mit denen eines anderen Musters —, so muß versucht werden, Zahlenwerte darüber zu gewinnen, von welcher Größenordnung die »kritischen Geschwindigkeit« sein wird, bei der die zu vergleichenden Konstruktionen ins Flattern geraten. — Die vorliegenden Ausführungen sollen einen Überblick über die Gedankengänge geben, auf denen die hierzu in Frage kommenden Rechnungsansätze beruhen, gleichgültig, ob dabei in roher Vergleichsbetrachtung nur der Einfluß einzelner Parameter verfolgt wird, oder ob versucht werden soll, möglichst viele Einflüsse in ihrer Gesamtwirkung zu erfassen.

Bei der vielseitigen Natur des Flatterproblems erschien es zweckmäßig, die Ausführungen auf einen Leserkreis zuzuschneiden, der sich aus Vertretern verschiedenartiger Fachgebiete zusammensetzt. Mit Rücksicht darauf wurde im ersten Hauptabschnitt der Ausführungen eine kurze Darstellung allgemeiner Grundlagen gegeben. Darin wurde zunächst das Wesen harmonischer Schwingungen im Luftstrom, insbesondere des »harmonischen Flatterns«, kurz beschrieben; dabei wurde auf die Erfassung solcher Vorgänge durch die »harmonischen Grundgleichungen« des Systems und deren homogene Sonderfälle, die »Flattergleichungen«, hingewiesen. Im Hinblick auf den Ansatz dieser Gleichungen wurden verschiedene Einzelheiten über die Luft- und Formänderungskräfte an harmonisch schwingenden Systemen ausgeführt, dabei wurde berücksichtigt, daß bei technischen Gebilden praktisch niemals rein harmonische Zusammenhänge zwischen Kräften und Bewegungen auftreten und daß daher eine versuchsmäßige Gewinnung der benötigten harmonischen Kraft-Weg-Gesetze erst nach zweckentsprechender Auswertung der Versuchsergebnisse möglich ist. Weiterhin wurde auf das zahlenmäßige Aufsuchen der kritischen Geschwindigkeit aus den harmonischen Grundgleichungen bzw. aus den Flattergleichungen eingegangen; dabei wurde sowohl die Möglichkeit systematischen Probierens berücksichtigt, als auch die Möglichkeit schrittweise zunehmender Näherung, letzteres in Verbindung mit der Energiebilanz des Flattervorgangs.

Die Ausführungen des nächsten Hauptabschnitts behandeln im engeren Sinne die Aufstellung von Flatterberechnungen; sie sind im Hinblick darauf abgefaßt, daß einer Flatterberechnung praktisch immer die Vorstellung eines »Ersatzsystems« zugrunde liegt, das zahlreiche Vereinfachungen gegenüber der Wirklichkeit aufweist. Als besonders naheliegend wurden dabei drei Betrachtungsweisen einer Flugzeugkonstruktion hingestellt: als »stabzugartiges System«, als »Teilkörpersystem«, als »System vorgegebener Formänderungsfähigkeit«. Dabei gehen die beiden ersten Auffassungen von der Vorstellung eines gegliederten Systemaufbaus aus, durch den sich die Formänderungsfähigkeit des ganzen Gebildes bestimmt, während bei der dritten Betrachtungsweise die Formänderungsfähigkeit als unmittelbar gegeben hingestellt wird, ohne auszusprechen, welcher mechanische Systemaufbau tatsächlich zu diesen Eigenschaften führen würde. Bei den diesbezüglichen Ausführungen wurde u. a. der Standpunkt vertreten, daß zu den einzelnen Stufen einer Flatterberechnung normalerweise verschiedenartige Vorstellungen über das Ersatzsystem gehören; denn die einleitenden Untersuchungen einer solchen Rechnung müssen zunächst die mechanischen und aerodynamischen Eigenschaften des Systems unmittelbar aus der Systemgestaltung feststellen, während die umfangreicheren weiteren Stufen der Untersuchung möglichst nur noch die wichtigsten der vorher festgestellten Systemeigenschaften berücksichtigen. (Nach Fertigstellung des Flugzeugs sollten natürlich die grundlegenden Rechnungsstufen durch geeignete Versuche ersetzt bzw. auf Grund nachträglicher Versuche verbessert werden.) — Ausführlich wurden alsdann die Überlegungen behandelt, auf Grund deren es sinnvoll erscheint, im Einzelfall die mechanischen und aerodynamischen Parameter eines mehr oder weniger vereinfachten Ersatzsystems an die Eigenschaften der wirklichen Flugzeugkonstruktion »anzupassen«; insbesondere wurde gezeigt, wie die dazu benötigten »Anpassungsgleichungen« unmittelbar aus den harmonischen Grundgleichungen hervorgehen, wenn darin einzelne Glieder gestrichen, teils auch einige einfache Umformungen vorgenommen werden. Abschließend wurden für die drei genannten Betrachtungsweisen von Flugzeugkonstruktionen die einzelnen Schritte besprochen, deren schematische Durchführung die harmonischen Grundgleichungen — und damit auch die Flatter- und Anpassungsgleichungen — liefert. Hierbei wurde Wert auf solche Ansätze gelegt, die nicht etwa versagen, wenn zu Sonderfällen übergegangen wird, bei denen ursprünglich elastische Konstruktionsglieder zu unendlich starren oder unendlich nachgiebigen Gliedern werden (bzw. fortfallen). Im Zusammenhang mit den Ausführungen über die Aufstellung der harmonischen Grundgleichungen wurden noch verschiedene energetische Ausdrücke angeschrieben, deren Verwendung zweckmäßig sein wird, wenn die Ermittlung der kritischen Geschwindigkeit aus den Flattergleichungen in schrittweise zunehmender Näherung erfolgen soll.

V. Schrifttum.

Bei dem großen Umfang des Schrifttums über das Flattern beschränkt sich die folgende Übersicht nur auf einzelne, meist neuere Arbeiten, die zur Ergänzung der voranstehenden Ausführungen dienen können. Weitere Hinweise ergeben sich aus den Schrifttumsverzeichnissen der aufgeführten Arbeiten.

Beigefügte Zeichen (a), (b), ..., (f) bedeuten:

(a) Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof,
(b) desgl., Institut für Festigkeit,
(c) desgl., Institut für Aerodynamik,
(d) Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen,

Digitized by Google

(e) Bericht aus dem Flugtechnischen Institut der Technischen Hochschule Berlin,
(f) Bericht der Henschel Flugzeugwerke A.G., Schönefeld bei Berlin.

Die Luftkraftgesetze des schwingenden Flügels sind behandelt in:

[1] H. G. Küssner, Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln (d). Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 410/424.
[2] H. L. Studer, Experimentelle Untersuchungen über Tragflügelschwingungen. Mitt. Inst. Aerodynamik, Zürich, Nr. 4/5 (1936), S. 1/98.
[3] S. v. Borbély, Über einen Grenzfall der instationären räumlichen Tragflügelströmung (e). Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 319/342.
[4] P. Cicala, La teoria e l'esperienza nel fenomeno delle vibrazioni alari. Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 412/433.
[5] G. Ellenberger, Luftkräfte bei beliebiger instationärer Bewegung eines Tragflügels mit Querruder und bei Vorhandensein von Böen (e). Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 173/176.
[6] K. Jaeckel, Über die Kräfte auf beschleunigt bewegte, veränderliche Tragflügelprofile. Ing.-Arch. Bd. 9 (1938), S. 371/395.
[7] C. Possio, L'azione aerodinamica sul profilo oscillante in un fluido compressibile a velocità iposonora. Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 441/458.
[8] H. Voigt, Weitere Versuche über Tragflügelschwingungen (c). Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung I; R. Oldenbourg, Berlin-München, S. 249/258.
[9] F. Dietze, Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem). U. a. zur Berechnung des Flügels mit Ruder und Hilfsruder (b). Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 84/96.
[10] W. Schmeidler, Vortrieb und Widerstand. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 65/86.

Das Wesen der sog. Bauteildämpfung ist behandelt in:

[11] H. G. Küssner, Schwingungen von Flugzeugflügeln (a). Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929), S. 41/62.
[12] H. G. Küssner, Augenblicklicher Entwicklungsstand der Frage des Flügelflatterns (a). Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 193/209[32]).
[13] B. v. Schlippe, Die innere Dämpfung. Ing.-Arch. Bd. 6 (1935), S. 127/133.

Die Auswirkung der baulich gegebenen Parameter auf das Flattern von Trag- und Leitwerken ist behandelt in:

[14] H. Blenk und F. Liebers, Gekoppelte Biegungs-, Torsions- und Querruder-Schwingungen von freitragenden und halbfreitragenden Flügeln (a). Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929), S. 69/93.
[15] H. Boelk, Bedeutung und Größe der Querruderdämpfung für das ebene Problem des Flügelflatterns (als Ergebnis der Durchrechnung eines Beispiels) (f). Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung; R. Oldenbourg, Berlin-München, S. 206/215.
[16] R. A. Frazer, The influence of differential aileron control on wing flutter. ARC.-Rep. & Mem. Nr. 1723 (1936).
[17] W. Quessel, Beitrag zur Berechnung der Flügelschwingungen und des Querrudereinflusses auf diese (f). Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung; R. Oldenbourg, Berlin-München, S. 196/205.
[18] A. G. Pugsley, Aero-Elastic Problems. The general design significance of current research work on flutter and related matters. Aircraft Eng. Bd. 9 (1937), S. 268/275.
[19] K. Leiss, Einfluß der einzelnen Baugrößen auf das Flattern und das aperiodische Auskippen von Tragflächen mit und ohne Ruder (ohne Berücksichtigung der inneren Dämpfung) (b). Jahrbuch 1938 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., S. 276/290.
Ferner in [11] und [12].

Einzelheiten über den Ansatz von Flatterberechnungen sind behandelt in:

[20] R. A. Frazer und W. J. Duncan, The flutter of monoplanes, biplanes and tail-units. ARC.-Rep. & Mem. Nr. 1255 (1931).
[21] W. J. Duncan, A. R. Collar und H. M. Lyon, Oscillations of elastic blades and wings in an aerstream. ARC.-Rep. & Mem. Nr. 1716 (1936).
[22] M. Rauscher, Flutter. Aviation Vol. 35 (1936), Nr. 1/5.
[23] M. Risack, Vibrations couplees des ailes d'avion. Bull. Serv. Techn. Aéron. Nr. 16 (1935), S. 5/56.
[24] K. Sezawa und S. Kubo, The nature of the deflection aileron flutter of a wing as revealed through its vibrational frequencies. Rep. aeron. Res. Inst. Tokyo Bd. XI/8 (1936), S. 301/338.
[25] J. Jarry, Les vibrations à bord des avions. E. N. S. A. Revue Technique de l'Aéronautique 1937, Nr. 1/6.
[26] Direzione Generale Costruzioni (C. Minelli), Indagini sulle vibrazioni dei velivoli. Aerotecnica Bd. 17 (1937), S. 721/735.
[27] K. Sezawa und K. Watanabe, Coupled wing-fuselage vibration. Rep. aeron. Res. Inst. Tokyo Bd. XIII/6 (1938), S. 172/194.
[28] P. B. Walker, The mechanical aspect of flutter. — A review of present knowledge on the oscillation of aerodynamic surfaces. Aircr. Engng. Bd. 10 (1938), S. 73/75.
Ferner in [11] und [12].

Geeignete Maßnahmen und Hilfsmittel zur numerischen Ausrechnung der kritischen Geschwindigkeit und allgemein zum Lösen von Determinanten und von Systemen linearer Gleichungen sind behandelt in:

[29] M. Mallock, An electrical calculating machine. Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 140 (1933), S. 457/483.
[30] W. Cauer, Elektrische Methoden und Maschinen zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Elektr. Nachr.-Technik Bd. 12 (1935), S. 147/157.
[31] P. Cicala, Le oscillazioni flessotorsionale di un'ala in corrente uniforme. Aerotecnica Bd. 16 (1936), S. 785/801.
[32] R. Kassner und H. Fingado, Das ebene Problem der Flügelschwingung (e). Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 374/387.
[33] R. Kassner, Die Berücksichtigung der inneren Dämpfung beim ebenen Problem der Flügelschwingung (e). Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 388/390.
[34] L. A. Pipes, Matrix-operational methods in mechanical vibrations. Journ. of the Franklin Institute Bd. 225 (1938), S. 343/349.
Ferner in [36].

Die Prüfung der Flattereigenschaften durch Flugversuche mit künstlicher Schwingungserregung ist behandelt in:

[35] B. v. Schlippe, Zur Frage der selbsterregten Flügelschwingung (Ermittlung der kritischen Geschwindigkeit durch Flugschwingungsversuche). Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 41/45.
[36] R. A. Frazer und W. P. Jones, Forces oscillations of aeroplanes with special reference to von Schlippe's method predicting critical speeds for flutter. ARC.-Rep. & Mem. Nr. 1795 (1937).

Die Untersuchung der Flattereigenschaften durch Modellversuche ist behandelt in:

[37] W. Kaufmann, Über die Ähnlichkeitsbedingungen für Flatterschwingungen von Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 21/25.
Ferner in [6] und [7].

[32]) Vgl. eine Richtigstellung zu [12] in [1].

Digitized by Google

Wechselwirkung zwischen anliegender und abgerissener Strömung.

Von W. Fabricius, München.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Um den Einfluß zwischen anliegender und abgerissener Strömung kennenzulernen, wurden Dreikomponenten-, Druckverteilungs-, Grenzschicht- und Nachlaufmessungen an einem Tragflügel mit einem angestellten Mittelstück mit größerem Anstellwinkel durchgeführt. Bei den Versuchen war die Strömung am Mittelstück abgerissen, an dem übrigen Flügel aber anliegend.

Gliederung.

I. Versuchsanordnung und -durchführung.
II. Meßergebnisse.
III. Zusammenfassung.

I. Versuchsanordnung und -durchführung.

Der Tragflügel war ein Rechteckflügel mit Endscheiben und einem angestellten Mittelstück, Bild 1; seine Tiefe betrug $t = 150$ mm, seine Spannweite $b = 700$ mm und der Durchmesser der Endscheiben 340 mm. Das Mittelstück war 80 mm breit und um 7° gegenüber dem übrigen Flügel angestellt; die Flügelnase blieb dabei eine gerade Linie. Der durch die Anstellung entstehende Spalt zwischen Mittelstück und übrigem Flügel war durch eine dünne Metallwand abgedeckt. Als Profil für den Flügel ist ein symmetrisches Joukowski-Profil mit dem Parameter $\frac{d}{l} = 0{,}2$ (Göttingen Nr. 539) verwandt worden. Der Flügel war außerdem für Druckverteilungsmessungen eingerichtet. Die Bohrlöcher für die Druckentnahme hatten einen Durchmesser von 0,4 mm; sie lagen in der Mitte von 5 mm breiten Messingrippen. Die Lage der Bohrlöcher und die Anordnung der Flügelschnitte, in denen sich die Bohrlöcher befanden, sind in Bild 2 angegeben.

Um weiterhin einen Vergleich zwischen einem Flügel in teilweise abgerissener und gänzlich abgerissener Strömung vornehmen zu können, wurde noch ein Flügel mit elliptischem Umriß untersucht; seine Flügeltiefe im Mittelschnitt betrug ebenfalls $t_m = 150$ mm, seine Spannweite $b = 800$ mm.

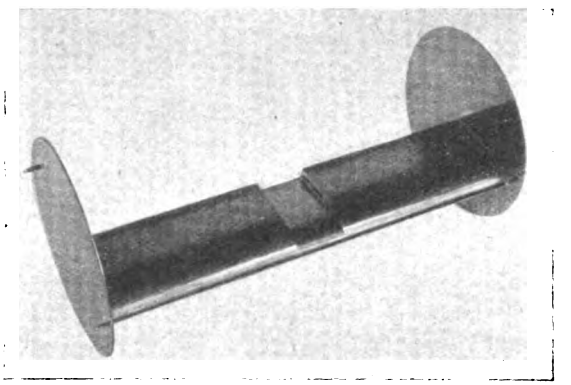


Bild 1. Der ausgescherte Flügel mit Endscheiben.

Die Größe der Bohrungen und ihre Anordnung am Flügelprofil war die gleiche wie bei dem rechteckigen Flügel. An diesem zweiten Flügel sind nur Dreikomponenten- und Druckverteilungsmessungen durchgeführt worden.

Die Dreikomponentenmessungen wurden bei einer Windgeschwindigkeit von 20 m/s und 30 m/s durchgeführt. Sie erstreckten sich bei dem rechteckigen Flügel über einen Anstellwinkelbereich von $-8°$ bis $+14{,}5°$, bezogen auf die Flügelaußenteile, und bei dem elliptischen Flügel über einen Anstellwinkelbereich von $-9°$ bis $+14{,}5°$. Die auf die Profiltiefe t_m in Flügelmitte bezogene Reynoldssche Zahl ist $\approx 2 \cdot 10^5$ und $\approx 3 \cdot 10^5$.

Bei den Druckverteilungsmessungen wurden die Druckmeßlöcher je eines Flügelschnittes an ein Vielfachmanometer angeschlossen, so daß die Druckanzeige photographiert und später ausgewertet werden konnte. Da es sich zeigte, daß bei den Messungen der Anstellwinkel nicht hinreichend genau reproduzierbar war, mußten jeweils bei einem festen Anstellwinkel α immer alle Flügelschnitte gemessen werden.

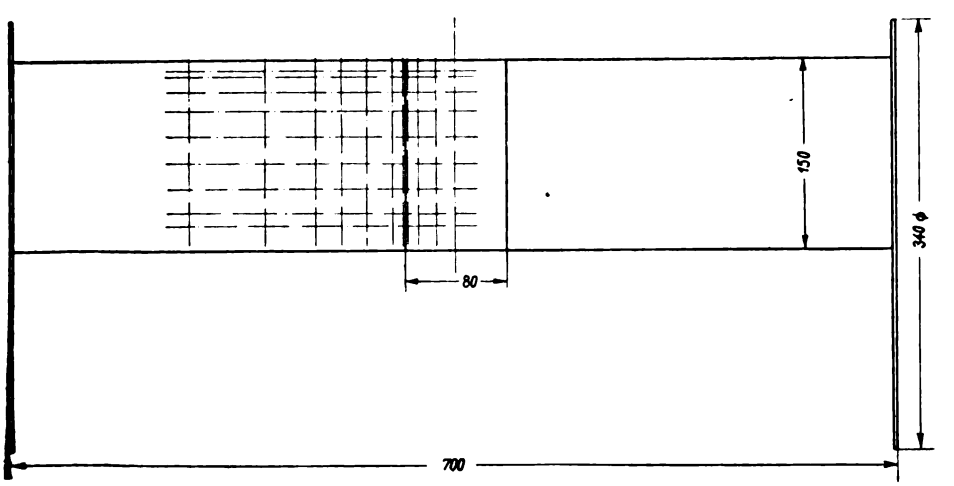


Bild 2. Anordnung der Druckmeßstellen am Flügel.

Digitized by Google

Der Nachlauf wurde mit einer Staukugel nach van der Hegge-Zijnen aufgenommen. Mit dieser Staukugel, die 5 Druckanbohrungen enthält, war es möglich, die räumliche Strömung im Nachlauf des Modellflügels zu untersuchen.

Zur Grenzschichtmessung wurden am Flügel die beiden Geschwindigkeitskomponenten u und v mittels einer Zweilochsonde gemessen. Diese Zweilochsonde besteht aus einem 2 mm starken zylindrischen Rohr, in dessen eines Ende ein gleich dickes 8 mm langes Messingstück gelötet ist. 5 mm vom Ende des Messingstückes befinden sich auf seinem Umfang zwei Meßlöcher um 90° auf dem Umfang gegeneinander versetzt. In dem 2-mm-Messingrohr befindet sich ein 1 mm starkes Röhrchen, das als Luftleitung für eins der Meßlöcher gilt. Die Luftleitung für das zweite Meßloch ist das äußere Messingrohr.

Die Messung mit dieser Zweilochsonde geht folgendermaßen vor sich. Man dreht die Sonde im Luftstrom um ihre Längsachse so lange, bis die beiden Meßlöcher am Manometer gleichen Druck zeigen. Damit steht die Sonde in Richtung des Geschwindigkeitsvektors $W = \sqrt{u^2 + v^2}$. Dreht man jetzt die Sonde um 45° nach irgendeiner Seite, so zeigt das eine Meßloch den Gesamtdruck g an und das zweite einen Druck p_1, der sich zusammensetzt aus einem Anteil, der proportional dem Staudruck ist, und einem Anteil, der gleich dem statischen Druck ist.

Danach ist

$$p_1 = k \cdot \frac{\varrho}{2} w^2 + p.$$

Aus diesen beiden Drücken kann man nun W ermitteln, wenn die Konstante k bekannt ist. Es ist nämlich

$$g - p_1 = \left(\frac{\varrho}{2} w^2 + p\right) - \left(k \frac{\varrho}{2} w^2 + p\right)$$

$$= (1 - k) \frac{\varrho}{2} w^2 = c \frac{\varrho}{2} w^2.$$

Den Faktor $c = 1 - k$ erhalten wir aus einer Eichung der Sonde zu 1,618. Die Eichung wurde im ungestörten Luftstrom und hinter verschieden starken Gittern und Sieben durchgeführt. Es zeigte sich, daß der Eichfaktor c auch in dem stark verwirbelten Luftstrom hinter Gittern und Sieben gut konstant bleibt. Die Abweichung von dem ermittelten $c = 1{,}618$ war nie mehr als $\pm 2\%$.

In einem Abstand von weniger als 2 mm von der Flügeloberfläche konnten mit dieser Meßsonde keine Messungen mehr durchgeführt werden, da die Sonde die Strömung in Wandnähe stört und dort falsch anzeigt. In größerem Abstande ist die Störung der Sonde aber bereits so klein, daß der Fehler innerhalb der Meßgenauigkeit liegt.

II. Meßergebnisse.

Die Dreikomponentenmessungen an den Flügeln zeigen im ganzen Verlauf der Polaren eine Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. Diese Abhängigkeit verstärkt sich in der Nähe von $c_{a\,max}$ und besonders im Gebiet abgerissener Strömung.

Es gibt für jede Reynoldssche Zahl einen Anstellwinkelbereich, in dem die Strömung sowohl anliegend wie abgerissen sein kann; mißt man in diesem Bereich, so ist die Strömung abgerissen, wenn man von kleiner Reynoldsscher Zahl aufsteigt. Der Anstellwinkel, bei dem Abreißen der Strömung eintritt, ist außer von der Reynoldsschen Zahl auch noch von der Turbulenz des Luftstromes abhängig. Eine kleine Störung, z. B. ein Stab, den man in die Strömung vor den Flügel hält, bewirkt, daß sich die Strömung am Tragflügel anlegt; nach Entfernen der Störung bleibt die Strömung anliegend. Als anliegend wollen wir dabei die Strömung bezeichnen, wenn die große Unterdruckspitze an der Flügelnase noch vorhanden ist. Am Flügel mit angestelltem Mittelstück konnte bei keiner Messung erreicht werden, Übergangspunkte zwischen der Polaren anliegender und abgerissener Strömung zu erhalten. Jeder Strömungszustand war für sich im Gleichgewicht und auch reproduzierbar.

Wie können sich nun diese beiden Strömungsformen bei gleichem geometrischem Anstellwinkel ausbilden? Je größer der effektive Anstellwinkel des Flügels ist, desto größer ist auch der Druckanstieg, der von der Strömung auf der Flügeloberseite überwunden werden muß. Der Druckanstieg nimmt bei sehr großen Anstellwinkeln derart zu, daß innerhalb der Reibungsschicht Rückströmung eintritt. Den Punkt auf der Flügeloberseite, in dem die Rückströmung beginnt, nennt man den Abreißpunkt. Die Lage dieses Abreißpunktes hängt nun außer von dem Anstellwinkel noch sehr stark von der Art der Reibungsschicht ab. Eine turbulente Reibungsschicht vermag auf Grund ihrer großen Querbewegungen einen viel größeren Druckanstieg zu überwinden als eine laminare von gleicher Dicke. Je weiter folglich mit steigender Reynoldsscher Zahl oder stärkerer Turbulenz des Luftstroms vor dem Flügel der Umschlagpunkt von laminarer Reibungsschicht in die turbulente nach vorne rückt, desto mehr rückt im allgemeinen der Abreißpunkt innerhalb der Reibungsschicht nach hinten, und um so länger liegt also die Strömung an. Rücken aber Umschlag- und Abreißpunkt der Reibungsschicht aufeinander zu, bis sie zusammentreffen, so reißt die Strömung ab und ihr Abreißpunkt springt ungefähr in den Punkt, wo der Druckanstieg auf der Flügeloberseite beginnt; denn die laminare Reibungsschicht kann keinen erheblichen Druckanstieg überwinden. Damit wird aber die Zirkulation um den Flügel verkleinert. Der effektive Anstellwinkel steigt; die

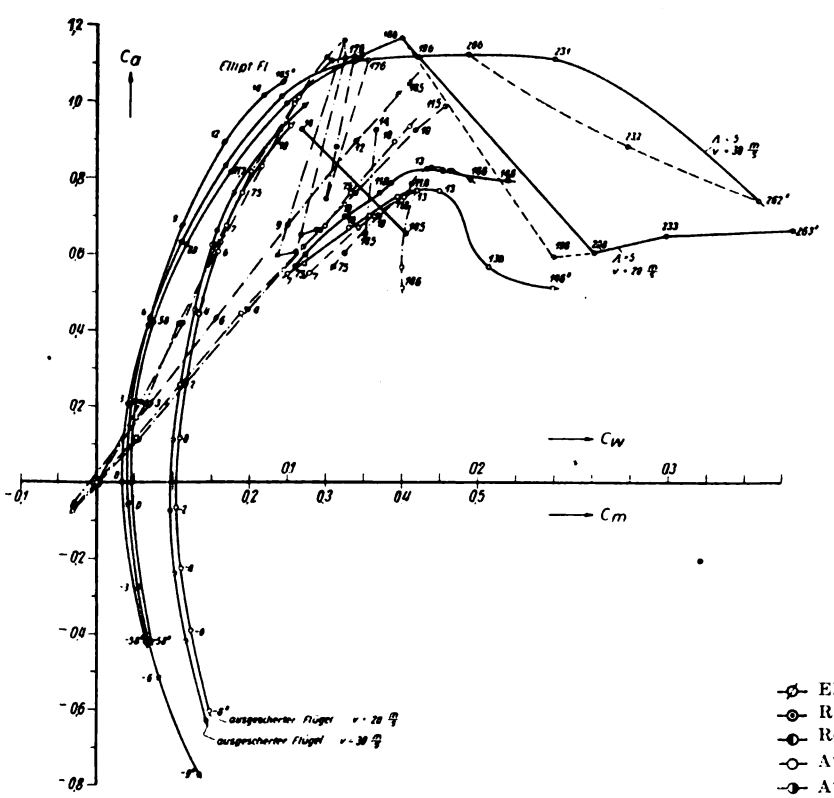


Bild 3. Polaren.
- Elliptischer Flügel $\Lambda = 6{,}8$,
- Rechteck-Flügel $\Lambda = 5$ $v = 30$ m/s,
- Rechteck-Flügel $\Lambda = 5$ $v = 20$ m/s,
- Ausgescherter Flügel mit Endscheiben $v = 20$ m/s,
- Ausgescherter Flügel mit Endscheiben $v = 30$ m/s.

Digitized by Google

abgerissene Strömung befindet sich damit im Gleichgewichtszustand und ist auch immer wieder reproduzierbar. Der Ort dieses vordersten Abreißpunktes hängt nur vom Anstellwinkel und der Form des Profiles im ersten Teil ab; die Profilform hinter dem Abreißpunkt ist nicht mehr maßgeblich für die Art der Strömung am Profil.

Weiterhin ist einzusehen, daß durch eine Störungsstelle vor dem Tragflügel sich vor dem vordersten Abreißpunkt wieder ein Umschlagpunkt ausbilden kann, der den Abreißpunkt innerhalb der Reibungsschicht wieder nach hinten wandern läßt. Jetzt steigt die Zirkulation um den Flügel wieder an, und der effektive Anstellwinkel des Flügels fällt. Es bildet sich wieder ein Gleichgewichtszustand aus, den wir als Strömung anliegend bezeichnen, obgleich auf dem hinteren Teil des Profiles, aber nur innerhalb der Grenzschicht, kleine Rückströmungen vorhanden sind. Diese beiden Gleichgewichtszustände sind in dieser Arbeit im wesentlichen untersucht worden.

Hat man einen unverwundenen Tragflügel mit elliptischem Umriß, so müßten die beiden oben besprochenen Gleichgewichtszustände ohne Übergang bestehen, da der effektive Anstellwinkel über die ganze Spannweite konstant ist. Das Abreißen der Strömung müßte also plötzlich erfolgen. Die durchgeführten Dreikomponentenmessungen, s. Bild 3, und Beobachtungen mit einer Fadensonde an einem solchen Tragflügel zeigten aber, daß die Strömung am Tragflügel zuerst an den Flügelspitzen abreißt. Man erkennt, daß die kleine Differenz, die zwischen der Reynoldsschen Zahl des Flügelmittelstückes und der des Flügelendes besteht, genügt, um die Strömung an den Flügelenden eher abreißen zu lassen. Der vorletzte gemessene Punkt auf der Polaren des elliptischen Flügels gehört zu diesem Strömungszustand.

Bei rechteckigen und spitzendigen unverwundenen Flügeln haben wir über die Spannweite keinen konstanten effektiven Anstellwinkel. Beim spitzendigen unverwundenen Tragflügel ist an den Flügelenden der effektive Anstellwinkel am größten. Daher reißt auch dieser Tragflügel zuerst an den Flügelspitzen ab. Umgekehrt ist es beim unverwundenen Rechteckflügel, der seinen größten effektiven Anstellwinkel in der Mitte hat. Bei diesen beiden Flügelformen setzt deshalb das Abreißen der Strömung nicht plötzlich ein. Der Flügel, der zu gleicher Zeit überall abreißt, wäre folglich ein Tragflügel mit einem Umriß, der etwas völliger ist als elliptisch. Der Einfluß der kleineren Reynoldsschen Zahl an den Flügelenden müßte sich gerade mit dem kleineren effektiven Anstellwinkel an dieser Stelle aufheben.

Betrachtet man die Polare des Rechteckflügels mit dem Seitenverhältnis $\Lambda = 5$, Bild 3, so zeigen sich für die beiden Reynoldsschen Zahlen je zwei Übergänge von anliegender zu vollständig abgerissener Strömung. Der Übergang mit dem größeren c_a-Wert, der beim Fortschreiten von kleineren zu größeren Anstellwinkeln entsteht, entspricht bei einem Tragflügel mit etwas völligerem als elliptischem Umriß dem c_a-Wert auf der Polare bei noch anliegender Strömung. Das Gebiet abgerissener Strömung verbreitet sich von der Mitte nach den Flügelenden hin nur langsam. Die einzelnen Flügelschnitte bleiben in dem anliegenden Gleichgewichtszustand. Führt man Messungen aus, bei denen man von vollkommen abgerissener Strömung zu vollkommen anliegender fortschreitet, so bleiben die einzelnen Flügelschnitte länger im abgerissenen Zustand.

In Bild 4 bis 11 sind Druckverteilungen dargestellt. Der Winkel α wurde bei dem ausgescherten Flügel wieder auf die Flügelaußenteile bezogen. Im Bild 4 sieht man sehr gut, wie die dünne Metallwand, die den Spalt zwischen Flügelmittelstück und dem übrigen Flügel abdeckt, wie eine kleine Endscheibe wirkt. Die c_a-Verteilung über den Flügel, Bild 12, hat an dieser Stelle einen Sprung. Diese Sprungstelle zeigt sich nicht nur bei $\alpha = 0$, sondern auch bei den anderen gemessenen Anstellwinkeln, ob die Strömung anliegt oder nicht, s. Bild 6 bis 9 bei $\alpha = 11°$, Bild 10 und 11

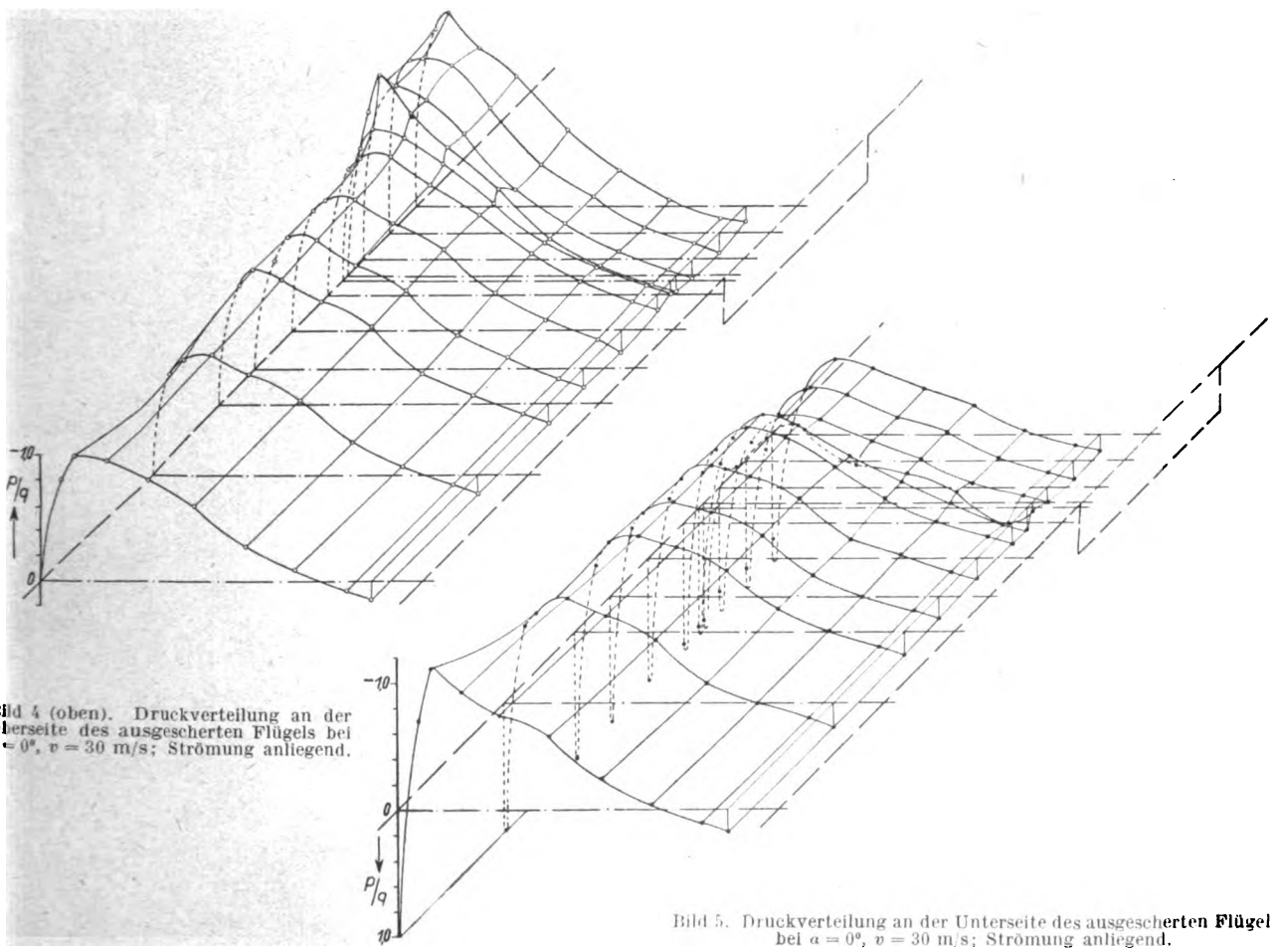


Bild 4 (oben). Druckverteilung an der Oberseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 0°$, $v = 30$ m/s; Strömung anliegend.

Bild 5. Druckverteilung an der Unterseite des ausgescherten Flügel bei $\alpha = 0°$, $v = 30$ m/s; Strömung anliegend.

Digitized by Google

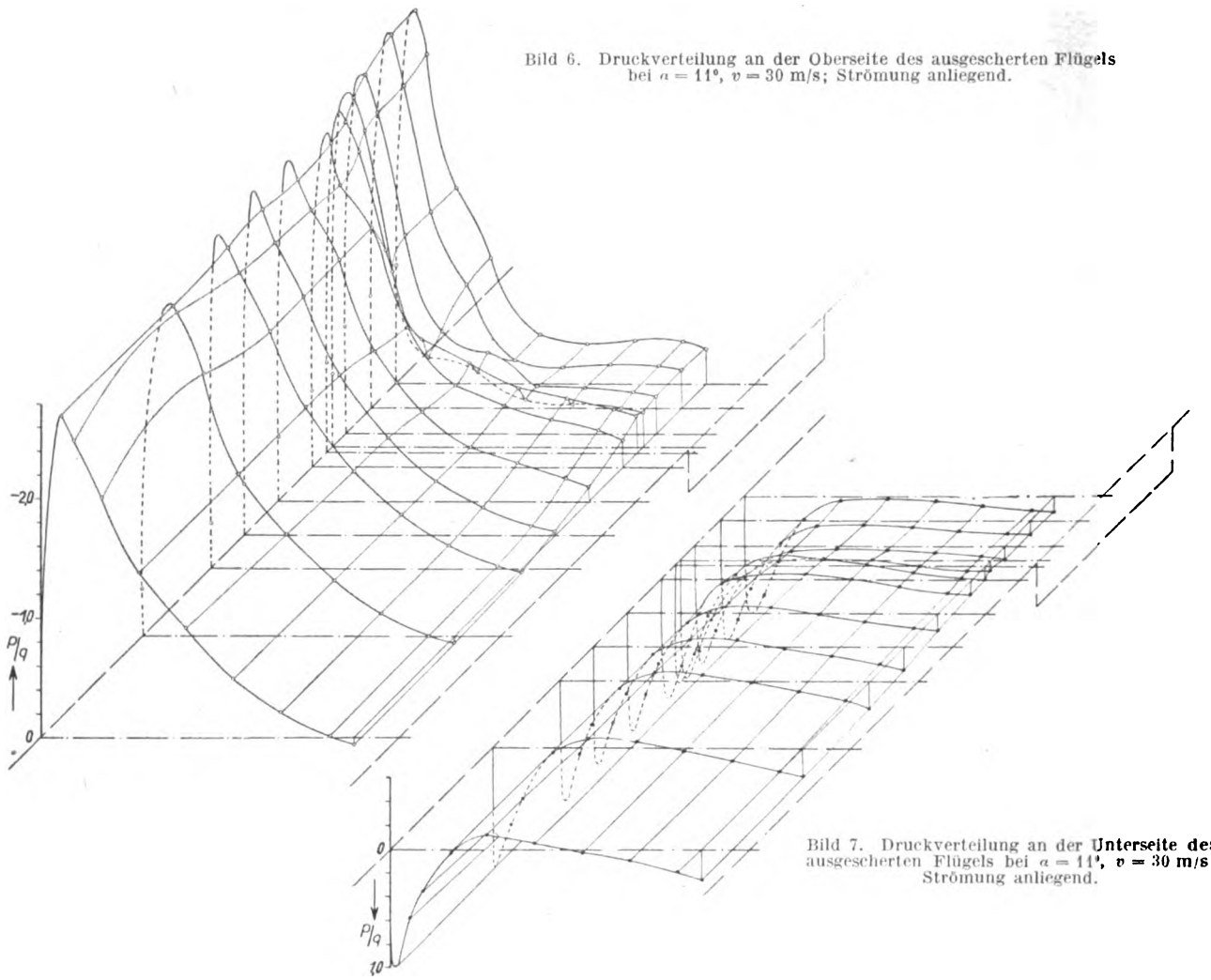


Bild 6. Druckverteilung an der Oberseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung anliegend.

Bild 7. Druckverteilung an der Unterseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung anliegend.

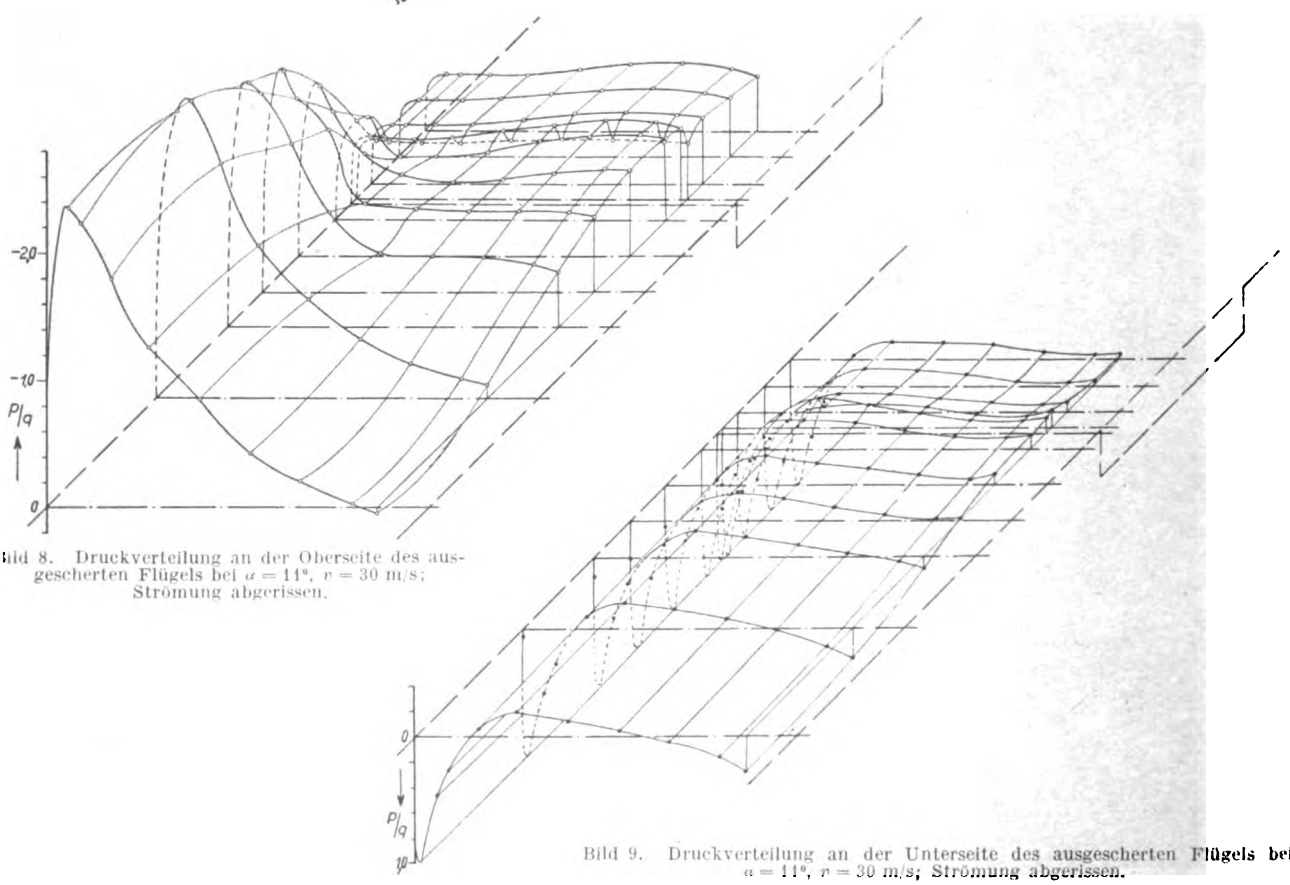


Bild 8. Druckverteilung an der Oberseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

Bild 9. Druckverteilung an der Unterseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

Digitized by Google

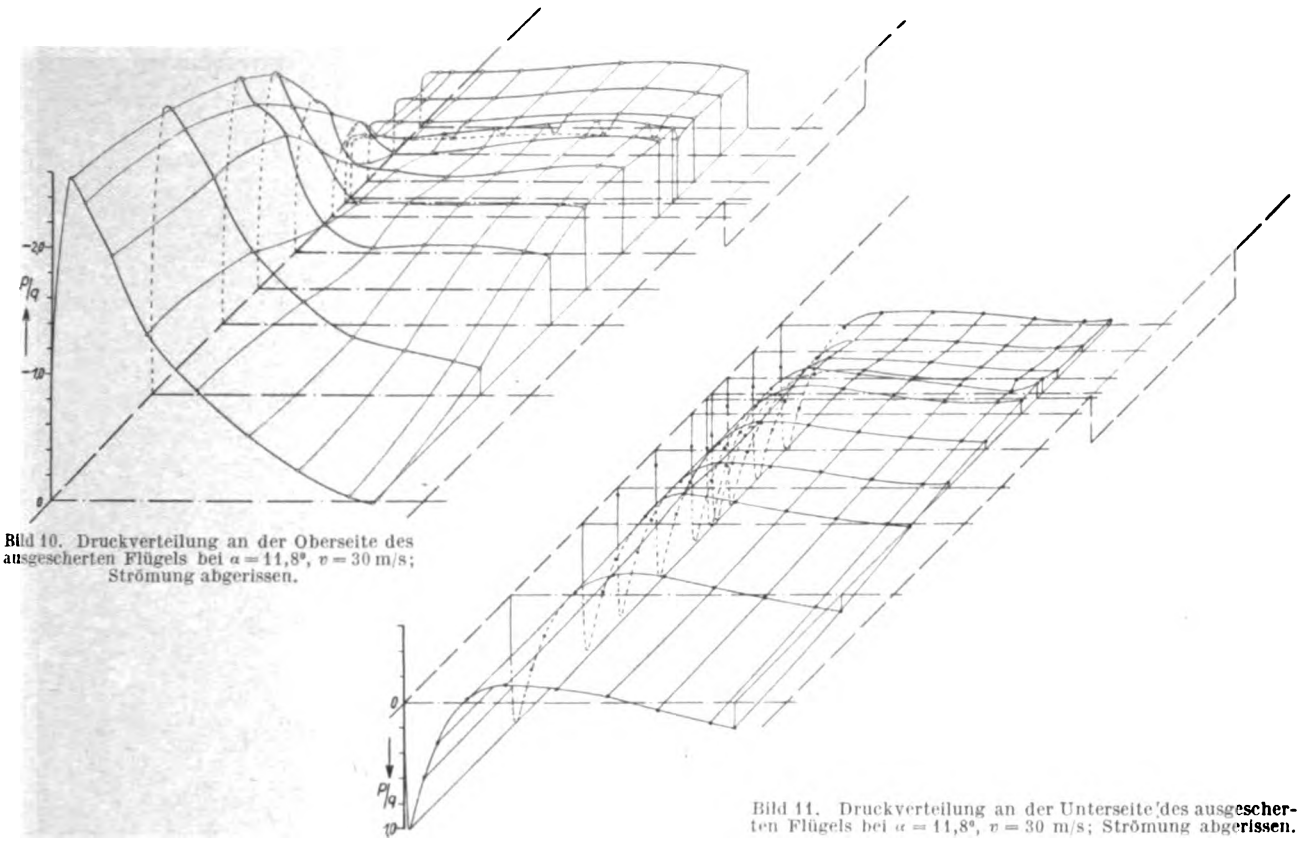


Bild 10. Druckverteilung an der Oberseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 11{,}8°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

Bild 11. Druckverteilung an der Unterseite des ausgescherten Flügels bei $\alpha = 11{,}8°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

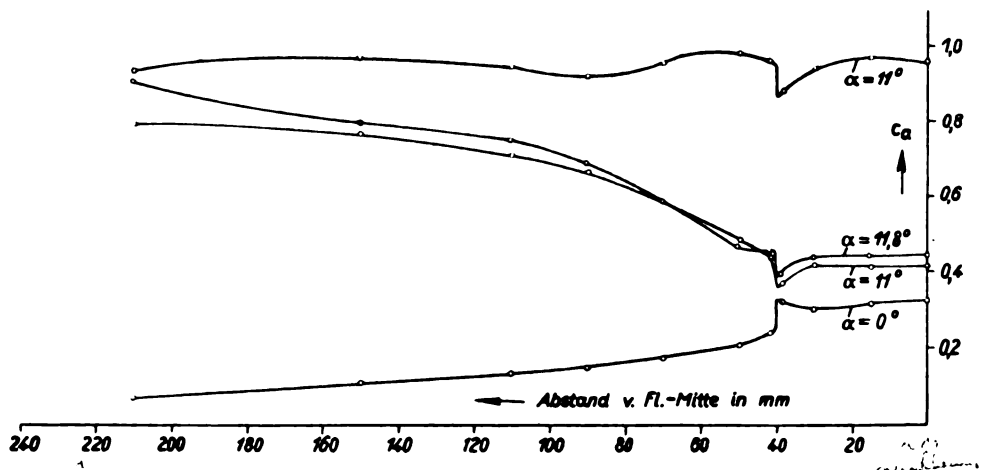


Bild 12. Auftriebsverteilung über den ausgescherten Flügel, $v = 30$ m/s.

bei $\alpha = 11{,}8°$. Sehr gut ist auch das Abfallen des Unterdruckes auf der Flügeloberseite in der Reibungsschicht der Trennungswand zwischen Flügelmittelstück und dem übrigen Flügel zu sehen. Vergleicht man Bild 7 mit Bild 9, so bemerkt man, daß das Abreißen der Strömung auf der Oberseite des Flügels auch die Druckverteilung auf der Unterseite beeinflußt. Vergleiche mit einem elliptischen Flügel bei gänzlich abgerissener Strömung zeigen, daß der Charakter der Druckverteilungen derselbe ist, daß also die anliegende Strömung auf die abgerissene keinen wesentlichen Einfluß hat, während der Einfluß des Bereiches abgerissener Strömung auf den der anliegenden sehr eigenartig ist. Auf den ersten Blick scheint es so zu sein, daß der Abreißpunkt der Strömung mit zunehmender Entfernung von dem Gebiet abgerissener Strömung nach hinten wandert. Bei genauer Beobachtung dieser Strömung, wie wir sie an dem Flügel mit angestelltem Mittelstück durchgeführt haben, kann man das Übergangsgebiet zwischen abgerissener und anliegender Strömung nicht mehr als abgerissen betrachten. Das wesentliche Kennzeichen einer abgerissenen Strömung, nämlich die Rücklaufströmung, fehlt. Wir wollen deshalb im folgenden immer genau unterscheiden zwischen anliegender und abgerissener Strömung und dem von einer benachbarten abgerissenen Strömung verursachten Störgebiet. Daher wollen wir auch in diesem Störgebiet nicht von abgerissener Strömung und von Abreißpunkten sprechen, sondern nur von verdickten Grenzschichten.

Während die abgerissene Strömung unabhängig von der Profilform hinter dem Abreißpunkt ist, ist die Art der Ausbildung des Störgebietes stark von der Profilform abhängig. Dieses läßt sich sehr gut an unserem Modellflügel beobachten. Sehen wir uns die Druckverteilung bei der teilweise abgerissenen Strömung am Flügel an. Es besteht in der vorderen Hälfte des Flügels auf der Oberseite ein Druckgefälle von Flügelmitte nach außen und in der hinteren Hälfte von außen zur Flügelmitte. Je nach der Größe dieses Druckgefälles bildet sich das Übergangsgebiet aus. In Bild 10 besteht bei $\alpha = 11{,}8°$ gegenüber Bild 8 bei $\alpha = 11{,}0°$ ein größeres Druckgefälle zwischen abgerissener und anliegender Strömung. Man sieht auch, daß damit das Übergangsgebiet vergrößert worden ist. Bild 13 bis 15 zeigen den Gesamtdruck und die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung am Flügel mit der am Mittelstück abgerissenen Strömung, wobei in der Darstellung der Flügel als unendlich dünne

Digitized by Google

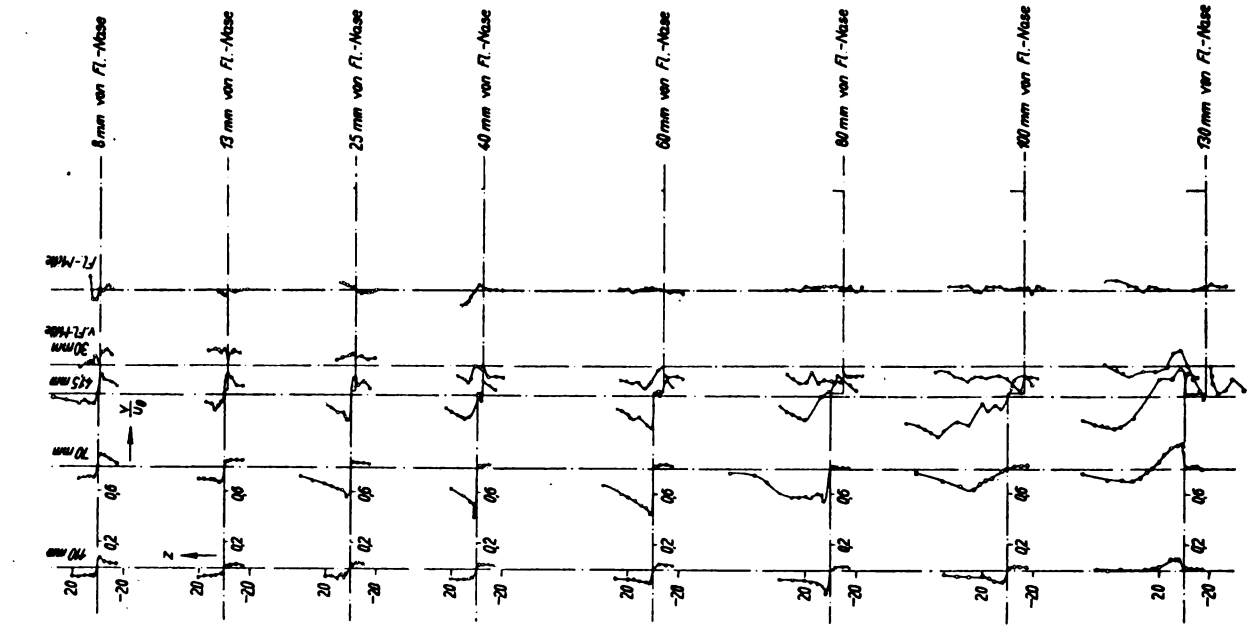


Bild 15. V-Komponente in der Grenzschicht eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 20$ m/s; Strömung abgerissen.

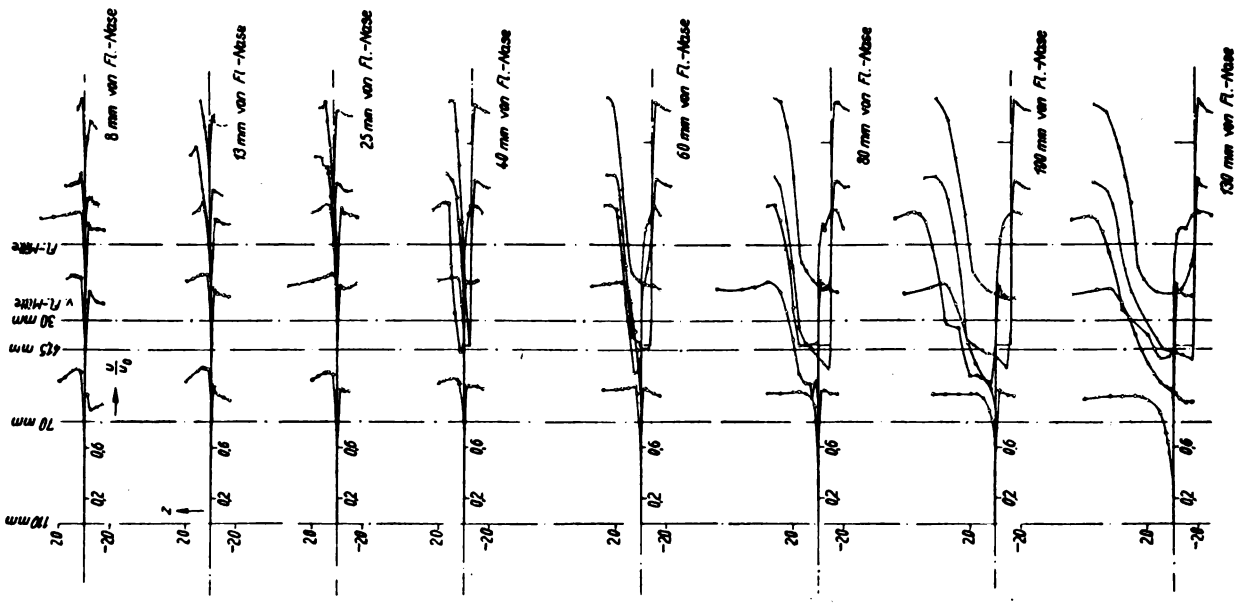


Bild 14. U-Komponente in der Grenzschicht eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 20$ m/s; Strömung abgerissen.

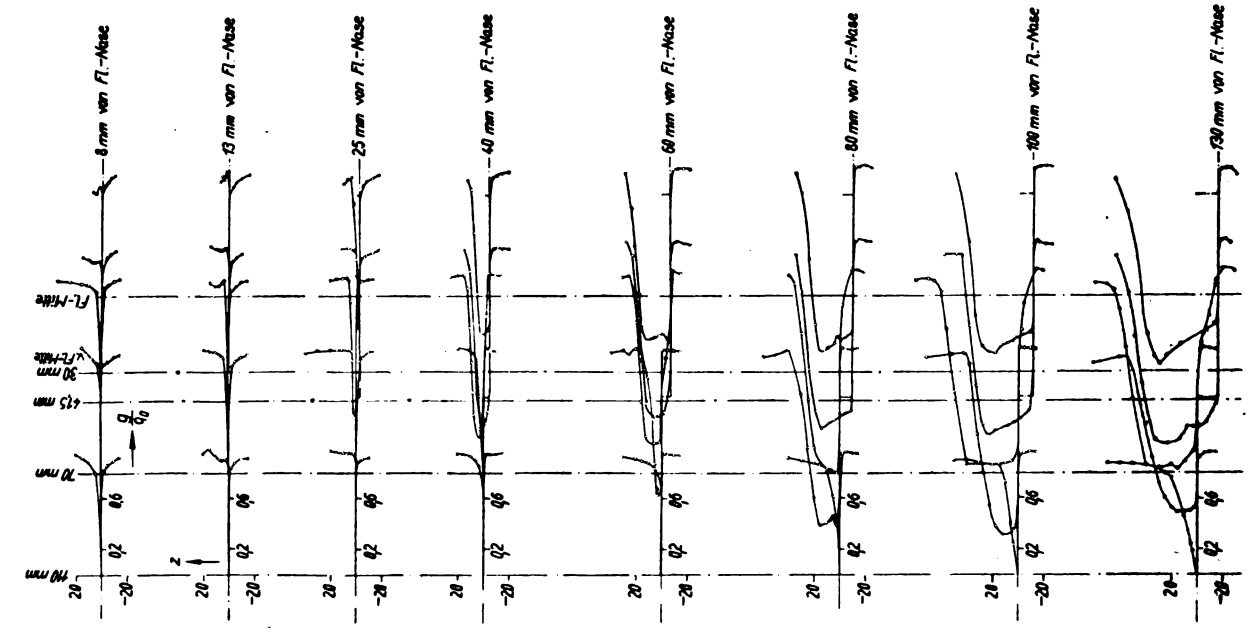


Bild 13. Gesamtdruck $\frac{q}{q_0}$ in der Grenzschicht eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 20$ m/s; Strömung abgerissen.

Digitized by Google

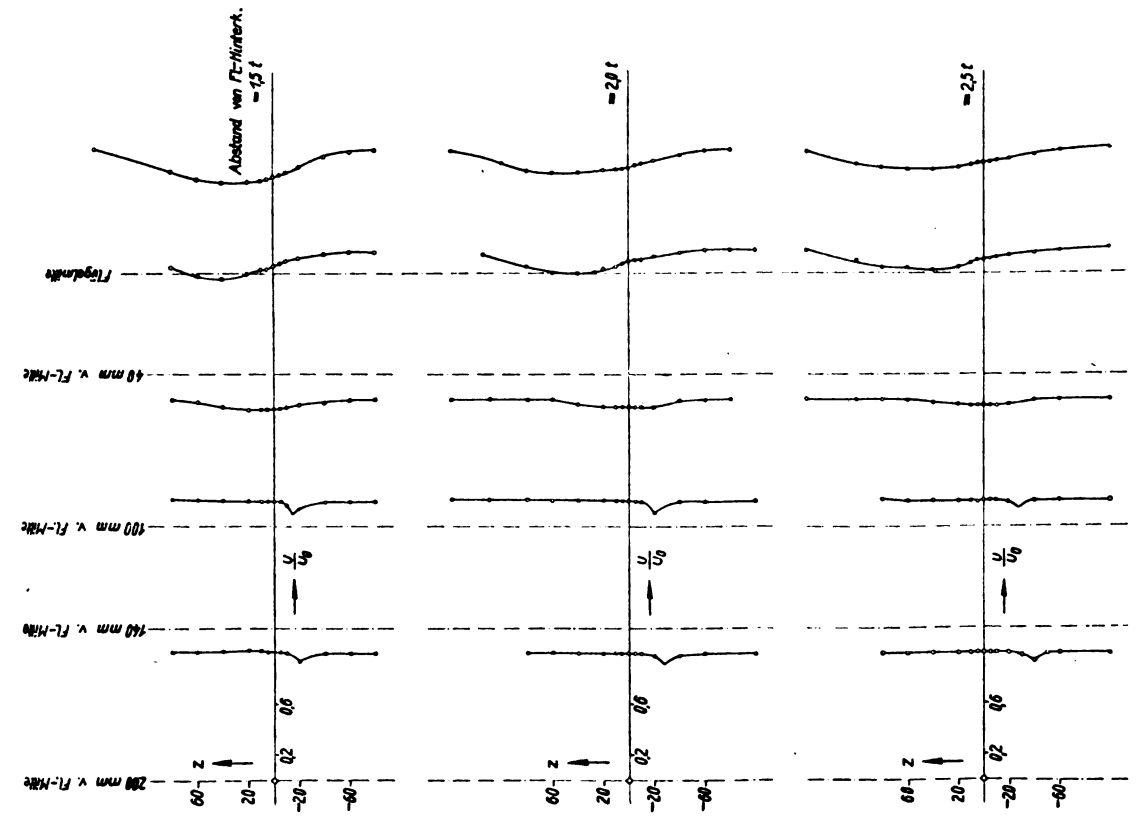


Bild 17. U-Komponente im Nachlauf eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

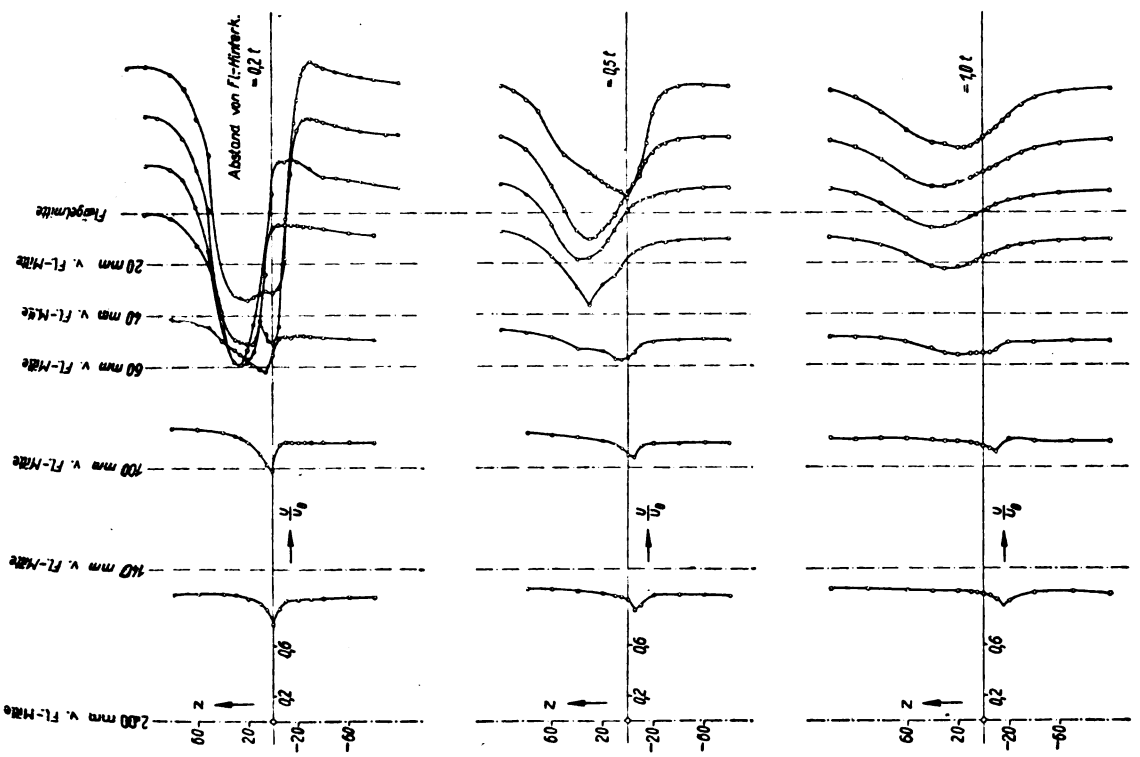


Bild 16. U-Komponente im Nachlauf eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

Digitized by Google

Bild 19. W-Komponente im Nachlauf eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

Platte wiedergegeben ist. In unmittelbarer Nähe der Flügeloberfläche konnten dabei keine Messungen durchgeführt werden, da die Zweilochsonde dort nicht mehr richtig anzeigt. In Bild 15 sieht man sehr gut, wie sich unter dem Druckgefälle auf dem Flügel eine Querströmung entwickelt, die nun, da sie selbst aus stark abgebremsten Teilchen besteht, das ungeheure Anwachsen der Grenzschicht im Übergangsgebiet auf dem Flügel bewirkt. Durch diese dicke Grenzschicht wird die Zirkulation um das Tragflügelprofil stark vermindert. Die Druckverteilung bei diesen Übergangsprofilen sieht aus, als wenn man es mit abgerissener Strömung zu tun habe. Es bildet sich im hinteren Teil ein regelrechtes Totwasser aus, das im Gegensatz zu dem der abgerissenen Strömung keine Rücklaufbewegung zeigt, Bild 14. In diesem Totwassergebiet besteht aber im Gegensatz zum vorderen Teil ein Druckgefälle von außen zur Flügelmitte. Es bildet sich eine Querströmung aus, die dem Druckgefälle entspricht. Das Gefälle ist in der Nähe der Flügeloberfläche am größten. In Bild 15 sieht man weiter, wie die alte Querströmung zuerst am Flügel abgebremst und zur Gegenseite beschleunigt wird. Ihr Maximum erreicht diese Querströmung im Nachlauf. Bild 16 bis 20 zeigen die Geschwindigkeitskomponenten

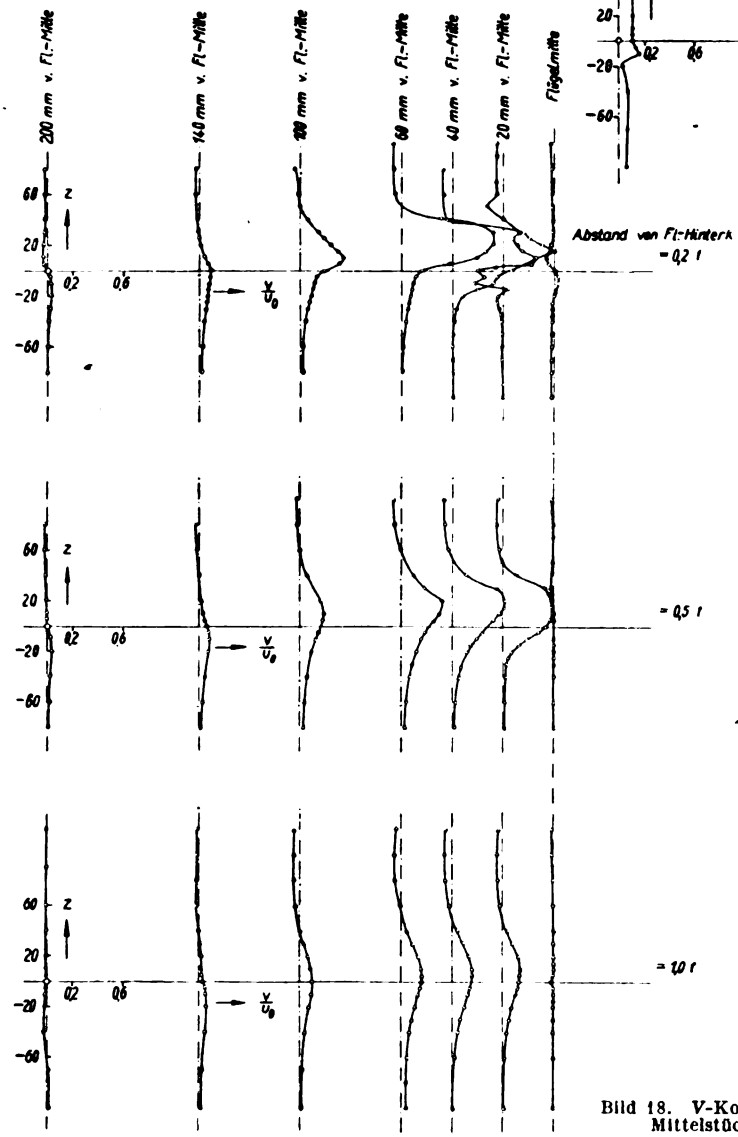


Bild 18. V-Komponente im Nachlauf eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

im Nachlauf. Der Anstellwinkel ist bei allen Abbildungen derselbe ($\alpha = 11°$). Bei anliegender Strömung zeigt sich bei $\alpha = 11°$ im Bereich des Mittelstückes bereits ein Gebiet mit stark abgebremsten Luftteilchen (s. Bild 6). Dieses ist charakteristisch für die Nachlaufströmung im Bereich des $c_{a\,max}$. Beobachtungen mit einer Fadensonde lassen erkennen, daß sich im hinteren Teil des Flügelprofils eine dicke Grenzschicht ausgebildet hat, die sogar kleine Rücklaufbewegungen in der Nähe der Flügeloberfläche aufweist. In Bild 16 bis 20 sieht man, wie die abgerissene Strömung den ganzen Flügelmittelteil beherrscht. Von allen Seiten strömt die Luft zum Flügelmittelstück. Sehr stark ist der Zustrom von der Unterseite des Flügels um die Hinterkante herum. Die Umströmung erreicht Geschwindigkeiten, die größer sind als die ungestörte Anströmgeschwindigkeit vor dem Flügel. Hieraus ist zu sehen, daß der Einfluß, den die abgerissene Strömung auf die Druckverteilung der Unterseite des Flügels hat, um die Hinterkante herum erfolgt. Der Druck auf die Unterseite im hinteren Teil des Flügels ist infolge dieser Umströmung der Flügelhinterkante kleiner als bei anliegender Strömung. Das bedeutet einen weiteren Abfall der Zirkulation um das abgerissene Tragflügelprofil.

Im Störgebiet ist die Strömung an der Hinterkante nur noch ein Ausgleich für die oberhalb seitwärts zur Flügelmitte abfließende Luftmasse. In dem Maße, wie die Querströmung im Übergangsgebiet mit dem Abstand vom ausgescherten Teil

Digitized by Google

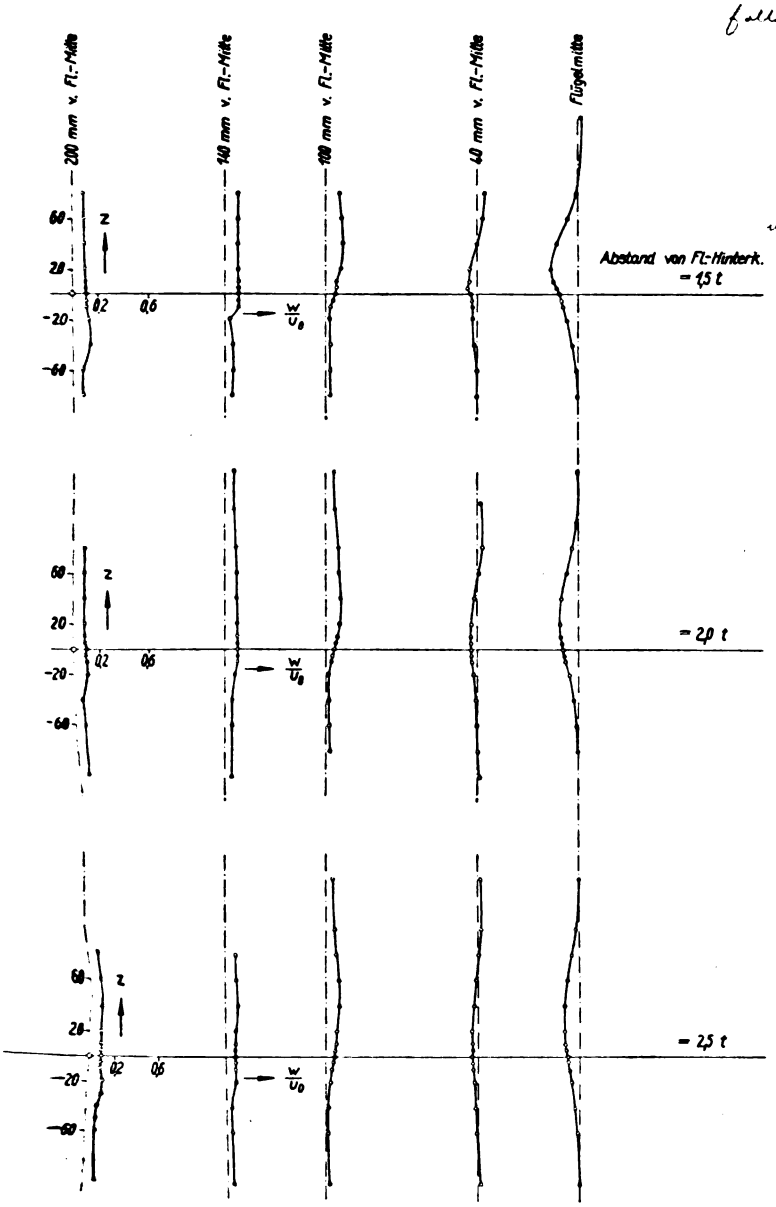


Bild 20. W-Komponente im Nachlauf eines Flügels mit angestelltem Mittelstück bei $\alpha = 11°$, $v = 30$ m/s; Strömung abgerissen.

abnimmt, fällt auch die nach oben gerichtete Ausgleichströmung an der Hinterkante. Die Rücklaufströmung im Nachlauf, die bei 0,2 t hinter der Flügelhinterkante noch ungefähr $-0{,}6\,u_0$ beträgt, ist bereits bei 0,5 t vollkommen abgeklungen. Dort ist die u-Komponente wieder bis auf $0{,}2\,u_0$ angestiegen.

Da das Leitwerk eines Flugzeuges im allgemeinen mindestens zwei Flügeltiefen hinter der Flügelhinterkante ist, liegt es nicht in der Rücklaufströmung des abgerissenen Flügels. Es wird immer praktisch von vorne angeströmt sein, denn auch die Querströmung ist dort fast ganz abgeklungen. Statt des normalen Abwindes haben wir hinter dem abgerissenen Flügel am Leitwerk einen Aufwind, der bis zu $0{,}15\,u_0$ beträgt. Mit der verkleinerten Anströmgeschwindigkeit kann dadurch der Anstellwinkel so groß werden, daß auch die Strömung um das Höhenleitwerk abreißt.

III. Zusammenfassung.

Der Bericht gibt die Strömungsverhältnisse an und hinter einem Flügel mit angestelltem Mittelstück wieder. Die Strömung um das Mittelstück ist dabei abgerissen, während sie am übrigen Flügel anliegt. Das Übergangsgebiet zwischen anliegender und abgerissener Strömung zeigt nicht den Charakter einer abgerissenen Strömung, sondern den einer sehr stark verdickten Grenzschicht. Der Nachlauf des Flügels ist räumlich vermessen. Es zeigt sich, daß bei abgerissener Strömung neben den Richtungsänderungen auch die sehr großen Geschwindigkeitsänderungen für die Stabilität eines Flugzeuges von erheblicher Bedeutung sind.

Abgeschlossen Januar 1938.

Digitized by Google

Dämpfungsarten für die Schwingungen des Kreiselhorizontes und ihre Wirkungen im Kurvenflug.

Von M. Schuler und K. Magnus.

Bericht des Institutes für angewandte Mechanik der Universität Göttingen.

Ein als ungedämpftes, schweres Kreiselpendel ausgebildeter Kreiselhorizont kann auf kreisendem Flugzeug zu großen Schwingungen erregt werden. Bei einem bestimmten Drehsinn und bestimmten Drehgeschwindigkeiten des Flugzeuges können Resonanzerscheinungen auftreten. Es wird im folgenden der Einfluß dreier Dämpfungsarten auf diese Schwingungen untersucht, und zwar Düsendämpfung in einer Präzessionsebene, Düsendämpfung in beiden Präzessionsebenen und Schlingertankdämpfung. Vor allem wird geprüft, wie die Resonanzerscheinungen durch die Dämpfungen vermindert werden.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Graphische Ermittlung des Fehlers beim Kurvenflug ohne Dämpfung.
III. Schwingungen des Horizontes bei verschiedenen Dämpfungen im Geradeausflug.
IV. Wirkungen der Dämpfungsarten im Kurvenflug.
V. Zusammenfassung der aus den theoretischen Überlegungen gewonnenen Folgerungen.
VI. Versuche auf dem Drehtisch.
VII. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Unter Kreiselhorizont sei im folgenden ein schnellaufender Kreisel mit vertikaler Drehachse verstanden, der so in einem Kardangehänge gelagert ist, daß er sich nach jeder Richtung frei bewegen kann. Der Schwerpunkt kann beliebig auf der Drehachse des Kreisels liegen, doch soll das Schweremoment bei tieferliegendem Schwerpunkt in der folgenden Rechnung mit positivem Vorzeichen versehen werden.

Zweck des Kreiselhorizontes ist es, das wahre Lot unabhängig von den Schwankungen des Scheinlotes anzugeben.

Es ist früher gezeigt worden, daß ein Kreiselhorizont dann fehlerfrei ist, wenn man ihn auf eine Präzessionszeit von 84 min abstimmt[1]). Dann hebt die Erdkrümmung gerade die Fehler auf, die durch die Beschleunigungen des Flugzeuges auftreten. Aber der feinmechanischen Ausführung ist es bisher noch nicht gelungen, eine so große Präzessionszeit zu erreichen. Bei den bisher erreichten Präzessionszeiten von etwa 10 bis 20 min treten durch die Flugzeugbewegungen Fehler auf, bei deren Berechnung man noch den Einfluß der Erdkrümmung und der Erddrehung vernachlässigen kann. Diese Vernachlässigungen werden in der folgenden Rechnung immer gemacht.

Die Fehler der Kreiselhorizonte sind schon mehrfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen[2]). Während bei den früheren Berechnungen bestimmte Annahmen über das Schweremoment und die Dämpfung gemacht wurden, soll in der vorliegenden Arbeit der Einfluß von Änderungen des Schweremomentes und der Dämpfung ganz allgemein betrachtet werden. Vor allem sollen die verschiedenen Dämpfungsarten untersucht werden.

[1]) M. Schuler, Störungen von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigungen des Fahrzeuges. Phys. Z. Bd. 24 (1923), S. 344 bis 350.

[2]) R. Grammel, Störungstheorie des Pendelkreisels. Z. Flugtechn. Bd. 10 (1919), S. 1 bis 12. E. Schmid, Das Verhalten des Sperry-Horizontes bei stationärem Kurvenflug. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1938), S. 283 ff.

Wird ein schweres Kreiselpendel auf einem festen Versuchsstand oder bei geradlinigem Flug gestört, so beschreibt die Kreiselachse einen Kegel von elliptischem Querschnitt, dessen Hauptachsen in die Richtungen der Präzessionsachsen des Kreiselpendels fallen. Das Hauptachsenverhältnis H der Ellipsen ist

$$H = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}.$$

Dabei sind S_1 und S_2 die Schweremomente des Kreiselpendels um die beiden Präzessionsachsen. Die Ellipsen werden durchlaufen mit der Präzessionsgeschwindigkeit p

$$p = \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{J}.$$

J ist dabei der Impuls des Kreisels um seine Drehachse. Der Mittelpunkt der Ellipse fällt mit der Lotlinie zusammen, die im Laboratorium natürlich die Vertikale ist. Auf kreisendem Flugzeug weicht jedoch die Lotlinie von der Vertikalen ab, so daß ein Kreiselpendel aus der Vertikalen herauspräzediert und ein als Kreiselpendel ausgebildeter Horizont Fehler zeigt. Auch die kurzen Böen verursachen auf dem Flugzeug ein starkes Schwanken der Lotlinie. Die dabei entstehenden Fehler kann man nach der Methode der erzwungenen Schwingungen berechnen. Man kann zeigen, daß dabei größere Fehler bei einem Kreiselhorizont mit 10 min Präzessionszeit nicht mehr entstehen können.

II. Graphische Ermittlung des Fehlers beim Kurvenflug.

Kreist ein Flugzeug mit der Fluggeschwindigkeit v in konstanter Höhe mit einer Drehgeschwindigkeit ω, so steht der Drehvektor vertikal und ist bei Linkskreis positiv, wenn man die Hochachse des Koordinatensystems nach oben positiv rechnet.

Die Zentrifugalbeschleunigung ist dann gegeben durch $\gamma = \omega v$. Das Scheinlot bildet einen Winkel α_L mit der Vertikalen, dessen Tangente durch

$$\operatorname{tg} \alpha_L = \frac{\gamma}{g} = \frac{\omega v}{g}$$

gegeben ist. Um die Scheinlotlinie beschreibt der Kreisel einen Präzessionskegel. Im einfachsten Fall, daß die Schweremomente gleich sind ($S_1 = S_2$) und die Präzession ungedämpft verläuft, wird das Hauptachsenverhältnis $H = 1$ und die Präzessionsgeschwindigkeit $p = \frac{S}{J}$. Der Präzessionskegel ist ein Kreiskegel, und man kann leicht die Kurven, die von der Kreiselspitze beschrieben werden, mit dem Zirkel schrittweise konstruieren, da ja die Lage des Lotes als Funktion der Zeit bekannt ist.

In Bild 1 sind die Kurven aufgetragen, die von oben gesehen, die untere Kreiselspitze beschreibt. Dabei steht zur Zeit $t = 0$ die Kreiselachse in der Vertikalen, die in Bild 1 jeweils durch einen kleinen Kreis bezeichnet ist. Dann geht das Flugzeug plötzlich in einen Linkskreis mit konstanter Drehgeschwindigkeit über. Der Kreisel soll ebenfalls links drehen; Kreiseldrehung und Flugzeugdrehung

Digitized by Google

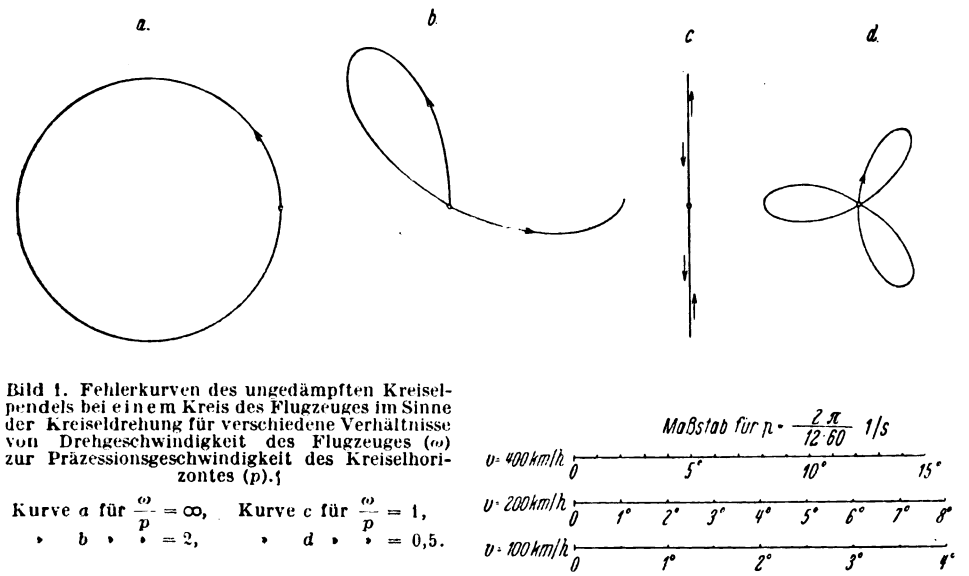


Bild 1. Fehlerkurven des ungedämpften Kreiselpendels bei einem Kreis des Flugzeuges im Sinne der Kreiseldrehung für verschiedene Verhältnisse von Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges (ω) zur Präzessionsgeschwindigkeit des Kreiselhorizontes (p).

Kurve a für $\frac{\omega}{p} = \infty$, Kurve c für $\frac{\omega}{p} = 1$,
„ b „ „ $= 2$, „ d „ „ $= 0{,}5$.

sind also gleichsinnig. Je nach der Größe von ω erhält man verschiedene Figuren. Bei sehr engem Kreise, d. h. großem ω, beschreibt die Kreiselspitze einen Kreis während eines Kreises des Flugzeuges (Bild 1a). Der größte Fehler des Kreiselhorizontes ist dabei

$$\alpha_{max} = 2\,p\,\frac{v}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Später wird das auch rechnungsmäßig bewiesen werden. Man sieht aus Gleichung (1), daß der maximale Fehler direkt proportional der Fluggeschwindigkeit und der Präzessionsgeschwindigkeit des Kreisels ist.

Für $\frac{\omega}{p} = 1$ schwingt die Kreiselspitze in einer Ebene (Bild 1c). Für $\frac{\omega}{p} = 0{,}5$ (Bild 1d) und $\frac{\omega}{p} = 2$ (Bild 1b) ergeben sich Blattfiguren. Nach vollem Durchfahren des Kreises ist aber die Kreiselachse im Falle des Bildes 1b nicht vertikal, sondern hat eine bestimmte Auslenkung. Wenn nun das Flugzeug nach beschriebenem Kreis gerade weiterfliegt, so beschreibt der Kreisel um die Vertikale mit diesem Endwinkel Präzessionen. Wir erkennen aber auch aus Bild 1, daß, gleichgültig wie viele Kreise und mit welcher Geschwindigkeit sie geflogen werden, der Fehler nie größer sein kann als nach Gleichung (1) angegeben. Der Fehler kann klein gehalten werden, wenn auch p klein ist; man muß also einen schnellaufenden Kreisel bei kleiner Schwerpunktstieferlage wählen.

In Bild 2 sind die entsprechenden Kurven für Rechtskreise, also für gegensinnig drehenden Kreisel und Flugzeug konstruiert. Ist ω sehr groß, d. h. der Kreis sehr eng, so ergibt sich genau der gleiche Fehlerkreis der Kreiselspitze wie bei einem Linkskreis, nur nach der anderen Seite. Für $\frac{\omega}{p} = 1$, Bild 2b, beschreibt die Kreiselspitze eine Spirale. Dabei entfernt sich die Kreiselachse schon bei einem einzigen Kreise des Flugzeuges sehr weit von der Vertikalen. Mit jedem weiteren Kreise wird der Fehler noch größer. Es liegt eine Art Resonanzerscheinung vor. Aber auch schon bei Kurven, die in der Nähe von $\frac{\omega}{p} = 1$ liegen, werden die Fehler des Kreiselhorizontes sehr groß. Auch hier wird der Horizont schon nach einem einzigen Kreise des Flugzeuges unbrauchbar. Dabei ist es bezeichnend, daß gerade bei sehr großen Kreisen, also bei kleinen Zentrifugalkräften die größten Fehler des Kreiselhorizontes entstehen. Ist $\frac{\omega}{p}$ weit von 1 entfernt, so ergeben sich wieder Blattfiguren mit verhältnismäßig kleinen Fehlern. Als Beispiel ist in Bild 2c die Fehlerkurve für $\frac{\omega}{p} = 0{,}25$ gezeichnet.

Es soll nun untersucht werden, ob nicht durch geeignete Dämpfungen diese Resonanzerscheinungen, wenn nicht beseitigt, so doch gemildert werden können.

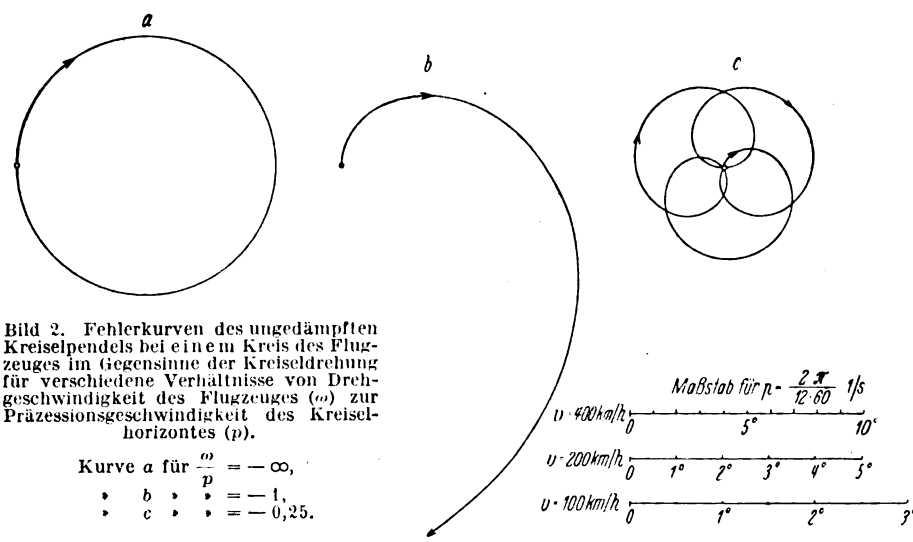


Bild 2. Fehlerkurven des ungedämpften Kreiselpendels bei einem Kreis des Flugzeuges im Gegensinne der Kreiseldrehung für verschiedene Verhältnisse von Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges (ω) zur Präzessionsgeschwindigkeit des Kreiselhorizontes (p).

Kurve a für $\frac{\omega}{p} = -\infty$,
„ b „ „ $= -1$,
„ c „ „ $= -0{,}25$.

III. Schwingungen des Horizontes bei verschiedenen Dämpfungen im Geradeausflug.

Da Reibungen und Bremsen zwischen Horizont und Flugzeug nur schwingungsanfachend wirken würden, so müssen Dämpfungen geschaffen werden, die möglichst unabhängig von den Bewegungen des Flugzeuges eine Dämpfung gegenüber dem Raum bewirken. Drei Dämpfungsarten, die bisher zu diesem Zweck Anwendung gefunden haben, sollen hier kurz beschrieben und in ihrer Wirkungsweise untersucht werden.

a) Eindüsendämpfung. Ausgehend von dem Gedanken, daß ein um die Querachse (y-Achse) schwingendes Pendel von Zentrifugalkräften beim Kurvenflug nicht gestört wird, hat Schuler die folgende Dämpfungsart angewandt, Bild 3. In der Richtung der Querachse sind an der Kreiselkappe unten zwei Düsen angebracht, aus denen die vom Kreisel mitgerissene Luft ausgeblasen wird. Vor diesen Düsen schwingen zwei um die y-Achse drehbare Pendel, deren flach ausgeführte Enden Löcher tragen. Diese Löcher geben im Gleichgewichtsfall die beiden Düsen halb frei, so daß sich die von den austretenden Luftstrahlen erzeugten Reaktionsmomente gerade aufheben. Neigt sich aber der Kreisel um einen Winkel β um die y-Achse, so wird die eine Düse mehr geöffnet, die andere mehr geschlossen. Das Reaktionsmoment P_1 wird größer als P_2, so daß ein restliches Drehmoment um die Längsachse (x-Achse) übrigbleibt, das näherungsweise proportional β ist. Es soll als Moment $-D \cdot \beta$ bei der weiteren Rechnung eingeführt werden.

Digitized by Google

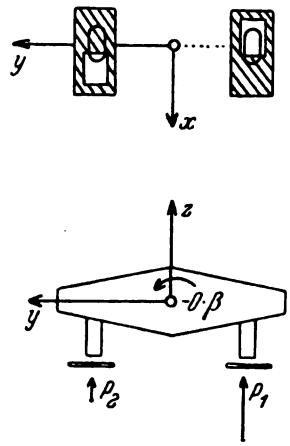


Bild 3. Schema der Eindüsendämpfung.

Wir wählen nun die x- und die y-Achsen als Schwingachsen des Kreiselpendels, während die z-Achse mit der Gleichgewichtslage der Kreiselachse zusammenfällt. Drehwinkel um die x-Achse bezeichnen wir mit α, Drehwinkel um die y-Achse mit β, und zwar so, daß die Drehgeschwindigkeiten $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$ in die Richtung der positiven x- bzw. y-Achse fallen.

Für den vorliegenden Horizont benutzen wir nun die linearisierten Föppl-Gleichungen für das schwere Kreiselpendel, in denen als äußeres Moment noch das Düsenmoment eingeführt wird. Dabei können wir die Trägheitsmomente um die x- und die y-Achse vernachlässigen, da ihre Wirkung gegenüber den Kreiselkräften sehr klein ist. Es ergibt sich so das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} J\frac{d\beta}{dt} + S_1\alpha &= -D\beta \\ -J\frac{d\alpha}{dt} + S_2\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{S_1}{J} = p_1;\ \frac{S_2}{J} = p_2;\ \frac{D}{J} = d;\ p_1 p_2 = p^2$$

bekommen wir als Lösung des Gleichungssystemes (2) Schwingungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A\, e^{-\frac{d}{2}t} \sin\sqrt{p^2 - \frac{d^2}{4}}\,t \\ \beta &= B\, e^{-\frac{d}{2}t} \cos\sqrt{p^2 - \frac{d^2}{4}}\,t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Das sind elliptische Spiralen um die Vertikale, die durch den Faktor $e^{-\frac{d}{2}t}$ gedämpft sind. Die Präzessionszeit ist gegenüber dem ungedämpften Fall verändert. Für $\frac{d}{2} > p$ ergeben sich keine Schwingungen mehr, sondern aperiodische Bewegungen. $\frac{d}{2} = p$ ergibt den aperiodischen Grenzfall.

b) Doppeldüsendämpfung. Bringt man an der Kreiselkappe noch zwei weitere Düsen in Richtung der x-Achse an, so kann man auch die dadurch erzeugten Luftstrahlmomente durch Pendel steuern lassen, die um die x-Achse schwingen können. Man bekommt so ein Moment um die y-Achse, das proportional zu α gesetzt werden kann. Das Gleichungssystem lautet jetzt

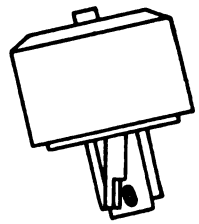
$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + p_1\alpha &= -d\beta \\ -\frac{d\alpha}{dt} + p_2\beta &= +d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Die Vorzeichen der Düsenmomente müssen durch richtiges Anbringen der Löcher in den Steuerpendeln so gewählt werden, daß die Schwingungen gedämpft und nicht aufgeschaukelt werden. Die Lösung des Gleichungssystems (4) ergibt Schwingungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A\, e^{-dt} \sin pt \\ \beta &= B\, e^{-dt} \cos pt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Durch Vergleich mit der Lösung (3) sieht man, daß der Dämpfungsexponent doppelt so groß ist wie bei Eindüsendämpfung. Außerdem wird die Präzessionsgeschwindigkeit durch die Doppeldüsendämpfung nicht gegenüber dem ungedämpften Fall verändert, denn $p = \sqrt{p_1 p_2}$ ist ja die bei feststehendem Horizont meßbare Präzessionsgeschwindigkeit. Infolgedessen gibt es bei dieser Dämpfung keine aperiodischen Fälle. Man erhält nur für $p = 0$ den aperiodischen Grenzfall.

Bild 4. Schema der Doppeldüsendämpfung am Askaniahorizont.



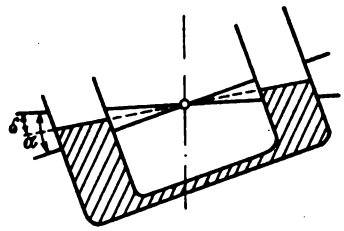


Bild 5. Schema des Schlingertanks.

Bei dem bekannten Askania-Horizont, Bauart Sperry, ist die Doppeldüsendämpfung angewandt worden, Bild 4. Doch gelten für diesen Horizont die Rechnungen nur in einem ganz kleinen Winkelbereich, da schon nach Auslenkungen von zwei Grad die Düsen am Askania-Horizont ganz geöffnet bzw. geschlossen werden.

c) Schlingertankdämpfung. Bei dem alten Kreiselhorizont der Firma Anschütz & Co. wurde außer der Eindüsendämpfung noch zusätzlich eine Schlingertankdämpfung verwendet. Es wurden zwei unten durch ein dünnes Rohr verbundene Gefäße so an der Horizontscheibe angebracht, daß die eingefüllte Flüssigkeit beim Schwingen des Horizontes um die x-Achse von einem Gefäß in das andere strömte. Der Verbindungskanal wurde so eng gemacht, daß beim Überströmen Energie vernichtet und dadurch die Schwingung des Horizontes gedämpft wurde.

Bezeichnet man den Winkel, den die Oberfläche des Tankwassers mit der Horizontalen einschließt mit δ, Bild 5, so hat man nun ein Moment um die x-Achse

$$M_{\text{Schl.}} = c_1(\alpha - \delta)$$

in die Gleichungen einzuführen. c_1 ist dabei eine Proportionalitätskonstante, die vom Bau des Schlingertanks abhängt. Das Moment sucht stets den Horizont umzukippen, es wirkt also dem Schweremoment entgegen. c_1 darf deshalb eine gewisse Größe nicht überschreiten, weil sonst der Horizont labil wird.

Durch Einführung des Schlingertanks ist nun ein weiterer Freiheitsgrad δ im System vorhanden. Zur Beschreibung der Bewegungen wird also eine weitere Gleichung notwendig, die sich aus den Durchflußgesetzen des Schlingertankwassers bestimmt. Die mittlere Durchflußgeschwindigkeit w ist der Druckdifferenz proportional, da im vorliegenden Fall mit genügender Genauigkeit das laminare Strömungsgesetz zugrunde gelegt werden kann. Die Druckdifferenz Δ_p hängt vom Höhenunterschied der Tankflüssigkeit in den beiden Gefäßen ab, ist also proportional zu δ. Mit den Proportionalitätsfaktoren c_2 und c_3 ergibt sich

$$w = c_2 \Delta p = c_3 \delta.$$

Andererseits ist nach der Kontinuitätsbedingung w der Differenz der Änderungen von α und δ proportional.

$$w = c_4\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\delta}{dt}\right).$$

Digitized by Google

Durch Zusammenfassen beider Beziehungen bekommt man die gesuchte Gleichung für δ

$$\frac{d\delta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} + c\delta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dabei ist c eine aus den alten Konstanten hervorgegangene Kennzahl für den Schlingertank. Man kann sie durch Messung leicht bestimmen, indem man den Horizont festhält (α = konstant) und die Flüssigkeit um einen bestimmten Betrag δ_0 auslenkt. Durch Beobachten der Einschwingkurve

$$\delta = \delta_0 \cdot e^{-ct}$$

läßt sich c leicht ermitteln.

Mit Einführung der Größe

$$\frac{c_1}{J} = s$$

bekommt man nun als System der Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + p_1\alpha &= s(\alpha - \delta) \\ -\frac{d\alpha}{dt} + p_2\beta &= 0 \\ \frac{d\delta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} + c\delta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Die Lösung des Gleichungssystems führt zu einer charakteristischen Gleichung dritten Grades für die unbekannte Frequenzzahl λ von der Form

$$\lambda^3 + c\lambda^2 + p_1 p_2 \lambda + c p_2 (p_1 - s) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß bei positivem p_1 und p_2, also bei tieferliegendem Schwerpunkt, stets $s < p_1$ sein muß, damit der Horizont stabil ist. Dann ist aber auch die Hurwitzsche Bedingung

$$c\, p_1 p_2 > c\, p_2 (p_1 - s)$$

erfüllt. Damit ist aber bestimmt, daß die reellen Wurzeln und die reellen Teile der komplexen Wurzeln negativ sein müssen. Angestoßene Schwingungen nehmen also im Laufe der Zeit ab. Die Schwingungsbewegung ist sowohl dynamisch als auch energetisch stabil. Man sieht auch, daß die Schnelligkeit der Beruhigung wesentlich von der Durchflußkonstanten c abhängt. Sowohl für $c = 0$ als auch für $c = \infty$ ergibt Gleichung (8) rein imaginäre Lösungen für λ, also ungedämpfte Schwingungen. Dazwischen muß ein c liegen, das die schnellste Beruhigung gibt. Durch Auftragen der Wurzeln von (8) in Abhängigkeit von c kann man dieses Optimum für eine bestimmte Konstruktion finden.

Die charakteristische Gleichung (8) besitzt drei Wurzeln, von denen die eine negativ reell ist, während die anderen beiden Wurzeln konjugiert komplex sind. Der Bewegungsvorgang setzt sich also zusammen aus einer abklingenden aperiodischen Bewegung, über der noch eine gedämpfte Schwingung liegt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß alle drei Dämpfungsarten bei ungestörtem Geradeausflug ihren Zweck erfüllen. Drei Schwingungsbilder für die verschiedenen Dämpfungen, die an einem als Versuchshorizont umgebauten Anschützhorizont vom Jahre 1917 gemessen wurden, zeigt Bild 6. Dabei ist in diesem Fall die Dämpfung mit dem Schlingertank weitaus die wirksamste, während bei Eindüsendämpfung die Präzessionen am langsamsten abklingen.

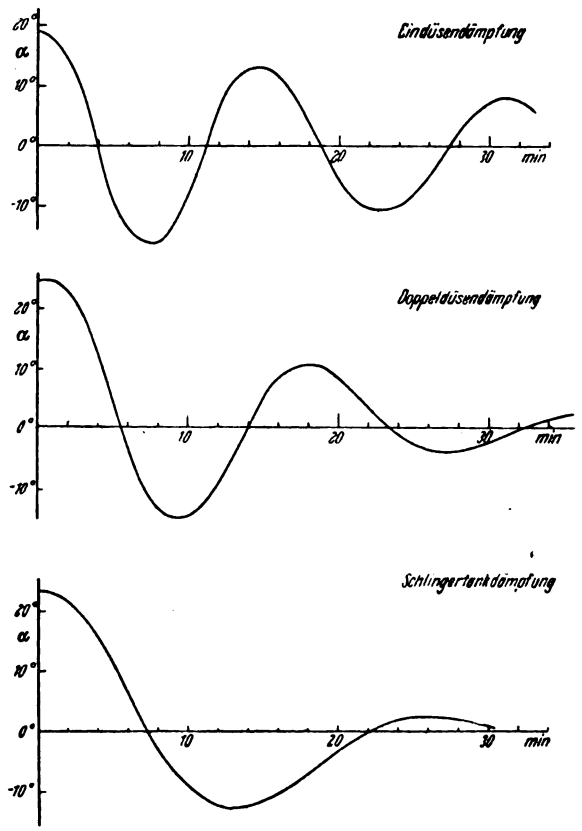


Bild 6. Einschwingkurven des Horizontes im Geradeausflug bei verschiedenen Dämpfungsarten.

IV. Wirkungen der Dämpfungsarten im Kurvenflug.

Das Flugzeug möge nun einen horizontalen Kreis mit konstanter Drehgeschwindigkeit ω durchfliegen. Durch die Zentrifugalkräfte neigt sich dann die Lotlinie gegen die Vertikale um einen Winkel α_L, für den wir bei Beschränkung auf kleine Winkel schreiben können

$$\alpha_L = -\frac{\omega v}{g}.$$

Der Drehvektor ω steht vertikal. Er ist positiv nach oben zu rechnen, d. h. für Linkskreis positiv, für einen Rechtskreis negativ. Da sich der Kreiselhorizont mit seinen x- und y-Achsen ebenfalls mit dem Flugzeug dreht, so wird die Rechnung am übersichtlichsten, wenn man ein Koordinatensystem zugrunde legt, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Man hat dann das dabei auf den Kreisel wirkende Coriolismoment

$$\mathfrak{K} = [J \times \omega]$$

in die Kreiselgleichungen einzuführen. Die Komponenten des Momentes sind

$$K_x = -J\omega \sin\alpha \approx -J\omega\alpha$$
$$K_y = -J\omega \sin\beta \approx -J\omega\beta.$$

Sodann muß beachtet werden, daß das Schweremoment den Kreisel zum Scheinlot hinzuziehen sucht. Man hat also in der α-Ebene für das Schweremoment zu setzen:

$$M_{\text{Schw.}} = -S_1(\alpha - \alpha_L).$$

a) Eindüsendämpfung. Man könnte annehmen, daß die Dämpfung mit nur einem Düsenpaar beim Kurvenflug am günstigsten ist, weil ja die um die y-Achse schwingenden Pendel nicht durch Zentrifugalkräfte gestört werden, während sowohl bei Doppeldüsendämpfung als auch bei Schlingertankdämpfung Störungen durch Zentrifugalkräfte eintreten. Die Rechnung wird zeigen, daß diese Vermutung nicht berechtigt ist.

Unter Berücksichtigung des Coriolismomentes, des Düsenmomentes und des zusätzlichen Schweremomentes bekommen wir nun die Gleichungen für die Eindüsendämpfung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + (p_1 + \omega)\alpha + d\cdot\beta &= +p_1\alpha_L \\ -\frac{d\alpha}{dt} + (p_2 + \omega)\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Das ist die Differentialgleichung einer Schwingung um die Gleichgewichtslage

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= +\frac{p_1\alpha_L}{(p_1+\omega)} = \frac{p_1 v\omega}{g(p_1+\omega)} \\ \beta_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Digitized by Google

Die Gleichgewichtslage bedeutet diejenige Lage, in die sich der Kreiselhorizont einstellt, wenn das Flugzeug sehr viele Kreise mit konstantem ω durchfliegt. Die Gleichgewichtslage der Querneigungsanzeige bildet eine Art Resonanzfunktion, die für $p_1 = -\omega$ eine Unendlichkeitsstelle besitzt. Für sehr schnelle Drehkreise nähert sich α_0 dem Grenzwert

$$\alpha_0 = + p_1 \frac{v}{g}$$

unabhängig vom Drehsinn des Flugzeuges. Die Eindüsendämpfung hat auf die Gleichgewichtslage keinen Einfluß, sie kann also auch die Resonanzerscheinung nicht beseitigen oder abschwächen.

Zum vollen Verständnis der Bewegungsvorgänge müssen wir noch die um die Gleichgewichtslage (10) erfolgenden Schwingungen untersuchen. Wir bekommen aus (9) die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A\, e^{-\frac{d}{2}t} \sin \sqrt{(p_1+\omega)(p_2+\omega) - \frac{d^2}{4}}\, t \\ \beta &= B\, e^{-\frac{d}{2}t} \cos \sqrt{(p_1+\omega)(p_2+\omega) - \frac{d^2}{4}}\, t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Durch Vergleich mit (3) sieht man, daß die Dämpfung gegenüber der Dämpfung beim Geradeausflug ungeändert geblieben ist. Dagegen zeigt die Frequenz der Schwingungen eine starke Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit ω. Der Radikand, dessen Wurzel die Frequenz bedeutet, ist eine quadratische Funktion von ω mit den beiden Nullstellen

$$\omega_{1,2} = -\frac{p_1+p_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

Für diese beiden Werte der Drehgeschwindigkeit wird die Schwingungszeit des Horizontes unendlich groß. Im Gebiet zwischen ω_1 und ω_2 ist die Schwingungszeit überhaupt nicht definiert, die Bewegung wird also aperiodisch. An Stelle zweier konjugiert komplexer Wurzeln treten zwei reelle Wurzeln der charakteristischen Gleichung auf, von denen die eine für $p_1 \gtrless -\omega \gtrless p_2$ positiv ist, d. h. wenn ω zwischen den Präzessionsgeschwindigkeiten des Horizontes um seine beiden Kardanachsen liegt. In diesem Gebiet ist der Horizont labil. Durch möglichst genaue Abstimmung $p_1 = p_2$ kann man den Labilitätsbereich auf einen labilen Punkt zusammenziehen, jedoch wird der Horizont für $\omega = -p_1$ wegen der Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage in diesem Falle immer versagen.

Versuche mit Eindüsendämpfung werden später besprochen.

b) Doppeldüsendämpfung. Bei Aufstellung der Gleichungen für die Doppeldüsendämpfung müssen wir beachten, daß das um die y-Achse wirksame Düsenmoment nicht dem Winkel α proportional ist, sondern proportional zu $\alpha - \alpha_L$, da sich die Steuerpendel in das Scheinlot einstellen. Es ergibt sich also

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + (p_1+\omega)\alpha + d\beta - p_1\alpha_L &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + (p_2+\omega)\beta - d\alpha + d\alpha_L &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Zunächst seien wieder die Gleichgewichtslagen betrachtet. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{(p_2+\omega)p_1 + d^2}{(p_1+\omega)(p_2+\omega) + d^2}\,\alpha_L \\ \beta_0 &= \frac{-d\omega}{(p_1+\omega)(p_2+\omega) + d^2}\,\alpha_L \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

An Stelle einer Störung in der α-Ebene allein bei der Eindüsendämpfung (Gleichung (10)) tritt nun eine Störung in beiden Ebenen auf. Dennoch ist die Konstruktion mit Doppeldüsendämpfung günstiger als mit Eindüsendämpfung, denn jetzt kann durch geeignete Wahl der Gerätekonstanten die Unendlichkeitsstelle in der Gleichgewichtslage fortgeschafft werden. Der Nenner von (13) ist eine quadratische Funktion in ω. Soll der Nenner nicht verschwinden, so darf diese keine reellen Nullstellen besitzen. Das ist der Fall für

$$d > \frac{p_1 - p_2}{2} \quad \ldots \quad (14)$$

Je genauer also $p_1 = p_2$ abgestimmt wird, um so kleiner wird das labile Gebiet, und mit um so geringerer Dämpfung kommt man aus, um das labile Gebiet zu überbrücken. Bild 7 und 8 veranschaulichen diese Verhältnisse. Bild 7 zeigt den Verlauf der Gleichgewichtslage α_0 in Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit ω für verschiedene Dämpfungsgrößen d bei unabgestimmtem Horizont, also großer Differenz $p_1 - p_2$. Die Kurve *1* ist für die am Versuchshorizont gemessene Dämpfung gezeichnet, Kurve *2* für 3 mal, Kurve *3* für 5 mal so große Dämpfung. Alle Kurven gehen durch zwei Festpunkte, deren einer im Koordinatenursprung liegt, während der andere die Koordinaten $\left(-p_2, \frac{v}{g}p_2\right)$ hat. Bei der Kurve *1* ist die Stabilitätsbedingung (14) noch nicht erfüllt. Bild 8 zeigt den Verlauf von α_0 bei abgestimmtem Horizont.

Die Gleichgewichtslage der Längsneigungsanzeige β_0 hat dieselben Unendlichkeitsstellen wie α_0, da ja der Nenner derselbe ist. Den Verlauf von β_0 bei verschiedenen Dämpfungen zeigt Bild 9.

Die Schwingungen, die der Horizont um die Gleichgewichtslage α_0, β_0 ausführt, kann man durch Auflösen von (12) leicht bestimmen. Es interessiert vor allem die Frage nach der Stabilität der eintretenden Bewegungen. Die charakteristische Gleichung des Bewegungsvorganges lautet

$$\lambda^2 + d\lambda + [(p_1+\omega)(p_2+\omega) + d^2] = 0 \quad \ldots \quad (15)$$

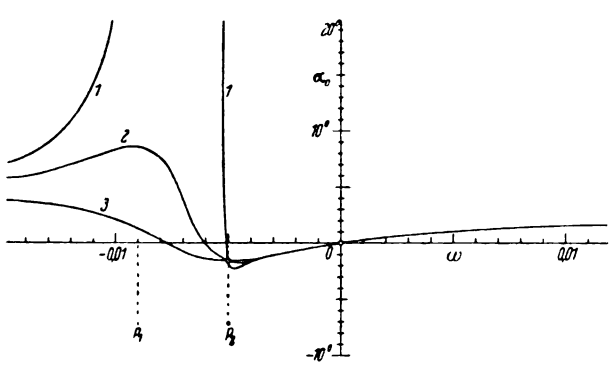


Bild 7. Gleichgewichtslagen des nicht abgestimmten Horizontes in der α-Ebene in Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit ω des Flugzeuges bei verschiedener Größe der Doppeldüsendämpfung.
Kurve 1 für $d = 0{,}001$ 1/s,
» 2 » $d = 0{,}003$ » ,
» 3 » $d = 0{,}005$ » .

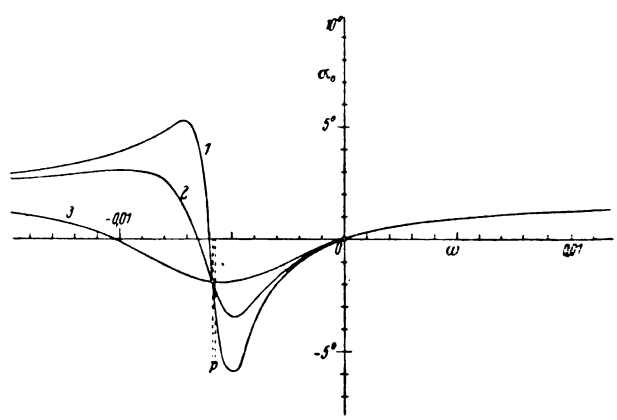


Bild 8. Gleichgewichtslagen des abgestimmten Horizontes in der α-Ebene in Abhängigkeit von ω bei verschiedenen Werten der Doppeldüsendämpfung.
Kurve 1 für $d = 0{,}001$ 1/s,
» 2 » $d = 0{,}002$ » ,
» 3 » $d = 0{,}005$ » .

Digitized by Google

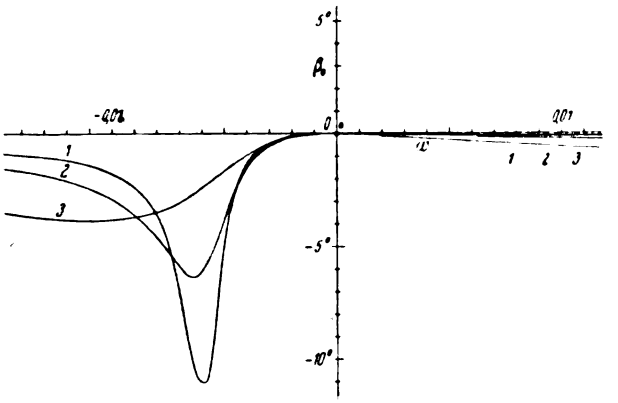


Bild 9. Gleichgewichtslage des Horizontes in der β-Ebene für dieselben Werte der Dämpfung wie Bild 8.

Solange $-\omega$ nicht zwischen p_1 und p_2 liegt, sind die Wurzeln konjugiert komplex mit negativem Realteil, es gibt also gedämpfte Schwingungen. Liegt die Drehgeschwindigkeit zwischen den Eigenpräzessionsgeschwindigkeiten, so hat man zwei reelle Wurzeln, von denen keine positiv sein darf. Bedingung dafür ist, daß der konstante Koeffizient der Gleichung (15) positives Vorzeichen hat. Das ist der Fall für

$$d^2 > (p_1 + \omega)(p_2 + \omega).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist eine Funktion von ω, die für $\omega = -p_1$ und $\omega = -p_2$ verschwindet und zwischen diesen beiden Werten ein Maximum hat. Ist die Ungleichung für dieses Maximum erfüllt, so ist sie sicher auch für jeden anderen Wert erfüllt. Setzt man das Maximum ein, so kommt man wieder zu der Bedingung (14). Die Forderungen nach endlicher Gleichgewichtslage und dynamischer Stabilität der um diese Gleichgewichtslage erfolgenden Schwingungen führen also zu derselben Bedingung.

c) Schlingertankdämpfung. Die Schlingertankflüssigkeit sucht sich jetzt nicht senkrecht zur Vertikalen, sondern senkrecht zum Scheinlot zu stellen. Der Druckunterschied der beiden Schlingertankgefäße ist also proportional zu $\delta - \alpha_L$. Dagegen bleibt das Moment um die x-Achse proportional zu δ, da die Zentrifugalkraft bei Schwankungen des Flüssigkeitsspiegels in erster Näherung keinen Hebelarm hat, um Momente um diese Achse zu erzeugen.

Das Gleichungssystem lautet jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + (p_1 + \omega - s)\alpha + s\delta - p_1\alpha_L + 0 \\ &-\frac{d\alpha}{dt} + (p_2 + \omega)\beta = 0 \\ &\frac{d\delta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} + c\delta - c\alpha_L = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)$$

Daraus ergeben sich die Gleichgewichtslagen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{(p_1 - s)}{(p_1 - s + \omega)}\alpha_L \\ \beta_0 &= 0 \\ \delta_0 &= \alpha_L \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Die Gleichungen zeigen, daß ein Schlingertank nicht in der Lage ist die Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage α_0 zu beheben. Der Versagerfall tritt jetzt ein für $-\omega = p_1 - s$, also dann, wenn die Drehgeschwindigkeit der durch den Schlingertank veränderten Präzessionsgeschwindigkeit gleich geworden ist. Die Gleichungen (17) entsprechen vollkommen den Gleichungen (10) für Eindüsendämpfung, nur daß an Stelle von p_1 jedesmal $p_1 - s$ zu setzen ist.

Die Untersuchung der Schwingungen nach (16) führt auf eine charakteristische Gleichung dritten Grades von der Form

$$\lambda^3 + c\lambda^2 + (p_1 + \omega)(p_2 + \omega)\lambda + c(p_1 - s + \omega)(p_2 + \omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Damit keine dynamische Labilität auftritt, also keine positiv reelle Wurzel vorhanden ist, muß der konstante Koeffizient der Gleichung positiv sein. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, wenn ω zwischen $p_1 - s$ und p_2 liegt. Man muß also hier, ähnlich wie bei der Eindüsendämpfung möglichst $p_1 - s = p_2$ abstimmen.

Damit die Schwingungen auch energetisch stabil sind, müssen die Realteile der komplexen Wurzeln negativ sein. Das Hurwitzsche Kriterium liefert dafür aus (18) die Bedingung

$$c(p_1 + \omega)(p_2 + \omega) > c(p_1 - s + \omega)(p_2 + \omega)$$

oder zusammengefaßt

$$s(p_2 + \omega) > 0.$$

Da s nach seiner Definition stets positiv ist, so wird diese Ungleichung nie erfüllt für $|-\omega| > p_2$, das bedeutet also, daß bei allen Drehungen des Flugzeuges entgegengesetzt der Kreiseldrehung, die mit einer Drehgeschwindigkeit schneller als die Präzessionsgeschwindigkeit p_2 geflogen werden, der Schlingertank nicht dämpfend, sondern aufschaukelnd wirkt.

Man könnte nun auf den Gedanken kommen, auch in der anderen Ebene noch einen Schlingertank anzubringen, um so durch eine Doppelschlingertankdämpfung eine ähnlich günstige Wirkung wie bei der Doppeldüsendämpfung zu erzielen[3]). Die Rechnungen, die auch für diesen Fall durchgeführt worden sind, zeigen jedoch, daß das nicht der Fall ist. Es bleibt sowohl die Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage als auch das dynamisch labile Gebiet zwischen den Eigenpräzessionsgeschwindigkeiten bestehen. Auch das energetisch labile Gebiet bleibt erhalten und erfährt nur eine praktisch unwesentliche Verschiebung seiner oberen Grenze. Vorteilhafter wäre es, den Schlingertank nur um die y-Achse anzuordnen, weil er dann durch die Zentrifugalkräfte nicht beeinflußt wird. Zwar bleibt auch in diesem Falle die Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage und das dynamisch-labile Gebiet zwischen den Eigenpräzessionszeiten bestehen. Aber das energetisch labile Gebiet tritt dann nicht auf. Jedenfalls muß man neben einem Schlingertank immer noch genügend kräftige Doppeldüsendämpfung anwenden, denn diese allein kann das dynamisch labile Gebiet beseitigen.

V. Zusammenfassung der aus den theoretischen Überlegungen gewonnenen Folgerungen.

Es soll hier noch einmal zusammengefaßt werden, welche Folgerungen sich aus den bisherigen Betrachtungen ziehen lassen.

1. Bei Kurvenflug treten Resonanzerscheinungen nur bei Drehungen des Flugzeuges im Sinne der Kreiselpräzession auf. Bei tieferliegendem Schwerpunkt also dann, wenn die Flugzeugdrehung der Kreiseldrehung entgegengesetzt ist, bei höherliegendem Schwerpunkt, wenn die Flugzeugdrehung im Sinne der Kreiseldrehung erfolgt.
2. Sind die Präzessionsgeschwindigkeiten um die beiden Kardanachsen verschieden, so gibt es ein ganzes Resonanzgebiet zwischen beiden Präzessionsgeschwindigkeiten. Es ist also ein Optimum, wenn man die Präzessionsgeschwindigkeiten aufeinander abstimmt, denn dann gibt es nur einen Resonanzpunkt.
3. Läßt man das Dämpfungsmoment durch Pendel nur um eine Kardanachse steuern, so ergeben sich beim Geradeausflug gute Dämpfungen. Man kann bei genügend großem Dämpfungsmoment auch aperiodische Einstellung erhalten. Die Schwingungszeit wächst durch die Dämpfung, wie dies aus der Lehre der geradlinigen, gedämpften Schwingungen bekannt ist.
4. Bei der Dämpfung um eine Kardanachse bleibt die Resonanzstelle des Kurvenfluges vollständig erhalten. Diese

[3]) Ein ähnliches Problem ist behandelt von H. Höhl und E. Schmid, Theorie der Dämpfung eines einfachen Schwingungssystemes durch Geschwindigkeitskopplung gegen eine freie träge Masse. Jahrbuch 1937 der Deutschen Luftfahrtforschung S. III 37. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin.

Digitized by Google

Dämpfung nützt also nichts zur Beseitigung oder Verminderung der Resonanz.

5. Läßt man die Dämpfungsmomente durch mehrfache Pendel um beide Kardanachsen steuern, so erhält man bei Geradeausflug gedämpfte Schwingungen, deren Schwingungszeit unabhängig von der Größe der Dämpfung ist. Die größte Dämpfung, die man hierbei überhaupt erzielen kann, ist der aperiodische Grenzfall. Er liegt stets dann vor, wenn die Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges nach Drehsinn und Betrag gleich der Präzessionsgeschwindigkeit des Kreisels ist.
6. Im Kurvenflug verschwindet bei dieser Dämpfung die Resonanzstelle, wenn das doppelte Dämpfungsmoment größer ist als die Differenz der Schweremomente um die beiden Kardanachsen. Außerdem bewirkt sie eine Verminderung der Fehler des Horizontes in der Nähe der Resonanz.
7. Die Schlingertankdämpfung wirkt sehr gut im Geradeausflug. Im Kreisflug dagegen kann sie bei bestimmten Kreisen, die im Gleichsinn mit der Kreiselpräzession geflogen werden, aufschaukelnd wirken. Außerdem wird durch die Schlingertankdämpfung die Resonanzstelle nicht beseitigt. Sie ist also für Kreiselhorizonte auf Flugzeugen zu vermeiden.
8. Es läßt sich also schließen, daß von den untersuchten Dämpfungsarten nur die Pendeldämpfung um beide Kardanachsen für den Horizont brauchbar ist.

VI. Versuche auf dem Drehtisch.

Um die theoretischen Ergebnisse nachzuprüfen, wurden Versuche auf einem Drehtisch angestellt, dessen Drehgeschwindigkeit in weiten Grenzen veränderlich war. Als Versuchshorizont wurde der schon zuvor erwähnte Kreiselhorizont der Firma Anschütz & Co. benutzt. Das Kreisen des Flugzeuges wurde im Laboratorium dadurch ersetzt, daß der Horizont auf dem Drehtisch mit der gerade gewünschten Drehgeschwindigkeit in Bewegung gesetzt wurde. Die Zentrifugalkraft wurde in ihrer Wirkung durch ein exentrisch angebrachtes Gewicht ersetzt, das eine dem jeweiligen Scheinlot entsprechende Verschiebung der Gleichgewichtslage um die x-Achse erzeugte. Bei diesem Verfahren wird nur die Richtungsänderung der Gesamtbeschleunigung berücksichtigt, nicht aber die Änderung ihrer absoluten Größe. Das bringt jedoch keinen wesentlichen Fehler, solange man sich auf kleine Scheinlotwinkel beschränkt.

Zunächst mußten die Konstanten des Versuchshorizontes ermittelt werden. Die Eigenpräzessionsgeschwindigkeiten wurden so bestimmt, daß der Horizont nur um eine Achse ausgelenkt wurde, und dann der Drehtisch so in seiner Geschwindigkeit einreguliert wurde, daß die Auslenkung stets in dieser Ebene blieb. Dann wirkt immer das Schweremoment um die eine Achse, so daß die diesem Schweremoment entsprechende Präzessionsgeschwindigkeit einfach als Drehgeschwindigkeit des Tisches gemessen werden kann. Ganz entsprechend kann die Präzessionsgeschwindigkeit mit eingebautem Schlingertank ($p_1 - s$) ermittelt werden. Die Düsenkonstante d kann aus Schwingungskurven bei ruhendem Drehtisch leicht bestimmt werden. Die Messung der Durchflußkonstanten c wurde schon erwähnt.

Bei Eindüsendämpfung wurden die Eigenprässeonszeiten zu 21,8 und 11,6 min bestimmt. Da der Kreisel links herum lief, so muß der Horizont bei allen Rechtskreisen, deren Drehzeit zwischen diesen Werten liegt, versagen. Die Versuche bestätigten diese Erwartungen.

Bild 10 zeigt einige Schwingungskurven des Horizonts. Bild 10a ist für Rechtskreis bei 4 min Drehzeit aufgenommen, Bild 10b für Rechtskreis bei 25 min Drehzeit. Beide Kurven zeigen deutlich die verschobene Gleichgewichtslage. Eine Messung im labilen Gebiet zeigt Bild 10c (Rechtskreis, 15,4 min).

Durch Abstimmung der Eigenpräzessionszeiten kann man bei Eindüsendämpfung zwar das dynamisch labile Gebiet einengen, dennoch wird der Horizont wegen der Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage für $\omega = -p_1$ versagen.

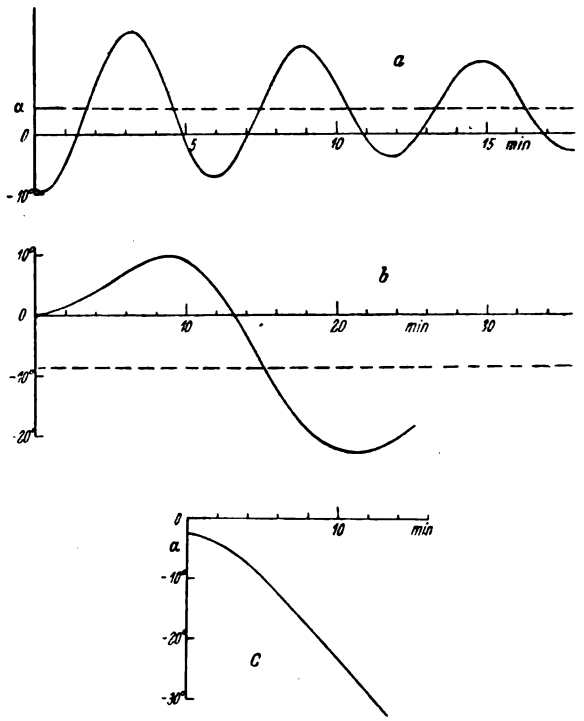


Bild 10. Schwingungskurven des Horizontes in der α-Ebene bei Eindüsendämpfung.

Kurve a: $\omega \geq |p_1|$ } stabile Fälle.
» b: $\omega \leq |p_2|$ }
» c: $|p_1| > \omega > |p_2|$ labiler Fall.

Das bewiesen auch die Versuche. So zeigten sich nach Abstimmung des Horizontes $\left(\frac{2\pi}{p_1} = 18{,}3 \text{ min}, \frac{2\pi}{p_2} = 18{,}4 \text{ min}\right)$ in der Nähe der Unendlichkeitsstelle so große Auslenkungen, daß der Horizont praktisch für einen großen Bereich von Drehzahlen unbrauchbar wurde.

Bei den Versuchen mit Doppeldüsendämpfung muß man beachten, daß jetzt die um die x-Achse drehbaren Dämpfungspendel durch die Zentrifugalkräfte ins Scheinlot gezogen werden. Im Versuch läßt sich das wieder durch kleine Hebel mit verschiebbaren Gewichten erreichen. Man muß also vor jedem Versuch die zu der Drehgeschwindigkeit (bei fest angenommener Fluggeschwindigkeit) gehörige Scheinlotneigung sowohl an der Horizontscheibe als auch an dem einen Dämpfungspendelpaar einstellen.

Nachdem der Kreiselhorizont mit Doppeldüsendämpfung versehen war, wurden eine große Reihe von Versuchen unter den verschiedensten Bedingungen durchgeführt, die durchweg die theoretischen Erwartungen bestätigten und den Vorteil der Doppeldüsendämpfung zeigten. Der Horizont mußte allerdings auf Gleichheit der Präzessionszeiten in beiden Ebenen abgestimmt werden, denn bei unabgestimmtem Horizont reichte die Dämpfung nicht aus, um die Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslagen fortzuschaffen.

Bild 11 zeigt zwei Kurven bei Doppeldüsendämpfung. Bild 11a ist für Rechtskreis bei 14 min Drehzeit aufgenommen. Die sehr lange Schwingungszeit (etwa 70 min) beweist, daß in der Nähe des aperiodischen Gebietes gearbeitet wurde. Trotzdem bleiben die Ausschläge verhältnismäßig klein, da die Gleichgewichtslage nur etwa 6° beträgt. Bild 11b ist bei Rechtskreis, 25 min Drehzeit aufgenommen. Bei Linkskreisen ergeben sich stets gedämpfte Schwingungen um Gleichgewichtslagen, die nicht viel von der Nullage abweichen.

Die Messungen mit Schlingertankdämpfung zeigen einen weiten Bereich von Drehkreisen, in denen der Horizont wegen der Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage vollkommen versagt. Der Bewegungsvorgang entspricht dabei vollkommen dem Verhalten bei Eindüsendämpfung (z. B. Bild 10c). Darüber hinaus versagt der

Digitized by Google

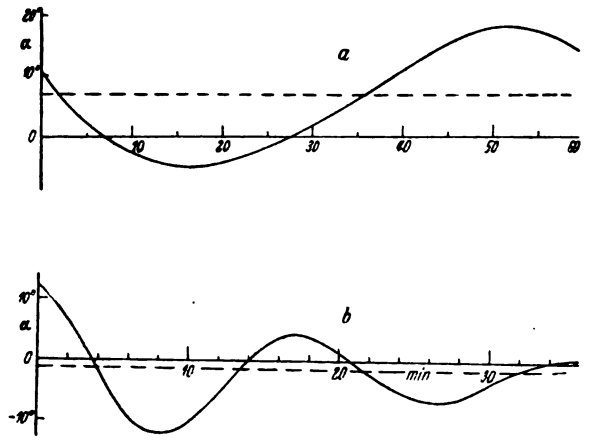


Bild 11. Schwingungskurven des Horizontes in der α-Ebene bei Doppeldüsendämpfung und abgestimmtem Horizont.
Kurve a: $\omega \approx |p|$, Kurve b: $\omega < |p|$.

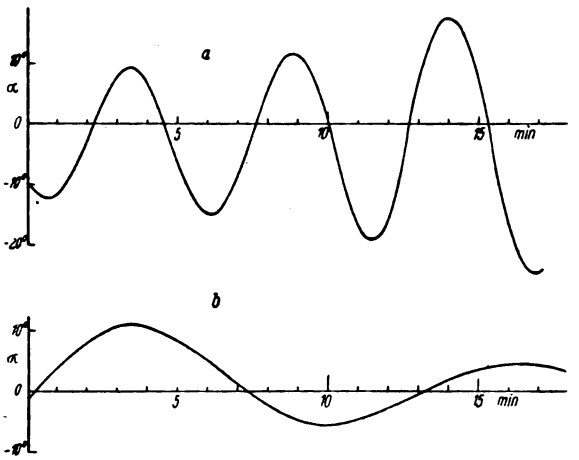


Bild 12. Schwingungskurven des Horizontes in der α-Ebene bei Schlingertankdämpfung.
Kurve a: Drehung des Flugzeuges im Gegensinn der Kreiseldrehung, Aufschaukelung der Amplitude.
Kurve b: Drehung des Flugzeuges im Sinne der Kreiseldrehung. Dämpfung der Schwingungen.

Horizont für alle Rechtskreise, die schneller als etwa 20 min geflogen werden, da sich die dann entstehenden Schwingungen aufschaukeln. Bild 12a gibt ein Beispiel davon (Rechtskreis, 4 min). Bei allen Linkskreisen arbeitet die Schlingertankdämpfung jedoch einwandfrei. Bild 12b ist für Linkskreis bei 21 min Drehzeit aufgenommen, also gerade in dem Gebiet, das bei Rechtskreisen ein völliges Versagen zur Folge hat.

Im ganzen genommen haben die zahlreichen Versuche mit den verschiedenen Dämpfungsarten die theoretischen Untersuchungen bestätigt. Es zeigen sich freilich Unterschiede zwischen den aus Theorie und Messung gewonnenen Zahlwerten. Das ist jedoch verständlich, wenn man einmal die Unsicherheit bedenkt, mit der viele dieser Messungen behaftet sind, zum anderen, wenn man berücksichtigt, daß die aufgestellten Gleichungssysteme nicht genau dem Verhalten des wirklichen Gerätes entsprechen. So ist die Annahme proportionaler Dämpfungsfunktionen sicher nur in ganz beschränktem Winkelbereich zulässig. Aus konstruktiven Gründen müssen ferner die Dämpfungspendel Anschläge haben, die eine Änderung der Stabilitätsmomente zur Folge haben, sobald sich die Pendel an die Anschlagstifte legen. Daraus ergibt sich eine Abhängigkeit der Schwingungszeit vom Ausschlag. Außerdem ist die Reibung in den Lagern der Kardanringe vernachlässigt. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist jedoch insofern befriedigend, als vor allem die Lage und die Begrenzung der labilen Bereiche des Horizontes gut wiedergegeben wurden.

VII. Zusammenfassung.

Es sind die Schwingungen des schweren Kreiselpendels bei verschiedenen Dämpfungsarten im ungestörten Geradeausflug sowie im Kurvenflug betrachtet worden. Dabei zeigt sich, daß alle drei untersuchten Dämpfungsarten bei ungestörtem Flug einwandfreie Dämpfung der Horizontschwingungen liefern. Bei Kurvenflug jedoch versagen die Eindüsendämpfung und die Schlingertankdämpfung, da bei Kreisen, die entgegengesetzt dem Sinne der Kreiselrotation geflogen werden, Versagerbereiche auftreten, in denen der Horizont entweder dynamisch oder energetisch labil wird. Bei Doppeldüsendämpfung kann es im Kurvenflug dann keine Versager geben, wenn man die Eigenpräzessionszeiten des Kreiselhorizontes um die beiden Präzessionsachsen einander gleich macht. Jedoch zeigt der Horizont dann bestimmte Fehler, die noch wesentlich von der Fluggeschwindigkeit, von der Geschwindigkeit der Kreisdrehung und von der Konstruktion des Horizontes abhängen. Durch Versuche sind die theoretischen Ergebnisse bestätigt worden. Die Versuche sind im Laboratorium auf einem Drehtisch durchgeführt, da im Flugzeug einmal die Einhaltung der Versuchsbedingungen schwierig ist und zum anderen keine Horizontale zur Bestimmung der Horizontfehler vorhanden ist. Auf dem Drehtisch dagegen ist eine systematische Untersuchung ohne Schwierigkeiten möglich, indem man die beim Kreisflug entstehenden Zentrifugalkräfte durch Zusatzgewichte oder durch Federkräfte ersetzt.

Digitized by Google

Ergebnis des Preisausschreibens der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1937/38.

In Lieferung 4 der Schriftenreihe »Luftfahrtforschung« vom 20. April 1939 wurden die mit einem Preise ausgezeichneten Arbeiten auf dem Gebiet des Flugzeugbaus, und in Lieferung 5 vom 20. Mai 1939, die mit einem Preise ausgezeichneten Arbeiten auf dem Gebiet des Flugmotorenbaus veröffentlicht.

Diese Lieferung enthält die Arbeiten auf dem Gebiet des Funkwesens.

Funkwesen.

Durch die in den letzten Jahren erzielten Fortschritte in der praktischen Durchführung von Schlechtwetterflügen und -landungen ist die Frage der Bestimmung von Hindernissen nach Abstand und Richtung beim Fluge, insbesondere aber die Bestimmung des Bodenabstandes bei der Landung vordringlich geworden.

In Deutschland und im Auslande sind verschiedene Vorschläge und Verfahren zur Bestimmung des Bodenabstandes auf funktechnischem Wege bekannt geworden.

Aufgabe.

Es ist eine Zusammenstellung dieser Vorschläge und Verfahren und eine kritische Betrachtung hinsichtlich der praktischen Verwendbarkeit und der Entwicklungsmöglichkeit zu geben.

Auch die Bestimmung von Richtung und Abstand zu festen und beweglichen Hindernissen während des Fluges wird — wenn auch in geringem Umfange — bereits bearbeitet. Es ist erwünscht, die kritische Betrachtung auf dieses Gebiet auszudehnen.

Preisgericht für die Aufgabe.

Stüssel Rudolf, Dr.-Ing., Berlin (Vorsitzender),
Lange Friedrich, Dr.-phil., Berlin,
Schwencke Dietrich, Dipl.-Ing., Rechlin,
Zenneck Jonathan, Geh. Reg.-Rat, München.

Den ersten Preis erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Halbwertszeit« von Dr.-Ing. Karl Bärner, München. Die Arbeit wird nicht veröffentlicht.

Einen zweiten Preis erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »D 1411« von Dipl.-Ing. Kurt Dziewior, Berlin.

Einen weiteren zweiten Preis erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »Söda« von Physiker Ulrich Theile, Sömmerda bei Erfurt.

Zusammenstellung der bekannt gewordenen Vorschläge zur Abstandsbestimmung und zur Rückstrahlpeilung auf funktechnischem Wege und ihre kritische Betrachtung.

Von K. Dziewior, Berlin.

Vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über die grundsätzlich möglichen Verfahren zur drahtlosen Abstandsbestimmung nach dem Rückstrahlprinzip. Dementsprechend sind die bekannten Vorschläge je nach ihrer Wirkungsweise in diese grundsätzlichen Verfahrensmethoden eingegliedert worden. Anschließend folgt eine kurze Betrachtung über die Verwendungsmöglichkeiten dieser Verfahren zur Bodenabstandsbestimmung von Luftfahrzeugen. Auch die Möglichkeiten zur Rückstrahlpeilung werden kurz behandelt.

Gliederung.

A. Einleitung.
B. Besprechung der bisher aus der Literatur bekannt gewordenen Abstandsmeßverfahren.
  a) Reine Laufzeitmessung elektrischer Impulse.
  b) Erzeugung einer Schwebungs- oder einer Zwischenfrequenz durch Änderung der Senderfrequenz
    α) Kontinuierliche Änderung der Senderfrequenz,
    β) Sprungweise Änderung der Senderfrequenz.
  c) Messung der Phasenverschiebung zwischen einer ausgesandten und der entsprechenden reflektierten Schwingung.
  d) Erzeugung von stehenden Wellen.
  e) Rückkopplung über den reflektierenden Gegenstand.
  f) Beeinflussung elektrischer Größen durch den reflektierenden Gegenstand.
  g) Winkelmeßverfahren.
  h) Weitere besondere Höhenmeßverfahren.
C. Besprechung der bisher aus dem Schrifttum bekannt gewordenen Rückstrahl-Peilverfahren.
D. Anwendungsmöglichkeiten der besprochenen Verfahren nach Zweck und Verwendung.
  a) Messung sehr großer Höhen
    α) über beliebigem Gelände,
    β) über bestimmtem, z. B. Landungsgelände.
  b) Messung normaler Flughöhen
    α) über beliebigem Gelände,
    β) über bestimmtem, z. B. Landungsgelände.
  c) Messung sehr geringer Höhen
    α) über beliebigem Gelände,
    β) über bestimmtem, z. B. Landungsgelände.
E. Zusammenfassende Schlußbetrachtung.
F. Schrifttum.

Digitized by Google

A. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit sollen die bisher bekannt gewordenen Verfahren zur Abstandsbestimmung und zur Rückstrahlpeilung auf funktechnischem Wege behandelt werden. Dabei wurde besonderer Wert darauf gelegt, die bekannten Verfahren mit all ihren Abwandlungen möglichst vollständig wiederzugeben, zumal das gesamte Gebiet umfassende Arbeiten bisher nicht veröffentlicht worden sind.

Da die Frage der Blindlandung von Flugzeugen in den letzten Jahren besonders vordringlich geworden ist, sollen diese Verfahren hauptsächlich bezüglich ihrer Verwendbarkeit zur Bodenabstandsbestimmung untersucht werden. Es handelt sich also grundsätzlich darum, von einem festen oder bewegten Punkt aus, z. B. von einem Flugzeug aus, den Abstand zu einer elektromagnetische Wellen reflektierenden Fläche, z. B. der Erdoberfläche, zu ermitteln. Es sollen daher die Verfahren, die den Abstand von einer sendenden Station, z. B. durch Beobachtung der Feldstärke in einem bestimmten Punkt, zu ermitteln versuchen, im Rahmen dieser Arbeit nur kurz gestreift werden.

Weiterhin soll auch auf das mit Schall- oder Ultraschallwellen arbeitende Echolotverfahren nicht näher eingegangen werden.

Da über die hier zu behandelnden Abstandsmeßverfahren in den Zeitschriften sehr wenig veröffentlicht worden ist, ist auf das in- und ausländische Patentschrifttum zurückgegriffen worden. Dabei wurde die Einteilung nach rein technischen Gesichtspunkten ohne Berücksichtigung der prioritätsmäßigen Reihenfolge vorgenommen.

Grundsätzlich wird bei den meisten Verfahren die Laufzeit einer elektromagnetischen Welle, die von einem drahtlosen Sender ausgesandt und von einem elektromagnetische Wellen reflektierenden Körper zurückgeworfen wird, bis zu ihrem Eintreffen in dem neben dem Sender aufgestellten Empfänger ermittelt. Er ist selbstverständlich, daß dazu elektromagnetische Wellen verwendet werden, die von atmosphärischen Störungen unbeeinflußt bleiben. Das sind Ultrakurzwellen und namentlich die Dezimeterwellen. Da man außer der Entfernung oft noch die Richtung des elektromagnetische Wellen reflektierenden Körpers zu ermitteln wünscht, nutzt man damit die zweite günstige Eigenschaft dieser kurzen Wellen, nämlich ihre gute Bündelungsfähigkeit, aus. Die Wellen, deren Laufzeit zu bestimmen ist, werden also bei den verschiedenen Abstandsmeßverfahren mit einer starken Richtwirkung ausgesandt. Die Bündelung dieser Wellen ist aber noch aus einem anderen Grunde erforderlich. Die Leistungen, die man bei den in Frage kommenden Wellen bis heute erzeugen kann, sind infolge der geringen Röhrenabmessungen so klein, daß es einfach eine Frage der Reichweite ist, zur besseren Energieausnutzung eine Bündelung der Wellen vorzunehmen.

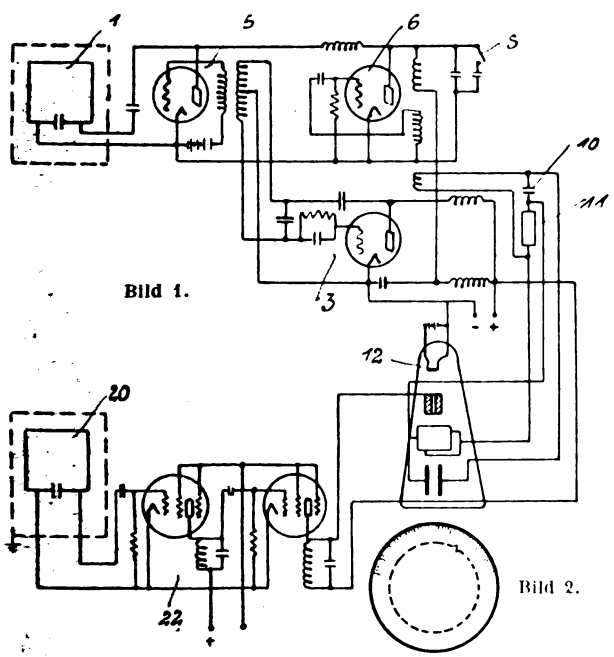


Bild 1.

Bild 2.

Bild 1 und 2. Impulsabstandsmeßverfahren nach amerik. Patentschrift 1 924 156.

Es wurde gesagt, daß die meisten Abstandsmeßverfahren die Laufzeit der ausgesandten elektromagnetischen Schwingungen auswerten. Tatsächlich unterscheiden sich nun diese Verfahren im wesentlichen durch die Methoden der Auswertung. Selbstverständlich werden auch senderseitig Abwandlungen bei den einzelnen Verfahren zu bemerken sein, etwa daß in einem Fall hochfrequente Impulse, im anderen Fall eine hochfrequente Welle gleichbleibender Amplitude ausgesandt wird.

Bei Durcharbeitung der einzelnen bekannten Verfahren erschien die Einteilung am zweckmäßigsten, in deren Reihenfolge die einzelnen Methoden nun besprochen werden sollen. Selbstverständlich bestehen zwischen den einzelnen Verfahren, die sich z. T. nur durch eine besondere Art der Auswertung unterscheiden, weitgehende Zusammenhänge. Daran anschließend folgt eine kritische Betrachtung der Verwendungsmöglichkeit dieser Verfahren.

B. Besprechung der bisher aus der Literatur bekannt gewordenen Abstandsmeßverfahren.

a) Reine Laufzeitmessung elektrischer Impulse.

Die Abstandsmeßeinrichtung besteht aus einem Gerät, das einen drahtlosen Sender und einen drahtlosen Empfänger besitzt. Vom Sender werden nach dem Prinzip des klassischen Echolotverfahrens hochfrequente Impulse ausgestrahlt, und zwar in einem Abstand, der größer ist als es dem doppelten zu messenden Abstand entspricht. Diese Bedingung ist wichtig, da sonst die Eindeutigkeit der Messung nicht gewährleistet ist. Der neben dem Sender stehende Empfänger besitzt eine Anzeigeeinrichtung, auf der in Abhängigkeit von der Zeit der unmittelbar vom Sender zum Empfänger übergehende und der zugehörige reflektierte Impuls angezeigt bzw. aufgezeichnet werden.

Ein nach diesem Prinzip arbeitendes Gerät ist von Hart [1] angegeben worden, dessen Wirkungsweise an Hand des in Bild 1 dargestellten Schaltbildes beschrieben werden soll.

Von dem Generator *3* wird eine hochfrequente Welle erzeugt und auf eine Verstärkerröhre *5* gegeben. Diese Verstärkerröhre ist normalerweise gesperrt und wird nur periodisch von den Maximalamplituden einer von dem Generator *6* erzeugten Sinusschwingung niederer Frequenz entsperrt. Auf diese Weise werden aus den vom Generator *3* erzeugten Schwingungen konstanter Amplitude impulsgetastete Schwingungen gemacht, die von der Richtantenne *1* ausgestrahlt werden.

Als Anzeigeorgan wird ein Braunsches Rohr *12* verwendet, das zwei unter 90° angeordnete Ablenkplatten besitzt. Der Kathodenstrahl wird nun im Rhythmus der von dem Generator *6* erzeugten Modulationsfrequenz kreisförmig abgelenkt. Dazu wird die Spannung dieses Generators einmal über einen Kondensator *10* dem einen, und das andere Mal über einen Widerstand *11* dem anderen Ablenksystem des Braunschen Rohres zugeführt. Da diese beiden Spannungen in ihrer Phase um 90° gegeneinander verschoben sind, wird entsprechend Bild 2 eine Kreisablenkung des Kathodenstrahles erreicht. Diese Kreisablenkung steht, da der Generator *6* zugleich zur Impulserzeugung herangezogen wird, in festem Verhältnis zur Folge der ausgesandten Impulse.

Da die reflektierten Impulse, die von der Antenne *20* aufgenommen werden, über den Empfänger *22* der Anode oder dem Wehnelt-Zylinder des Braunschen Rohres zugeführt werden, wird der Radius der Elektronenspur bei Eintreffen eines reflektierten Impulses verändert. Diese kurzzeitige Auslenkung gibt vor der auf dem Schirm des Braun-

Digitized by Google

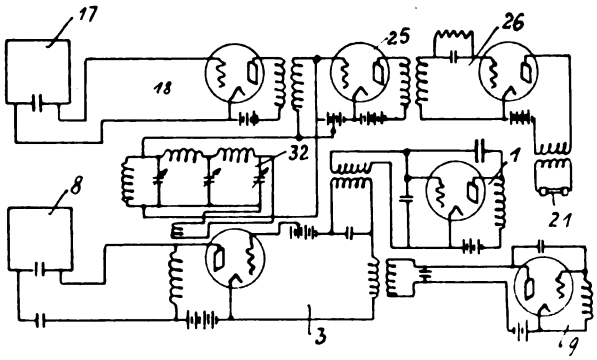


Bild 3.

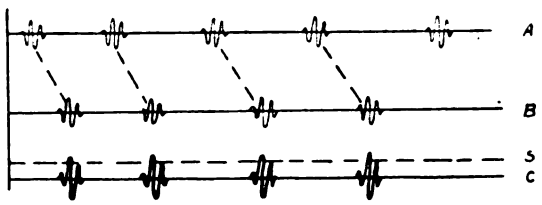


Bild 4.

Bild 3 und 4. Impulsabstandsmeßverfahren nach DRP. 623005.

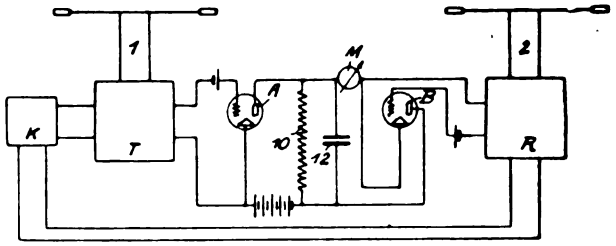


Bild 5.

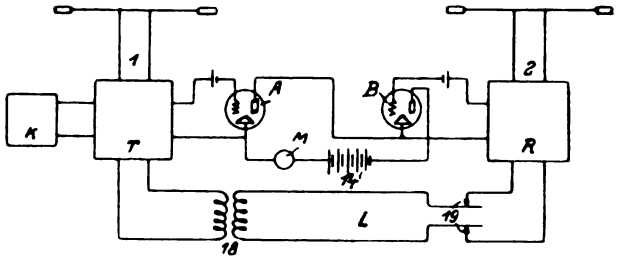


Bild 6.

Bild 5 und 6. Impulsabstandsmeßverfahren nach amerik. Patentschrift 2 055 883.

schen Rohres aufgetragenen Entfernungsskala unmittelbar die gewünschte Entfernung an.

Um die Periode der ausgesandten Impulse zur Erhöhung der Genauigkeit unter Beibehaltung der Eindeutigkeit der Messung größenordnungsmäßig der jeweils zu messenden Entfernung anzupassen, sind Mittel zur Veränderung der Frequenz des Generators *6* vorgesehen (Schalter *S* zum Einschalten eines zusätzlichen Kondensators).

Die Anzeigeanordnung kann nach einem weiteren Vorschlag von Hart [2] auch so ausgebildet sein, daß die Spur des kreisförmig ausgelenkten Kathodenstrahles des Braunschen Rohres normalerweise abgedeckt ist, so daß nur bei Eintreffen eines reflektierten Impulses eine Spur des Kathodenstrahles zu sehen ist.

Von Wolf [3] ist eine ähnlich arbeitende Abstandsmeßeinrichtung angegeben worden. (Bild 3.) Auch hier werden die Impulse dadurch erzeugt, daß die Schwingungen eines Hochfrequenzgenerators *9* auf das Gitter einer Steuerröhre *3* gegeben werden, und daß diese Steuerröhre *3* periodisch von den Scheitelamplituden einer von dem Rohr *1* erzeugten Sinusschwingung niederer Frequenz leitend gemacht wird. Die so erzeugten Impulse werden nun einerseits der Sendeantenne *8*, andererseits über eine elektrische Verzögerungsanordnung *32* einer Stufe *25* des Empfängers des Meßgerätes zugeführt. Auf diese Empfängerstufe werden auch die von der Eingangsstufe *18* über die Antenne *17* aufgenommenen reflektierten Impulse geführt. Die Verzögerungskette *32* ist bei Vornahme einer Messung so einzustellen, daß gemäß Bild 4 die direkten Impulse *A* erst bei Eintreffen der reflektierten Impulse *B* auf das Gitter der Empfangsröhre *25* einwirken. Nur bei gleichzeitigem Einwirken wird dieses Rohr leitend und überträgt auf das Rohr *26* einen kurzen Stromimpuls, der von dem Indikator *21* angezeigt wird. Da die Impulse periodisch einfallen, wird der Indikator *21* bei richtiger Einstellung der Verzögerungskette *32* maximal aufleuchten, wenn als Indikator z. B. eine Glimmlampe vorgesehen wird. Die Einstellung der Verzögerungskette ist bei dieser Meßanordnung ein Kriterium für die gesuchte Entfernung.

Eine selbsttätige Anzeige der Entfernung, die besonders bei sich bewegenden reflektierenden Gegenständen erwünscht ist, kann dadurch erreicht werden, daß das Einstellorgan der Verzögerungskette *32* umlaufend ausgebildet wird. Die Glimmlampe *21* muß dann vor der Einstellskala der Verzögerungskette angeordnet werden und mit dem Einstellorgan synchron umlaufen.

Die von Wolf [3] vorgeschlagene Methode kann auch mit Hochfrequenzschwingungen gleichbleibender Amplitude ausgeführt werden. Sieht man als Anzeigeindikator ein Braunsches Rohr vor, dessen einem Ablenkplattenpaar die reflektierten Schwingungen und dessem anderen Ablenkplattenpaar über einen Phasenschieber die direkt vom Sender kommenden Schwingungen zugeführt werden, so braucht der Phasenschieber stets nur so eingestellt zu werden, daß die vom Kathodenstrahl erzeugte Leuchtlinie unter 45° liegt. In diesem Fall besitzen die beiden den Ablenkplatten zugeführten Schwingungen unter der Voraussetzung, daß sie auf gleiche Amplitude gebracht sind, die gleiche Phase. Die Stellung des Phasenschiebers gibt wiederum die gewünschte Entfernung an.

Bei den oben besprochenen Ausführungsformen der die Laufzeit von Impulsen ermittelnden Meßgeräte wurden Aufzeichnungseinrichtungen oder Laufzeitglieder als Anzeigeindikatoren verwendet. Von Terry [4] sind Meßgeräte angegeben worden, bei denen der Wert eines sich stetig ändernden Stromes beim Eintreffen des reflektierten Impulses als Kriterium der zu messenden Entfernung dient. Ein Vorschlag übrigens, der bereits beim akustischen Echolotverfahren von Langevin [5] gemacht worden ist.

Terry [4] gibt verschiedene Ausführungen seiner Anordnung an, von denen zwei in Bild 5 und 6 schematisch angegeben sind. In Bild 5 ist das aus nebeneinanderstehendem Sender *T* und Empfänger *R* bestehende Gerät dargestellt. Sender *T* und Empfänger *R*, die auf einer sehr kurzen Trägerwelle arbeiten, werden mittels eines Modulationsgenerators *K* derart gesteuert, daß der Sender stets während der einen Halbperiode, der Empfänger nur während der anderen Halbperiode der Modulationswelle betriebsbereit ist. Der Sender sendet also periodisch hochfrequente Schwingungen stets während der einen Halbwelle des Modulationsgenerators aus, die nach ihrer Reflexion an irgendeinem reflektierenden Gegenstand im Empfänger aufgenommen werden.

Im Anzeigekreis sind zwei Röhren *A* und *B* vorgesehen. Die Gitter beider Röhren sind so weit negativ vorgespannt, daß ein Anodenstrom nicht fließen kann. Die vom Sender *T* erzeugten Impulse werden nun einerseits der Sendeantenne *1*, andererseits dem Gitter des Rohres *A* als positive Vorspannung zugeführt. Damit wird das Rohr *A* während der Ausstrahlungsperiode des Senders *T* leitend. Der im Anodenkreis des Rohres *A* fließende Strom ladet einen Kondensator *12* auf. Parallel zu diesem Kondensator liegt ein Widerstand *10*, so daß sich der Kondensator *12* über

Digitized by Google

diesen Widerstand *10* langsam entladen kann. Die von der Empfangsantenne *2* aufgenommenen, dem Empfänger *R* zugeführten reflektierten Schwingungen erzeugen am Gitter des Rohres *B* gleichfalls eine positive Vorspannung, so daß das Rohr *B* während des Empfangs der reflektierten Schwingungen leitend wird. In diesem Falle kann sich der Kondensator *12* über das Meßgerät *M* und das Rohr *B* schnell entladen. Die zum Zeitpunkt dieser Entladung auf dem Kondensator *12* noch vorhandene Ladung — während der Laufzeit der ausgesandten Schwingungen erfolgt ja außerdem eine langsame Entladung über den Widerstand *10* — ist dann ein Maß für die gesuchte Entfernung.

Um für verschiedene Entfernungsbereiche die gleiche Meßgenauigkeit zu erzielen, ist es vorteilhaft, mehrere aus Widerständen *10* und Kondensatoren *12* bestehende Einheiten vorzusehen, die dann wahlweise einschaltbar sind; entsprechend sind dann natürlich auch die Skalen des Instrumentes *M* auszuwechseln.

Eine andere Ausführungsform, wie sie von Terry [4] vorgeschlagen worden ist, ist in Bild 6 wiedergegeben. Wie bei der Ausführung, Bild 5, sind auch hier wieder ein Sender *T*, ein Empfänger *R* und ein Modulationsgenerator *K* vorgesehen. Der Modulationsgenerator *K* steuert nun aber lediglich den Sender *T*. Um die unmittelbar von der Sendeantenne *1* zur Empfangsantenne *2* gelangenden Impulse im Empfänger unwirksam zu machen, ist eine Kompensationsschaltung, bestehend aus der Kopplung *18*, der Leitung *L* und der Phaseneinstellvorrichtung *19*, vorgesehen. Bei dieser Methode, bei der ebenfalls wieder im Anzeigekreis zwei Röhren *A* und *B*, nun aber hintereinandergeschaltet, vorgesehen sind, soll die Überlappungsdauer der direkten und der reflektierten Schwingungszüge bestimmt werden.

Die Apparatur arbeitet folgendermaßen: Das Anzeigerohr *A*, das normalerweise negativ vorgespannt ist, wird nur dann leitend, wenn von dem Modulationsgenerator *K* eine positive Halbwelle, die identisch ist mit den ausgesandten Schwingungen, erzeugt wird. Durch das Anzeigegerät *M* kann aber in diesem Falle noch kein Strom fließen, da das Rohr *B*, in dessen Anodenkreis es liegt, noch gesperrt ist. Dieses Rohr wird erst bei Eintreffen der reflektierten Schwingungen geöffnet. In dem aus den Röhren *A* und *B*, dem Anzeigeinstrument *M* und der Batterie *14* bestehenden Stromkreis wird also nur dann ein Strom fließen, solange direkte und reflektierte Schwingungszüge gleichzeitig die Überwindung der Vorspannungen der Röhren *A* und *B* vornehmen. Der Zeigerausschlag des Instrumentes *M* ist direkt ein Maß für die gesuchte Entfernung.

Die von Terry [4] angegebene Anordnung, Bild 5, besitzt den Vorteil, daß durch die periodisch abwechselnd erfolgende Öffnung und Sperrung von Sender und Empfänger selbsttätig eine Entkopplung von Sender und Empfänger erreicht ist. Ein ähnlicher Vorschlag ist auch von Löwy [6] gemacht worden, der nun an Hand von Bild 7 bis 9 kurz erläutert werden soll. Sender und Empfänger des Rückstrahlgerätes werden von einem einstellbaren Modulationsgenerator derart gesteuert, daß beispielsweise der Sender während der positiven, der Empfänger während der negativen Halbwellen der von dem Modulationsgenerator erzeugten Sinusschwingungen geöffnet ist. In Bild 7 bis 9 sind die direkten Impulse oberhalb, die reflektierten Impulse unterhalb der Zeitachse *t* aufgetragen.

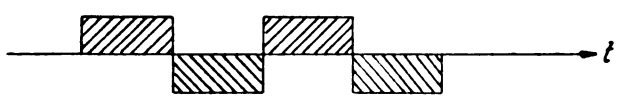


Bild 7.

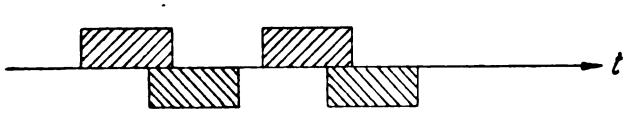


Bild 8.

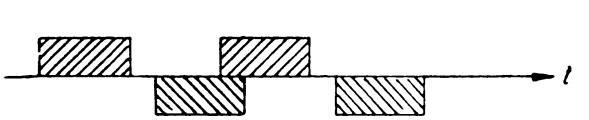


Bild 9.

Bild 7 bis 9. Impulsabstandsmeßverfahren nach DRP. 403939.

Ist die Frequenz des Modulationsgenerators gerade so eingestellt, daß eine Halbwelle dem doppelten Abstand zwischen Meßgerät und reflektierendem Gegenstand entspricht, so wird sich Bild 7 ergeben; die reflektierten Impulse werden gerade in den Pausen der Senderstrahlung im Empfänger eintreffen. Ist der Abstand der reflektierenden Fläche etwas geringer als ¼ der eingestellten Modulationswellenlänge, so werden die Impulse entsprechend Bild 8 im Empfänger eintreffen. Ist dagegen der Abstand etwas größer, so ergibt sich das Bild 9. Da nur in dem in Bild 7 dargestellten Fall ein Maximum der Empfangswirkung auftreten wird, ist die Frequenz des Modulationsgenerators, bei der das Maximum der Empfangswirkung auftritt, ein Kriterium für die gesuchte Entfernung.

Das von Löwy [6] vorgeschlagene Verfahren ergibt nur dann eine Eindeutigkeit, wenn der doppelte zu messende Abstand der Länge eines Impulses entspricht. Es kann aber auch vorkommen, daß sich der erste reflektierte Impuls nicht an den ersten, sondern an den zweiten oder dritten direkten Impuls anschließt. Auch dann wird im Indikator ein Anzeigemaximum auftreten. Um diese Mehrdeutigkeit zu umgehen, kann man den Vorschlag von Gutton [6a] aufnehmen. Danach soll der Abstand durch Messung des Frequenzunterschiedes derjenigen Modulationsfrequenzen bestimmt werden, bei denen zwei nebeneinander liegende Empfangsminima oder -maxima auftreten.

Im folgenden sollen noch einige Maßnahmen zur Erhöhung der Meßgenauigkeit betrachtet werden, die zwar für Echolotverfahren vorgeschlagen wurden, die aber in ähnlicher Weise für elektromagnetische Strahlungen Anwendung finden können. Ist die zu ermittelnde Entfernung so gering, daß es schwierig wird, genügend kurze Impulse zu erzeugen, so kann ein Verfahren Anwendung finden, wie es den Atlas-Werken [7] patentiert worden ist, vgl. Bild 10 und 11. Als Abszisse ist in Bild 10 und 11 die Zeit und als Ordinate beispielsweise der durch das Anzeigegerät fließende Strom aufgetragen. Im Punkt *0* erfolgt die Abgabe eines aus einer bestimmten Anzahl von Schwingungen bestehenden Signals. Nach Durchlaufen der zu messenden Entfernung treffen die Schwingungen zur Zeit *1* am Empfänger ein und regen dort ein auf die Frequenz der Signale abgestimmtes Schwingungssystem zu selbsttätigen Schwingungen an. Diese Schwingungen werden aufrechterhalten, z. B. bis zur Zeit *5*, wie dies die schraffierte Fläche darstellt. Während der Zeit zwischen *1* und *5* erfolgt also eine Einwirkung auf das im Schwingungskreis liegende bzw. mit ihm gekoppelte Anzeigeinstrument. Zur Zeit *5* werden die Schwingungen gelöscht und gleichzeitig wird von dem Sender ein neues Signal ausgesandt. Dieses kommt zur Zeit *6* wieder am Empfänger an und erregt dort selbständige Schwingungen, die bis zur Zeit *10* aufrechterhalten werden usw.

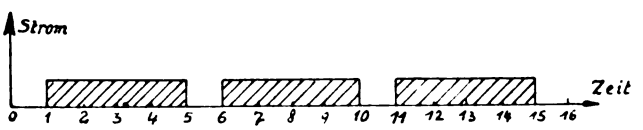


Bild 10.

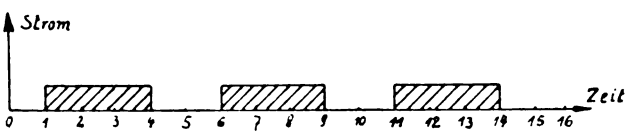


Bild 11.

Bild 10 und 11. Echolotverfahren nach DRP. 418091.

Digitized by Google

Ist die zu messende Entfernung doppelt so groß als eben angenommen, so werden die Schwingungen nur während der Zeiten *1* bis *4* aufrechterhalten. Da im ersten Fall eine Einwirkung bestimmter Stärke von einer längeren Zeitdauer als im zweiten Fall auf das Anzeigegerät einwirkt, wird es auch einen größeren Ausschlag als im zweiten Fall zeigen. Die Größe des Ausschlages des Anzeigegeräts ist also unmittelbar ein Maß für die Entfernung.

Betrachtet man nochmals beispielsweise die von Hart [1, 2] angegebene Anordnung und untersucht sie auf ihre Meßgenauigkeit hin, so findet man, daß die Genauigkeit um so größer sein wird, je weiter die auf dem Schirm des Braunschen Rohres aufgezeichnete Skala auseinandergezogen erscheint. Diesem Auseinanderziehen der Skala ist aber durch die Wahl der die Impulse erzeugenden Modulationsfrequenz eine Grenze gesetzt. Der Abstand je zweier Impulse muß ja bekanntlich aus Gründen der Eindeutigkeit der Messung größer sein als die doppelte zu messende Entfernung.

Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit ist der Signal-Gesellschaft [8] für ein akustisches Echolotverfahren folgender Vorschlag patentiert worden. Soll ein Abstand von z. B. 3250 m gemessen werden, so werden zunächst Impulse ausgesandt, deren Abstand größer ist als es dem doppelten Abstand zwischen Sender und Rückstrahler entspricht. Diese Messung wird eindeutig, aber nicht sehr genau. Nun wird der Impulsabstand so weit verkleinert, daß die Hunderter und die Zehner mit genügender Genauigkeit ermittelt werden können. Da der ungefähre Abstand bereits bekannt ist, macht es keine Schwierigkeiten, die Mehrdeutigkeit der zweiten Messung zu eliminieren. Ein ähnlicher Vorschlag ist auch von Behm [9] für ein mit Kurzzeitmesser arbeitendes Echolotgerät gemacht worden.

Es soll noch kurz auf eine Anordnung zur Erzeugung sehr kurzer und möglichst von Ein- und Ausschwingvorgängen freier Impulse hingewiesen werden, die der Signal-Gesellschaft [10] patentiert wurde. Da es sich um ein Echolotgerät handelt, wird mit akustischen Impulsen gearbeitet. Sender- und Empfängermembran sind auf verschiedene Wellen abgestimmt. Die Sendermembran wird nun zur Ausstrahlung kurzer Impulse in der der Resonanz der Empfängermembran entsprechenden Frequenz kurzzeitig erregt. Da die Sendermembran in der ihrer Resonanz entsprechenden Frequenz abklingen wird, wird der vom Empfänger aufgenommene Impuls frei sein von diesem Ausschwingvorgang.

b) Erzeugung einer Schwebungs- oder einer Zwischenfrequenz durch Änderung der Senderfrequenz.

α) Kontinuierliche Änderung der Senderfrequenz. Bei diesem Verfahren handelt es sich grundsätzlich um eine Phasenmessung zwischen den ausgesandten und den von einem Reflektor zurückgeworfenen Schwingungen. Diese Phasenmessung erfolgt allerdings über ein Mehrfaches der Periode von 2π, so daß zur Erzielung einer eindeutigen Messung als Kriterium für die gesuchte Entfernung die aus ausgesandter und reflektierter Schwingung gebildete Schwebung mit einem Frequenzmesser ermittelt wird.

Ein solches Verfahren wurde in Deutschland der AEG [11] patentiert. Die Frequenz des Senders wird zeitabhängig, vorzugsweise linear, geändert. In dem neben dem Sender aufgestellten Empfänger kommen sowohl die reflektierten als auch die unmittelbar vom Sender zum Empfänger gelangenden Schwingungen an; letztere haben gegenüber den reflektierten Schwingungen bereits eine andere Frequenz, so daß am Empfänger ein Schwebungston auftreten wird, dessen Höhe abhängig ist von dem Abstand des reflektierenden Gegenstandes.

In Bild 12 ist ein Meßgerät zur Durchführung dieses Verfahrens schematisch angegeben. *1* stellt den Sender, *2* den Empfänger dar. Die hochfrequenten Schwingungen werden in dem Rohr *14* mit dem aus Induktivität *16* und Kapazität *15* bestehenden Schwingungskreis erzeugt.

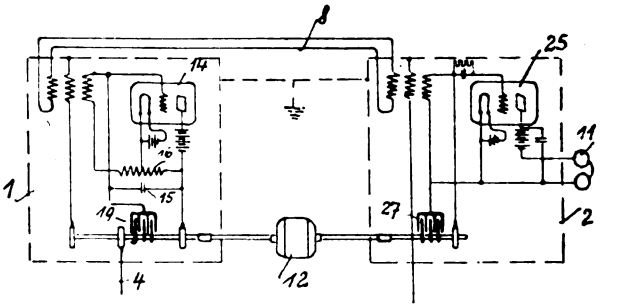


Bild 12. Abstandsmeßverfahren nach der Schwebungsmethode nach DRP. 509717.

Parallel zu diesem Sehwingungskreis liegt ein Kondensator *19*, dessen Kapazität mit Hilfe eines Motors *12* zur linearen Frequenzänderung des Schwingungskreises verändert wird. Die Sendeschwingungen werden nun über die Leitungen *8* dem Empfänger *2* zugeführt und außerdem von der Sendeantenne *4* ausgestrahlt. Damit die Sendeschwingungen jeweils nur während der einen halben Umdrehung der Welle des Motors *12* ausgestrahlt werden, während der beispielsweise die Frequenz des Sendeschwingungskreises, hervorgerufen durch den umlaufenden Kondensator *19*, zunimmt, wird der Sendeantenne die auszustrahlende Energie ebenfalls über eine auf der Achse des Motors *12* sitzende, nur zur Hälfte leitende Scheibe zugeführt.

Synchron mit dem Kondensator *19* rotiert ein im Empfangsschwingungskreis liegender Kondensator *27*, so daß Sende- und Empfangskreis stets ungefähr auf die gleiche Frequenz abgestimmt sind. Dem Gleichrichterrohr *25* werden nun zwei etwas voneinander abweichende Frequenzen zugeführt, so daß im Ausgang, beispielsweise im Kopfhörer oder Frequenzmesser *11*, eine Schwebungsfrequenz auftritt, deren Größe ein Maß für die gesuchte Entfernung ist.

Da zur Entfernungsmessung am besten sehr kurze Wellen verwendet werden, ist es schwer, absoluten Synchronismus in der Abstimmung von Sende- und Empfangsschwingungskreis zu erreichen. Der AEG [12] wurde daher gemäß Bild 13 ein weiteres Verfahren patentiert, das für Sender und Empfänger denselben Schwingungskreis verwendet. Dieser Schwingungskreis besteht aus der Induktivität L, dem Kondensator C und dem veränderlichen Kondensator C_1, der von dem Motor M in Umdrehung versetzt wird. Als Sende- und Empfangsröhre wird ein normales Schwingaudion V_1 verwendet, in dessen Gitterkreis die von ihm erzeugten und die reflektierten Wellen überlagert werden. Im Anodenkreis wird über einen Transformator T die entstehende Schwebungswelle angezeigt. Natürlich kann diese Anordnung auch so abgeändert werden, daß zwei getrennte Röhren mit dem gemeinsamen Schwingkreis gekoppelt werden. Das eine Rohr dient dann zur Schwingungserzeugung, das andere zur Überlagerungsbildung.

Praktische Versuchsergebnisse dieses der AEG [11] patentierten Verfahrens sind von Matsuo [13] mitgeteilt worden. Matsuo gibt an, mit einer drahtlosen Welle von $6 \cdot 10^8$ Hz gearbeitet zu haben, die in einem Bereich von

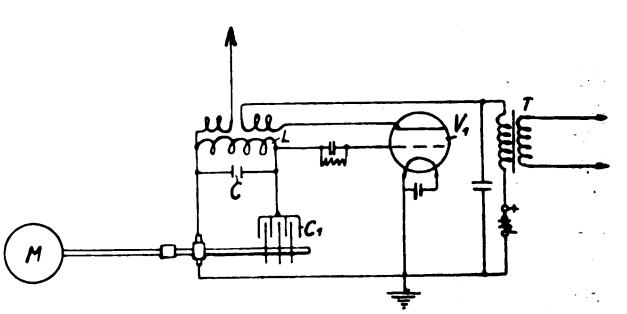


Bild 13. Abstandsmeßverfahren nach der Schwebungsmethode nach DRP. 538843.

Digitized by Google

$\pm 0{,}19 \cdot 10^8$ Hz variiert wurde. Die zurückkommenden Wellen wurden durch einen Strombegrenzer stets auf ein gleiches Niveau reduziert, da sich die Amplitude der zurückkommenden Welle etwa umgekehrt proportional dem Quadrat der zu messenden Entfernung ändert. Matsuo gibt an, daß er mit einer Senderleistung von 3,9 W Entfernungen von 4 bis 160 m gemessen habe.

Da es bei diesem Verfahren Schwierigkeiten bereitet, die Frequenz eines ultrakurzen Senders dauernd zu ändern, schlägt Moueix [14] vor, die Senderfrequenz, beispielsweise eine 16-cm-Welle, konstant zu lassen und dafür eine diesem Träger aufmodulierte längere Welle in der oben beschriebenen Weise zu verändern.

Um in nächster Nähe des Meßgerätes befindliche Rückstrahler (z. B. Wellenberge auf See) nicht anzuzeigen, schlägt Moueix weiter vor, vor den die Schwebungsfrequenz messenden Kreis ein Siebglied einzuschalten, das Schwebungsfrequenzen unterhalb eines bestimmten Bereiches nicht mehr hindurchläßt.

β) Sprungweise Änderung der Senderfrequenz. Um die kontinuierliche Änderung einer Frequenz überhaupt zu vermeiden und um weiterhin eine Entkopplung von Sender und Empfänger zu erreichen, ist der Vorschlag gemacht worden, die Senderfrequenz sprungweise zwischen zwei festen Werten zu verändern. Gutton [15] verwendet dazu zwei Sender, die wechselweise während konstanter Zeiten zwei voneinander verschiedene Frequenzen aussenden. Der Empfänger ist ständig geöffnet, spricht aber nur auf die Differenzfrequenz dieser beiden Einzelfrequenzen an. Normalerweise wird der Empfänger daher keine Schwingungen aufnehmen. Befindet sich jedoch im Strahlungsfeld dieser ausgesandten Strahlungen ein reflektierender Gegenstand, so wird die reflektierte Schwingung der einen Frequenz im Empfänger eintreffen, zu einer Zeit, während der von dem anderen Sender bereits die andere Frequenz ausgesandt wird. Der Empfänger wird dann aus diesen beiden aufgenommenen Schwingungen eine Zwischenfrequenz bilden. Wird diese Zwischenfrequenz durch Veränderung der Frequenz, die die wechselweise Ein- und Ausschaltung der beiden Sender vornimmt, auf ihren maximalen Anzeigewert gebracht, so ist die jeweils eingestellte Schaltfrequenz ein Maß für die gesuchte Entfernung.

Der gleiche Vorschlag ist übrigens auch von Hell [16] gemacht worden. Die von Hell angegebene Anordnung ist in Bild 14 dargestellt. Die Änderung der Frequenz des Senders *1* mit zugehöriger Antenne *2* wird mit Hilfe eines im Anodenkreis dieses Senders liegenden Generators *5* vorgenommen. Das Maximum der Überlagerungsfrequenz wird dann in einem Kopfhörer *6* abgehört.

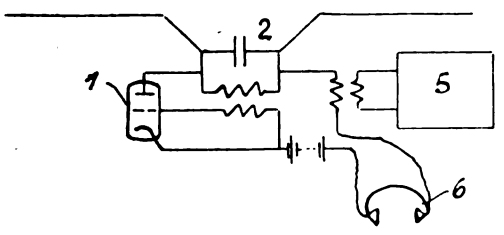


Bild 14.

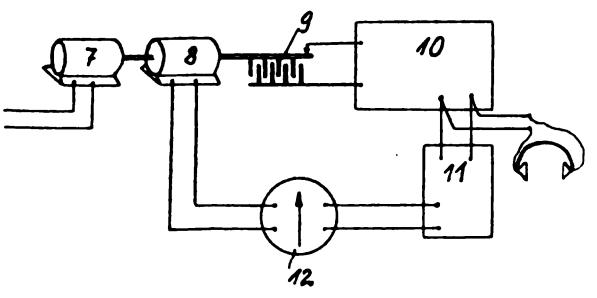


Bild 15.

Bild 14 und 15. Abstandsmeßverfahren mit sprunghafter Änderung der Senderfrequenz nach DRP. 564 802.

Eine andere Auswertung dieses Verfahrens gibt Hell [16] mit der in Bild 15 dargestellten Anordnung an. Die Senderanordnung *10* ist etwa nach Bild 14 geschaltet. Hier wird nun die Phase der Wechselspannung, in deren Rhythmus die Schwingungszahl der Modulationsfrequenz der Sendeanordnung *10* verändert wird, verglichen mit der Phase der Spannung, die nach Gleichrichtung der entstehenden Zwischenfrequenz erhalten wird. Am Phasenmesser *12* wird direkt die Entfernung abgelesen. In Bild 15 ist *7* ein Motor, der einen Wechselstromgenerator *8* und einen zur Frequenzänderung vorgesehenen Kondensator *9* dreht. Mit *11* ist ein Gleichrichter bezeichnet, der die entstehende Überlagerungsschwingung gleichrichtet und dem Phasenmesser *12* zuführt.

Der Vollständigkeit halber soll noch auf einen Vorschlag von Rieber [17] hingewiesen werden, der abwechselnd hochfrequente Impulse verschiedener Frequenz ausstrahlt. Die Impulsfolge wird nun bei Anwesenheit eines reflektierenden Gegenstandes so eingestellt, daß der reflektierte Impuls gerade dann im Empfänger eintrifft, wenn der nächste direkte Impuls ausgesandt wird. Beobachtet wird wiederum die aus den beiden Impulsen gebildete Zwischenfrequenz, auf die der Empfänger abgestimmt ist.

Das beschriebene Prinzip der sprungweisen Änderung der Sendefrequenz hat Runge [18] gemäß Bild 16 bis 18 in ähnlicher Weise vorgeschlagen. Gemäß Bild 16 soll ein kurzer Impuls S von der Frequenz f_1 und daran anschließend ein langer Impuls P von der Frequenz f_2 ausgestrahlt werden. Die entsprechenden reflektierten Impulse sind mit S_r und P_r bezeichnet. Von dem Impuls S erfolgt gleichzeitig der Start zur Zeitablenkung des Kathodenstrahles einer Braunschen Röhre. Nach der Zeit a wird der Empfänger kurzzeitig einen Zwischenfrequenzimpuls, herrührend von dem direkten Impuls P und dem reflektierten Impuls S_r erhalten. Dieser Zwischenfrequenzimpuls wird auf das zweite Ablenkplattenpaar des Braunschen Rohres gegeben. Der Abstand a kann dann unmittelbar abgelesen werden.

Gemäß Bild 17 und 18 ist es auch möglich, die beiden Impulse verschiedener Frequenz gleichlang oder annähernd gleichlang zu machen. Die vom Kathodenstrahl des Braunschen Rohres aufgezeichnete Überlappungsdauer a_1 von direktem und reflektiertem Impuls ist dann ein Maß für die gesuchte Entfernung.

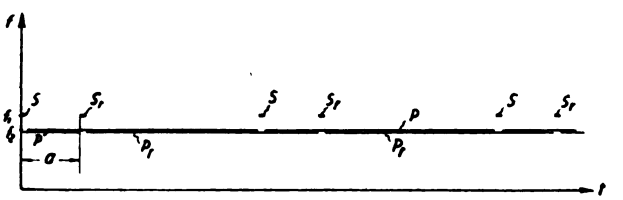


Bild 16.

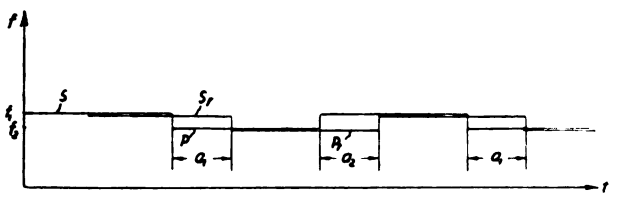


Bild 17.

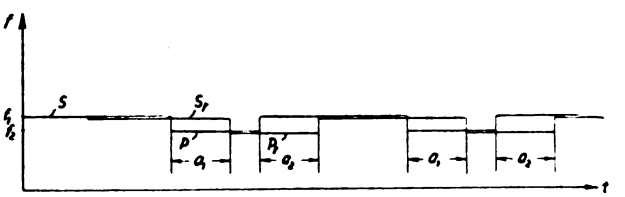


Bild 18.

Bild 16 bis 18. Abstandsmeßverfahren mit sprunghafter Änderung der Senderfrequenz und Beobachtung der Zwischenfrequenzbildung nach franz. Patentschrift 809 012.

Digitized by Google

c) Messung der Phasenverschiebung zwischen einer ausgesandten und der entsprechenden reflektierten Schwingung.

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, wird man zur Abstandsmessung hauptsächlich kurze Wellen, vor allem die Dezimeterwellen, heranziehen. Bei dem nun zu beschreibenden Verfahren handelt es sich daher zumeist darum, einer Trägerwelle, die beispielsweise im Dezimeterwellenbereich liegt, eine längere Welle aufzumodulieren und nun die Phasenverschiebung zwischen der direkten und der reflektierten Modulationswelle zu messen.

Ein nach diesem Verfahren arbeitendes Meßgerät ist z. B. auf dem französischen Dampfer »Normandie« [19] aufgestellt worden. Die von einem 16-cm-Sender erzeugte Hochfrequenz wird mit einer Welle von 7500 Hz moduliert. Der Phasenvergleich wird nun mit der 7500-Hz-Welle vorgenommen.

Von Turner [20] ist ein auf demselben Prinzip beruhendes Meßgerät angegeben worden. Entweder erfolgt der Phasenvergleich mit der Trägerwelle selbst — dann wird eine sehr lange Welle von beispielsweise 1000 m verwendet — oder aber es wird eine sehr kurze Welle von 1 bis 5 m verwendet, die mit einer längeren Welle, z. B. 2000 m, moduliert ist. Dann wird der Phasenvergleich zwischen direkter und reflektierter Modulationswelle vorgenommen. Als Anzeigegerät wird ein Braunsches Rohr verwendet, dessen Elektronenstrahl während jeder Phasenänderung der Träger- bzw. Modulationswelle vom positiven zum negativen Maximum einmal über den Leuchtschirm abgelenkt wird; das Braunsche Rohr besitzt in diesem Falle nur ein einziges Ablenkplattenpaar. Das Steuergitter des Braunschen Rohres, auf das die reflektierte Welle gegeben wird, ist soweit negativ vorgespannt, daß nur die positive Spannungsspitze der reflektierten Welle diese Vorspannung überwindet, so daß auf dem Schirm der Kathodenstrahl als Leuchtfleck erscheint. Vor dem Schirm der Braunschen Röhre ist eine Skala angebracht, auf der die Entfernung unmittelbar abzulesen ist.

Turner [20] hat weiterhin vorgeschlagen, eine Kreisablenkung des Kathodenstrahles des Braunschen Rohres zu erzeugen, derart, daß einer vollen Kreisablenkung eine Wellenlängeneinheit entspricht. Wird die reflektierte Welle wiederum dem negativ vorgespannten Steuergitter zugeführt, so erzeugt ihre Spannungsspitze ein Aufleuchten des Kathodenstrahles an der Stelle der Skala, die dem tatsächlichen Abstand entspricht.

In diesem Zusammenhang soll auch noch auf das zweite von Wolf [3] vorgeschlagene Verfahren hingewiesen werden, das bereits unter a) besprochen wurde.

Um die Phasenverschiebung zwischen zwei Wellen gleicher Frequenz zu bestimmen, wurden von Kunze [21] zwei verschiedene Methoden angegeben. Der eine Vorschlag besteht in der Anwendung der Binauralmethode, mit der aber lediglich Laufzeitunterschiede von $3 \cdot 10^{-5}$ s zu messen sind. Da drahtlose Wellen in dieser Zeit eine Strecke von etwa 9 km zurücklegen, ist dieses Verfahren für die Abstandsmessung praktisch ungeeignet.

Sollen hauptsächlich größere Entfernungen, also z. B. größere Höhen annäherungsweise bestimmt werden, so ist das zweite, von Kunze [21] vorgeschlagene Verfahren anwendbar, das mit elektrischen Verzögerungsketten arbeitet, Bild 19. Die von den beiden Empfängern *29* und *30* kommenden Schwingungen — im vorliegenden Fall direkte und reflektierte Schwingung — werden über je eine Laufzeitkette mit einstellbaren Gliedern gegeben. Das Ende dieser beiden Ketten ist an einen gemeinsamen Indikator angeschlossen.

Die Schieber der Verzögerungsketten werden nun so eingestellt, daß im Indikator *41* ein Maximum oder ein Minimum der Lautstärke auftritt. Die Differenz der Stellungen der beiden Schieber gibt die Phasenverschiebung und damit die gesuchte Entfernung an. Da ein Verzögerungsglied einer solchen Kette mit einer Laufzeit bis zu 10^{-7} s hergestellt werden kann, ist eine solche mechanische Anordnung für die Phasenmessung als brauchbar zu bezeichnen.

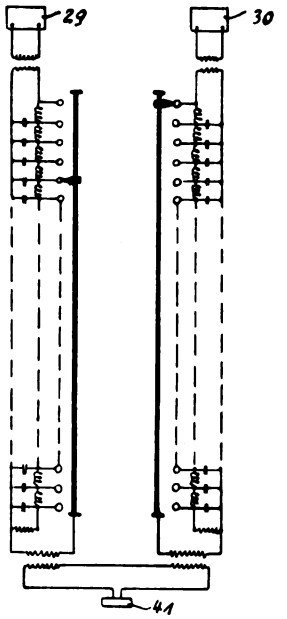


Bild 19. Abstandsmeßverfahren mit Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen ausgesandter und reflektierter Welle nach DRP. 469 471.

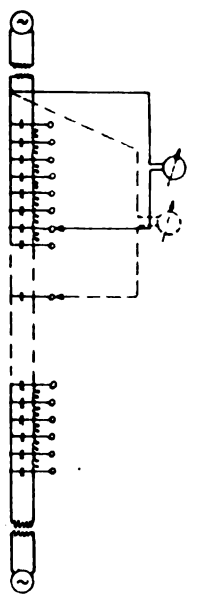


Bild 20. Abstandsmeßverfahren mit Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen ausgesandter und reflektierter Welle nach DRP. 463 076.

Eine Abänderung dieser elektrisch-mechanischen Phasenmeßeinrichtung, Bild 20, ist den Atlas-Werken [22] patentiert worden. Es wird nunmehr nur eine einzige Kette vorgesehen, der die zu vergleichenden Spannungen von den beiden Enden aus zugeführt werden. Sind die Spannungen gleichphasig, so wird ein in der Mitte der Kette liegendes Anzeigegerät einen Maximalausschlag zeigen, sind sie gegenphasig, so wird dieses Gerät einen Minimumausschlag zeigen. Aus der Stellung des verschiebbaren Instrumentenabgriffes ist bei Maximal- bzw. Minimalausschlag die Entfernung zu ermitteln.

d) Erzeugung von stehenden Wellen.

Sowohl das im vorhergehenden Abschnitt angegebene als auch das nun zu beschreibende Verfahren nutzt die aus der direkten und der reflektierten Welle sich ergebenden Interferenzen aus. Während bei dem im Absatz c) besprochenen Verfahren getrennte Sender und Empfänger vorgesehen waren und im Ausgang des Empfängers in einem Phasenmeßgerät die Phasenverschiebung zwischen direkter und reflektierter Welle bestimmt wurde, wird bei dem folgenden Verfahren bewußt auf einen besonderen Empfänger verzichtet. Es wird vielmehr die Rückwirkung der reflektierten Welle auf die ausgesandten Schwingungen beobachtet und als Kriterium für den zu ermittelnden Abstand ausgewertet.

Grundsätzlich arbeitet dieses Verfahren in der Weise, daß die Wellenlänge des Trägers oder der Modulationsfrequenz so eingestellt wird, daß sich zwischen dem Sender und dem reflektierenden Gegenstand stehende Wellen ausbilden.

Dieser Gedanke ist erstmalig von Leimbach [23] angegeben worden. Die Wellenlänge des Senders wird nach dem von ihm angegebenen Verfahren so eingestellt, daß die Dämpfung des Sendesystems ein Minimum wird. Das ist dann der Fall, wenn der Abstand zwischen Sender und reflektierender Fläche $\lambda/4$, $^3/_4\,\lambda$, $^5/_4\,\lambda$ usw. beträgt.

Von der AEG [24] sowie von Thornton [25] ist dieses Verfahren auf folgende Weise ausgewertet worden: Gemäß Bild 21 werden zwischen dem Sender und der reflektierenden Erdoberfläche stehende Wellen erzeugt, so daß bestimmte Höhenschichten durch Auftreten von Maxima und Minima

Digitized by Google

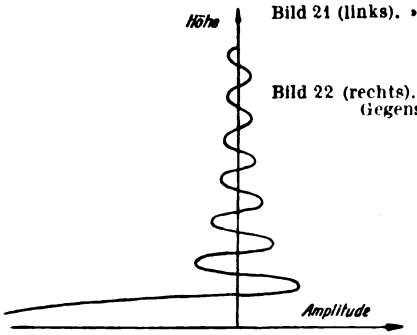


Bild 21 (links). »Stehende Wellen«-Methode zur Abstandsbestimmung nach DRP. 542264.

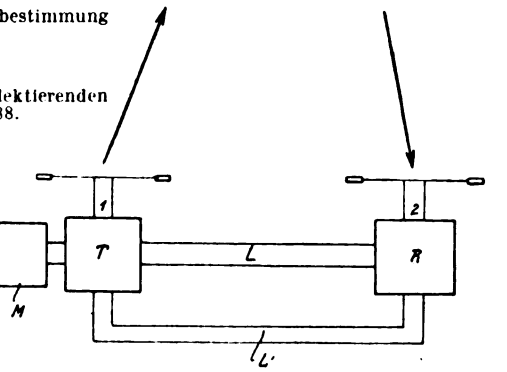


Bild 22 (rechts). Erzeugung einer Rückkopplung über reflektierenden Gegenstand nach amerik. Patentschrift 2055388.

gekennzeichnet werden. Wenn beispielsweise ein Flugzeug vom Boden aus startet, so wird es nacheinander die einzelnen Maxima und Minima durchlaufen, die entweder auf einem Anzeigeinstrument oder auf einer Registriervorrichtung aufgeschrieben werden. Um auch die Werte, die zwischen den einzelnen Maxima und Minima liegen, eindeutig zu kennzeichnen, sind der AEG [24] verschiedene Schaltungen patentiert worden, die es ermöglichen, den Zeiger des Anzeigegerätes beim Passieren eines Maximums auf dieser Stellung zu halten, bis das nächste Maximum eintrifft. Auf diese besonderen Schaltungen soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

Daselbe Verfahren ist auch von Hollmann [26] angegeben worden. Um in einer beliebigen Höhe über dem Erdboden den genauen Bodenabstand zu bestimmen, werden nach dem von Hollmann vorgeschlagenen Verfahren die Wellenlängen bestimmt, bei denen zwei nebeneinander liegende Maxima oder Minima auftreten.

Um eine Entkopplung von Sende- und Empfangsstrahler zu erreichen, schlägt Hollmann vor, den Sendeparabol innerhalb des Empfangsparabols anzuordnen. Die Öffnungen beider Reflektoren müssen natürlich in derselben Richtung liegen.

Tatsächlich ist auch bereits ein auf dem Verfahren der stehenden Wellen beruhendes Höhenmeßinstrument gebaut worden, wie es von Patterson [27] angegeben worden ist. Patterson hat dieses Verfahren insofern noch weiterentwickelt, als bestimmte Stellen der Maxima und Minima durch besondere Signale dem Flugzeugführer angezeigt werden.

Da die Höhenbestimmung dann ungenau wird, wenn nur ein einziges der auftretenden Maxima oder Minima übersehen wird, schlägt Hart [28] vor, die zur Abstandsmessung benutzten Ultrakurzwellen mit einer längeren Welle zu modulieren und diese Welle so zu verändern, daß in der Empfangsstation ein Spannungsbauch oder ein Spannungsknoten auftritt. Die dabei abgelesene Wellenlänge ist ein Maß für die gesuchte Entfernung.

Ein ähnliches Verfahren ist von Jenkins [29] vorgeschlagen worden.

e) Rückkopplung über den reflektierenden Gegenstand.

Bei diesem Verfahren wird von dem Sender des Abstandsmeßgerätes eine hochfrequente Welle konstanter Amplitude ausgestrahlt und von dem reflektierenden Gegenstand auf den Empfänger des Gerätes zurückreflektiert. Diese vom Empfänger aufgenommenen Schwingungen werden gleichgerichtet und dem Generator des Senders als negative Vorspannung zugeführt. Dadurch wird die Ausstrahlung des Senders solange unterbrochen, bis keine reflektierte Energie mehr auf den Empfänger gelangt. Nach dieser Zeit ist die negative Vorspannung am Sender wieder verschwunden, so daß der Sender erneut eine Schwingung ausstrahlen kann. Diese periodische Öffnung und Sperrung des Senders ergibt eine Modulationsfrequenz, die abhängig ist von der Entfernung des reflektierenden Gegenstandes vom Meßgerät. Diese Frequenz wird gemessen und aus ihr der Abstand ermittelt.

Dieses Verfahren ist sowohl von Koulikoff [30], von Nicolson [31] als auch von Terry [32] angegeben worden.

Gemäß Bild 22, in dem der Vorschlag von Terry [32] dargestellt ist, besteht das Abstandsmeßgerät aus einem Sender *T* und einem Empfänger *R*. Der Sender strahlt dauernd hochfrequente Schwingungen aus, die nach ihrer Reflexion von dem Empfänger aufgenommen und gleichgerichtet werden. Die direkt vom Sender nach dem Empfänger übergehende Strahlung wird durch eine über die Leitung *L'* gelangende Schwingung kompensiert. Die vom Empfänger aufgenommene, reflektierte und anschließend gleichgerichtete Spannung wird über die Leitung *L* einer Hochfrequenzstufe des Senders zugeführt, und zwar als negative Vorspannung. Dadurch wird die kontinuierliche Senderschwingung unterbrochen, und zwar solange, als das Gitter dieses Hochfrequenzrohres eine aus der reflektierten Schwingung erzeugte Vorspannung erhält. Daran anschließend wird die Sendeschwingung wieder ausgestrahlt, nach ihrer Reflexion ebenfalls wieder von dem Empfänger aufgenommen und zur negativen Vorspannung eines Rohres des Senders benutzt. Auf diese Weise werden von dem Sender hochfrequente Impulse, und zwar in einer Periode ausgesandt, die abhängig ist von der Laufzeit der Schwingungen nach dem reflektierenden Gegenstand und zurück. Die sich dabei einstellende Frequenz wird mit Hilfe eines Frequenzmessers *M* gemessen und ist direkt ein Maß für die gesuchte Entfernung.

Das gleiche Verfahren ist nochmals in der Weigl-Patentschrift [33] beschrieben worden.

f) Beeinflussung elektrischer Größen durch den reflektierenden Gegenstand.

Wird an dem Flugzeug, dessen Bodenabstand zu bestimmen ist, ein offener Schwingungskreis angebracht, so ändert sich die Kapazität dieses Schwingungskreises in Abhängigkeit von dem jeweils herrschenden Bodenabstand. Von Junkers [34] wurde daher vorgeschlagen, die beiden Belege des Schwingkreiskondensators eines drahtlosen Senders als offenliegende Flächen möglichst weit entfernt voneinander, z. B. auf den unteren Seiten der Tragflächen, anzuordnen, wie es in Bild 23 dargestellt ist. An den Enden der beiden Tragflächen sind die Platten 1 und 2 des Schwingkreiskondensators angebracht, die über die Leitungen *3* zu dem Sender *4* führen.

Die Messung des Bodenabstandes soll nach diesem Vorschlag mit Hilfe des Resonanzverfahrens erfolgen. Es ist ein zweiter Sender vorzusehen, dessen Frequenz periodisch, beispielsweise mit Hilfe eines umlaufenden Kondensators,

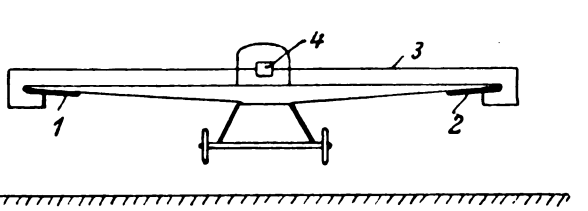


Bild 23. Abstandsmeßverfahren nach der Kapazitätsmethode nach DRP. 431152.

Digitized by Google

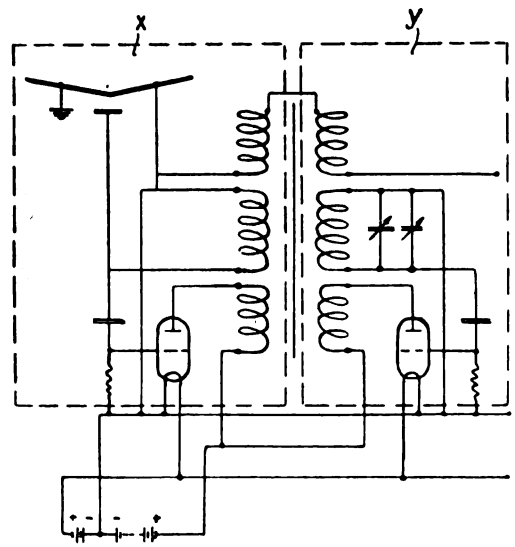


Bild 24. Abstandsmeßverfahren nach der Kapazitätsmethode nach DRP. 532885.

in einem Bereich geändert wird, in dem eine vom Bodenabstand abhängige Änderung der Frequenz des Schwingkreises des ersten Senders zu erwarten ist. Die Anzeige erfolgt mit Hilfe einer parallel zum Schwingkreis liegenden Glimmlampe, die in der Resonanzlage periodisch aufleuchtet. Läuft entweder die Anzeigeskala oder die Glimmlampe synchron mit dem Drehkondensator um, so wird eine selbsttätige Anzeige der gesuchten Entfernung erhalten.

Um die Abweichung eines Flugzeuges von einer bestimmten vorgeschriebenen Höhe anzuzeigen, ist von Junkers [35] eine weitere Anordnung angegeben worden, die an der Hand von Bild 24 kurz erläutert werden soll. Die Einrichtung besteht aus einem Oszillator *X*, dessen Schwingungskreiskapazität von der Höhe des Flugzeuges über der Erdoberfläche abhängig ist, und einem Oszillator *Y*, der auf beliebige Wellenlänge einstellbar ist. Dieser Oszillator *Y* soll nun beispielsweise durch eine veränderliche Kapazität so eingestellt werden, daß in einer gewünschten Höhe Resonanz zwischen beiden Schwingungskreisen besteht. Bei Abweichung von dieser Höhe tritt ein Schwebungston auf, der dem Flugzeugführer auf diese Weise anzeigt, daß er sich oberhalb oder unterhalb der gewünschten Höhe befindet.

Werden beide Kreise miteinander gekoppelt, so kann dieses Verfahren noch verbessert werden. Es hat sich nämlich gezeigt, daß, wenn das Luftfahrzeug der am Kondensator eingestellten Höhe nahe kommt, der Ton im Telephon schon, bevor er unter der Hörbarkeitsgrenze verschwindet, in einer ganz bestimmten Höhe mit einem Knack aussetzt und gegebenenfalls unterhalb des Resonanzpunktes ebenfalls wieder in bestimmter einstellbarer Höhe plötzlich wieder auftritt. Durch die Stärke der Kopplung der beiden Kreise kann die Größe dieses Bereiches verändert werden, so daß auf diese Weise bestimmte Höhenpunkte markiert werden können.

Bei einem anderen, von Junkers [36] vorgeschlagenen Verfahren wird ebenfalls die Kapazitätsänderung eines offenen Schwingungskreises in Abhängigkeit von dem Bodenabstand ausgenutzt. Dieser Schwingungskreis ist mit einem selbsterregten Oszillator gekoppelt. Er ist so abgestimmt, daß er sich bei großen Bodenabständen mit dem Oszillatorschwingkreis in Resonanz befindet. Ein im offenen Schwingungskreis befindlicher Strommesser wird dann maximalen Ausschlag zeigen. Dieser Ausschlag geht infolge Verstimmung mit der Annäherung an die Erdoberfläche zurück, so daß aus dieser Anzeige direkt die Höhe ermittelt werden kann.

Die Anzeige wird umso empfindlicher, je geringer die Dämpfung des Schwingungskreises ist. Daher ist es zweckmäßig, eine Dämpfungsreduktion des offenen Schwingungskreises mit Hilfe einer Röhrenanordnung vorzunehmen.

Die Empfindlichkeit dieser Verfahren kann nach einem Vorschlag von Löwy [37, 38] dadurch gesteigert werden, daß der Sender, der auf die Kapazitätsänderung ansprechen soll, im Abreißgebiet oder in einem Gebiet in der Nähe einer Abreißstelle liegt. Durch kleine Frequenzänderungen werden dann große Änderungen der Schwingungsamplitude erreicht. Diese Maßnahme ist erforderlich, da nach den Versuchen von Löwy [39] die Änderung der Kapazität eines offenen Schwingungskreises in Abhängigkeit von dem Abstand der Erdoberfläche außerordentlich gering ist.

Um Anzeigestörungen zu vermeiden, die durch unerwünschte Änderungen der Energiequelle, die den Schwingungskreis speist, oder durch atmosphärische Einflüsse hervorgerufen werden können, wird von der Gesellschaft für elektrische Apparate m. b. H. [40] vorgeschlagen, mindestens zwei Antennen auf dem Fahrzeug vorzusehen, die bei Änderung des Abstandes vom Erdboden verschieden beeinflußt werden. Eine Antenne soll beispielsweise oberhalb, die andere unterhalb der Tragflächen angeordnet sein. Durch die Abschirmung der Tragflächen wird die untere Antenne mehr beeinflußt als die obere. Die Differenz dieser Beeinflussungen soll an einer nach dem Differenzprinzip arbeitenden Meßschaltung angezeigt werden. Ein ähnlicher Vorschlag wurde der Siemens & Halske, A.-G. [41], patentiert, wonach die schädlichen Einflüsse durch Wahl einer gegenüber dem Abstand großen Wellenlänge und durch geeignete Ausbildung der Meßeinrichtung eliminiert werden sollen.

Bei den bisher besprochenen Vorschlägen wurde die Änderung der Kapazität eines Schwingungskreises mit Hilfe einer Frequenzmessung ermittelt. Die Meßgenauigkeit wird nun wesentlich größer, dadurch, daß man nicht eine Frequenzmessung, sondern eine Phasenmessung vornimmt, wie von Dieckmann und Hell [42] vorgeschlagen wurde. Da sich die Phase in der Resonanzlage bekanntlich schnell ändert, wird dadurch die Meßgenauigkeit sehr groß. Praktische Versuche mit einer derartigen Einrichtung sind von Bärner [43] angestellt worden. Nach diesen Versuchen ist eine eindeutige Höhenbestimmung nur dann möglich, wenn eine Rückwirkung des vom Erdboden reflektierten Feldes nicht meßbar ist. Um daher die Rückstrahlung möglichst klein zu halten, ist der Strahlungswiderstand des Antennensystems klein zu halten, d. h. die Erregung des Antennensystems ist mit Wellen durchzuführen, welche groß sind gegen die geometrische Ausdehnung der durch Verlängerungsmittel annähernd abgestimmten Leiter.

Ergänzend soll noch auf zwei Vorschläge von Löwy [44, 45] hingewiesen werden, nach denen mit Hilfe der Kapazitätsmethode eine Untersuchung der Bodenbeschaffenheit vorgenommen werden soll.

g) Winkelmeßverfahren.

Bei den bisher beschriebenen Verfahren wurde im wesentlichen die Laufzeit von elektromagnetischen Schwingungen zur Abstandsmessung ausgewertet. Im folgenden sollen Verfahren beschrieben werden, die eine Winkelmessung zwischen ausgesandtem und reflektiertem Strahl vornehmen und auf diese Weise den Abstand zu ermitteln gestatten.

Von Ewald [46] ist ein Verfahren vorgeschlagen worden, das an Hand von Bild 25 erläutert werden soll. Auf dem Flugzeug befinden sich in möglichst großen Abständen voneinander Sende- und Empfangsreflektoren b_1 und b_2. Im Brennpunkte dieser Reflektoren sind Sende- und Empfangsschwingungskreise angeordnet. Die Reflektoren sind nach der Erdoberfläche geneigt und mit Hilfe einer mechanischen Vorrichtung gemeinsam derart drehbar, daß Sende- und Empfangsstrahl mit der Horizontalen stets gleiche Winkel bilden. Wenn der Schnittpunkt der beiden Strahlrichtungen e_1 und e_2 gerade auf die Erdoberfläche fällt, so wird der Empfangsschwingungskreis von der reflektierten Strahlung maximal erregt. Diese Winkelstellung ist dann ein Charakteristikum für die Höhe des Luftfahrzeuges.

Digitized by Google

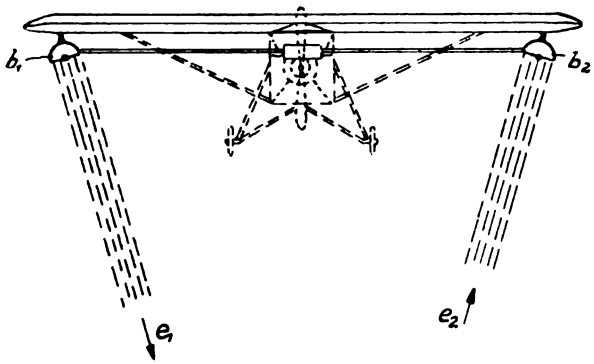


Bild 25. Abstandsbestimmung durch Winkelmessung nach DRP. 520538.

Ein ähnlicher Vorschlag ist von Eaton [47] gemacht worden. Bei dieser Anordnung ist jedoch nur der Sendestrahler schwenkbar ausgebildet. In möglichst großem Abstand vom Sendestrahler befinden sich mehrere, vorzugsweise drei, Empfänger in voneinander gleichem Abstand. Der Sendestrahler wird nun in eine solche Lage geschwenkt, daß gerade der mittelste der drei Empfänger einen maximalen Empfang der reflektierten Strahlung aufweist. Die Winkelstellung des Sendestrahlers ist kennzeichnend für den zu messenden Abstand. Ähnlich dem von Ewald gemachten Vorschlag arbeitet eine von Deardorff [48] angegebene Anordnung. Um auch die Bodenbeschaffenheit zu erkennen, schlägt Deardorff vor, die Wellenlänge sowohl des Senders als auch des Empfängers solange zu ändern, bis sich eine maximale Reflexion ergibt. Da die maximale Reflexion für verschiedene Stoffe bei verschiedener Wellenlänge verschieden ist, kann aus der eingestellten Wellenlänge die Beschaffenheit des reflektierenden Stoffes ermittelt werden.

Die Abstandsbestimmung mit Hilfe einer Winkelmessung vorzunehmen, ist erstmalig von Hülsmeyer [49] vorgeschlagen worden.

Nach einem Vorschlag von Dieckmann und Hell [50] sollen auf der Erdoberfläche in einem bestimmten Abstand voneinander zwei mit Hochfrequenz gespeiste Kabel verlegt werden. Befindet sich das Flugzeug, dessen Höhe zu ermitteln ist, unmittelbar senkrecht über dem einen Leitkabel, so kann mit Hilfe einer Richtantennenanordnung der Winkel ermittelt werden, der von der durch die Flugzeuglängsachse gelegten Vertikalebene mit der durch Richtantennenanordnung und zweites Kabel gelegten Ebene gebildet wird. Da der Abstand zwischen den beiden hochfrequenzgespeisten Kabeln bekannt ist, kann aus den trigonometrischen Beziehungen der bekannten Größen die Höhe des Flugzeuges ermittelt werden.

h) Weitere besondere Höhenmeßverfahren.

Nach einem Vorschlag von Kolster-Brandes [51] sollen bestimmte Punkte im Raum dadurch festgelegt werden, daß von zwei voneinander entfernten Bodenstationen zwei Richtstrahlungen ausgesandt werden. Die Schnittlinie der beiden, beispielsweise verschieden modulierten Strahlungen ergibt dann eine Kennzeichnung für einen bestimmten Punkt im Raum.

Ein ähnlicher Vorschlag ist von Rocard [52] gemacht worden, Bild 26. Es sind beispielsweise drei Richtsender in den Punkten B_1, B_2 und B_3 vorgesehen. Die Strahlung des Senders *1* wird mit der Frequenz n_1, die des Senders *2* mit der Frequenz n_2 und die des Senders *3* mit der Frequenz n_3 moduliert. Kommt ein Flugzeug in eine Höhe, die oberhalb des Punktes H_1 liegt, so wird es zunächst nur die vom Sender B_3 ausgesandte Strahlung aufnehmen. Überfliegt es den senkrechten Strahl des Senders B_1, so wird es gleichzeitig die Strahlung des Senders B_1 aufnehmen. Befindet es sich jedoch unterhalb des Punktes H_1, so wird es bei Überfliegen des Punktes B_1 nur die Strahlung von B_1

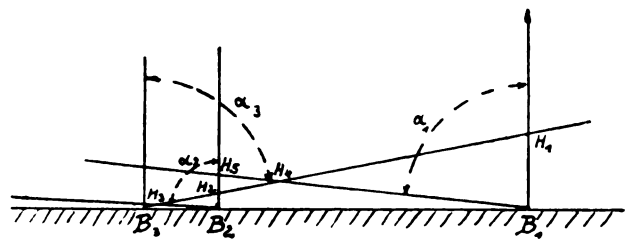


Bild 26. Festlegung bestimmter Höhen durch gerichtete Strahlungen nach franz. Patentschrift 814752.

aufnehmen. Entsprechend werden auch die anderen Punkte, die sich durch Schnitt zweier Strahlungsbündel ergeben, gekennzeichnet.

Der Vollständigkeit halber wird noch auf einen Vorschlag von Ponte [53] hingewiesen, der in ähnlicher Weise wie Rocard [52] bestimmte Punkte im Raum kennzeichnet.

Um beispielsweise zur Landung eines Flugzeuges mehrere Höhenpunkte im Raum zu kennzeichnen, ist der Radio Corporation of America [54] ein Vorschlag patentiert worden, der darin besteht, daß von zwei auf dem Erdboden aufgestellten Sendern Strahlungen verschiedener Kennung und verschiedener Strahlungscharakteristik ausgesandt werden. Wird ein Anzeigeinstrument mit zwei Meßsystemen verwendet, so wird der Ausschlag des einen Systems, das auf den einen Sender anspricht, konstant gehalten, so daß der Ausschlag des anderen Anzeigesystems die jeweils gewünschte Höhe angibt.

Es ist schließlich noch ein Höhenmeßverfahren, das über Flugplätzen Anwendung finden soll, zu erwähnen, das von Loth [55] vorgeschlagen wurde und auf dem französischen Flugplatz Villeneuve les Vertus ausgeführt worden ist. Zwei konzentrisch zueinander angeordnete Erdkabel werden im Rhythmus von komplementären Morsezeichen (*a* und *n*) mit den Strömen $J + i/2$ und $-J + i/2$ gespeist. Dadurch entsteht beispielsweise im Gebiet außerhalb des Landungsfeldes ein starkes Feld des Zeichens *a*, während das komplementäre Morsezeichen *n* ein starkes Feld innerhalb der Flugplatzgrenzen erzeugt. Durch Zusammenwirken zweier Kabelfelder und eines zusätzlichen Feldes wird eine Höhenanzeige erreicht.

Es soll noch auf eine Höhenbestimmung eingegangen werden, die von Klein [56] vorgeschlagen worden ist. Auf dem Flugzeug befindet sich ein in einem kleinen Abwurfkörper befindlicher Sender und eine Stoppuhr, die bei Ausklinken des Senders in Betrieb genommen werden. In dem Augenblick, in dem dieser Abwurfkörper auf den Erdboden aufschlägt, setzt die Sendung aus, so daß die in diesem Augenblick angezeigte Stellung der Stoppuhr ein Maß für den Bodenabstand ist.

Von Nicolson [57] ist zur Bestimmung der Flughöhe ein Verfahren vorgeschlagen worden, das darin besteht, daß das Flugzeug eine Schleppantenne besitzt, die bei Auftreffen auf den Erdboden ein Signal abgibt. Dieses Signal kann entweder elektromagnetisch, akustisch oder optisch auf das Flugzeug übertragen werden. Da die Länge der ausgefahrenen Antenne bekannt ist, ist damit eine Bestimmung des Bodenabstandes möglich.

C. Besprechung der bisher aus dem Schrifttum bekannt gewordenen Rückstrahlpeilverfahren.

Zur Auffindung irgendwelcher reflektierender Gegenstände und zur Ermittlung von deren Richtung wurde von Hülsmeyer [58] vorgeschlagen, stark gebündelte Sender und Empfänger vorzusehen, die auf einer Achse gemeinsam drehbar angeordnet sind. Aus der jeweiligen Winkelstellung dieser Apparatur bei Einfall von reflektierter Strahlung kann auf die Richtung des reflektierenden Gegenstandes geschlossen werden.

Um eine selbsttätige Anzeige der Richtung des reflektierenden Körpers zu erhalten, wurde von Gutton [59] folgendes Verfahren vorgeschlagen:

Digitized by Google

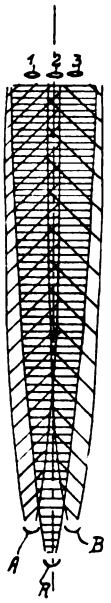


Bild 27 (links). Rückstrahlpeilung nach Leitstrahlprinzip nach franz. Patentschrift 812707.

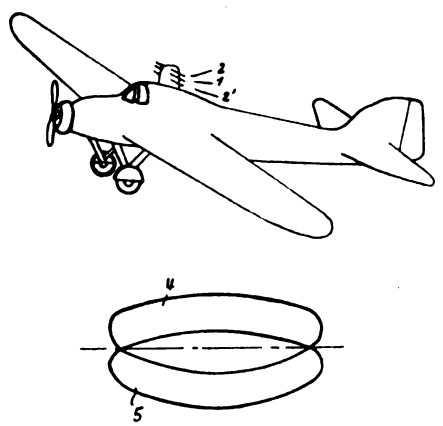


Bild 28 und 29. Rückstrahlpeilung nach Leitstrahlprinzip nach franz. Patentschrift 814723.

Die Meßapparatur befindet sich wiederum auf einer drehbaren Achse. Als Anzeigeorgan für die reflektierte Strahlung wird ein Braunsches Rohr vorgesehen, dessen Kathodenstrahl in Abhängigkeit von der Azimuthstellung der rotierenden Strahlung abgelenkt wird. Durch den Einfall eines reflektierten Impulses wird der Kathodenstrahl in dazu senkrechter Richtung abgelenkt. Die Lage dieser Auslenkung über der Zeitachse ergibt unmittelbar die Winkelstellung des reflektierenden Gegenstandes.

Um eine genaue Peilung eines reflektierenden Gegenstandes vorzunehmen, hat Moueix [60] eine Anordnung vorgeschlagen, die nach dem Prinzip der Leitstrahlsender arbeitet. Gemäß Bild 27 besteht das Meßgerät aus zwei Sendestrahlern *A* und *B*, die beispielsweise im komplementären Rhythmus wechselweise getastet werden. Hinter diesen beiden Sendestrahlern befindet sich der Empfangsstrahler *R*. Befindet sich nun der reflektierende Gegenstand beispielsweise in der Stellung *1*, so wird der Empfänger Signale reflektiert erhalten, die beispielsweise durch das Zeichen *a* gekennzeichnet sind. In der Stellung *3* wird eine Strahlung reflektiert, die im Rhythmus *n* getastet ist. Befindet sich der reflektierende Gegenstand dagegen in Stellung *2*, so wird der Empfänger *R* aus der reflektierten Strahlung einen Dauerstrich aufnehmen.

Dieses Prinzip kann gemäß einem Vorschlag von Rocard [61] so ausgewertet werden, daß auch irgendwelche in Flugrichtung eines Flugzeuges sich befindliche reflektierende Gegenstände angezeigt werden. Gemäß Bild 28 befinden sich auf dem Flugzeug ein Sendestrahler *1* und Reflektoren *2*, *2'*, die im Rhythmus von komplementären Morsezeichen getastet werden. Es wird dann in einer Vertikalen ein Strahlungsdiagramm erzeugt, das durch die beiden Charakteristiken *4* und *5*, Bild 29, darstellbar ist. Der auf dem Flugzeug angeordnete Empfänger erhält nur dann eine Strahlung, die eine konstante Amplitude besitzt, reflektiert, wenn sich der reflektierende Gegenstand in Richtung der Schnittlinie der beiden Strahlungsdiagramme *4* und *5* befindet.

D. Anwendungsmöglichkeiten der besprochenen Verfahren nach Zweck und Verwendung.

Um die Anwendungsmöglichkeiten der oben besprochenen Verfahren beurteilen zu können, muß man sich zunächst einmal über die Verschiedenheit der gestellten Aufgaben klar werden. Denn es ist nicht gleichgültig, ob sehr große oder nur geringe Höhen eines Flugzeuges über der Erdoberfläche bestimmt werden sollen, oder ob die Höhenbestimmung während des normalen Fluges oder während der Landung erfolgen soll.

a) Messung sehr großer Höhen.

α) Über beliebigem Gelände. Wenn der Bodenabstand eines sich in sehr großer Höhe befindenden Flugzeuges ermittelt werden soll, so wird sich dieses Flugzeug zumeist über beliebigem, nicht besonders markiertem Gelände befinden. Der Flugzeugführer kennt in den meisten Fällen nicht die Beschaffenheit des Bodens der unter ihm liegenden Erdoberfläche, ja, er weiß nicht einmal, ob sich unter ihm Wasser oder Festland befindet, wenn er durch Nebel oder Wolken keine Bodensicht hat.

In solchen Höhen von einigen tausend Metern wird meistens eine Höhenbestimmung mit einer Genauigkeit von ± 50 m ausreichen. Eine solche Genauigkeit ist jedoch schon erforderlich, und zwar aus Gründen der Kollisionssicherung, denn jedes Flugzeug erhält beim Start von der den Luftraum überwachenden Bodenstelle die genaue Anweisung über die während des Fluges einzuhaltende Flughöhe.

Für diese Grobhöhenmessung erscheint daher das unter B a angegebene Verfahren, das eine reine Laufzeitmessung von hochfrequenten Impulsen vornimmt, geeignet. Da es sich um größere Entfernungen handelt, treten die Nachteile dieses Verfahrens, die hauptsächlich in der endlichen Breite der erzeugten Impulse und in ihrer abgerundeten Impulsform beruhen, nicht so sehr in Erscheinung. Werden die Impulse unmittelbar auf dem Schirm eines Braunschen Rohres aufgezeichnet, so wird der gemessene Abstand von direktem und reflektiertem Impuls mit genügender Genauigkeit die gesuchte Höhe ergeben.

Bei den reinen Laufzeitverfahren ist jedoch zur Vermeidung von Störungen noch eine andere Bedingung zu erfüllen. Bekanntlich besitzt der direkt vom Sender zum Empfänger übergehende Impuls eine wesentlich größere Amplitude als der reflektierte Impuls. Unter normalen Verhältnissen wird daher der direkte Impuls den Empfänger, der ja zur Aufnahme des reflektierten Impulses eine genügende Empfindlichkeit haben muß, übersteuern. Es ist daher für eine genügende Entkopplung zwischen Sender und Empfänger Sorge zu tragen.

Diese Bedingung wird am besten von den im Abschnitt B b β besprochenen Verfahren erfüllt. Durch die sprungweise Änderung der Senderfrequenz braucht der Empfänger nur auf die aus den beiden Senderfrequenzen gebildete Zwischenfrequenz anzusprechen, so daß Sender und Empfänger ständig entkoppelt sind.

Fernerhin erscheint auch das unter B b α besprochene, der AEG [11, 12] patentierte Verfahren zur Bestimmung sehr großer Höhen besonders gut geeignet. Durch kontinuierliche Änderung der Senderfrequenz wird im Empfänger ein aus direkter und reflektierter Welle erzeugter Schwebungston erhalten. Allerdings erscheint es zweckmäßiger, nicht die Trägerwelle selbst, sondern wie es von Moueix [14] vorgeschlagen wurde, die Modulationsfrequenz in derselben Weise kontinuierlich zu ändern. Durch Wahl einer geeigneten Änderungsgeschwindigkeit für die Frequenz hat man die Meßgenauigkeit in der Hand. Für die Messung größerer Höhen erscheinen jedoch die unter B c, B d und B f angegebenen Verfahren ungeeignet. Die Meßgenauigkeit dieser Verfahren ist in weitem Maße von der Beschaffenheit des Erdbodens abhängig, der ja die reflektierende Fläche darstellt. Weiß der Flugzeugführer nicht einmal, ob er sich über Wasser oder über Festland befindet, so werden die unter B c und B d angegebenen Verfahren infolge der unkontrollierbaren Amplitudenänderungen der reflektierten Wellen an der Erdoberfläche keine genügende Genauigkeit mehr ergeben. Das unter B c besprochene Verfahren besitzt den weiteren Nachteil, daß Sender und Empfänger nur schwer zu entkoppeln sind. Bei dem unter B f angegebenen Verfahren ist aber die Kapazitätsänderung durch Änderung des Abstandes von der Erdoberfläche schon so gering, daß auch mit diesem Verfahren keine genügende Meßgenauigkeit mehr zu erzielen ist.

Nach Besprechung der elektrischen Verfahren für die Messung sehr großer Höhen soll aber abschließend darauf

Digitized by Google

hingewiesen werden, daß für eine solche Grobhöhenmessung im allgemeinen der in jedem Flugzeug vorhandene barometrische Höhenmesser genügen wird. Auch dann, wenn der Flugzeugführer nicht dauernd den auf der Erdoberfläche des gerade überflogenen Geländes herrschenden Barometerstand zur Korrektion seines Höhenmessers mitgeteilt erhält, wird der barometrische Höhenmesser kaum einen größeren Anzeigefehler ergeben als den für die Grobmessung gerade noch zugelassenen. Auf alle Fälle läßt sich durch eine geeignet aufgezogene Bodenorganisation erreichen, daß der Flugzeugführer in solchen Abständen den Barometerstand drahtlos mitgeteilt erhält, daß er sich auf die Grobmessung seines Höhenmessers verlassen kann. Diese Mitteilungen des Barometerstandes werden naturgemäß zu Zeiten großer Luftdruckänderungen wesentlich häufiger erfolgen müssen als beispielsweise bei vollkommen ruhigem Wetter. Schließlich hat der Flugzeugführer, wenn er glaubt, sich infolge starker Luftdruckänderungen nicht mehr auf seinen Höhenmesser verlassen zu können, immer noch die Möglichkeit, das Schlechtwettergebiet durch ein Ausweichmanöver möglichst schnell wieder zu verlassen.

β) Über bestimmtem, z. B. Landungsgelände. Die Bestimmung eines sehr großen Bodenabstandes über dem Landungsgelände soll in diesem Zusammenhang nicht betrachtet werden, da es kaum vorkommen wird, daß ein Flugzeug, das infolge seiner großen Höhe keine Bodensicht mehr hat, gerade über dem Landungsgelände seinen Bodenabstand bestimmen will.

b) Messung normaler Flughöhen.

α) Über beliebigem Gelände. In normalen Flughöhen, das sind Höhen von etwa 300 bis 600 m, ist es erforderlich, eine vorgeschriebene Flughöhe genau einzuhalten. Aus dem in Frage kommenden Höhenbereich ersieht man bereits, daß für so geringe Entfernungen solche kurze Laufzeiten der elektrischen Schwingungen resultieren, daß eine reine Laufzeitmessung mit hochfrequenten Impulsen kaum noch in Frage kommen dürfte. Impulsform und Impulsbreite würden hier kaum noch eine genügend genaue Abstandsermittlung aus den auf dem Schirm eines Braunschen Rohres aufgezeichneten Impulsen erlauben. Auch die in dem Abschnitt B f besprochene Kapazitätsmethode erscheint mangels genügend starker Beeinflussung der Kapazität eines offenen Schwingungskreises in den Höhen von 300 bis 600 m ungeeignet.

Dagegen könnte das der AEG [11, 12] patentierte, von Moueix [14] verbesserte Verfahren mit kontinuierlicher Änderung der Senderfreqeunz Anwendung finden. Wie bereits erwähnt, kann die Meßgenauigkeit durch Vergrößerung der Änderungsgeschwindigkeit der Senderfrequenz gesteigert werden.

Ebenfalls geeignet erscheint das im Abschnitt B d besprochene Verfahren, da der Flugzeugführer bei diesen mittleren Flughöhen in den meisten Fällen die Bodenbeschaffenheit kennen wird.

Zur Bestimmung der normalen Flughöhe erscheinen auch die in dem Abschnitt B g behandelten Verfahren, die mit einer Winkelmessung arbeiten, geeignet. Da aber deren Meßgenauigkeit mit abnehmendem Bodenabstand zunimmt, sind sie besonders als absolute Nahhöhenmesser, insbesondere über dem Landungsgelände, verwendbar.

β) Über bestimmtem, z. B. Landungsgelände.

Außer den unter b α beschriebenen Höhenmeßverfahren, die selbstverständlich auch dann Anwendung finden können, wenn sich das Flugzeug über dem Landungsgelände befindet, gibt es Möglichkeiten, die eine weit sichere Höhenbestimmung, beispielsweise während des Landungsvorganges, ermöglichen. Bei Betrachtung dieser Möglichkeiten soll davon ausgegangen werden, daß heute fast alle größeren europäischen Flughäfen mit der Ultrakurzwellen-Landebake ausgerüstet sind. Diese Bake erzeugt bekanntlich mit Hilfe zweier wechselweise, z. B. im Rhythmus komplementärer Morsezeichen, getasteter Strahlungsdiagramme eine Leitlinie, auf der ein Dauerstrich im Empfänger des Flugzeuges wahrzunehmen ist. Bestimmte Abstände vom Landungsfeld werden dem auf dieser Leitlinie einfliegenden Flugzeug durch in bestimmten Abständen aufgestellte Vor- und Haupteinflugzeichensender angegeben.

Es wird zweckmäßig sein, auch in größeren Abständen vom Landungsfeld Sender aufzustellen, die bei gleicher Trägerwelle verschieden moduliert sind. Durch bestimmte Richtwirkung für die einzelnen Strahlungen können dann entsprechend dem Vorschlag von Rocard [52] bestimmte Höhen markiert werden.

c) Messung sehr geringer Höhen.

α) Über beliebigem Gelände. Reine Laufzeitmessungen elektrischer Impulse sind zur Bestimmung von Höhen unterhalb von 100 m nahezu ungeeignet. Es muß dabei davon ausgegangen werden, daß die Genauigkeit eines derartigen Höhenmessers sehr groß sein muß, denn es ist nicht gleichgültig, ob ein Flugzeug, das infolge Nebel keine Bodensicht mehr hat, sich in 10 oder 20 m Höhe über dem Erdboden befindet. Allenfalls könnten noch brauchbare Ergebnisse mit dem Höhenmesser erzielt werden, bei dem eine kontinuierliche Änderung der Sonderfrequenz vorgenommen wird, so daß aus direkter und reflektierter Welle ein Schwebungston entsteht, AEG [11, 12] und Moueix [14]. Auch das im Abschnitt B d angegebene auf Interferenzerscheinungen beruhende Verfahren kann zur Bestimmung geringer Abstände brauchbare Ergebnisse liefern. Allerdings ist darauf zu achten, daß eine selbsttätige, fortlaufende Anzeige erfolgen muß, da der Flugzeugführer bei den geringen, in Frage kommenden Bodenabständen meist keine Gelegenheit hat, eine Apparatur einzustellen, nachzustimmen oder abzugleichen.

Da in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche auch genügend große Kapazitätsänderungen eines am Flugzeug angebrachten offenen Schwingungskreises auftreten — wie die Versuche von Bärner [43] bewiesen haben —, wäre die Kapazitätsmethode zur Bestimmung geringer Abstände als brauchbar zu bezeichnen. Leider tritt aber gerade dann der Einfluß der reflektierten Welle sehr stark in Erscheinung, der mit seinen wechselnden Werten das Meßergebnis u. U. empfindlich fälschen knan.

In sehr geringen Höhen erscheint daher am zweckmäßigsten, ein Verfahren, das bewußt auf die Ausnutzung der Laufzeit einer elektromagnetischen Schwingung verzichtet. Das sind die in dem Abschnitt B g beschriebenen Winkelmeßverfahren, beispielsweise nach Ewald [46]. Die Empfindlichkeit dieser Verfahren ist gerade in geringen Höhen sehr groß, in denen auch das Verhältnis des Abstandes der auf dem Flugzeug vorgesehenen Meßbasis zur Höhe des Flugzeuges größer wird.

β) Über bestimmtem, z. B. Landungsgelände. Es wurde bereits in dem Abschnitt D b β erwähnt, daß von den auf den meisten Flughäfen aufgestellten Ultrakurzwellen-Landebaken ausgegangen wird. Da der Flugzeugführer durch die Abstandssender seinen jeweiligen Abstand vom Landeplatz kennt, könnte er eine einwandfreie Blindlandung vornehmen, wenn ihm zu diesem Abstand auch die entsprechende Höhe mitgeteilt würde. Diese Höhenmessung kann z. B. nach dem von Dieckmann [50] vorgeschlagenen Prinzip vorgenommen werden. Durch die mit Ultrakurzwellen erzeugte Landelinie wird das Flugzeug in einem konstanten Abstand zu einem in bekanntem Abstand parallel zu dieser Landelinie verlegten mit Hochfrequenz gespeisten Kabel gehalten. Durch einfache Winkelmessung zwischen Leitebene und Einfallsrichtung der von dem Hochfrequenzkabel kommenden Strahlung kann der jeweilige Bodenabstand ermittelt werden, da ja der Abstand von Leitlinie und Kabel bekannt ist.

Man kann aber auch das der Radio Corporation of America [54] patentierte Verfahren anwenden, das zur Erzeugung einer bestimmten Landekurve mit Hilfe von zwei Strahlungen verschiedener räumlicher Feldschwächung bestimmte Punkte im Raum festlegt. Dieses Verfahren kann

Digitized by Google

auch unmittelbar zur Höhenmessung ausgewertet werden, wenn das Flugzeug so geführt wird, daß der durch die eine Strahlung hervorgerufene Ausschlag des Zeigers des einen Indikators konstant bleibt. Der Ausschlag des für die Anzeige der anderen Strahlung vorgesehenen Indikators gibt dann unmittelbar die Höhe an.

E. Schlußbetrachtung.

Zusammenfassend kann kurz gesagt werden, daß sich die die Laufzeit elektromagnetischer Schwingungen ausnutzenden Verfahren grundsätzlich zur Bestimmung großer Höhen, die nach der Interferenzmethode arbeitenden Verfahren zur Bestimmung mittlerer Höhen und die Verfahren, die eine Winkelmessung vom Flugzeug aus vornehmen, zur Bestimmung geringer Höhen am besten eignen. Dabei ist noch zu beachten, ob die Messung über beliebigem Gelände oder über einem Landungsgelände vorgenommen werden soll.

Zur Bestimmung der Einfallsrichtung reflektierender Hindernisse sind grundsätzlich die von Moueix [60] und Rocard [61] vorgeschlagenen Verfahren geeignet. Es macht praktisch keine Schwierigkeiten mehr, den Sender des Meßgerätes als Leitstrahlsender auszubilden. Mit Hilfe dieses Leitstrahlsenders ist es aber möglich, die Richtung eines reflektierenden Gegenstandes sehr genau zu bestimmen.

F. Schrifttum.

[1] Hart, USA. Patent Nr. 1924156.
[2] Hart, USA. Patent Nr. 1979225.
[3] Wolf, USA. Patent Nr. 1924174 und DRP. 623005
[4] Terry, USA. Patent Nr. 2055883.
[5] Langevin, DRP. 454007.
[6] Löwy, DRP. 403939.
[6a] Gutton, Franz. Patent Nr. 812979.
[7] Atlas-Werke, DRP. 418091.
[8] Signal-Gesellsch., DRP. 425973.
[9] Behm, DRP. 461120.
[10] Signal-Gesellsch. DRP. 430461.
[11] AEG., DRP. 509717 und brit. Patent Nr. 317068.
[12] AEG, DRP. 538843.
[13] Matsuo, J. Inst. Electrical Engineers, Japan Bd. 56 (1936), Nr. 571.
[14] Moueix, Franz. Patent Nr. 821007.
[15] Gutton, Franz. Patent Nr. 812979 (Zusatz 48279).
[16] Hell, DRP. 564802.
[17] Rieber, USA. Patent Nr. 1988020.
[18] Runge, Franz. Patent Nr. 809012.
[19] Bulletin de la S.F.R., August-Oktober 1935, »Detekteur d'obstacles S.F.R.type D. 16«.
[20] Turner, USA. Patent Nr. 1982271.
[21] Kunze, DRP. 469471.
[22] Atlas-Werke, DRP. 463076.
[23] Leimbach, DRP. 273339.
[24] AEG, DRP. 542264.
[25] Thornton, Brit. Patent Nr. 340531.
[26] Hollmann, Franz. Patent Nr. 701296.
[27] Patterson, Luftfahrtschrifttum des Auslandes Bd. 2 (1936), Nr. 10.
[28] Hart, USA. Patent Nr. 1993326.
[29] Jenkins, USA. Patent Nr. 1756462.
[30] Koulikoff, Brit. Patent Nr. 288233.
[31] Nicolson, USA. Patent Nr. 1945952.
[32] Terry, USA. Patent Nr. 2055883.
[33] Weigl, DRP. 545168.
[34] Junkers, DRP. 431152.
[35] Junkers, DRP. 532885.
[36] Junkers, DRP. 532884.
[37] Löwy, DRP. 436827.
[38] Löwy, Physik. Zeitschrift Bd. 26 (1935), S. 646.
[39] Löwy, Physik. Zeitschrift Bd. 26 (1935), S. 644.
[40] Gesellsch. f. Elektr. Apparate m. b. H., DRP. 579669.
[41] Siemens & Halske, DRP. 586087.
[42] Dieckmann, Hell, DRP. 522310.
[43] Bärner, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik Bd. 47 (1936), Heft 2.
[44] Löwy, DRP. 425050.
[45] Löwy, DRP. 401448.
[46] Ewald, DRP. 520538.
[47] Eaton, USA. Patent Nr. 1854122.
[48] Deardorff, USA. Patent Nr. 1838371.
[49] Hülsmeyer, DRP. 169154.
[50] Dieckmann, DRP. 501963.
[51] Kolster-Brandes, Franz. Patent Nr. 676850.
[52] Rocard, Franz. Patent Nr. 814752.
[53] Ponte, Franz. Patent Nr. 814722.
[54] Radio Corporation of America, DRP. 584625.
[55] Loth, Revue générale de l'electricité (1933) Dez.
[56] Klein, DRP. 635633.
[57] Nicolson, USA. Patent Nr. 1977198 und USA. Patent Nr. 2093641.
[58] Hülsmeyer, DRP. 165546.
[59] Gutton, Franz. Patent Nr. 812975.
[60] Moueix, Franz. Patent Nr. 812707.
[61] Rocard, Franz. Patent Nr. 814723.

Digitized by Google

Höhenmeßverfahren auf funkentechnischer Grundlage.

Von Ulrich Theile, Sömmerda b. Erfurt.

Durch die gesteigerten Anforderungen des Luftverkehrs ist die Frage der Bestimmung des Bodenabstandes eines Luftfahrzeuges immer dringlicher geworden. Es spielt hier die Bestimmung kleiner Höhen eine ganz besondere Rolle, da hier die bisher verwendeten Verfahren entweder versagen oder zu ungenau arbeiten. Zur Lösung dieses Problems sind in Deutschland und im Ausland Vorschläge verschiedenster Art auf funkentechnischem Wege gemacht worden, die in folgender Abhandlung zusammengestellt werden und einer Kritik hinsichtlich ihrer praktischen Verwendbarkeit unterzogen werden sollen.

Gliederung.

1. Das kapazitive Verfahren.
   a) Änderung der Eigenwelle einer Antenne.
   b) Phasenänderung offener Schwingungskreise.
   c) Messung einer höhenabhängigen Kapazität in der Wechselstrombrücke.
2. Reflexionsverfahren.
   a) Allgemeine Verfahren.
   b) Impulsverfahren.
3. Elektrisch-mechanische Verfahren.
4. Kritik der behandelten Verfahren.
5. Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von Hindernissen.
6. Schrifttum.

Die Vorschläge zur Bodenabstandsmessung auf funkentechnischem Wege lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. Das kapazitive Verfahren,
2. Reflexionsverfahren,
3. elektrisch-mechanisches Verfahren.

Das Reflexionsverfahren ist auch zur Bestimmung des Abstandes von Hindernissen vorgeschlagen worden, worauf in Kapitel 5 der Arbeit eingegangen werden soll.

1. Das kapazitive Verfahren.

Die Vorschläge, die die Änderung einer Kapazität in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden verwenden, lassen sich wiederum in drei Gruppen einteilen:

a) Verfahren, die die Änderung der Eigenwelle eines Antennengebildes oder Schwingungskreises benutzen,
b) Verfahren, die die Phasenänderung offener Schwingungskreise verwenden,
c) Verfahren, die eine höhenabhängige Kapazität in der Wechselstrombrücke messen.

a) Verfahren, die die Änderung der Eigenwelle eines Antennengebildes bzw. eines Schwingungskreises mit zu- oder abnehmender Höhe benutzen, sind zuerst zur Bestimmung des Erzgehaltes des Erdinnern [1] vorgeschlagen und verwendet worden. In weiteren Arbeiten wird von der Vervollkommnung der Methoden [2, 3, 4] und von der Durchführung von praktischen Versuchen berichtet.

In der ersten Arbeit werden Versuchsergebnisse mitgeteilt, in denen die Änderung der Eigenwelle einer über dem Erdboden ausgespannten Antenne, die mit einem 10-W-Röhrensender erregt wurde, mit einem Wellenmesser in verschiedenen Höhenlagen gemessen wurde. Das Ergebnis der ersten Versuchsreihe mit einer linearen Antenne von der Länge $l = 2 \cdot 17{,}4$ m ist in Bild 1, Kurve I, dargestellt. Bei den folgenden Versuchen wurde die Antennenlänge auf $2 \cdot 50$ m verlängert. Die mit dieser Antenne erhaltenen Höhenkurven stellen die Kurven *II* und *III* in Bild 1 dar. Ein Vergleich dieser drei Kurven zeigt, daß sich mit länger werdender Antenne und stark induktiver Verlängerung (Kurve *III*) einerseits der ausnutzbare Höhenbereich vergrößert und sich andererseits die Mehrdeutigkeit des Meßergebnisses verringert. In Höhen von etwa 50 m ändert sich die Eigenwellenlänge um 2‰, um dann in Höhen von 20 m etwa 1% zu betragen. Diese Ergebnisse stimmen mit Messungen Bärners [8], die bei wesentlich kürzeren Wellen (15 bis 30 m) durchgeführt wurden und in Bild 2 aufgetragen sind, gut überein.

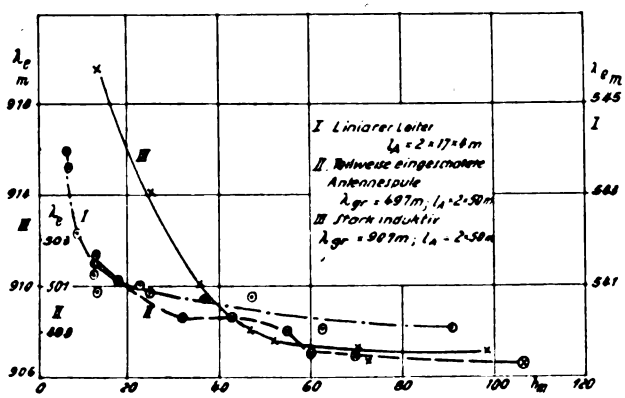


Bild 1. Änderung der Eigenwelle einer über dem Erdboden ausgespannten Antenne in Abhängigkeit von der Höhe.

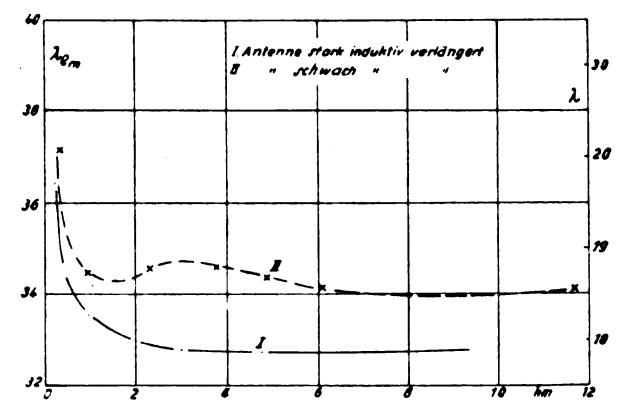


Bild 2. Änderung der Eigenwelle einer sehr kurzen Antenne.

Während in vorstehender Arbeit ausgedehnte Antennengebilde verwendet wurden, die im Flugbetrieb nicht benutzt werden können, wird in einem deutschen Patent vorgeschlagen [5], die Flächen oder Metallteile des Luftfahrzeuges mit einem Schwingungskreis derart zu verbinden, daß diese einen Teil der Schwingkreiskapazität bilden, und die durch die Annäherung des Flugzeuges an den Erdboden bedingte Frequenzänderung dieses Schwingungskreises entweder direkt zu messen oder mit der Schwingung eines zweiten höhenunabhängigen Generators zu überlagern, dessen Frequenz sich um einen bestimmten Betrag von der Eigenfrequenz des ersten Kreises unterscheidet. Die Frequenz der

Digitized by Google

Überlagerungsschwingung kann dann als Maß für die Höhe des Flugzeugs über dem Boden dienen. Derselbe Vorschlag findet sich auch in der unter [3] angegebenen Arbeit und stützt sich auf das Ergebnis von Versuchen, die mit einem Zeppelin-Luftschiff über der Ostsee durchgeführt wurden.

In einer anderen Patentschrift [6] wird eine Änderung der Höhenanzeige in der Form vorgeschlagen, daß der höhenunabhängige Sender auf eine Frequenz eingestellt wird, in der keine Überlagerungsschwingungen mit der Schwingung des höhenabhängigen Senders erzeugt werden. Eine weitere Empfindlichkeitssteigerung soll eine Kopplung der beiden Sender bringen, da dann der Überlagerungston bereits vor Erreichen des Nullwertes mit einem Knack aussetzt, um dann nach Überschreiten des Nullwertes wieder plötzlich aufzutreten. Dieser Bereich läßt sich durch Veränderung der Kopplung einstellen. Gegenüber den vorhergehend beschriebenen Verfahren können hiermit nur eine Höhe oder höchstens zwei Höhen bestimmt werden.

Ähnliche Beobachtungen werden auch aus anderen Versuchen [4] mitgeteilt und das daraus hergeleitete Verfahren »Abreißmethode« genannt. Diese bringt gegenüber der Bestimmung der Eigenwellenänderung durch Fortfall des Wellenmessers eine Vereinfachung des Aufwandes an Meßgeräten und leichtere Bedienbarkeit der Meßeinrichtung mit sich und benutzt die bekannte Labilitätserscheinung, die bei bestimmten Kapazitätswerten des Schwingungskreises auftritt und sich durch Ein- oder Aussetzen der Generatorschwingungen bemerkbar macht. Hinsichtlich der Empfindlichkeit erweist sich die Abreißmethode der Resonanzmethode gegenüber als überlegen. Bei Bodenabstandsbestimmungen ist es erwünscht, den Differentialquotienten $\frac{dC_a}{dh}$ möglichst groß zu machen (C_a-Antennenkapazität). Wenn C_a wachsen soll, so kann man entweder die Antennenlänge sehr groß wählen oder die Antennenhöhe sehr klein werden lassen. Mit dem Wachsen von C vergrößert sich aber zugleich die Resonanzbreite, die durch die bekannte Beziehung

$$C_{Res} - C \sim C_{Res}^{1/2}$$

gegeben ist. Für die Resonanzmethode bedeutet das Anwachsen von C_a eine Verflachung der Resonanzkurve und somit eine Empfindlichkeitsverringerung. Bei den ersten Versuchen wurde noch nicht im Labilitätsgebiet oder in unmittelbarer Nähe desselben gearbeitet, sondern in einem Gebiet, das diesem nur nahe lag, und in dem kleinen Kapazitätsänderungen große, aber reversible Stromänderungen entsprechen. Das Ergebnis einer solchen Messung, die mit dem Luftschiff ZR III über der Ostsee in 300 bis 500 m Höhe durchgeführt wurde, zeigt Bild 3. Die der beträchtlichen Änderung des Antennenstromes zuzuordnende Kapazitätsänderung ist auf den überwiegenden Einfluß der Kapazität des Luftschiffes zurückzuführen.

Dasselbe Verfahren, die Änderungen des Antennenstromes mit zunehmender Verstimmung der Antenne zur Höhenmessung auszunutzen, wird in einer Patentschrift [7] vorgeschlagen. Hiernach sollen die Eigenwellenlänge der Antenne und die Generatorfrequenz in großer Höhe in Resonanz sein. Bei Annäherung der Antenne an den Erdboden wird dann der Antennenstrom infolge der immer größer werdenden Verstimmung immer geringer werden, und ein den Antennenstrom anzeigendes Gerät kann unmittelbar in Höhenmarken geeicht werden. Eine Empfindlichkeitssteigerung läßt sich durch Verminderung der Dämpfung des Antennenkreises mit den bekannten Mitteln erreichen.

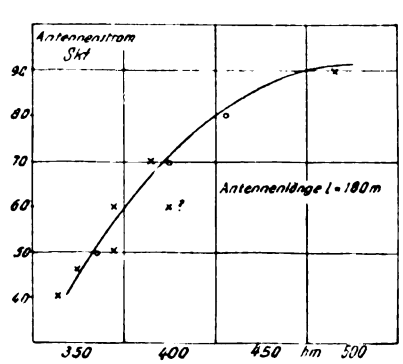


Bild 3. Der Antennenstrom in Abhängigkeit von der Höhe der Antenne über dem Meeresspiegel.

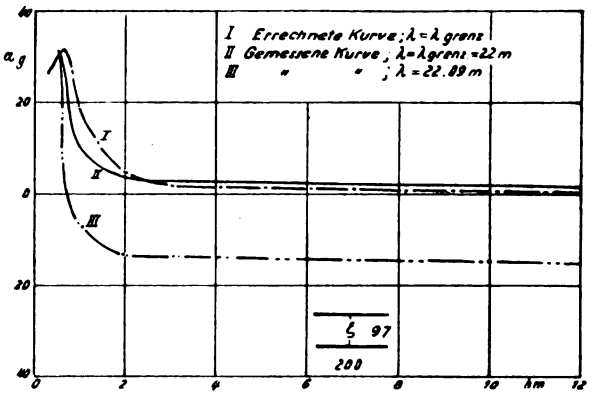


Bild 4. Phasenänderungen in einem Paralleldrahtsystem in Abhängigkeit von der Höhe.

Der oben beschriebene Abreißvorgang läßt sich auch derart umkehren, indem man im Labilitätsgebiet arbeitet und die Kapazität des Schwingungskreises so einstellt, daß eine geringe Kapazitätsverringerung durch Vergrößerung des Bodenabstandes genügt, um den Sender zum Anspringen zu bringen. Die leicht übersehbaren physikalischen Vorgänge wurden durch Versuche über dem Bodensee bestätigt gefunden.

b) Der Vorschlag, die in der Nähe der Resonanzlage beträchtliche Änderung zwischen dem Strom und der Spannung hochfrequent erregter metallischer Leitergebilde zur Höhenbestimmung auszunutzen, ist von Bärner [8] praktisch untersucht worden. Mittels eines besonders entwickelten Phasenmeßgerätes für Kurzwellen wurden die Phasenkurven $\alpha_y = f(h)$ aufgenommen. Die Verwendung von Kurzwellen ergab sich aus der durch die geometrischen Abmessungen des Flugzeugs bedingten Forderung kleiner Leitergebilde. Die Empfindlichkeit des Phasenmeßgerätes betrug bis zu $1{,}1 \cdot 10^{-4}$ cm/Skt, entsprechend $2{,}2 \cdot 10^{-4}\%$ der Schwingkreiskapazität. Aus den theoretischen Betrachtungen und Vorversuchen ergab sich, daß sich offene Schwingungskreise in bezug auf die Phasenänderungen genau so wie geschlossene Schwingungskreise verhalten. Eine solche errechnete Phasenkurve, durch die der Ausschlag des Phasenmessers als Funktion der Höhe dargestellt wird, zeigt Kurve *I* in Bild 4. Es ergibt sich ferner, daß die Betriebswellenlänge um nicht mehr als $\pm 2{,}5\%$ von der Grenzwellenlänge, die sich aus dem bei großem Bodenabstand erreichten Grenzwert der Kapazität ergibt, abweichen darf. Am günstigsten erweist sich eine Kurve der Wellenlänge $\lambda = 1{,}005\ \lambda_{grenz}$, nach deren Verlauf die Änderung des Galvanometerausschlages von 2 auf 12 m Höhe noch 20% des Maximalausschlages beträgt. Der Meßvorgang wird durch Änderungen der Spannungsverteilung auf dem System wenig beeinflußt, wohingegen sich das am Erdboden reflektierte Feld sehr störend bemerkbar macht. Durch diesen Einfluß ändern sich Induktivität und Strahlungswiderstand und damit die Dämpfung des Schwingungskreises. Der ursprünglichen Funktion überlagert sich durch den Einfluß des reflektierten Feldes eine Sinusfunktion, und der Ausschlag des Phasenzeigers ist dann gegeben zu:

$$\alpha_y = \alpha_{y_0} + \text{const} \cdot i_2 \cdot \sin(\Phi \pm \varphi').$$

Der wellenförmige Verlauf des Stromes im Leitergebilde, hervorgerufen durch das am Boden reflektierte Feld, konnte durch ein induktiv angekoppeltes Thermoelement mit Galvanometer gemessen werden.

Die praktischen Versuche wurden mit einem Paralleldrahtsystem, einem linearen Leiter, und einem solchen unterhalb einer Metallfläche durchgeführt. Das Paralleldrahtsystem zeigte in seinen Meßkurven grundsätzliche

Digitized by Google

Übereinstimmung mit den errechneten Kurven (s. Bild 4, Kurve *I* und *II*). Aus diesen ergibt sich, daß das Paralleldrahtsystem bei Erregung mit Schwingungen, deren Wellenlängen einem Mehrfachen der geometrischen Abmessungen (> 10fach) entsprechen, eine eindeutige Bestimmung des Bodenabstandes gestattet. Die Änderung der Kapazität beträgt im Höhenbereich von 2 auf 12 m noch 1‰ und ruft eine Ausschlagsänderung von 5 bis 7% des Maximalausschlages hervor. Bei Erregung mit kürzeren Wellenlängen (< 10fach) und mit einer kleineren Verlängerungsspule machte sich der Einfluß des am Boden reflektierten Feldes durch den wellenförmigen Verlauf der Abhängigkeiten bemerkbar.

Die linearen Leiter wurden mit und ohne Verlängerungsspulen und plattenförmigen Endkapazitäten untersucht. Die geringste Beeinflussung durch das reflektierte Feld zeigt sich beim stark induktiv verlängerten Leiter, da bei diesem der Strahlungswiderstand sehr klein ist. Eine eindeutige Höhenbestimmung aus den Galvanometerausschlägen ist nur in einem sehr kleinen Bereich möglich, wobei aber die Grenzen dieses Bereiches bekannt sein müssen. In Bild 5 sind verschiedene Meßergebnisse von linearen Leitern zusammengestellt.

Wurde der lineare, induktiv verlängerte Leiter unter einer Metallfläche angebracht, was hinsichtlich der Verwendung am Flugzeug wichtig ist, so ergab sich derselbe Verlauf der Kurven, wie er für den induktiv verlängerten Leiter erhalten wurde. Der Einfluß der leitenden Fläche zeigt sich lediglich in dem steileren Verlauf der Kapazitätsänderung in kleinen Höhen. Eine Verringerung des Abstandes von der Metallfläche ergab keine wesentlichen Unterschiede.

c) Eine weitere Lösung zur Bestimmung kleiner Höhen nach dem kapazitiven Verfahren wird in einer Patentschrift [9] derart vorgeschlagen, daß die Kapazitätsänderung eines höhenabhängigen Kondensators in der Wechselstrombrücke gemessen wird. In der Beschreibung des Verfahrens wird besonders auf das Eingehen der Bodenbeschaffenheit und der damit verbundenen Bodenleitfähigkeit in das Meßergebnis hingewiesen. Die vorhergehend beschriebenen Messungen und auch andere Arbeiten enthalten über diesen Punkt keine Angaben. Da aber die Bodenbeschaffenheit während des Fluges häufig wechselt, ist es unbedingt notwendig, die Bodeneigenschaften eindeutig in das Meßergebnis eingehen zu lassen oder nach Möglichkeit auszuschalten.

Das in dem Patent beschriebene Meßgerät stellt eine Brückenschaltung dar, deren Zweige aus den Kapazitäten zwischen dem Flugzeugkörper und mehreren auf ihm angebrachten Belägen und niederohmigen Widerständen bestehen. Der Höhenmeßkondensator wird durch zwei in die Flügel isoliert eingelassene Platten von etwa 1 m² Größe gebildet, deren Kapazitätsänderung bei Annäherung an den Erdboden gemessen wird. Die der Meßfrequenz entsprechende Wellenlänge soll mindestens das Zehnfache der größten zu messenden Höhe betragen (größte Höhe 200 m, $\lambda = 2000$ m). In Bild 6 ist ein Schaltbild der Brücke und die Anordnung der Meßkondensatoren wiedergegeben. Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß im Meßkondensator C_h der Verlustwiderstand des Erdbodens definiert eingeht, die Anordnung sogar die Höhe über Bäumen zu messen gestattet, und daß die Meßkapazität von den Kapazitäten zwischen den Belegungen des Höhenkondensators und dem Flugzeugkörper getrennt wird. Es ergibt sich auch die Möglichkeit, Bodenleitfähigkeit und Höhe getrennt zu bestimmen.

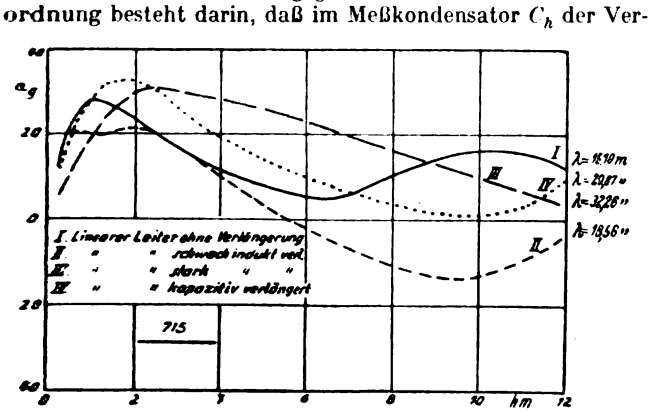


Bild 5. Phasenänderungen in einem linearen Leiter in Abhängigkeit von der Höhe.

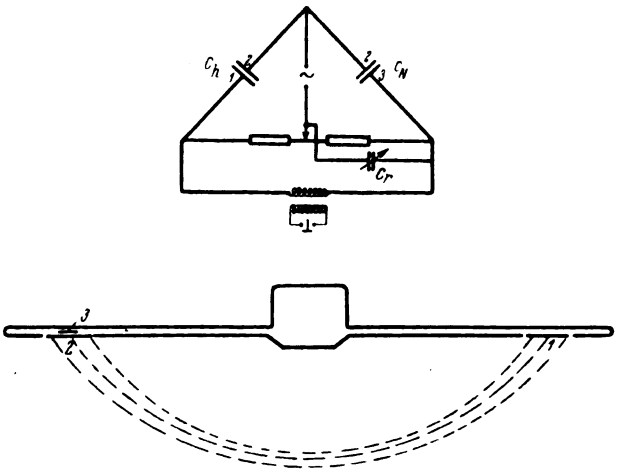


Bild 6. Schaltbild und schematische Anordnung eines Höhenmessers, bei dem die Kapazität eines höhenabhängigen Kondensators in der Wechselstrombrücke gemessen wird.

Bei der Höhenmessung selbst wird die Brücke in großen Höhen abgestimmt, d. h. das Gleichgewicht zwischen dem Höhenmeßkondensator C_h und einer durch einen weiteren Belag gebildeten Kapazität C_n hergestellt. Bei Verminderung der Flughöhe ändert sich der Scheinwiderstand des Höhenkondensators nach Betrag und Winkel, und die Brücke muß nach beiden Komponenten nachgestimmt werden. Da die Winkeländerung durch den Widerstand der im Kondensatorfeld liegenden Erdoberfläche bestimmt ist und dieser Widerstand zu der veränderlichen Kapazität Belag—Erde in Reihe liegt, hat man es durch Wahl der Meßfrequenz in der Hand, entweder die Kapazitätsänderungen (Meßfrequenz 5 bis 10 kHz) oder Leitfähigkeitsänderungen (Meßfrequenz 50 kHz) zu erfassen. Die Abstimmelemente können in Flughöhen oder in Leitfähigkeiten geeicht werden. Das Nachstimmen der Brücke kann vollautomatisch erfolgen.

2. Reflexionsverfahren.

Die Vorschläge zur Höhenmessung mittels am Boden reflektierter Wellen lassen sich in mehrere Gruppen ordnen:

a) Allgemeine Verfahren,
b) Impulsverfahren.

a) Allgemeine Verfahren.

Das älteste Verfahren zur Entfernungsmessung mittels elektromagnetischer Wellen nützt ihre Richt- und Bündelungsfähigkeit aus [10]. Dieser Vorschlag kommt wieder aus der Geologie und sollte zur Feststellung der Tiefenlage verdeckter Erzlagerstätten unter der Erdoberfläche dienen. Derselbe Grundsatz wird in einem Vorschlag [11] zur Höhenbestimmung von Flugzeugen und zur Entfernungsmessung von Hindernissen verwendet. Mittels eines Senders, der mit einem Richtantennensystem oder Reflektor versehen ist, wird unter einem geeigneten Winkel ein Strahlenbündel sehr kurzer Wellenlänge auf den Erdboden zu gesandt. Durch einen ebenfalls mit einem Reflektor versehenen Empfänger werden die reflektierten Strahlen aufgenommen. Sender und Empfänger sind in einer festen Entfernung voneinander am Flugzeug befestigt und um zwei parallele Achsen zwangsläufig, gleichzeitig im entgegengesetzten Sinn verstellbar angeordnet. Dies hat den Vorteil, daß bei Einstellung auf maximale Intensität ausgesandtes und empfangenes Strahlenbündel gleiche Winkel zur Verbindungslinie Sender—Empfänger bilden. Die Höhe ergibt sich aus der einfachen Beziehung $h = \frac{a}{2}/\mathrm{tg}\,\varphi$, wobei a den Abstand zwischen Sender und Empfänger bedeutet. Die Winkeldrehung der Welle, die

Digitized by Google

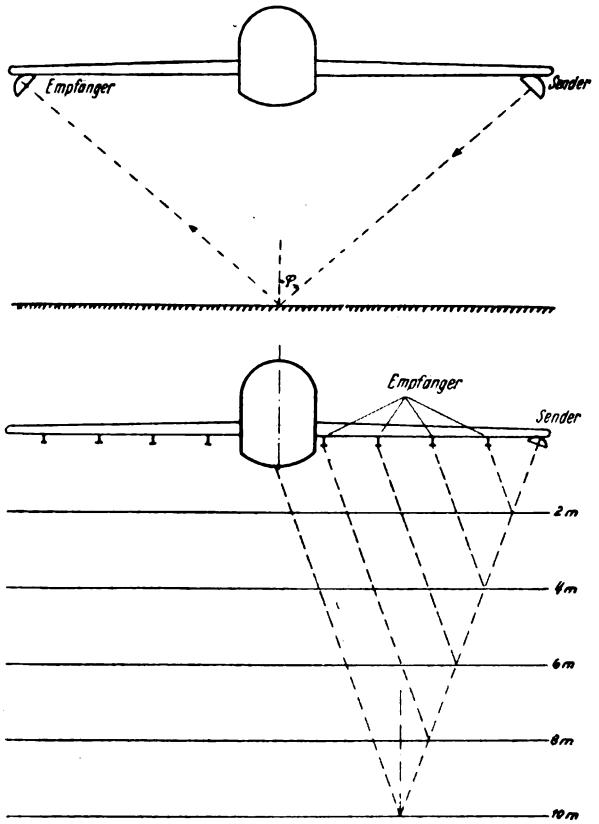


Bild 7 und 8. Höhenmesser, bei denen die Richt- und Bündelungsfähigkeit sehr kurzer elektrischer Wellen benutzt wird.
7 mit schwenkbarem Sender und Empfänger.
8 mit feststehendem Sender und mehreren Empfängern.

beide Reflektoren betätigt, kann direkt in Höhenmarken geeicht werden. eine schematische Darstellung der Anordnung gibt Bild 7 wieder. Durch Schwenken der ganzen Anordnung um 90° nach vorn kann diese auch zur Bestimmung des Abstandes von Hindernissen während des Fluges benutzt werden. Eine Automatisierung mit Zeigerablesung läßt sich durchführen.

Eine Verbesserung des beschriebenen Verfahrens stellt ein weiterer Vorschlag dar [12], der auf die notwendigen Hilfsmittel zur Automatisierung verzichtet und mehrere Empfänger benutzt, die in einer festen Entfernung voneinander angeordnet sind. Der feststehende Sender schickt unter einem bestimmten Winkel zur Verbindungslinie Sender—Empfänger ein Strahlenbündel aus. Die Empfänger können mit oder ohne Reflektoren verwendet werden. Wie Bild 8 zeigt, vereinfacht sich die Höhenbestimmung dadurch, daß jeder Höhe oder Höhenstufe ein bestimmter Empfänger oder eine bestimmte Empfängergruppe zugeordnet ist, die eine vorgespannte Glimmlampe oder einen anderen Indikator nach Auftreffen maximaler Empfangsintensität betätigen kann. Der größere Aufwand an Empfängern wird durch Fortfall der Verstellungseinrichtungen wieder aufgehoben, wobei sich noch weitere Vereinfachungen treffen lassen. Das Verfahren kann ebenfalls zur Bestimmung des Abstandes von Hindernissen durch Schwenkung um 90° nach vorn benutzt werden.

Bei den von Bärner [8] durchgeführten Untersuchungen machte sich das am Boden reflektierte Feld durch die periodische Änderung der Eigenwelle der Antenne störend bemerkbar. Dieser Einfluß konnte nur durch starke induktive oder kapazitive Verlängerung beseitigt werden. Diese Tatsache ist auch aus anderen Untersuchungen bekannt und wird in einem Vorschlag [13] für einen Höhenmesser angewendet. Die Änderungen der Eigenwelle der Antenne durch den Einfluß des am Boden reflektierten Feldes sind von der Phasenlage und somit von der Höhe der Antenne über dem Erdboden abhängig. Da diese Frequenzänderung bei Höhenänderungen, die mehr als eine Wellenlänge des die Antenne erregenden Generators betragen, periodisch auftritt, kann man mit ihrer Hilfe nur Höhenbestimmungen von Punkten aus ausführen, deren Höhe bereits bekannt ist. Es ändert sich aber mit zu- oder abnehmender Höhe die Amplitude der periodischen Frequenzänderung, so daß diese als Maß für die Höhe gelten kann. Hierbei wird vorausgesetzt, daß sich die Amplitude etwa umgekehrt proportional zur Höhe ändert. Zur praktischen Durchführung des Verfahrens wird die Verwendung einer $\lambda/4$-Schleppantenne vorgeschlagen, die als frequenzänderndes Glied mit einem Schwingungskreis des Generators verbunden ist und durch diesen erregt wird. Mittels eines zweiten höhenunabhängigen Generators, dessen Frequenz sich um den Betrag Δf von der des ersten unterscheidet, wird eine Überlagerungsschwingung erzeugt, deren Frequenz sich mit der Höhe periodisch ändert. Amplitude und Frequenz der periodischen Änderung dienen zur direkten Höhenanzeige.

Nach einem Vorschlag von Hell [14] wird die Messung des Bodenabstandes mit einem dauernd schwingenden, modulierten Sender versucht. Dieser wird mit der Modulationsfrequenz M moduliert und schwingt während der positiven Halbperiode der Modulationsfrequenz M mit einer Wellenlänge λ_1, während der negativen Halbperiode mit λ_2. Sind beide Wellen gleichzeitig am Empfangsort vorhanden, so liefern sie eine in einem Indikator wahrnehmbare Überlagerungsschwingung. Diese erreicht ein Maximum, wenn die Entfernung zwischen dem Sender und der reflektierenden Fläche

$$l = \frac{\lambda M}{4}$$

beträgt und wird Null für

$$l = \frac{\lambda M}{2}.$$

Die Modulationsfrequenz M wird solange geändert, bis ein Maximum oder Minimum eintritt, und ihre Abstimmittel können unmittelbar in Entfernungen geeicht werden. Zur praktischen Durchführung des Verfahrens wird die Verwendung zweier Sender, die für die Modulationsfrequenz im Gegentakt geschaltet sind, oder die Verwendung nur eines Senders, dessen Wellenlänge durch Anodenspannungsmodulation geändert wird, vorgeschlagen. Eine weitere Vereinfachung besteht in der gleichzeitigen Verwendung des Hochfrequenzgenerators als Empfänger. Ein Zusatzaggregat zur Automatisierung wird beschrieben.

b) Impulsverfahren.

Mit Hilfe dieses Verfahrens soll folgende Aufgabe gelöst werden: Es ist die Laufzeit eines Impulses oder Wellenzuges zu messen, der von einem Hochfrequenzsender ausgehend am Erdboden reflektiert wird und wieder zum Sender oder zu einem neben dem Sender angebrachten Empfänger zurückgelangt. Die hier geschilderten Verfahren stellen Lösungsversuche zur Messung dieser Laufzeit dar.

In einer Patentschrift [15] wird vorgeschlagen, Impulse oder Wellenzüge eines Hochfrequenzsenders periodisch auszusenden und die Zeitdifferenz zwischen einem dem Empfänger direkt zugeleiteten und einem am Erdboden reflektierten Impuls zu messen. Die Zeit und damit die Entfernung wird durch Herstellen von Phasengleichheit zwischen dem direkten und dem jeweils zugehörigen reflektierten Impuls bestimmt. Die Phasengleichheit wird dadurch hergestellt, daß der direkte Impuls über ein eingeschaltetes, veränderliches Verzögerungsglied läuft. Bei der praktischen Durchführung braucht man zwei Generatoren. Beide arbeiten auf einen gemeinsamen Schwingungskreis. Ein Generator dient zur Erzeugung des auszusendenden Wellenzuges, der andere dient zur Erzeugung des eigentlichen Impulses, indem er den gemeinsamen Zwischenkreis für die auszusendende Welle durchlässig macht. Diese Durchlässigkeit ist nur dann vorhanden, wenn die Amplitude des zweiten Generators größer als eine fest vorgegebene Gittervorspannung wird. Die Dauer der regelmäßig ausgesandten Impulse soll klein sein im Verhältnis zu den Pausenzeiten. Die Wellen-

Digitized by Google

länge des Hilfssenders soll das Doppelte der größten zu messenden Entfernung betragen, während die Wellenlänge des Impulssenders unter 5 m sein soll, am besten etwa 10 cm, aber auf jeden Fall klein im Verhältnis zur kleinsten zu messenden Höhe.

Nach einem anderen Impulsverfahren wird ein Hochfrequenzsender in jeder positiven Halbperiode einer Modulationsfrequenz M eingeschaltet. Die reflektierte Welle wird von einem in der Nähe des Senders stehenden Empfänger aufgenommen, der nur in den negativen Perioden der Modulationsfrequenz M eingeschaltet ist. Die doppelte Laufzeit der Impulse vom Sender zur reflektierenden Fläche ist gleich der halben Schwingungsdauer der Modulationsfrequenz oder einem Vielfachen dieser. Die gesuchte Entfernung ist gleich einem Viertel der Wellenlänge der Modulationsfrequenz. Die Entfernung kann durch Einstellung der Modulationsfrequenz auf maximalen Empfang gemessen werden.

Die Laufzeit des Impulses kann nach einem weiteren Vorschlag [16] nach folgender Methode gemessen werden: Es wird ein Hochfrequenzsender mit stetig sich ändernder Frequenz verwendet. In einem in der Nähe des Senders stehenden Empfänger werden die am Erdboden reflektierten Impulse und die zur gleichen Zeit vom Sender kommende Welle aufgenommen. Während der Laufzeit des Impulses hat sich die Frequenz des Senders um den Betrag Δf geändert. Während der stetig erfolgenden Frequenzänderung werden keine Schwingungen ausgesandt, sondern nur direkt auf den Empfänger übertragen. Durch die Linearität der Frequenzänderung gibt somit Δf ein Maß für die Laufzeit des Impulses. Bei der praktischen Durchführung werden direkt aufgenommene und reflektierte Wellen überlagert und die höhenabhängige Frequenzdifferenz Δf in einem geeigneten Gerät, das in Höhenmarken geeicht wird, zur Anzeige gebracht. Die Abstimmelemente von Sender und Empfänger sind miteinander mechanisch gekoppelt und sollen durch einen Synchronmotor angetrieben werden. Aus der Berechnung der für die Anordnung notwendigen Wellenbereiche ergibt sich für größere Höhen der Ultrakurzwellenbereich, für kleine Höhen der Dezi- und Zentimeterwellenbereich.

Da sich bei diesen Wellen Schwierigkeiten in der gleichen und gleichmäßigen Abstimmung von Sende- und Empfangskreis ergeben, wird der Vorschlag für die Anordnung dahingehend erweitert [17], daß der Sender gleichzeitig als Empfänger verwendet und mit ihm ein Gleichrichter gekoppelt wird.

8. Elektrisch-mechanische Verfahren.

Es ist bekannt, daß man die Flughöhe eines Luftfahrzeuges durch die Bestimmung der Fallzeit eines von diesem abgeworfenen Körpers messen kann. In diesen Körper kann man einen Hochfrequenzsender einbauen, der im Augenblick des Auftreffens auf den Boden in Tätigkeit tritt und in einem abgestimmten Empfänger ein Signal erzeugt. Da der Sender beim Auftreffen auf den Boden sehr leicht beschädigt werden kann, wird die Verwendung eines Fallschirmes vorgeschlagen. Die Nachteile dieses Verfahrens liegen klar auf der Hand und lassen den Vorschlag bedeutungslos werden. Eine Lösung bedeutet aber ein Vorschlag [18] auf derselben Grundlage, nach dem der mit einem Sender ausgestattete Fallkörper benutzt wird, der Sender aber während des Falles arbeitet und beim Auftreffen auf den Boden zu senden aufhört. Damit wird der Fallschirm überflüssig, da die Messung mit dem Auftreffen des Senders auf den Erdboden beendet und eine Zerstörung erwünscht ist. Zur Anzeige der Höhe dient ein mit dem Empfänger verbundenes Zeitmeßgerät, dessen Skala in Fallhöhen geeicht werden kann.

4. Kritik der behandelten Verfahren.

Wenn eine kritische Betrachtung über die praktische Verwendbarkeit und die Entwicklungsmöglichkeiten der betrachteten Verfahren gegeben werden soll, so müssen zunächst einmal die Anforderungen der Praxis an einen Höhenmesser zusammengestellt werden.

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, spielt die Höhenbestimmung während des Landevorganges eine besonders wichtige Rolle. Es kommen also hier Höhen, die unter 100 m liegen, bevorzugt in Frage. Bei Nebellandungen ist die genaue Höhenmessung kurz vor dem Aufsetzen der Maschine von ganz besonderer Wichtigkeit. Diese beiden Punkte umreißen die Hauptanforderung an den Höhenmesser: Die Höhenmessung von 100 m abwärts bis zu einem Meter. Die Anzeige muß unmittelbar und selbsttätig erfolgen, mittels Zeiger oder Signallämpchen. Dieser Punkt ist besonders wichtig, da der Flugzeugführer vor oder während der Landung nicht durch die Einstellung eines Gerätes abgelenkt werden darf. Er hat das Fahrgestell auszuschwenken, die Motoren zu drosseln, Landeklappen zu ziehen usw. Es sollen durch den Höhenmesser keine zusätzlichen Aufbauten (Antennen, Reflektoren usw.) notwendig werden, damit nicht durch diese die aerodynamische Form des Flugzeuges verschlechtert wird. Das Gerät muß leicht zu bedienen sein, möglichst geringes Gewicht aufweisen, betriebssicher arbeiten und richtige Höhenbestimmung auch bei Schräglage der Maschine gewährleisten. Es ist ferner erwünscht, den Höhenmesser zugleich als Gerät zur Bestimmung von Hindernissen während des Fluges benutzen zu können.

a) Das kapazitive Verfahren.

Die Vorschläge, die die Änderung der Eigenwelle oder die Änderung der Phase zwischen Strom und Spannung eines Leitergebildes bei zu- oder abnehmendem Abstand vom Boden zur Höhenmessung benutzen, scheinen zunächst geeignet zu sein, einen brauchbaren Höhenmesser abzugeben. Folgende Punkte bieten aber für eine praktische Verwirklichung der Vorschläge besondere Schwierigkeiten.

1. Ist die Angabe des Meßergebnisses in manchen Fällen ungenau, da die statische Kapazität eines Antennengebildes über dem Erdboden nicht in allen Fällen auf die Erdoberfläche bezogen werden darf. Der Erdboden ist als geschichtetes Medium zu betrachten mit Schichten verschieden großer Leitfähigkeit und DK. Nun gibt es in Europa infolge ausreichender Regenhöhe nur verhältnismäßig dünne Schichten mit geringer Leitfähigkeit, so daß der durch die Schichtung bedingte Fehler der Höhenangabe sich innerhalb der Toleranzen des für die Genauigkeit der übrigen Meßinstrumente geltenden Wertes bewegt. Eine schwierigere Aufgabe stellt aber die Kapazitätsangabe über Wald und Gebäuden dar, denn in diesem Fall ist die Kapazität keineswegs als definiert anzusehen und somit sind die Höhenangaben nicht mehr zutreffend. Während sich bei waldbedecktem Boden ein mittleres Niveau einstellen wird, auf das die Kapazität und die Höhenangabe zu beziehen ist, ist die Angabe der Kapazität über Bauwerken von der Form und den verwendeten Materialien (Holz, Eisenbeton usw.) abhängig.

2. Ergibt sich durch die Rückwirkungen des am Boden reflektierten Feldes eine Mehrdeutigkeit der Meßergebnisse. Aus den in Bild 1, 2 u. 5 angegebenen Meßergebnissen und anderen Untersuchungen läßt sich entnehmen, daß für die Änderung der Eigenwellenlänge nicht die Kapazitätsänderung der Antenne die Hauptrolle spielt, sondern der Einfluß des am Boden reflektierten Feldes und seine Phasenlage Änderungen bedingt. Bei fester Kopplung der Antenne mit dem Generator kann der Einfluß sogar so groß werden, daß der Schwingungszustand des Generators gestört werden kann. Eine Abhilfe läßt sich durch eine starke induktive oder kapazitive Verlängerung der verwendeten Antenne oder durch Verwendung des Flugzeugkörpers als frequenzänderndes Glied des Schwingungskreises, also durch weitgehende Verringerung des Strahlungswiderstandes schaffen.

3. Aus dem steilen Anstieg der Kapazitätsänderungen bei kleinen Bodenabständen ergibt sich eine weitere Schwierigkeit, da das Verhältnis $\frac{\Delta C}{\Delta h}$ sehr ungünstig wird und sich der Meßbereich stark zusammendrängt (s. Bild 4). Der ausnutzbare Meßbereich ist abhängig von der Betriebswellenlänge, und diese legt wiederum die Antennenabmessungen fest. Während in den unter [1, 2, 3, 4] angegebenen Ver-

Digitized by Google

fahren im Rundfunkwellenbereich und mit sehr ausgedehnten Antennenanlagen (bis zu 190 m Länge) gearbeitet oder sogar die Kapazität eines Zeppelinluftschiffes verwendet wurde, ergeben sich für die praktische Anwendung am Flugzeug kleine Antennengebilde bis zu 10 m Länge, die die Verwendung von Kurzwellen erfordern. Weil zwischen dem ausnutzbaren Höhenbereich und der Antennenlänge ein fest gegebener Zusammenhang besteht, ergibt sich für kleine Antennengebilde nur ein kleiner ausnutzbarer Bereich. Dieser beträgt nach den vorliegenden Untersuchungen und der leicht durchführbaren Berechnung höchstens etwa $^1/_7$ der Betriebswellenlänge. Bei der Messung der Phasenänderung ergibt sich für den stark induktiv verlängerten Leiter ein etwas günstigerer Bereich (bis zu $^1/_3$) (s. Bild 5, Kurve *III*). Die Kurve ist jedoch wegen der darin enthaltenen Mehrdeutigkeiten zur Messung nicht brauchbar, so daß auf eine praktische Anwendung verzichtet werden muß.

Der Vorteil der beiden Verfahren besteht in dem verhältnismäßig geringen Aufwand an Meßgeräten und der Möglichkeit der Höhenangabe durch ein Zeigergerät ohne besondere zusätzliche Hilfseinrichtungen. Das benötigte Antennensystem stellt ein unerwünschtes Zusatzgerät dar. Es wäre vielleicht zu erwägen, durch Verlegung des Antennensystems der FT-Anlage dieses gleichzeitig für den Höhenmesser mit auszunutzen.

Der Vorschlag, die Kapazitätsänderungen des Flugzeugkörpers gegen Erde zur Messung auszunutzen, dürfte, besonders bei den Flugzeugen mit einziehbarem Fahrgestell, auf Schwierigkeiten stoßen, da die Kapazität hierbei keineswegs mehr als definiert angesehen werden kann. Auch ist die Trimmlage des Flugzeuges nicht immer die gleiche, so daß sich auch hieraus Kapazitätsänderungen ergeben können. Auch die Verfahren, die die Änderung des Antennenstromes bei Höhenänderungen zur Messung benutzen wollen, sind unbrauchbar. Das Meßergebnis ist mehrdeutig, wie sich aus Bild 3 ergibt.

Nach diesen Darlegungen sind also die Aussichten, ein Höhenmeßgerät auf dieser Grundlage zu schaffen, infolge der grundsätzlichen Schwierigkeiten sehr gering. Die einzige Möglichkeit, ein brauchbares Meßgerät mit geringem Aufwand und selbsttätiger optischer Anzeige zu schaffen, wäre die Weiterentwicklung der unter [3, 4] genannten Abreißmethode und des Verfahrens, wie es unter [6] angegeben ist. Es ließe sich mit Hilfe dieser Methode ein Gerät entwickeln, das die Messung einer bestimmten Höhe gestattet, in der die Kapazitätsänderung des Flugzeugkörpers gegen Erde dazu dient, den im Labilitätsbereich arbeitenden Sender zum Ein- oder Aussetzen zu bringen und dieses Ein- oder Aussetzen zur Anzeige auszunutzen.

Die genaueste Höhenbestimmung nach der kapazitiven Methode läßt sich zweifellos durch die Messung einer höhenabhängigen Kapazität in der Wechselstrombrücke, wie es in dem unter [9] angegebenen Verfahren vorgeschlagen worden ist, durchführen, da hier die unter 1, 2 und auch 3 angegebenen Gründe, die eine praktische Anwendung in Frage stellen, fortfallen. Die Schwierigkeiten dieser Anordnung dürften vornehmlich technischer Natur sein. Sie liegen hauptsächlich darin, daß die veränderliche Größe ΔC sehr klein ist gegen die Kapazitäten, die durch die Beläge und den Flugzeugkörper gebildet werden und grundsätzlich nur zum Teil durch Kunstgriffe unwirksam geschaltet werden können. Eine Änderung dieser Kapazitäten während einer Höhenmessung würde mit dem Faktor $\frac{\Delta C}{C}$ in das Brückenverhältnis eingehen und jede Messung illusorisch machen. Bei den Erschütterungen im Flugzeug dürfte die Konstanthaltung der Brückenkapazitäten sehr große Schwierigkeiten bereiten. Das Abstimmen der Brücke in großer Höhe vor dem Landevorgang dürfte ebenfalls als sehr unbequem empfunden werden und sich als unanwendbar für Flugzeuge mit nur einem Mann Besatzung erweisen. Eine weitere Unzulänglichkeit liegt darin, daß die unmittelbare Anzeige nur auf dem Umweg über eine selbsttätige Steuerung der Abgleichelemente möglich ist. Wegen der hohen Brückendämpfung müssen zur Erreichung einer genügenden Empfindlichkeit eine sehr hohe Meßspannung und ein empfindlicher Ausgangsverstärker verwendet werden, was ebenfalls zur Komplizierung der Anlage beiträgt. Ferner ist auf die Kapazitätsänderungen hinzuweisen, die sich bei Maschinen mit einziehbarem Fahrgestell ergeben, so daß die Meßkapazität anders angebracht werden muß, als es in Bild 6 schematisch angedeutet ist. Ein Punkt, der zwar keine prinzipiellen Schwierigkeiten schafft, ist hier noch zu erwähnen, da durch ihn häufig Störungen auftreten. Es ist das Ausbilden von statischen Ladungen auf der Maschine. Diese Ladungen, deren Entstehen mit auf die Abgase des Verbrennungsmotors zurückgeführt werden kann, geben leicht Anlaß zu Störungen durch Potentialdifferenzen zwischen dem Meßsystem und dem Flugzeugkörper. Die Fehlmessungen, die sich aus der Schräglage des Flugzeuges ergeben, lassen sich ausgleichen, da sie vorher durch Modellversuche festgelegt werden können.

b) Reflexionsverfahren.

Einige allgemeine Betrachtungen sollen der Kritik der Reflexionsverfahren vorangeschickt werden, weil sie das Grundproblem aller Lösungsversuche berühren.

Bei allen Verfahren wird die Reflexion einer von einer Antenne ausgesandten elektromagnetischen Welle an einer leitenden Fläche, in vorliegendem Fall an der Erdoberfläche, zur Höhenmessung in verschiedenster Weise ausgenützt. In den meisten Vorschlägen werden die Reflexionseigenschaften des Erdbodens als gegeben hingenommen. In der folgenden Betrachtung soll auf diese Eigenschaften eingegangen werden.

Bei den meisten vorgeschlagenen Anordnungen sind Sender und Empfänger in gleicher Höhe nebeneinander befestigt. Wie Bild 9 darstellt, erreicht die vom Sender ausgehende Strahlung den Empfänger auf zwei Wegen, ein Teil auf dem unmittelbaren Weg SE und der andere Teil auf dem Weg SOE, nach Reflexion auf der Erdoberfläche, die ein dichteres Medium darstellt. Die resultierende Feldstärke am Empfänger hängt damit von der Amplitude der Teilstrahlungen und von ihrem Phasenunterschied ab. Der Phasenunterschied wiederum hängt von der Wegdifferenz zwischen SE und SOE und von dem Phasensprung, der durch die Reflexion am Erdboden hervorgerufen wird, ab. Die Intensität des resultierenden Feldes am Empfänger durchläuft Maxima und Minima je nach der Phasenlage beider Wellen, so daß man bei stetiger Änderung der Höhe ein Interferenzbild erhalten wird. Phasenverschiebung und Amplitudenverminderung sind bestimmt durch den komplexen Reflexionskoeffizienten R, der von dem Einfallswinkel, dem Polarisationszustand der einfallenden Welle, den elektrischen Konstanten des Erdbodens und der Frequenz abhängt. Der Phasensprung ist abhängig von den elektrischen Konstanten des Erdbodens an der Reflexionsstelle 0 und von dem Einfallswinkel der Strahlung auf die Erdoberfläche.

Bei einem reinen Dielektrikum mit der Leitfähigkeit Null findet bei der Reflexion einer horizontal polarisierten Welle ein Phasensprung um π statt. Die Amplitude der reflektierten Welle erweist sich als abhängig vom Einfallswinkel. Bei vertikaler Polarisation dagegen ist der Phasensprung bei großem Einfallswinkel ebenfalls gleich π, und die Amplituden der einfallenden und reflektierten Welle sind einander gleich. Mit abnehmendem Einfallswinkel sinkt die Amplitude der

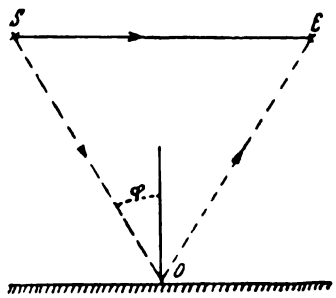


Bild 9. Weg der Strahlung vom Sender zum Empfänger.

Digitized by Google

reflektierten Welle bis auf den Wert Null (Brewsterscher Polarisationswinkel) und steigt dann wieder bis zu einem maximalen Wert bei $\varphi = 0$ an.

Betrachtet man den Erdboden, der eine Leitfähigkeit größer als Null besitzt, die dazu noch häufig wechseln kann, so wird das Problem wesentlich komplizierter, allerdings bleibt der allgemeine Charakter erhalten. Die Amplitude einer vertikal polarisierten Welle sinkt nicht mehr auf den Wert Null ab, sondern hat nur ein Minimum. Der Polarisationswinkel wird um so kleiner, je größer die Leitfähigkeit und je geringer die Frequenz ist. An Stelle eines Phasensprunges zeigt sich eine Änderung des Phasenwinkels, die im Polarisationswinkel am größten ist.

Der komplexe Reflexionskoeffizient läßt sich aus den Fresnelschen Formeln für die Reflexion elektromagnetischer Wellen an einer leitenden Oberfläche herleiten und ergibt sich für horizontale und vertikale Polarisation zu:

$$R_{\text{vert}} = \frac{n^2 \cdot \sin\alpha - \sqrt{n^2 - 1 + \sin^2\alpha}}{n^2 \cdot \sin\alpha + \sqrt{n^2 - 1 + \sin^2\alpha}}$$

$$R_{\text{hor}} = \frac{\sin\alpha - \sqrt{n^2 - 1 + \sin^2\alpha}}{\sin\alpha + \sqrt{n^2 - 1 + \sin^2\alpha}} .$$

Der komplexe Brechungsindex n hat die Form

$$n = \sqrt{\varepsilon - 2\gamma\sigma\lambda c} .$$

Nach Untersuchungen McPetries [20] ergibt sich der Reflexionskoeffizient bei senkrechtem Einfall ($\varphi = 0$) bei einer Wellenlänge von 1,50 m bei verschiedenen Bodenarten zu:

Grasboden: $R = 0{,}52$, Erdboden (an verschiedenen Tagen): 0,55, 0,52.

In einer weiteren Arbeit [21] gibt McPetrie umfangreiche Kurven wieder, aus denen bei einer bestimmten Frequenz ohne viel Mühe für jede beliebige Polarisationsrichtung und jeden Einfallswinkel die Werte der Amplitude und Phase der reflektierten Welle entnommen werden können, wenn die Leitfähigkeit und die DK des Bodens bekannt sind. Weitere Angaben über die Größe der Reflexionskoeffizienten finden sich in einer Arbeit von Maeda und Nakagami [22], deren Ergebnisse mit den vorstehend beschriebenen gut übereinstimmen.

Diese Untersuchungen wurden sämtlich über unbebautem und freiem Gelände durchgeführt. Für die Entwicklung eines Höhenmessers ist es aber auch wichtig, die Verhältnisse zu kennen, wie sie bei mit Bäumen bestandenem Gelände, über Häusern usw. bestehen. Aus den Untersuchungen des Verf. mit einem Verfahren, das der Viertelwellenmethode [23] ähnlich ist, ergibt sich über Wald, Gebäuden und Gelände mit irgendwelchen verstreuten Eisenteilen ein wesentlich anderer Amplitudenanstieg und eine nicht nachprüfbare Phasenverschiebung. In Bild 10 sind einige Meßergebnisse bei einer Wellenlänge von 60 cm, die mittels einer besonders entwickelten Meßanordnung aufgenommen wurden, über Sandboden, Tannenwald und einem auf Sandboden liegenden Drahtnetz zusammengestellt, die deutlich den Einfluß der Bodenbedeckung erkennen lassen.

Es wurde bisher zuwenig beachtet, daß der Erdboden als geschichtetes Medium zu betrachten ist. Lediglich McPetrie [20] deutet an, daß der Hauptanteil der Reflexion unter der Erdoberfläche stattfindet. In einer umfangreichen Arbeit haben Pfister und Roth [24] die Frage rechnerisch behandelt und die gefundenen Lösungen durch praktische Versuche bestätigt. Die Amplitudenverminderungen der reflektierten Welle ergeben sich aus der durch verschiedenen Feuchtigkeitsgehalt bedingten Schichtung und Schichtdicke, d. h. durch Interferenz der an den einzelnen Schichten verschiedener Leitfähigkeit reflektierten Strahlungsanteile.

Betrachtet man nun im Hinblick auf diese Erörterungen die behandelten Vorschläge für einen Höhenmesser auf der Reflexionsgrundlage, so ergeben sich daraus bereits grundsätzliche Schwierigkeiten für die Durchführung der einzelnen Verfahren.

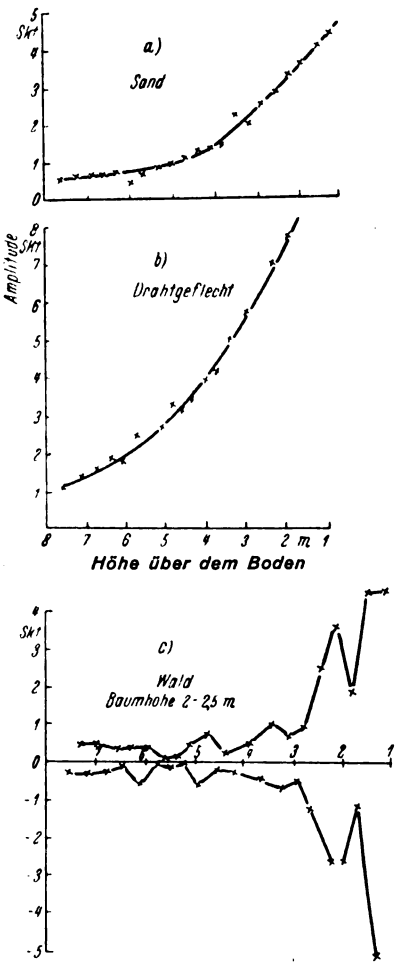


Bild 10. Die Größe der Amplitude der reflektierten Welle in Abhängigkeit von der Höhe des Senders über dem Erdboden.
a) Über Sandboden,
b) über Drahtgeflecht,
c) über Wald.

I. Allgemeine Verfahren. Der Vorschlag, die periodische Änderung der Eigenwellenlänge der Antenne oder eines Schwingungskreises und die Amplitude dieser periodischen Änderung [13] zur Messung auszunutzen, ist nicht durchführbar, da das Meßergebnis infolge der wechselnden Leitfähigkeit und Bodenbedeckung und sich ändernden Schichtdicke zu Mehrdeutigkeit Anlaß geben wird. Dieselben Gründe gelten, wenn auch nicht in dem Maße, für das unter [10] angegebene Verfahren, nach dem die Höhe durch die Bestimmung des Winkels des einfallenden und reflektierten Strahls gemessen wird. Dieses Verfahren hat noch einen besonderen Nachteil, der es nur für Sonderzwecke geeignet erscheinen läßt, nämlich, daß eine Höhenbestimmung nur bei genau horizontaler Lage der Maschine möglich ist, und daß die geringste Schräglage bereits eine Messung unmöglich machen kann, da der am Boden reflektierte Strahl am Empfänger vorbeigeht. Dieser Nachteil wird bei dem unter [12] angegebenen Verfahren teilweise vermieden, da mehrere Empfänger angeordnet sind; es werden aber auch je nach der Schräglage der Maschine zu kleine oder zu große Werte der Höhe angezeigt. Hier ließe sich in Verbindung mit dem künstlichen Horizont eine Korrektion schaffen. Es kann auch die gesamte Meßanordnung längs des Rumpfes angebracht werden.

Das von Hell [14] vorgeschlagene Verfahren, das mit zwei verschiedenen Wellenlängen während der beiden Halbperioden der Modulationsfrequenz M arbeitet, ist in seinem Meßergebnis nicht eindeutig, da die Maxima und Minima der Empfangsintensität bei jedem ganzzahligen Vielfachen der Modulationsfrequenz auftreten und die Messung nur von einem Punkt bekannter Höhe aus möglich ist. Schwierig-

Digitized by Google

keiten dürften sich fernerhin in der technischen Durchführung, besonders bei der Automatisierung, ergeben.

II. Impulsverfahren. — Diese dürften für die Weiterentwicklung die größte Rolle spielen, da bei diesen die Eigenschaften und die Beschaffenheit des Erdbodens weitgehend ausgeschaltet werden können und nur noch bestimmte Grenzen nicht unterschritten werden dürfen, d. h. daß die Amplitude eines reflektierten Impulses einen bestimmten Wert nicht unterschreitet. Die hier besprochenen Verfahren weisen zwar noch die sich aus der eingangs gebrachten Erörterung ergebenden Schwierigkeiten auf und dürften sich infolgedessen nicht für eine praktische Verwirklichung eignen. Sie enthalten aber wertvolle Vorschläge für eine Weiterentwicklung. Der Vorschlag, die Laufzeit des Impulses durch Herstellen von Phasengleichheit zwischen dem am Boden reflektierten und dem über ein einstellbares Verzögerungsglied dem Empfänger direkt zugeleiteten Impuls zu messen, gibt zu beträchtlichen Fehlern Anlaß. Nach dem Vorschlag soll fernerhin ein Zwischenkreis erst dann durchlässig werden, wenn direkter und reflektierter Impuls in Phase sind. Die Amplitude des reflektierten Impulses muß deshalb ziemlich groß sein. Es ist in manchen Fällen schwierig, diese Bedingung einzuhalten, besonders dann, wenn die Bodenverhältnisse ungünstig sind. Es ist wohl möglich, daß direkter und reflektierter Impuls in Phase sind, die Intensität aber nicht ausreicht, um den Zwischenkreis durchlässig zu machen.

Der Vorschlag [16], die Frequenz des Impulses mit der Senderfrequenz zu überlagern und aus der Überlagerungsfrequenz die Höhe zu bestimmen, bringt in seiner technischen Verwirklichung besondere Schwierigkeiten mit sich, die in der genauen Abstimmung von Sende- und Empfangskreis durch einen Synchronmotor der Linearität der Frequenzänderung und der Konstanthaltung der gesamten Meßapparatur liegen. Auch die in dem Zusatzpatent [17] angegebene Verbesserung, den Sender zugleich als Empfänger zu benutzen, ist wohl möglich, aber es wird dadurch schwerlich eine derartige Frequenzkonstanz erreicht werden können, wie sie das Verfahren erfordert[1]).

Man sieht, daß die bei fast allen Verfahren auftretenden Schwierigkeiten bei der praktischen Verwirklichung häufig mehr rein technischer Natur sind. Bei fast allen Verfahren ergibt sich die Notwendigkeit, im Zentimeterwellen- oder an der unteren Grenze des Dezimeterwellengebietes zu arbeiten, wenn noch Höhen von 1 bis 2 m bestimmt werden sollen. Bei den Impulsverfahren muß der ausgesandte Wellenzug etwa fünf Schwingungen enthalten, um den Empfänger zum Ansprechen zu bringen. Um die Ausbildung von stehenden Wellen zwischen Sender und reflektierender Fläche zu vermeiden, legt somit die untere Grenzhöhe die Betriebswellenlänge fest. Nun ist bis jetzt die Entwicklung von Sendern und Empfängern, besonders im Zentimeterwellengebiet noch nicht so weit fortgeschritten, daß sie für eine praktische Verwendung unter den schwierigen Bedingungen im Flugbetrieb geeignet wären.

Da die vorstehend beschriebenen Verfahren entweder versagen oder zu ungenau arbeiten, um die Laufzeit des Impulses zu messen, wäre vielleicht der Vorschlag zu erwägen, die Laufzeit mittels der Ablenkung des Elektronenstrahls einer Braunschen Röhre zu bestimmen. Eine Berechnung der für diesen Vorschlag notwendigen Geräte zeigt, daß es möglich sein muß, auf dieser Grundlage einen Höhenmesser für den Bereich von 1,5 bis 100 m herzustellen, der den Vorteil leichter Bedienbarkeit und direkter Anzeige des Meßergebnisses mittels Braunscher Röhre hat.

c) Das elektrisch-mechanische Verfahren.

Dieses Verfahren hat nur für Sonderaufgaben Bedeutung und ist für die allgemeine Anwendung nicht geeignet und zu kostspielig.

[1]) Nach Aero Digest, Nov. 1938, S. 87 und 105 ist es in Amerika gelungen, dieses Verfahren soweit zu entwickeln, daß ein brauchbarer Höhenmesser entstand, der sich bereits in der praktischen Erprobung befindet. Das Instrument liefert bei einer Betriebswellenlänge von $\lambda = 60$ cm Höhenangaben von 15 bis 1200 m. Bemerkenswert ist, daß für dieses Gerät neue Röhren entwickelt wurden.

Betrachtet man zusammenfassend alle hier gebrachten Verfahren im Hinblick auf ihre Entwicklungsmöglichkeiten und die dazu notwendigen Untersuchungen, so ergibt sich daraus folgendes Bild: Von den Vorschlägen der kapazitiven Methode dürfte sich nur das Verfahren, nach dem eine höhenabhängige Kapazität in der Wechselstrombrücke gemessen wird, wegen seiner Definiertheit zur praktischen Verwirklichung eignen. Es ergeben sich aber hierbei Schwierigkeiten, die sich nur durch Aufwand großer Hilfsmittel beseitigen lassen. Die Änderung der Eigenwelle einer Antenne, die in ihren geometrischen Abmessungen dem Flugzeug angepaßt ist, ergibt einen zu kleinen Meßbereich und ein mehrdeutiges Ergebnis. Es wäre auf kapazitiver Grundlage höchstens möglich, ein Meßgerät zu schaffen, das nur eine bestimmte, vorher fest eingestellte Höhe anzeigt (Abreißmethode). Ehe allerdings ein endgültiges, abschließendes Urteil über die Brauchbarkeit oder Unbrauchbarkeit der kapazitiven Methode gefällt werden kann, müßten einige Untersuchungen über die in der Kritik angedeuteten Fragen durchgeführt werden.

Dasselbe Problem bietet die Reflexion über waldbedecktem Boden, über Häusern usw., worüber bisher noch keine Angaben vorliegen. Ferner ist hier die Entwicklung von geeigneten Sendern und Empfängern besonders im Dezimeter- und Zentimeterwellengebiet wichtig.

Von den beiden beschriebenen Verfahren wird sich voraussichtlich das Reflexionsverfahren durchsetzen und hier wiederum das Impulsverfahren mit unmittelbarer Anzeige durch eine Braunsche Röhre.

5. Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von Hindernissen während des Fluges.

Die Bestimmung von Richtung und Abstand zu festen und beweglichen Hindernissen während des Fluges läßt sich, wie bereits erwähnt, mit den unter [11] und [12] angegebenen Höhenmessern, die mit einem gerichteten Strahlenbündel arbeiten, durchführen, indem die gesamte Anordnung um 90° nach vorn geschwenkt wird.

Ein anderer Vorschlag findet sich in einer amerikanischen Arbeit [25], in der von Entfernungsmessungen mittels reflektierter Strahlen berichtet wird. Von einem feststehenden Sender sehr kurzer Wellenlänge ($\lambda = 4{,}8$ cm) wird ein sich bewegender Gegenstand mit der Frequenz f_1 angestrahlt. Die von diesem zurückkommende Strahlung hat die Frequenz f_2 (Doppler Effekt!). Es ist:

$$f_2 = f_1 \frac{1 \pm 2\,v \cos\alpha}{c}.$$

In einem neben dem Sender stehenden Empfänger läßt sich dann eine Überlagerungsfrequenz erzeugen, deren Frequenz gegeben ist zu:

$$f' = \frac{2\,v \cos\alpha}{\lambda}.$$

Worin v die Geschwindigkeit des sich bewegenden Gegenstandes und α den Winkel zur Normalen (S-E) bedeuten.

Bei einem Flugzeug konnte noch eine besondere Art der Frequenzänderung beobachtet werden, die durch die Umdrehung des Propellers hervorgerufen wurde.

Zur Bestimmung des Abstandes und der Richtung von Hindernissen eignet sich auch die bereits erwähnte Viertelwellenmethode [23]. Bei dieser dient der Sender gleichzeitig als Empfänger. Das reflektierte Feld erzeugt in der Antenne eine der Eigenschwingung überlagerte Schwingung. Wenn beide Schwingungen in Phase sind, weist die Sendeantenne ein Minimum an Dämpfung auf. Das tritt dann ein, wenn der Abstand der reflektierenden Fläche ein Viertel oder ein ungerades Vielfaches von einem Viertel der Wellenlänge beträgt. Bewegt sich der Sender auf den reflektierenden Gegenstand zu, so werden dauernd Maxima und Minima der Dämpfung durchlaufen, die in einem geeigneten Gerät zur Anzeige gebracht werden können.

Von diesen Verfahren ist zweifellos das Verfahren der Frequenzänderung das eleganteste und genaueste. Es erfordert aber eine sehr große Konstanz des Senders und läßt

Digitized by Google

nur schwer eine Automatisierung zu. Die Empfindlichkeit der Anordnung ist für den vorliegenden Zweck vollkommen ausreichend. Es wird berichtet, daß fahrende Kraftwagen bis zu Entfernungen von etwa 2 km beobachtet werden konnten. Bei den heute erreichten hohen Geschwindigkeiten der Flugzeuge dürften 200 m etwa die untere Grenze der Ansprechempfindlichkeit des Gerätes betragen müssen. Bei den eingangs erwähnten Verfahren [11 u. 12] ist es infolge der festen Lage von Sender und Empfänger zueinander nicht möglich, Entfernungen von Gegenständen zu messen, die seitlich zur Flugrichtung liegen.

Die günstigste Lösung, die allerdings keine sehr große Genauigkeit der Entfernungsbestimmung aufweist, bietet die Viertelwellenmethode. Es ist nur ein Generator notwendig, der mit einem Richtantennensystem versehen an einer geeigneten Stelle des Flugzeuges automatisch schwenkbar angeordnet werden könnte und somit zur gleichzeitigen Richtungs- und Abstandsbestimmung dienen könnte. Die Messung erfolgt voll selbsttätig.

6. Schrifttum.

[1] Löwy, Elektrodynamische Erforschung des Erdinnern und Luftschiffahrt. Wien 1920, Manzsche Verlags-Buchhandlung.

[2] Alberti, Klemperer, Löwy, Ballonversuche über die Abhängigkeit der Antennenkapazität von der Bodendistanz. Phys. Z. Bd. 26 (1925) S. 644—46.

[3] Löwy, Bodendistanzmessung vom Luftschiff mittels der Kapazitätsmethode. Phys. Z. Bd. 26 (1925) S. 646—654.

[4] Löwy, Flughöhenhysteresis des Röhrengenerators. Phys. Z. Bd. 34 (1933) S. 730—731.

[5] DRP. Nr. 476935 (erloschen). Vorrichtung zur Feststellung der Erdnähe von Flugzeugen.

[6] DRP. Nr. 532885. Verfahren zur Messung des Abstandes eines Luftfahrzeuges von der Erdoberfläche.

[7] DRP. Nr. 532884. Direkt anzeigender Abstandsmesser für Flugzeuge.

[8] Bärner, Experimentelle Untersuchungen über die mit Bodenabstandsänderungen verbundenen Phasenänderungen offener Schwingungskreise. Z. Hochfrequenztechn. u. El. Ak. Bd. 47 (1936) S. 45—55.

[9] DRP. Nr. 586087. Höhenmeßgerät für Luftfahrzeuge.

[10] Trüstedt, Om malmletning medels elektrcitet. Tidskriften Teknikern, Helsingfors (1904) 24. 8. S. 252—53.

[11] DRP. Nr. 520538. Einrichtung zur Messung von Entfernungen mit in festem Abstand voneinander angeordneten, mit Reflektoren versehenen Sendeschwingungskreis und Empfangskreis.

[12] DRP. angem. Höhen- und Entfernungsmesser für Flugzeuge.

[13] DRP. Nr. 542264. Verfahren zur Höhenbestimmung mittels am Boden reflektierter Hochfrequenzwellen.

[14] DRP. Nr. 564802. Verfahren zur Entfernungsmessung eines Senders von einer wellenreflektierenden Wand.

[15] DRP. Nr. 623005. Einrichtung zum Messen von Entfernungen mit Hilfe von Echos elektromagnetischer Impulse.

[16] DRP. Nr. 509717. Verfahren zur Bestimmung der Flughöhe von Flugzeugen mittels elektrischer Wellen.

[17] DRP. Nr. 538843. Vorrichtung zur Bestimmung der Flughöhe von Flugzeugen mittels elektrischer Wellen nach Patent 509717.

[18] DRP. Nr. 635633. Verfahren zur Ermittlung der Flughöhe eines Luftfahrzeuges.

[19] McPetrie, A Determination of the electrical constants of the earth's surface at wavelengths of 1.5 and 0.46 m. Proc. phys. Soc. Bd. 46 (1934) S. 637—648.

[21] McPetrie, The reflection coefficient of the earth's surface for radio waves. J. Inst. Electr. Eng. Bd. 82 (1938) S. 214—218.

[22] K. Maeda, M. Nakagami, The measurement of the reflection coefficient of the earth at high radio frequencies. Nippon Electr. Eng. Nov. 1937 S. 446—447.

[23] DRP. Nr. 273339 vom 26. 3. 1913.

[24] Pfister u. Roth, Reflexion am geschichteten Medium. Z. Hochfrequenztechn. Bd. 51 (1938) 5, S. 156—162.

[25] C. W. Rice, Transmission and reception of centimeter waves. Gen. Elektr. Rev. Bd. 39 (1936) Nr. 8 S. 363 bis 369.

Digitized by Google

Digitized by Google

AUG 2 3 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 7 enthält Arbeiten von: F. Reinitzhuber S. 349-354, A. Pflüger S. 355-361, P. Brenner und H. Kostron S. 362-369, G. Fischer S. 370-383, O. Lutz S. 384-390, W. Fischer S. 391-401

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 7 SEITE 349 BIS 402 | MÜNCHEN, 20. 7. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Uber die Krafteinleitung in einholmige Flügeltragwerke durch unvollkommen ausgebildete Querwände. Von F. Reinitzhuber . . . . . Seite 349

Aerodynamik des Drehflüglers mit Blattwinkelrücksteuerung. Von A. Pflüger . . . . . Seite 355

Der Einfluß der Zahl der Abschreckungen und der Glühdauer auf das Aushärten von Al-Cu-Mg-Legierungen. Von P. Brenner und H. Kostron . . . . . Seite 362

Untersuchung von Bleibronze-Ausgüssen in der DVL-Lagerprüfmaschine. Von G. Fischer . . . . . Seite 370

Uber Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren. Von O. Lutz . . . . . Seite 384

Betrachtungen zum Aufbau des elektrischen Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip. Von W. Fischer . . . . . Seite 391

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 20. Juli 1939 Lfg. 7

Über die Krafteinleitung in einholmige Flügeltragwerke durch unvollkommen ausgebildete Querwände.

Von F. Reinitzhuber.

Bericht der Henschel Flugzeug-Werke A.-G., Schönefeld, Kreis Teltow.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Systemaufbau und Belastungsannahme.
III. Berechnung des untersuchten Flügelteiles nach dem »Schubfeldschema«.
IV. Zahlenbeispiel.
V. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Die Konstruktionselemente einholmiger Flügeltragwerke sind Hauptholme, Torsionsröhren, Querwände und allenfalls Hilfsholme. Die Querwände, die sich im allgemeinen über den gesamten Flügelquerschnitt erstrecken, haben sowohl die Torsionsröhre auszusteifen als auch die Kräfte in die Torsionsröhre und den Hauptholm einzuleiten. Einbauten im Flügel, Triebwerk und Fahrwerk machen es oft notwendig, die Querwände nur in einer Hälfte des Flügelquerschnittes als Biegeträger mit Gurten und Stegblech (Diagonalen) vollständig auszuführen. Die andere Hälfte der Querwand bleibt dann ganz weg oder es werden nur die Gurte belassen. So lange durch eine solche unvollkommen ausgebildete Querwand kleine Kräfte, wie sie sich etwa aus den Luftlasten ergeben, eingeleitet werden und die Abstände dieser Querwand von den benachbarten vollen Querwänden nicht allzu groß sind, wird sich eine genaue Untersuchung erübrigen, Bild 1. Man wird dann von der kräfteübertragenden Wirkung der unvollkommenen Rippe absehen können und die angreifenden Lasten auf die benachbarten vollen Querwände verteilen. Sind jedoch große Kräfte aus dem Triebwerk oder Fahrwerk durch unvollkommen ausgebildete Querwände einzuleiten, so ist es angebracht, den Kräfteverlauf im einzelnen zu verfolgen wie im nachstehenden gezeigt wird.

II. Systemaufbau und Belastungsannahme.

Untersucht wird ein einholmiges Flügeltragwerk mit zwei Hilfsholmen (Vorder- und Hinterholm), mehreren vollen Querwänden und zwei benachbarten Motorquerwänden, die unvollkommen ausgebildet sind. Sie bestehen nur in der vorderen Torsionsröhre aus vollkommenen Biegeträgern; in der hinteren Torsionsröhre fehlt das Stegblech, so daß nur die Gurte erhalten bleiben. Von den vielen vollen Querwänden werden nur zwei den Motorwänden benachbarte Querwände auf jeder Seite betrachtet. Dies genügt, um den qualitativen Einfluß der Störung durch die beiden unvollkommenen Querwände festzustellen; aber auch der quantitative Einfluß wird darüber hinaus gering sein. Die Untersuchung erstreckt sich daher über den in Bild 2 dargestellten Teil des Flügels, der bei Querwand *5* ohne Wölbbehinderung eingespannt ist.

Belastet wird dieses Flügelteil von Normal- bzw. Tangentialquerkräften und Torsionsmomenten, die vom Außenflügel kommen und in Querwand *0* wirken. Ferner werden in der vorderen Hälfte der Querwand *2* und *3* aus Motor

Bild 1. Teil eines einholmigen Flügeltragwerkes mit einer unvollkommen ausgebildeten Querwand.

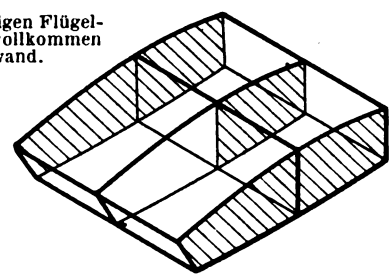
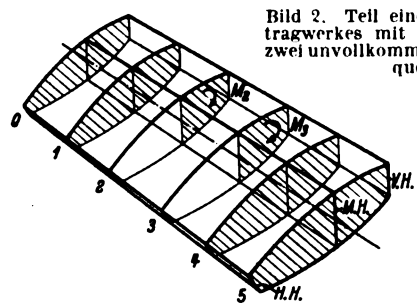


Bild 2. Teil eines einholmigen Flügeltragwerkes mit zwei Hilfsholmen und zwei unvollkommen ausgebildeten Motorquerwänden.



und Fahrwerk örtlich Kräfte eingeleitet. Die vom Außenflügel her wirkenden Kräfte werden durch die unvollkommene Ausbildung der Querwände *2* und *3* nur unwesentlich in ihrer Verteilung über den Flügelquerschnitt verändert; dieser Belastungsfall wird daher nicht weiter untersucht. Hingegen soll die Verteilung der durch die Querwände *2* und *3* eingeleiteten Kräfte weiter verfolgt werden. Da die Berechnung für einzuleitende Tangential- bzw. Normalkräfte oder Torsionsmomente grundsätzlich gleich ist, die Torsionsmomente für die Schubflüsse in der Beplankung aber von ausschlaggebender Bedeutung sind, beschränkt sich die vorliegende Arbeit nur auf die Untersuchung von Torsionsmomenten.

III. Berechnung des untersuchten Flügelteiles nach dem „Schubfeldschema".

Zur Berechnung von Systemen, die aus Schubblechen, Gurten und Rippen bestehen, wird zweckmäßig ein häufig angewendetes als »Schubfeldschema« bezeichnetes Modell verwendet. Gekennzeichnet ist dieses Modell dadurch, daß in den von Gurten und Rippen begrenzten Blechfeldern ein reiner Schubspannungszustand angenommen wird, während die durch eine »mittragende Breite« vergrößerten Gurte der Holme und Rippen die gesamten Längskräfte zugewiesen bekommen[1]). Eine unter diesen Voraussetzungen aufgebaute Berechnung läuft auf die Methoden, die auch bei

[1]) Eine ausführliche Beschreibung des »Schubfeldschemas« findet sich z. B. bei H. Ebner und H. Köller. Über den Kraftverlauf in querversteiften Scheiben, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938). S. 528.

Digitized by Google

statisch unbestimmten Rechnungen angewendet werden, hinaus.

Die Zahl der statisch Unbestimmten für das in Bild 2 dargestellte bei Querwand *5* ohne Wölbbehinderung (mit 3 Längsfesseln) eingespannte Flügelteil beträgt $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 2 = 15$, denn die zwischen zwei benachbarten Querwänden gelegenen Doppelzellen sind durch je drei überzählige Längsfesseln verbunden; außerdem ist jede Doppelzelle für sich einfach statisch unbestimmt mit Ausnahme der Doppelzellen *1—2* und *3—4*, bei denen durch den Fortfall des Stegbleches in je einer Hälfte der Motorquerwände *2* und *3* die Zahl der statisch Überzähligen sich um zwei vermindert.

Die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme, die aus Doppelzellen zusammengesetzt sind, ist für Raumfachwerke bereits in einer Arbeit von H. Ebner und H. Köller[2]) gezeigt worden. Es werden drei Eigenkraftgruppen durch Lösen der drei überzähligen Längsfesseln an jeder Querwand und ein geeigneter Schubfluß in jeder Doppelzelle (bei Torsionsbelastung der Schubfluß im Mittelholm) als statisch Unbestimmte eingeführt. Im Bereich der Querwand *1* bis *4* ist zu beachten, daß durch den Wegfall der Stegbleche in der hinteren Hälfte der Motorquerwände *2* und *3* zwei statisch Überzählige weniger als in den übrigen Doppelzellen sind. Daher ist in diesem Teil der Doppelzellen statt dreier statisch unbestimmter Schubflüsse nur einer einzuführen, der am besten im Steg des Hinterholmes gewählt wird[3]).

Nach der so vorgenommenen Wahl der statisch Überzähligen kann an die Aufstellung der 15 Elastizitätsgleichungen geschritten werden, deren Lösung dann die 15 statisch Unbestimmten ergibt, die z. T. gering oder überhaupt nicht gekoppelt sind; die Rechenarbeit bleibt aber trotzdem noch außerordentlich groß. Hätte man den betrachteten Flügelteil durch Einbeziehen weiterer Doppelzellen erweitert, so würde die Zahl der statisch Unbestimmten und damit der Rechenaufwand noch wesentlich steigen.

Es liegt daher nahe, vereinfachende Annahmen zu treffen, die es gestatten, einen Überblick des Kräfteverlaufes im Flügel bei Einleitung von Kräften durch unvollkommen ausgebildete Querwände zu erhalten, ohne die große Rechenarbeit durchführen zu müssen. Die Vereinfachungen beziehen sich unter Beibehaltung des Schubfeldschemas auf das System, die Belastung und auf die Wahl der statisch Unbestimmten.

Die Wölbkräfte in den Zellen *0—1* und *4—5* sind für die Verteilung der eingeleiteten Kräfte in der Torsionsröhre nicht von ausschlaggebender Bedeutung. Sie werden vorerst vernachlässigt, indem die Längsfesseln bei Querwand *1* und *4* gelöst werden. Betrachtet man noch die Querwände *1* und *4* als steif, dann ist die Zelle *0—1* spannungslos und die Zelle *4—5* verteilt das eingeleitete Torsionsmoment entsprechend den Steifigkeiten der vorderen und hinteren Torsionsröhre[4]). Es können daher die Doppelzellen *0—1* und *4—5* weggelassen werden. Für die weitere Untersuchung verbleibt dann das in Bild 3a dargestellte noch siebenfach statisch unbestimmte *W*-System. In den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen wird das System in seinen Abmessungen und in den Querschnittsverhältnissen der Gurte und Beplankung symmetrisch bezüglich einer Ebene parallel zu den Querwänden durch *M M* sein (s. Bild 3a), oder durch eine entsprechende Mittelbildung symmetrisch angenommen werden können.

Bei symmetrischen Systemen ist es zweckmäßig, die Belastung und die statisch Unbestimmten in symmetrische

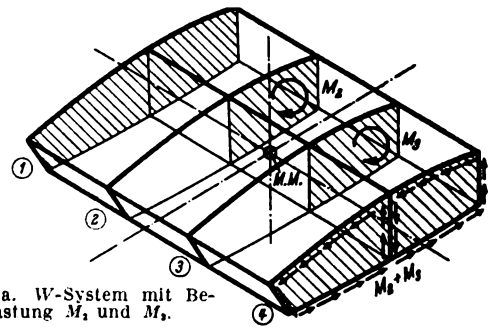


Bild 3a. *W*-System mit Belastung M_2 und M_3.

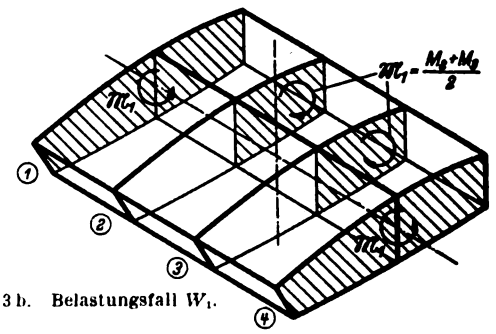


Bild 3b. Belastungsfall W_1.

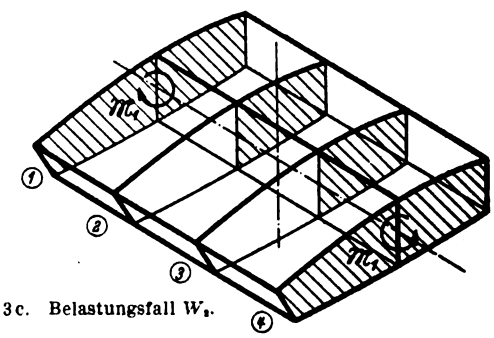


Bild 3c. Belastungsfall W_2.

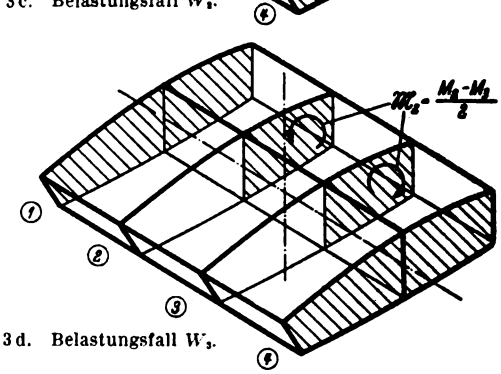


Bild 3d. Belastungsfall W_3.

Bild 3a—d. Zerlegung der am *W*-System angreifenden Belastung M_2 und M_3 in die Belastungsfälle W_1, W_2, W_3 ($W = W_1 + W_2 + W_3$).

und antisymmetrische Gruppen zu zerlegen. Die im *W*-System eingeleiteten Momente M_2 und M_3 werden in die drei Belastungsgruppen W_1, W_2 und W_3 aufgespalten, die in Bild 3b, c, d dargestellt sind. Von den drei Belastungsfällen ist für die statisch unbestimmte Rechnung nur die W_1- und W_3-Belastung von Bedeutung. Das W_2-System verteilt das Moment $\mathfrak{M}_1 = \frac{M_2 + M_3}{2}$ entsprechend den Steifigkeiten der vorderen und hinteren Torsionsröhre[4]) und braucht nicht weiter untersucht zu werden.

Nun ist die Wahl der 7 statisch Überzähligen vorzunehmen. Durch Aufschneiden von 5 Blechen, nämlich der vom Mittel- und Hinterholm und den Querwänden *1*, *2* bzw. *3*, *4* begrenzten Beplankung und des Stegbleches des Hinterholmes wird das siebenfach statisch unbestimmte System auf ein fünffach statisch unbestimmtes System und ein zweifach statisch unbestimmtes Grundsystem zurückgeführt. Die 5 statisch Unbestimmten $X_1, \ldots, X_5$, die sich aus den unbe-

[2]) H. Ebner und H. Köller, Über die Kräfteumlagerung in mehrholmigen Flügeltragwerken bei Ausfall einzelner Bauteile. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. I 452 und das dort angegebene Schrifttum.

[3]) Eine andere Möglichkeit der Berechnung der hier behandelten Aufgabe bietet eine Arbeit von H. Köller, Einfluß von Steifigkeitsänderungen auf den Kraftverlauf in statisch unbestimmten Tragwerken. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. I 444. Das dort gezeigte Verfahren wird dann vorteilhaft anzuwenden sein, wenn die Stegbleche in der hinteren Hälfte der Motorquerwände erst weggelassen werden, nachdem eine statisch unbestimmte Rechnung mit vollen Motorquerwänden schon durchgeführt wurde.

[4]) Siehe z. B. H. Hertel, Die Verdrehsteifigkeit von Flugzeugbauteilen. DVL-Jahrbuch 1931 S. 189.

Digitized by Google

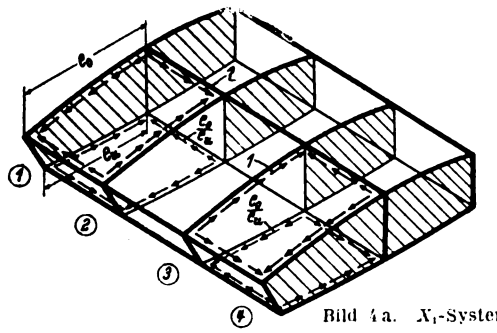


Bild 4a. X_1-System.

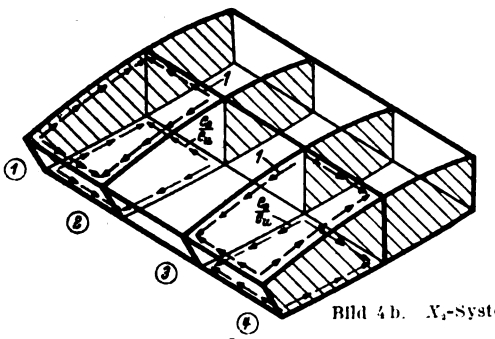


Bild 4b. X_2-System.

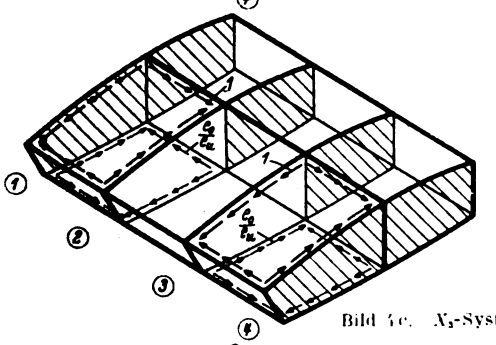


Bild 4c. X_3-System.

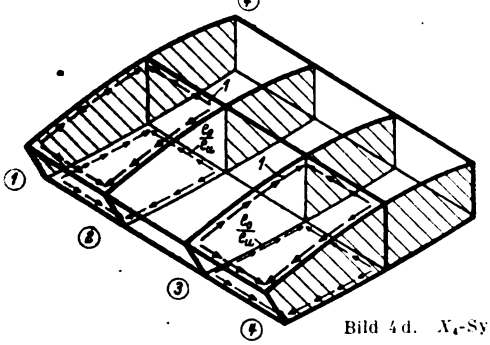


Bild 4d. X_4-System.

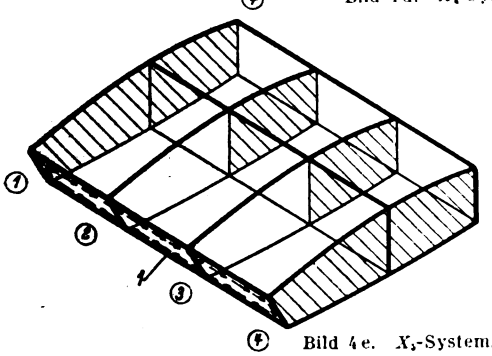


Bild 4e. X_5-System.

Bild 4a—e. Statisch Unbestimmte X_1—X_5. (Eingetragen sind nur die Schubflüsse an einem Schnittufer).

kannten Schubflüssen der aufgeschnittenen 5 Bleche zusammensetzen, sind in Bild 4a, b, c, d dargestellt[5]). Sie sind so gewählt, daß sie wenig miteinander gekoppelt sind.

[5]) Schubflüsse als statisch Unbestimmte hat auch O. S. Heck in der Arbeit: Über die Berechnung versteifter Scheiben und Schalen. Jahrbuch der deutschen Luftf.-Forschung 1937 S. I 443—451, eingeführt.

Es werden daher die zu den Elastizitätsgleichungen gehörigen Gleichungsbeiwerte

$$\delta'_{1,3} = \delta'_{1,4} = \delta'_{1,5} = 0 \text{ und } \delta'_{2,3} = \delta'_{2,4} = \delta'_{2,5} = 0.$$

Aber auch die übrigen Kopplungsglieder $\delta'_{1,2}$, $\delta'_{3,4}$, $\delta'_{4,5}$ sind gegenüber $\delta'_{1,1}$, ... $\delta'_{5,5}$ klein. Die X_1- ..... X_4-Systeme lassen sich auch als Wölbkraftgruppen darstellen, durch Lösen der Längsfesseln im Hinterholm bei Querwand *10* und *11* oder durch Aufschneiden der Gurte der Querwände am Mittelholm.

Das zweifach statisch unbestimmte Grundsystem, das aus einer geschlossenen, von Querwand *1* bis *4* reichenden Torsionsröhre besteht, wird durch Lösen je einer Längsfessel bei Querwand *2* und *3* in das statisch bestimmte Nullsystem übergeführt. Als statisch Unbestimmte Y_1 und Y_2 werden die in Bild 5 dargestellten Wölbkraftgruppen gewählt; damit sind die insgesamt 7 statisch Unbestimmten festgelegt. Y_1 und Y_2 sind nicht gekoppelt ($\delta'_{1,2} = 0$). Im X_1- und X_2-System ist $Y_2 = 0$, im X_3-, X_4- und X_5-System ist $Y_1 = 0$. Beim Belastungsfall W_1 wird $Y_2 = 0$ und $X_3 = X_4 = X_5 = 0$, beim Belastungsfall W_3 wird $Y_1 = 0$ und $X_1 = X_2 = 0$. Die Elastizitätsgleichungen lauten daher für die Belastungsgruppe W_1:

$$\delta'_{1,1} X_1 + \delta'_{1,2} X_2 + \delta'_{1,0} = 0$$
$$\delta'_{2,1} X_1 + \delta'_{2,2} X_2 + \delta'_{2,0} = 0$$

und für die Belastungsgruppe W_3:

$$\delta'_{3,3} X_3 + \delta'_{3,4} X_4 + \delta'_{3,5} X_5 + \delta'_{3,0} = 0$$
$$\delta'_{4,3} X_3 + \delta'_{4,4} X_4 + \delta'_{4,5} X_5 + \delta'_{4,0} = 0$$
$$\delta'_{5,3} X_3 + \delta'_{5,4} X_4 + \delta'_{5,5} X_5 + \delta'_{5,0} = 0$$

wobei die $\delta'_{i,1}$- und $\delta'_{i,0}$-Werte aus einem einfach statisch unbestimmten Grundsystem zu bestimmen sind. Im W_1-Belastungsfall und X_1-, X_2-System lautet die Elastizitätsgleichung des statisch unbestimmten Grundsystems

$$\delta''_{1,1} Y_1 + \delta''_{1,0} = 0,$$

analog im W_3-Belastungsfall und X_3-, X_4-, X_5-System

$$\delta''_{2,2} Y_2 + \delta''_{2,0} = 0.$$

Somit ist die Lösung der siebenfach statisch unbestimmten Aufgabe auf eine zweifach (W_1) und eine dreifach (W_3) statisch unbestimmte Aufgabe mit je einem einfach unbestimmten Grundsystem zurückgeführt.

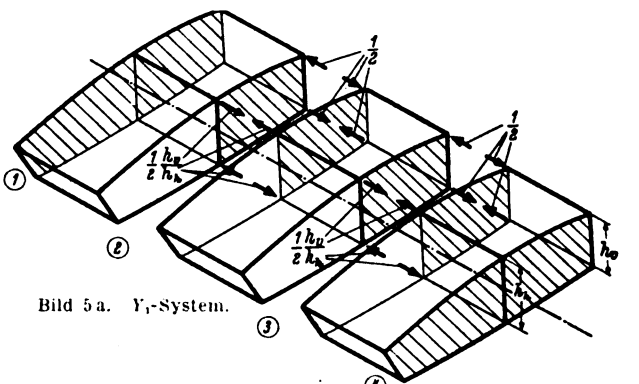


Bild 5a. Y_1-System.

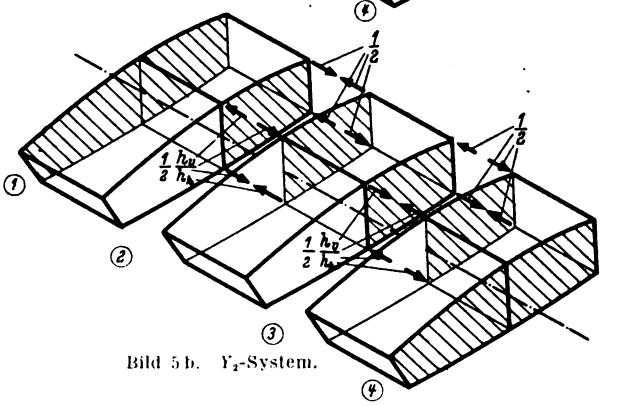


Bild 5b. Y_2-System.

Bild 5a b. Statisch unbestimmte Y_1 und Y_2 des Grundsystemes.

Digitized by Google

Bei Überschlagsrechnungen kann man die statisch Überzähligen Y_1 und Y_2 des Grundsystems vernachlässigen. Die statisch Unbestimmte X_2 ist im Belastungsfall W_1 klein und kann Null gesetzt werden; dann ergibt sich für

$$X_1 \cong -\frac{\delta'_{1,0}}{\delta'_{1,1}}$$

ein Näherungswert, der für den wichtigsten Belastungsfall W_1 gut brauchbare Resultate liefert. Wirken statt den Torsionsmomenten $\mathfrak{M}_1$ des W_1-Belastungsfalles zwei gleiche tangentiale Kräfte als äußere Belastung in den Querwänden *2* und *3*, so gilt als Näherungswert, da $X_1 \cong 0$

$$X_2 \cong -\frac{\delta'_{2,0}}{\delta'_{2,2}}.$$

Hat man den Kraftverlauf im W-System bestimmt, so können in einer Zusatzrechnung die Eigenkraftgruppen, die aus der Wölbbehinderung bei Querwand *1* und *4* entstehen und die bisher vernachlässigt wurden, ermittelt werden. Ihr Einfluß auf die Verteilung der eingeleiteten Kräfte in die vordere und hintere Röhre ist jedoch, wie im folgenden Abschnitt an einem Zahlenbeispiel gezeigt wird, gering.

IV. Zahlenbeispiel.

Für das in Bild 6 dargestellte Flügelteil wird die zahlenmäßige Rechnung durchgeführt. In den Zahlentafeln 1 a bis d sind die Blechstärken und Stabquerschnitte zusammengestellt. Die Beplankung und die Stegbleche der Holme wurden als schubsteif angenommen, während die Stegbleche der Querwände z. T. als Zugfelder betrachtet wurden. Abweichend von dem in Bild 3 gezeigten System ist hier die Beplankung zwischen Querwand *2* und *3* im hinteren Flügelteil entsprechend der Form der Motorkabine nicht mehr eine zylindrische Teilschale, sondern hat die in Bild 7 angegebene Form. Auch in diesem Fall bildet sich bei Querkrafteinleitung ein reiner Schubspannungszustand aus: Es ist der Schubfluß $t_x = t_0 \left(\frac{h_0}{h_x}\right)^2$. Damit ergibt sich für die virtuelle Arbeit

$$\int \frac{t_x^{(u)} \cdot t_x^{(m)} \cdot dF_x}{sG} = t_0^{(u)}\, t_0^{(m)}\, \frac{F_{red}}{sG} \left(F_{red} = l_0 \cdot H, \quad \text{wo } H = \int \left(\frac{h_0}{h_x}\right)^3 ds\right),$$

ein Ausdruck, der formal mit dem für zylindrische Teilschalen übereinstimmt. An Stelle der gesamten Fläche, die bei zylindrischen Teilschalen einzusetzen ist, tritt eine reduzierte Fläche, mit der die Rechnung ebenso durchgeführt werden kann, wie bei zylindrischen Schalen.

Der Zahlenrechnung wurden verschiedene Annahmen zugrunde gelegt, die sich auf die Steifigkeit der Querwände und den Abbau der Zahl der statisch Überzähligen beziehen und aus den Zahlentafeln 2 a, b zu ersehen sind. Wird im Belastungsfall W_1 (s. Bild 3 b) $\mathfrak{M}_1 = 1000$ kg m gewählt, so ergeben sich die in Zahlentafel 3 a, b zusammengestellten Schubflüsse der Beplankung und Holmstege und Gurtkräfte der Holme.

Ein anschauliches Bild, wie sich die verschiedenen Annahmen der Zahlentafeln 2 auswirken, erhält man aus Zahlentafel 4 durch Gegenüberstellen der Horizontalkomponenten P_o und P_u der Gurtkräfte der Querwände *2* und *3* am

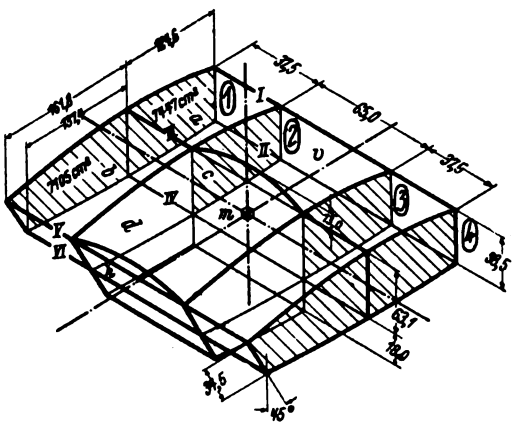


Bild 6 a. Teil eines einholmigen Flügeltragwerkes mit zwei Hilfsholmen und zwei unvollkommen ausgebildeten Motorquerwänden mit Systemmaßen (cm) und Bezeichnungen.

Bezeichnungen: Beplankung Oberseite *a*, *b*, Beplankung Unterseite *c*, *d*, Holmstege *v*, *m*, *h*, Holmgurte *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*.

Bild 6 b. System der Querwände 1 und 4.

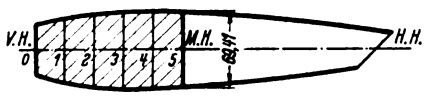


Bild 6 c. System der Motorquerwände 2 und 3 (Maße in cm).

Zahlentafel 1 a. Verhältniszahlen $\frac{s_c}{s}$ der Blechstärken der Beplankung und Holmstege (s. Bild 6 a).

Zelle	Beplankung a	b	c	d	Holmstege v	m	h
1—2 3—4	1,0	0,930	1,0	0,833	0,909	1,0	1,0
2—3	1,0	0,833	1,0	0,833	0,833	1,0	1,0

Zahlentafel 1 b. Verhältniszahlen $\frac{s_c}{F}$ (cm^{-1}) der Querschnittsflächen der Holmgurte (s. Bild 6 a).

Zelle	Vorderholm I	II	Mittelholm III	IV	Hinterholm V	VI
1—2 3—4	0,0406	0,0348	0,0031	0,0038	0,0367	0,0360
2—3	0,0406	0,0348	0,0031	0,0038	0,0435	0,0435

Zahlentafel 1 c. Verhältniszahlen $\frac{s_c}{s}$ der Blechstärken der Stegbleche der Querwände 1, 4 u. 2, 3 (s. Bild 6 b, c).

Querwand	Feld 0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8
1 u. 4	0,500	1,00	1,00	1,00	0,500	0,833	0,833	0,833
2 u. 3	0,313	0,625	0,625	0,625	0,313	—	—	—

Zahlentafel 1 d. Verhältniszahlen $\frac{s_c}{F}$ (cm^{-1}) der Querschnittsflächen der Gurte der Querwände 1, 4 u. 2, 3 (s. Bild 6 b, c).

Querwand		Feld 0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9
1 u. 4	O. G.	0,0261	0,0261	0,0167	0,0167	0,0153	0,0148	0,0193	0,0260	0,0476
	U. G.						0,0162	0,0253	0,0481	0,0865
2 u. 3	O. G.			0,0270			0,0238 $\left(\frac{s_c}{J} = 0{,}0588\ \text{cm}^{-3}\right)$			
	U. G.						0,0520			

Digitized by Google

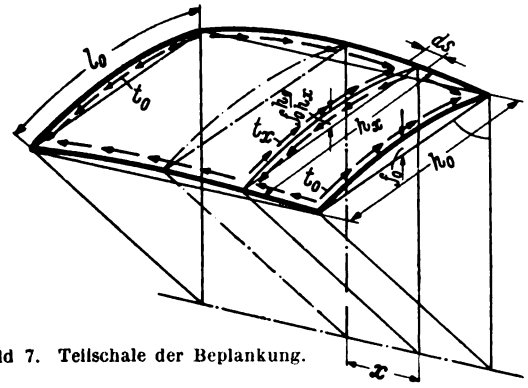


Bild 7. Teilschale der Beplankung.

Mittelholm. Dort sind auch die Momentenanteile M_h der hinteren Röhre eingetragen, die sich aus $M_h = \frac{P_o + P_u}{2} \cdot h$ ergeben, wo $h = 69{,}41$ cm der Abstand der Querwandgurte am Mittelholm ist. Wenn $P_o \cong P_u$, dann ist bereits durch M_h der Kraftverlauf im wesentlichen in der Beplankung der hinteren Röhre gegeben. Man erkennt, daß die Gurtkräfte und der Anteil des Momentes in der hinteren Röhre abhängig sind von der Steifigkeit der Querwände, insbesondere der Gurte im unvollkommen ausgebildeten hinteren Teil der Querwände *2* und *3*; daher ist es bei gekrümmter Beplankung zweckmäßig, die Gurte im hinteren Teil der Querwände *2* und *3* außerhalb des Flügelprofiles anzubringen, um die Biegemomente in den Gurten klein zu halten, so daß die Gurte steifer werden. Werden diese als starr angenommen (Fall *1*), so beträgt der Momentenanteil der hinteren Röhre 0,364 $\mathfrak{M}_1$ (Fall *A*, vollkommene Wölbbehinderung) bzw. 0,343 $\mathfrak{M}_1$ (Fall *B*, keine Wölbbehinderung), werden sie hingegen elastisch gewählt (Fall *4*), so fällt der Momentenanteil auf 0,126 $\mathfrak{M}_1$ bzw. 0,125 $\mathfrak{M}_1$. Werden außer den Gurten im hinteren Teil der Querwände *2* und *3* auch deren vordere Teile und die Querwände *1* und *4* elastisch angenommen, so steigt der Momentenanteil auf 0,185 $\mathfrak{M}_1$ (Fall *3*) bzw. 0,320 $\mathfrak{M}_1$ (Fall *2*), ist aber wesentlich abhängig von der Art der Krafteeinleitung. Hätte man die Querwände *2* und *3* voll über den ganzen Querschnitt

Zahlentafel 2a. Annahmen beim Zahlenbeispiel über das elastische Verhalten der Querwände und über die Art der Krafteinleitung.

Bezeichnung Fall	Querwände 1, 4 u. vordere Hälfte d. Querwände 2, 3	Gurte im hinteren Teil der Querwände 2 u. 3	Momenteneinleitung in den Querwänden 2 u. 3
1	starr	starr	—
2	elastisch	elastisch	
3	elastisch	elastisch	
4	starr	elastisch	—

Zahlentafel 2b. Annahmen beim Zahlenbeispiel über die Verwölbbarkeit der Doppelzellen und den Abbau der stat. Überzähligen.

Bezeichnung Fall	Art der Lagerung bei Querw. 1 u. 4	Annahmen über die Wölbkräfte i. d. vorderen Röhre b. Querw. 2 u. 3	Sonst. Annahmen	Zahl d. stat. Überzähl. im W_1-Fall	Zahl d. stat. Überzähl. im W_2-Fall
A	Wölbbehinderung durch unelastisch angenommene Doppelzellen 0—1 u. 4—5	Wölbkräfte in der vorderen Röhre b. Querw. 2 u. 3 sind berücksichtigt	—	6	7
B	Keine Wölbbehinderung bei Querwand 1 u. 4		—	3	4
C		Wölbkräfte in der vorderen Röhre b. Querwand 2 u. 3 bleiben vernachlässigt ($Y_1 = 0$ u. $Y_3 = 0$)	—	2	3
D			$X_3 = 0$	1	—

Zahlentafel 3a. Schubflüsse $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\right)$ der Beplankung und Holmstege im symmetrischen Belastungsfall W_1[6]) (s. Bild 3b).

Zelle	Fall		Beplankung a	b	c	d	Holmstege v	m	h
1—2 u. 3—4	1	A	∓2,89	∓3,39	±3,25	±3,66	∓6,77	±3,16	0
		B	∓3,55	∓3,20	±3,91	±3,44	∓5,84	±2,97	0
		C	∓4,21	∓3,24	±4,52	±3,53	∓4,36	±2,28	0
		D	∓4,36	∓3,12	±4,36	±3,68	∓4,36	±2,32	0
	2	B	∓6,41	∓1,12	±1,91	±5,40	∓5,46	±3,68	0
		C	∓6,90	∓1,04	±2,34	±5,36	∓4,62	±3,38	0
		D	∓4,71	∓2,66	±4,71	±3,13	∓4,71	±2,97	0
	3	B	∓4,51	∓1,66	±4,54	±1,92	∓7,47	±5,25	0
		C	∓5,54	∓1,57	±5,50	±1,88	∓5,52	±4,49	0
		D	∓5,52	∓1,58	±5,52	±1,86	∓5,52	±4,49	0
	4	A	∓4,49	∓1,10	±4,43	±1,35	∓8,84	±6,40	0
		B	∓5,10	∓1,09	±5,05	±1,33	∓7,56	±5,88	0
		C	∓5,89	∓1,11	±5,82	±1,38	∓5,86	±5,12	0
		D	∓5,86	∓1,14	±5,86	±1,34	∓5,86	±5,12	0
2—3	1—4	A-D	0	0	0	0	0	0	0

Oberes Vorzeichen gilt für die Zelle 1—2
Unteres Vorzeichen gilt für die Zelle 3—4

Zahlentafel 3b. Gurtkräfte (kg) der Holme im symmetrischen Belastungsfall W_1[7]) (s. Bild 3b).

Querwand	Fall		Vorderholm I	II	Mittelholm III	IV	Hinterholm V	VI
1 u. 4	1	A	+106,6	— 96,8	- 100,5	+ 98,2	+ 93,1	−100,7
		B–D						
	2, 3	B–D	0	0	0	0	0	0
	4	B–D						
		A	+119,5	-121,1	— 83,0	+ 91,3	+ 30,3	— 37,0
2 u. 3	1	A	— 39,1	+ 35,4	+ 36,6	— 35,8	— 34,0	+ 36,9
		B	— 86,1	+ 72,5	+ 98,2	— 93,8	−119,9	+129,0
		C	— 5,8	— 5,8	+ 49,3	— 48,9	-121,5	+132,6
		D	0	0	+ 40,6	— 61,5	-117,1	+138,0
	2	B	+ 35,9	+132,9	— 60,9	268,5	— 41,8	+202,5
		C	+ 85,5	+ 85,5	— 92,7	-240,3	— 39,1	+201,2
		D	0	0	+ 34,6	— 52,4	— 99,8	+117,6
	3	B	−111,0	+109,7	+ 89,7	— 98,4	— 62,1	+ 72,0
		C	+ 0,6	+ 0,6	+ 19,6	— 32,6	— 58,8	+ 70,5
		D	0	0	+ 20,5	— 31,1	— 59,2	+ 69,8
	4	A	— 43,6	+ 44,2	+ 30,2	— 33,3	— 11,1	+ 13,6
		B	— 92,3	+ 94,4	+ 69,7	— 81,1	— 40,9	+ 50,1
		C	+ 1,4	+ 1,4	+ 12,6	— 25,6	— 41,6	+ 51,7
		D	0	0	+ 14,8	— 22,4	— 42,6	+ 50,2

Zahlentafel 4. Horizontalkomponenten P_o und P_u der Gurtkräfte[7]) (kg) der Querwände 2 und 3 am Mittelholm und Momentenanteil M_h der hinteren Röhre im symmetrischen Belastungsfall W_1.

Fall	A P_o / P_u	A M_h	B P_o / P_u	B M_h	C P_o / P_u	C M_h	D P_o / P_u	D M_h
1	+548,7 / −500,9	0,364 $\mathfrak{M}_1$	+517,5 / −472,3	0,343 $\mathfrak{M}_1$	+524,1 / −485,6	0,350 $\mathfrak{M}_1$	+505,4 / −505.4	0,351 $\mathfrak{M}_1$
2	— / —	—	+180,5 / −741,6	0,320 $\mathfrak{M}_1$	+168,7 / −736,8	0,314 $\mathfrak{M}_1$	+430,7 / −430,7	0,299 $\mathfrak{M}_1$
3	— / —	—	+268,0 / −263,7	0,185 $\mathfrak{M}_1$	+253,7 / −258,1	0,178 $\mathfrak{M}_1$	+255,7 / −255,7	0,178 $\mathfrak{M}_1$
4	+178,3 / −185,5	0,126 $\mathfrak{M}_1$	+176,4 / −183,4	0,125 $\mathfrak{M}_1$	+179,6 / −189,1	0,128 $\mathfrak{M}_1$	+183,8 / −183,8	0,128 $\mathfrak{M}_1$

Digitized by Google

der Torsionsröhre durchgeführt, so würde man bei steif angenommenen Querwänden ohne Berücksichtigung der Wölbkräfte entsprechend der Steifigkeit der vorderen und hinteren Röhre (s. Anm. 4) in der hinteren Röhre einen Momentenanteil von 0,472 $\mathfrak{M}_1$ erhalten.

Die Wölbbehinderung bei Querwand *1* und *4* verursacht sowohl im Fall *1* (sechsfach statisch unbestimmt) als auch im Fall *4* (dreifach statisch unbestimmt) nur geringe Veränderungen des Momentenanteiles (von 0,364 $\mathfrak{M}_1$ auf 0,343 $\mathfrak{M}_1$ bzw. von 0,126 $\mathfrak{M}_1$ auf 0,125 $\mathfrak{M}_1$), so daß die Vernachlässigung der Zellen *0—1* und *4—5* gerechtfertigt erscheint. Dies um so mehr als ja bei Ausführungsbeispielen kaum völlige Wölbbehinderung, die im Fall *A* angenommen wurde, eintreten wird. Gute Näherungslösungen liefern nach dem Abbau der statisch Überzähligen die Fälle *C* (zweifach statisch unbestimmt) und *D* (einfach statisch unbestimmt), für die Schubflüsse der Beplankung und Holmstege nicht aber für die Gurtkräfte, die ja hauptsächlich von der vernachlässigten Wölbbehinderung abhängig sind. Ihnen kommt aber bei einer Näherungsrechnung keine wesentliche Bedeutung zu, da sie im Gegensatz zu den Schubflüssen der Beplankung die Rolle von Zusatzkräften spielen. Der Fall *C* wird dann günstig angewendet, wenn neben dem Momentenanteil auch P_o und P_u bestimmt werden sollen; genügt jedoch die Kenntnis des Momentenanteiles, so ergibt die einfach statisch unbestimmte Rechnung des Falles *D* bereits brauchbare Näherungswerte.

Im Belastungsfall W_3 (s. Bild 3d) wurde $\mathfrak{M}_2 = 1000$ kgm gewählt. Die Annahmen des Belastungsfalles W_1 (Zahlentafel 2) wurden mit Ausnahme der Fälle *2*, *3* und *D* auch hier untersucht. Die Schubflüsse der Beplankung und Holmstege und die Gurtkräfte der Holme sind in Zahlentafel 5a, b zusammengestellt. Die Kräfte P_o und P_u sind aus Zahlentafel 6 ersichtlich. Dort ist auch der Momentenanteil M_h, der aus $\frac{P_o + P_u}{2} \cdot h$ ermittelt wurde, eingetragen; er liefert jedoch nur mehr rohe Näherungswerte, da $P_o \neq P_u$ und daher in der hinteren Röhre kein reines Torsionsmoment eingeleitet wird. Wie im Belastungsfall W_1 zeigt sich auch hier eine große Abhängigkeit der Kräfte P_o und P_u und damit des Momentenanteiles M_h von der Steifigkeit der Gurte im hinteren Teil der Querwände *2* und *3*. Es ist bei starren Gurten (Fall *1*) $P_o = \pm 579{,}5$ kg, $P_u = \mp 352{,}4$ kg (Fall *A*, vollkommene Wölbbehinderung) bzw. $P_o = \pm 550{,}5$ kg, $P_u = \mp 267{,}2$ kg (Fall *B*, keine Wölbbehinderung) und bei elastischen Gurten (Fall *4*) $P_o = \pm 104{,}2$ kg, $P_u = \mp 85{,}7$ kg bzw. $P_o = \pm 101{,}3$ kg und $P_u = \mp 68{,}2$ kg. Aus diesen Zahlen erkennt man, daß im Belastungsfall W_2 die Wölbbehinderung bei Querwand *1* und *4* eine verhältnismäßig größere Veränderung der Kräfte P_o und P_u und damit der Mitwirkung der hinteren Röhre hervorruft, wie im Belastungsfall W_1. Immerhin liefert auch hier der vierfach statisch unbestimmte Fall *B* (keine Wölbbehinderung) noch genügend genaue Werte, da ja meist nicht völlige Wölbbehinderung vorliegen wird und der Belastungsfall W_3 für den Gesamtkraftverlauf in viel geringerem Maße ausschlaggebend ist wie der Belastungsfall W_1.

Der weitere Abbau der statisch Überzähligen im Fall *C* (dreifach statisch unbestimmt) durch Vernachlässigen der Wölbkräfte in der vorderen Röhre liefert brauchbare Näherungswerte für P_o und P_u und für die Schubflüsse der Beplankung und Holmstege.

Zahlentafel 5a. Schubflüsse $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\right)$ der Beplankung und Holmstege im gegensymmetrischen Belastungsfall W_3[6] (s. Bild 3d).

Zelle	Fall		Beplankung a	b	c	d	Holmstege e	m	h
1—2 u. 3—4	1	*A*	—0,08	—0,70	+0,74	+1,08	—1,07	+2,10	—4,80
		B	+0,35	—0,44	+0,71	+0,19	—1,70	+2,16	—3,50
		C	—0,12	—0,49	+1,16	+0,27	—0,64	+1,68	—3,56
	4	*A*	—0,99	+0,83	+0,99	—0,32	—2,11	+3,48	—3,65
		B	—0,65	+0,96	+0,77	—0,74	—2,61	+3,49	—2,81
		C	—1,27	+0,96	+1,38	—0,72	—1,32	+2,95	—2,85
2—3	1	*A*	+2,63	+2,88	—3,79	—1,49	+5,40	—2,94	—0,07
		B	+2,96	+2,96	—4,18	—1,76	+5,32	—3,66	+1,84
		C	+3,48	+3,01	—4,68	—1,82	+4,08	—3,10	+1,93
	4	*A*	+3,98	+1,47	—4,13	—0,94	+6,74	—4,54	—0,85
		B	+4,22	+1,59	—4,36	—1,24	+6,49	—4,94	+0,68
		C	+4,91	+1,61	—5,03	—1,27	+4,97	—4,28	+0,71

Zahlentafel 5b. Gurtkräfte (kg) der Holme im gegensymmetrischen Belastungsfall W_3[7] (s. Bild 3d).

Querwand	Fall		Vorderholm I	II	Mittelholm III	IV	Hinterholm V	VI
1 u. 4	1	*A*	$\mp 53{,}1$	$\pm 40{,}3$	$\mp 6{,}2$	$\pm 52{,}5$	$\pm 122{,}9$	$\mp 156{,}4$
		B—C	0	0	0	0	0	0
	4	*A*	$\mp 47{,}7$	$\pm 42{,}7$	$\mp 0{,}5$	$\pm 26{,}1$	$\pm 89{,}8$	$\mp 110{,}4$
		B—C	0	0	0	0	0	0
2 u. 3	1	*A*	$\mp 90{,}2$	$\pm 52{,}5$	$\pm 96{,}0$	$\mp 38{,}9$	$\mp 83{,}4$	$\pm 64{,}0$
		B	$\mp 76{,}9$	$\pm 37{,}3$	$\pm 110{,}8$	$\mp 61{,}6$	$\mp 147{,}8$	$\pm 138{,}2$
		C	$\mp 19{,}5$	$\mp 19{,}5$	$\pm 77{,}1$	$\mp 29{,}7$	$\mp 152{,}2$	$\pm 143{,}8$
	4	*A*	$\mp 89{,}5$	$\pm 84{,}5$	$\pm 61{,}8$	$\mp 55{,}2$	$\mp 16{,}1$	$\pm 14{,}5$
		B	$\mp 73{,}6$	$\pm 69{,}0$	$\pm 70{,}5$	$\mp 73{,}9$	$\mp 69{,}2$	$\pm 77{,}3$
		C	$\mp 2{,}0$	$\mp 2{,}0$	$\pm 27{,}1$	$\mp 31{,}9$	$\mp 70{,}8$	$\pm 79{,}7$

Oberes Vorzeichen gilt bei Querwand 1 bzw. 2
Unteres Vorzeichen gilt bei Querwand 4 bzw. 3.

[6]) Schubflüsse in der Beplankung sind positiv, die am rumpfseitigen Schnittufer eines Schnittes normal zur Flügelachse gegen die Flugrichtung verlaufen.
Schubflüsse in den Holmstegen sind positiv, die am rumpfseitigen Schnittufer eines Schnittes normal zur Flügelachse nach aufwärts zeigen.

[7]) Zugkräfte in den Gurten sind positiv bezeichnet.

Zahlentafel 6. Horizontalkomponenten P_o und P_u der Gurtkräfte[7]) (kg) der Querwände 2 und 3 am Mittelholm und Momentenanteil M_h der hinteren Röhre im gegensymmetrischen Belastungsfall W_3.

Fall	A P_o / P_u	M_h	B P_o / P_u	M_h	C P_o / P_u	M_h
1	$\pm 579{,}5$ / $\mp 352{,}4$	$0{,}323\ \mathfrak{M}_2$	$\pm 550{,}5$ / $\mp 267{,}2$	$0{,}284\ \mathfrak{M}_2$	$\pm 566{,}7$ / $\mp 287{,}4$	$0{,}296\ \mathfrak{M}_2$
4	$\pm 104{,}2$ / $\mp 85{,}7$	$0{,}066\ \mathfrak{M}_2$	$\pm 101{,}3$ / $\mp 68{,}2$	$0{,}059\ \mathfrak{M}_2$	$\pm 104{,}8$ / ∓ 75.6	$0{,}063\ \mathfrak{M}_2$

V. Zusammenfassung.

Im vorstehenden wurde gezeigt, daß der Kraftverlauf, der bei der Krafteinleitung durch unvollkommene Querwände in einholmigen Flügeltragwerken entsteht, mit Hilfe des Schubfeldschemas aus einer statisch unbestimmten Rechnung bestimmt werden kann. Ferner wird zahlenmäßig der Kräfteverlauf eines Flügeltragwerkes untersucht, dessen zwei benachbarte Motorquerwände durch Torsionsmomente belastet werden und die unvollkommen ausgebildet sind, da in einer Hälfte des Flügelquerschnittes das Stegblech fehlt. Es ergibt sich trotz der unvollkommenen Querwände eine weitgehende Verteilung der eingeleiteten Kräfte über den gesamten Flügelquerschnitt, die jedoch wesentlich abhängig ist von der Steifigkeit der Querwände insbesondere der Gurte im hinteren Teil der Röhre und der Art der Einleitung der Kräfte in der Querwand. Durch vereinfachende Annahmen ist es möglich, die Zahl der statisch Überzähligen und damit den Rechenaufwand zu vermindern, ohne daß damit eine wesentliche Verfälschung des Kräftebildes verbunden wäre. Werden in den beiden unvollkommen ausgebildeten Motorquerwänden zwei gleich große und gleichsinnig drehende Momente eingeleitet, so genügt bereits eine einfach statisch unbestimmte Rechnung, um einen brauchbaren Näherungswert für den Momentenanteil der hinteren Röhre zu ermitteln.

Digitized by Google

Aerodynamik des Drehflüglers mit Blattwinkelrücksteuerung.

Von A. Pflüger.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen, Statische Abteilung.

In den bisher veröffentlichten Arbeiten über das aerodynamische Verhalten von Drehflüglern sind stets Rotorsysteme betrachtet worden, bei denen eine Drehung der einzelnen Rotorblätter um ihre Längsachse — abgesehen von elastischen Verwindungen — ausgeschlossen ist. Im folgenden wird mit den üblichen Berechnungsmethoden ein Rotor untersucht, bei dem eine Anstellwinkeländerung der Drehflügel derart möglich ist, daß der Verdrehwinkel des Blattprofils mit dem Schlagwinkel des Blattes linear veränderlich ist. Zur Abschätzung der Bedeutung dieser Kinematik wird die aufgestellte Theorie auf ein Zahlenbeispiel angewendet.

Gliederung.

I. Vorbemerkungen.
1. Erläuterung des Begriffs »Blattwinkel-Rücksteuerung«.
2. Aufgabenstellung und Bezeichnungen.
II. Der Drehflügler im stationären Vorwärtsflug.
1. Induzierte Geschwindigkeit und Anstellwinkel.
2. Strömungsgeschwindigkeiten am Blattelement.
3. Schlagwinkel.
4. Schubzahl.
5. Gleitzahl.
6. Momentengleichgewicht um das Drehgelenk.
III. Rechnungsbeispiel.
IV. Zusammenfassung.

I. Vorbemerkungen.

1. Erläuterung des Begriffs »Blattwinkel-Rücksteuerung«.

Über die Aerodynamik von Drehflügelflugzeugen liegen bereits eine ganze Reihe von Untersuchungen vor. In diesen Arbeiten werden stets solche Flügelsysteme behandelt, bei denen die an der Drehachse gelenkig angeschlossenen Rotorblätter zwei Freiheitsgrade besitzen: Durch das Schwenkgelenk wird eine Bewegung des einzelnen Blattes in der Drehebene (Ebene, welche das Drehgelenk enthält und die Drehachse zur Flächennormale hat) möglich, während das Schlaggelenk ein Schlagen des Blattes senkrecht zur Ebene der Schwenkbewegung erlaubt. Bei dieser Anordnung ist eine Drehung des Blattes um seine Längsachse ausgeschlossen. Dementsprechend ist für einen Querschnitt senkrecht zur Blattachse der mit Blattwinkel bezeichnete Winkel zwischen Auftriebsnullinie des Blattprofils und Drehebene (vgl. Bild 3) durch die Konstruktion festgelegt und bleibt bei der Rotation des Flügelsystems unveränderlich.

In letzter Zeit hat sich nun noch eine andere Kinematik als brauchbar erwiesen. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß außer dem Schlagen und Schwenken der Flügel auch eine Drehung um die Blattlängsachse möglich ist. Diese Veränderung des Blattwinkels ist jedoch mit dem Schlagwinkel zwangsläufig so gekoppelt, daß bei einem Aufwärtsschlagen des Blattes der Blattwinkel verkleinert oder rückgesteuert wird.

Zur Veranschaulichung des Vorganges wird am besten die Ausbildung des Rotorkopfes im einzelnen betrachtet. Der Effekt der Blattwinkelrücksteuerung ist bisher beim Breguet-Hubschrauber[1]) und beim Hafner-Tragschrauber[2]) praktisch angewendet worden. Da besonders der letztere im Schrifttum ausführlich beschrieben ist, sei die bei ihm vorhandene Anordnung der folgenden Betrachtung zugrunde gelegt.

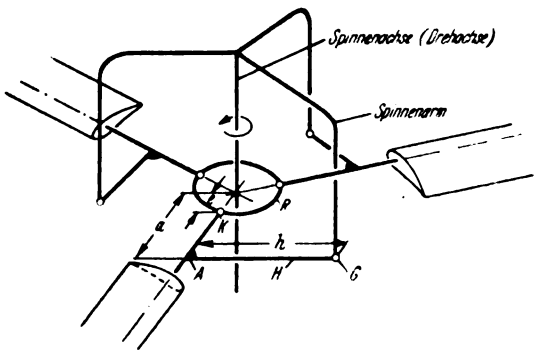


Bild 1. Rotorkopf eines Tragschraubers mit Blattwinkelrücksteuerung[2a]).

Das wesentliche Merkmal der Konstruktion, die in Bild 1 schematisch dargestellt ist, ist die sogenannte Spinne. Sie besteht aus der Spinnenachse und den Spinnenarmen, die durch die Gelenke G über die Hebelarme H mit den Rotorblättern in Verbindung stehen. Die letzteren sind am Ring R durch ein Kardangelenk K angeschlossen, wodurch die im folgenden zu untersuchende Schlagwinkel- und Blattwinkeländerung ermöglicht wird. Beim Hafner Tragschrauber ist durch geeignete Maßnahmen das Schlaggelenk in die Drehachse gelegt worden; hier sei der in Bild 1 angedeutete allgemeinere Fall vorausgesetzt, daß ein Abstand e zwischen dem Gelenk K und der Drehachse vorhanden ist. Die Spinnenachse kann im Ring R auf- und abwärts bewegt und nach jeder beliebigen Seite schräg geneigt werden. Die hierdurch gegebenen Möglichkeiten zur Veränderung des Blattwinkels sind für die Steuerfähigkeit der Maschine von großer Bedeutung, sollen jedoch im folgenden nicht weiter betrachtet werden. Hier interessiert nur für stationäre Flugzustände bei unveränderlicher Stellung der Spinnenachse zum Ring R der Zusammenhang zwischen Schlagwinkel und Blattwinkel, der sich aus Bild 1 wie folgt ergibt.

Der Schlagwinkel sei mit β, der Blattwinkel mit ϑ bezeichnet (vgl. Bild 2 und 3); für $\beta = 0$ sei $\vartheta = \vartheta_0$. Bei einem Aufwärtsschlagen des Blattes bewegt sich der Punkt A, in dem der Hebelarm H mit dem Blattholm verbunden ist, um das Stück $\beta\,(a—e)$ nach oben. Da hierbei die Lage des Gelenks G unverändert bleibt, verkleinert sich der Blattwinkel um den Betrag $\beta\frac{a-e}{h}$. Zwischen ϑ und β besteht also die lineare Abhängigkeit

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{a-e}{h}\beta.$$

Zur Abkürzung sei

$$\vartheta_K = \frac{a-e}{h} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

[1]) L. Breguet, Deutsche Patentschrift Nr. 567 584/62 b (1933).

[2]) The Hafner Gyroplane, The Aeroplane, 17. Febr. 1937. The Hafner Gyroplane, Flight, 18. Febr. 1937. The Hafner Gyroplane A. R. III, Engineering, 28. Mai 1937.

[2a]) Anmerkung bei der Korrektur: Bild 1 enthält einen Zeichenfehler. Der senkrechte Teil des im Bild vorn rechts liegenden Spinnenarms läuft nicht hinter, sondern vor der Achse des Rotorblattes vorbei.

Digitized by Google

gesetzt und diese Größe als Rücksteuerungsverhältnis bezeichnet. Es ist also

$$\vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_K \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es sei noch eine kurze Betrachtung über die Größenordnung von ϑ_K angestellt. Liegt das Schlaggelenk K in der Drehachse, so ist $\vartheta_K = \frac{a}{h}$ d. h. gleich dem ctg desjenigen Winkels, den die Blattachse mit der Verbindungslinie zwischen dem Gelenk G und dem Mittelpunkt des Rotorsystems bildet. Schon aus Symmetriegründen wird man diesen Winkel zu rd. 60° wählen. Das Rücksteuerungsverhältnis würde damit einen Wert von $\vartheta_K = 0{,}577$ annehmen. Ist e größer als Null, so ergibt sich ein kleineres ϑ_K; für $e = a$ erhält man mit $\vartheta_K = 0$ die alte Kinematik des Cierva-Tragschraubers. Im allgemeinen wird man jedoch bestrebt sein, e so klein wie möglich zu halten, so daß bei praktischen Ausführungen ϑ_K etwa zwischen den Werten 0,3 und 0,6 liegen wird.

2. Aufgabenstellung und Bezeichnungen.

Die Aufgabe der folgenden Rechnung besteht darin, die bereits vorhandenen Ergebnisse über die Aerodynamik von Drehflüglern im stationären Vorwärtsflug für die Verhältnisse der Blattwinkelrücksteuerung zu erweitern.

Die ersten grundlegenden Arbeiten über Tragschrauber stammen von Glauert und Lock. Daran anknüpfend sind eine ganze Reihe weiterer Untersuchungen entstanden, unter denen vor allem eine Abhandlung von Wheatley[3]) zu erwähnen ist, in der die gesamte Theorie der Berechnung der Luftkräfte von Drehflüglern noch einmal neu aufgebaut und gegenüber den alten Rechnungen wesentlich erweitert wird. Schließlich sei noch eine Arbeit von Sissingh[4]) angeführt, die sich eng an die Wheatleyschen Betrachtungen anschließt und diese noch weiter verfeinert, so daß es möglich wird, die Bedeutung gewisser bei Wheatley noch vorhandener Näherungsannahmen durch eine genauere Rechnung abzuschätzen. Bei Sissingh findet sich auch ein ausführliches Verzeichnis des in Frage kommenden Schrifttums, so daß hier auf dessen Wiedergabe verzichtet werden kann.

Die nachstehende Rechnung folgt ebenfalls weitgehend den Wheatleyschen Gedankengängen. Es kann deshalb von einer ausführlichen Erläuterung derjenigen Annahmen und Formeln abgesehen werden, die für alle Drehflügler, unabhängig von der besonderen Kinematik des Flügelsystems, ihre Gültigkeit haben.

Die gesamte Untersuchung sei auf den einfachsten Fall unverwundener Rechteckblätter beschränkt, d. h. der Blattwinkel ϑ_0 und die Blattiefe seien konstante Größen. Die durch Torsionsmomente um die Blattlängsachse hervorgerufene Blattverwindung sei durch geeignete konstruktive Maßnahmen (möglichst kleiner Abstand zwischen Blattschwerpunkt, Schubmittelpunkt des Blattquerschnitts und Druckpunkt des Blattprofils) so niedrig gehalten, daß sie vernachlässigt werden kann.

Es möge bedeuten:

R Rotorradius (Abstand der äußersten Blattspitze von der Drehachse),
z Anzahl der Rotorblätter,
t Blattiefe,
$\sigma = \frac{z\,t}{\pi R}$ Flächendichte,
V Fluggeschwindigkeit,
ω Winkelgeschwindigkeit der Rotorblätter,
w induzierte Geschwindigkeit,
$\varkappa$ Anstellwinkel der Drehebene.

Dann ist

$V \cos \varkappa$ Anströmgeschwindigkeit des Drehflügelsystems in der Drehebene,
$V \sin \varkappa - w$ Anströmgeschwindigkeit normal zur Drehebene (vgl. Bild 2).

[3]) Wheatley, NACA Rep. 487 (1934).
[4]) Sissingh, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 290.

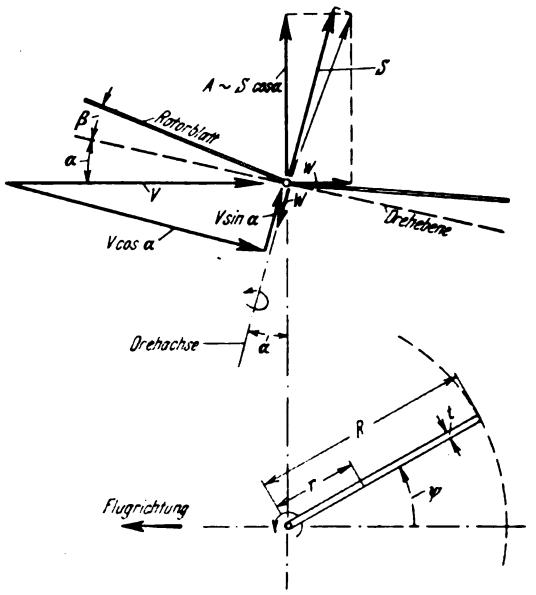


Bild 2. Geschwindigkeiten und Kräfte am Rotorsystem.

Danach werden wie üblich die dimensionslosen Koeffizienten

$\mu = \frac{V \cos \varkappa}{\omega R}$, der Fortschrittsgrad, und

$\lambda = \frac{V \sin \varkappa - w}{\omega R}$, der Durchflußgrad, definiert.

Ferner sei

A Auftrieb des Rotors,
W Widerstand des Rotors (nicht der ganzen Maschine),
S Rotorschub (Komponente der resultierenden Luftkraft in Richtung der Drehachse).

Für die folgende Untersuchung kann mit hinreichender Genauigkeit S gleich der Luftkraftresultierenden gesetzt werden, so daß $A = S \cos \varkappa$ wird.

M_d Antriebsmoment der Rotorblätter an der Drehachse beim Tragschrauber ist $M_d = 0$),

$k_S = \frac{S}{\frac{1}{2} \varrho \omega^2 R^4 \pi}$ Schubzahl,

$\varepsilon = \frac{W}{A}$ Gleitzahl.

Die bisher definierten Größen beziehen sich auf das Drehflügelsystem als Ganzes. Zur Kennzeichnung der Strömungs- und Auftriebsverhältnisse am einzelnen Blattelement sei folgendes festgelegt (vgl. Bild 3).

r Abstand eines Blattelements von der Drehachse,
$x = \frac{r}{R}$,
m Blattmasse je Längeneinheit der Blattachse,
$J = \int_0^R m\, r^2\, dr$ Massenträgheitsmoment eines Blattes um den Punkt $r = 0$,
$M_g = \int_0^R m\, g\, r\, dr$ Moment aus Eigengewicht um den Punkt $r = 0$,
$\varkappa_r$ Winkel zwischen Auftriebsnullinie und resultierender Strömung am Blattelement an der Stelle r.

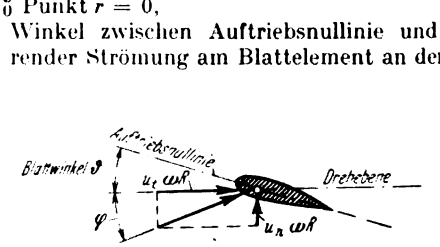


Bild 3. Geschwindigkeiten am Blattelement.

Digitized by Google

c_a Auftriebsbeiwert für das Blattprofil,
c_a' konstanter Mittelwert der Steigung der Kurve $c_a = f(\alpha_r)$,
$\overline{c_w}$ konstanter Mittelwert des Widerstandsbeiwertes c_w des Blattprofils,
$u_p \omega R$ Anströmgeschwindigkeit des Blattelements parallel zur Rotorachse,
$u_t \omega R$ Anströmgeschwindigkeit des Blattelements in der Drehebene,
$\varphi = \frac{u_t}{u_p}$ Winkel zwischen Richtung der resultierenden Strömung und Drehebene,
ψ in der Drehebene gemessener Drehwinkel der Blätter (vgl. Bild 2),
$\gamma = \frac{\varrho\, t\, R^4\, c_a'}{J}$ Blattmassenkonstante,
M_s Moment der Luftkräfte eines Blattes um das Schlaggelenk,
B Faktor zur Berücksichtigung des Schubabfalls an der Blattspitze.

Der Fortschrittsgrad μ dient in der folgenden Rechnung als unabhängige Veränderliche. Das Ziel der Untersuchung besteht darin, die Schlagbewegung β und die Größen k_s, $\varkappa$ und ε zu ermitteln.

II. Der Drehflügler im stationären Vorwärtsflug.

1. Induzierte Geschwindigkeit und Anstellwinkel.

Bei Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit und des Anstellwinkels wird das Drehflügelsystem als tragender Wirbel von der Breite $2R$ angesehen. Unter der üblichen Annahme, daß die induzierte Geschwindigkeit w und damit auch der Durchflußgrad λ für die gesamte von den Rotorblättern bestrichene Fläche konstant sind, gilt nach Wheatley[5])

$$w = \frac{k_s}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}\,\omega R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und

$$\operatorname{tg}\varkappa = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{k_s}{4\mu\sqrt{\mu^2+\lambda^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

k_s und λ sind dabei zunächst unbekannte Größen; sie müssen noch im folgenden als Funktion von μ ermittelt werden.

2. Strömungsgeschwindigkeiten am Blattelement.

Für die Anströmgeschwindigkeit des Blattelements in der Rotorebene erhält man

$$u_t \omega R = \omega r + \mu \omega R \sin\psi$$
$$u_t = x + \mu \sin\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

für die Geschwindigkeit parallel zur Rotorachse gilt

$$u_p \omega R = \lambda \omega R - r\frac{d\beta}{dt} - \mu \omega R \beta \cos\psi,$$

$$u_p = \lambda - \frac{x}{\omega}\frac{d\beta}{dt} - \mu\beta\cos\psi \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$\frac{d\beta}{dt}$ ist dabei die Ableitung des Schlagwinkels β nach der Zeit. β wird in Abhängigkeit vom Drehwinkel ψ durch eine nach den zweiten Harmonischen abbrechende Fourier-Reihe dargestellt:

$$\beta = a_0 - a_1\cos\psi - b_1\sin\psi - a_2\cos 2\psi - b_2\sin 2\psi \quad (7)$$

Damit bekommt man aus (6) mit $\psi = \omega t$

$$\left.\begin{aligned} u_p = {} & \lambda + \frac{1}{2}\mu a_1 + \left(-\mu a_0 + x b_1 + \frac{1}{2}\mu a_2\right)\cos\psi \\ & + \left(-x a_1 + \frac{1}{2}\mu b_2\right)\sin\psi + \left(\frac{1}{2}\mu a_1 + 2x b_2\right)\cos 2\psi \\ & + \left(\frac{1}{2}\mu b_1 - 2x a_2\right)\sin 2\psi \\ & + \frac{1}{2}\mu a_2\cos 3\psi + \frac{1}{2}\mu b_2 \sin 3\psi \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

[5]) a. a. O. S. 4. Man beachte, daß zwischen der Schubzahl k_s und der bei Wheatley benutzten Größe Cr die Beziehung $k_s = 2\,Cr$ besteht.

Die in Richtung der Blattachse wirkende Radialgeschwindigkeit braucht nicht berücksichtigt zu werden; ihr Einfluß auf die im folgenden zu untersuchenden Größen wird, wie üblich, vernachlässigt.

3. Schlagwinkel.

Zur Festlegung der Schlagbewegung β sind die Fourier-Koeffizienten a_0, a_1, b_1, a_2 b_2 zu ermitteln. Im Gegensatz zu Wheatley werden in den meisten Untersuchungen über die Aerodynamik von Hub- und Tragschraubern die zweiten Harmonischen a_2 und b_2 als unwesentlich fortgelassen. Das ist erfahrungsgemäß zulässig, solange man sich hauptsächlich für das aerodynamische Verhalten des Drehflügelsystems in seiner Gesamtwirkung interessiert, d. h. im wesentlichen für die Größen S, A, W, ω, V. Für den Konstrukteur ist es jedoch zur Beurteilung der Festigkeit der Rotorblätter von Bedeutung, auch die Luftkräfte am einzelnen Blattelement, die von den zweiten Harmonischen der Schlagbewegung merkbar beeinflußt werden, möglichst genau zu kennen. Es seien daher die Koeffizienten a_2 und b_2 im folgenden beibehalten.

Die Differentialgleichung der Schlagbewegung folgt aus der Momentengleichgewichtsbedingung um das Schlaggelenk. In diese Bedingung gehen die Luftkräfte, die Trägheitskräfte des schlagenden Blattes, die Zentrifugalkräfte und das Eigengewicht ein. Mit den in Abschnitt I, 2 angeführten Bezeichnungen bekommt man die bekannte Beziehung

$$J\omega^2\left(\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \beta\right) = M_s - M_y \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Dabei ist angenommen, daß der Abstand e zwischen Schlaggelenk und Drehachse gleich Null ist bzw. so klein ist, daß sein Einfluß vernachlässigt werden kann.

Das Moment der Luftkräfte um das Schlaggelenk ist unter der Voraussetzung, daß die resultierende Anströmgeschwindigkeit des Blattelements hinreichend genau gleich $u_t\,\omega\,R$ ist

$$M_S = \int_0^{BR} \frac{1}{2}\,\varrho\, t\, u_t^2\, \omega^2\, R^2\, c_a\, r\, dr$$

$$M_S = \frac{1}{2}\,\varrho\, t\,\omega^2 R^4 \int_0^B u_t^2\, c_a\, x\, dx \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Zur Berücksichtigung des Schubabfalls an der Blattspitze wird dabei nach Wheatley nicht bis R, sondern nur bis BR integriert, wobei zweckmäßig

$$B = 1 - \frac{t}{2R}$$

gesetzt wird.

Es ist nun

$$c_a = c_a'\,\alpha_r;$$

und ferner nach Bild 3

$$\alpha_r = \vartheta + \varphi.$$

Unter Benutzung von (2) bekommt man dann

$$\alpha_r = \vartheta_0 - \vartheta_k\beta + \frac{u_p}{u_t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Dies gilt jedoch nur, solange das Blattprofil von vorn angeströmt wird. Im Bereich der Anblasung von rückwärts ($\pi < \psi < 2\pi$ und $0 < r < -\mu r \sin\psi$) wird, wie üblich, α_r durch $-\alpha_r$ ersetzt und angenommen, daß die Steigung c_a' der Auftriebskurve annähernd den gleichen Wert hat wie bei Anblasung von vorn. Es sei

$$M_s = M_s^{\mathrm{I}} + M_s^{\mathrm{II}}.$$

M_s^{I} ist dabei dasjenige Luftkraftmoment, das man erhält, wenn man für den ganzen Drehwinkelbereich den für Anblasung von vorn gültigen Winkel α_r einsetzt. M_s^{II} ist das die Rückanströmung berücksichtigende Korrekturglied. Man bekommt aus (10):

Digitized by Google

$$M_S^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a' \int_0^B [(\vartheta_0 - \vartheta_R \beta)\, u_t^2 + u_t u_p]\, x\, dx$$

$$M_S^{\mathrm{II}} \begin{cases} = 0 \text{ für } 0 < \psi < \pi \\ = -\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a' \int_0^{-\mu \sin\psi} [(\vartheta_0 - \vartheta_R \beta)\, u_t^2 + u_t u_p]\, x\, dx \\ \text{für } \pi < \psi < 2\pi \end{cases} \quad (12\text{ a, b})$$

M_s sei nun in eine Fourier-Reihe entwickelt, von der wieder nur die Glieder bis zur zweiten Harmonischen beibehalten werden:

$$M_S = \frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a' (A_0 + A_1 \cos\psi + B_1 \sin\psi + A_2 \cos 2\psi + B_2 \sin 2\psi) \quad \ldots \quad (13)$$

Für die einzelnen Harmonischen gelten folgende Ausdrücke, wenn der geringe Einfluß der Rückwärtsanblasung nur bei den Koeffizienten A_0, A_1 und B_1 berücksichtigt wird.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M_S^{\mathrm{I}}}{\frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a'}\, d\psi + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{M_S^{\mathrm{II}}}{\frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a'}\, d\psi,$$

$$A_1, B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M_S^{\mathrm{I}}(\cos\psi, \sin\psi)}{\frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a'}\, d\psi + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{M_S^{\mathrm{II}}(\cos\psi, \sin\psi)}{\frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a'}\, d\psi, \quad (14\text{ a—c})$$

$$A_2, B_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M_S^{\mathrm{I}}(\cos 2\psi, \sin 2\psi)}{\frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a'}\, d\psi$$

Nach Einsetzen von (5), (8) und (7) in (12) und weiter in (14) erhält man nach Ausführung der Integrationen

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{3}\lambda B^3 + \frac{2}{9\pi}\lambda\mu^3 + \frac{1}{8}\mu^2 B^2 b_2 \\ &\quad + \vartheta_0 \frac{1}{4}\left(B^4 + \mu^2 B^2 - \frac{1}{8}\mu^4\right) \\ &\quad - \vartheta_R \frac{1}{4}\left(B^4 a_0 + \mu^2 B^2 a_0 - \frac{1}{8}\mu^4 a_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3}\mu B^3 b_1 + \frac{1}{2}\mu^2 B^2 a_2\right), \\ A_1 &= -\frac{1}{3}\mu B^3 a_0 - \frac{4}{45\pi}\mu^4 a_0 + \frac{1}{4}B^4 b_1 \\ &\quad + \frac{1}{8}\mu^2 B^2 b_1 - \frac{1}{6}\mu B^3 a_2 \\ &\quad + \vartheta_R \frac{1}{4}\left(B^4 a_1 + \frac{1}{2}\mu^2 B^2 a_1 + \frac{4}{3}\mu B^3 b_2\right), \\ B_1 &= \frac{1}{2}\lambda\mu B^2 - \frac{1}{8}\lambda\mu^3 - \frac{1}{4}B^4 a_1 \\ &\quad + \frac{1}{8}\mu^2 B^2 a_1 - \frac{1}{6}\mu B^3 b_2 \\ &\quad + \vartheta_0\left(\frac{2}{3}\mu B^3 + \frac{8}{45\pi}\mu^4\right) \\ &\quad - \vartheta_R\left(\frac{2}{3}\mu B^3 a_0 + \frac{8}{45\pi}\mu^4 a_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}B^4 b_1 - \frac{3}{8}\mu^2 B^2 b_1 + \frac{1}{3}\mu B^3 a_2\right), \end{aligned} \quad (15\text{ a—c})$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{3}\mu B^3 a_1 + \frac{1}{2}B^4 b_2 - \frac{1}{4}\mu^2 B^2 \vartheta_0 \\ &\quad + \vartheta_R \frac{1}{4}\left(\mu^2 B^2 a_0 - \frac{4}{3}\mu B^3 b_1 \right. \\ &\quad \left. + B^4 a_2 + \mu^2 B^2 a^2\right), \\ B_2 &= -\frac{1}{4}\mu^2 B^2 a_0 + \frac{1}{3}\mu B^3 b_1 - \frac{1}{2}B^4 a_2 \\ &\quad + \vartheta_R \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\mu B^3 a_1 + B^4 b_2 + \mu^2 B^2 b_2\right) \end{aligned} \quad (15\text{ d u. e})$$

Unter Benutzung von (7) ergibt sich aus (9)

$$\text{mit } \gamma = \frac{\varrho\, t\, R^4 c_a'}{J}$$

$$M_S = \frac{1}{2}\varrho\, t\, \omega^2 R^4 c_a' \left[\frac{2}{\gamma}\left(a_0 + 3a^2\cos 2\psi + 3b_2 \sin 2\psi - \frac{2M_g}{\gamma J \omega^2}\right)\right] \quad (16)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten der einzelnen trigonometrischen Funktionen von Gleichung (13) und (16) erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma}a_0 + \frac{2M_g}{\gamma J\omega^2} &= A_0, \\ A_1 &= 0, \\ B_1 &= 0, \\ \frac{6}{\gamma}a_2 &= A_2, \\ \frac{6}{\gamma}b_2 &= B_2 \end{aligned} \quad \ldots \quad (17\text{ a—e})$$

Die Gleichungen (17) sind jetzt in Verbindung mit (15) nach den Fourier-Koeffizienten der Schlagbewegung aufzulösen. Dabei genügt es, wenn die Beiwerte a_0, a_1, b_1 bis auf Glieder von der Größenordnung μ^4 und a_2, b_2 bis auf Glieder von der Ordnung μ^2 berechnet werden. Unter dieser Voraussetzung kann man zunächst a_2 und b_2 aus den Gleichungen (17d, e) ermitteln, wenn man in den Ausdrücken für A_2 und B_2 für die Koeffizienten a_0, a_1, b_1 folgende Näherungswerte einsetzt

$$\begin{aligned} a_0 &\sim \frac{\gamma}{8 + \gamma\vartheta_R B^4}\left(\frac{4}{3}\lambda B^3 + \vartheta_0 B^4\right), \\ a_1 &\sim \frac{2\mu}{B^2(1+\vartheta_R^2)}\left(\lambda + \frac{4}{3}B\vartheta_0 - \frac{2}{3}B\vartheta_R a_0\right), \\ b_1 &\sim \frac{4}{3}\mu\frac{a_0}{B} - \vartheta_R a_1 \end{aligned} \quad (18\text{ a—c})$$

Diese Beziehungen bekommt man aus (17), wenn man in (17a) zur Berechnung von a_0 nur Glieder ohne μ und in (17b, c) zur Berechnung von a_1, b_1 nur Glieder mit μ^1 beibehält. Mit (18) erhält man dann aus (17d, e)

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{B^5\mu^2}{72 + 9\gamma\vartheta_R B^4} \\ &\quad \times \frac{\vartheta_R\lambda\gamma B^4 - 40\lambda - 50\vartheta_0 B - \frac{7}{4}\vartheta_0\vartheta_R\gamma B^5}{B^8 + \left(\frac{12}{\gamma} - \frac{1}{2}B^4\vartheta_R\right)^2}, \\ a_2 &= \frac{7\gamma\mu^2 B}{18(8 + \gamma\vartheta_1 B^4)} \\ &\quad \times \left(\frac{4}{3}\lambda + \vartheta_0 B\right) - \frac{b_2}{B^4}\left(\frac{12}{\gamma} - \frac{1}{2}B\vartheta_R\right) \end{aligned} \quad (19\text{ a, b})$$

Nach Kenntnis von a_2 und b_2 können jetzt auch die übrigen Koeffizienten der Schlagbewegung aus (17a—c) bis zur Größenordnung μ^4 ermittelt werden. Nach Durchführung der Rechnung bekommt man

Digitized by Google

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_0 = & \frac{1}{\Phi_1\left(\frac{2}{\gamma}+\Phi_2\vartheta_R\right)-\frac{4}{9}\mu^2 B^2\vartheta_R{}^2\left[B^2\left(\frac{1}{\vartheta_R}+2\vartheta_R{}^2\right)-2\mu^2\right]} \\
& \times\left\{\Phi_1\left[\frac{1}{3}\lambda B^3+\frac{2}{9\pi}\lambda\mu^3-\frac{2}{\gamma}\frac{M_g}{J\omega^2}+\frac{1}{8}\mu^2 B^2(b_2-\vartheta_R a_2)\right.\right. \\
& \left.+\Phi_2\vartheta_0\right]-\frac{2}{9}\mu^2\vartheta_R{}^2 B\left[3\lambda B^2+\frac{9}{4}\lambda\mu^2+4\vartheta_0 B(B^2+\mu^2)\right. \\
& \left.\left.-B^3\left(\frac{1}{\vartheta_R}+2\vartheta_R\right)a_2+B^3 b_2\right]\right\}
\end{aligned}
\right\}
$$

mit

$$
\Phi_1=\left(B^2+\frac{1}{2}\mu^2\right)(1+\vartheta_R{}^2)+2\mu^2\vartheta_R,
$$

$$
\Phi_2=\frac{1}{4}\left(B^4+B^2\mu^2-\frac{1}{8}\mu^4\right),
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1 = & \frac{\mu}{\frac{1}{2}B^4(1+\vartheta_R{}^2)+B^2\mu^2\vartheta_R} \\
& \times\left[\lambda B^2+\frac{1}{4}\lambda\mu^2+\vartheta_0\left(\frac{4}{3}B^3+\frac{2}{3}\mu^2 B\right.\right. \\
& \left.+\frac{16}{45\pi}\mu^3\right)-\vartheta_R\left(\frac{2}{3}B^3 a_0-\frac{1}{3}\mu^2 B a_0+\frac{8}{45\pi}\mu^3 a_0\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{3}B^3 a_2\right)-\frac{1}{3}B^3 b_2(1+2\vartheta_R{}^2)\right],
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 = & \frac{4\mu}{B^4+\frac{1}{2}\mu^2 B^2} \\
& \times\left(\frac{1}{3}B^3 a_0+\frac{4}{45\pi}\mu^3 a_0+\frac{1}{6}B^3 a_2-\frac{1}{3}\vartheta_R B^3 b_2\right)-a_1\vartheta_R
\end{aligned}
\right\}
$$

(19c—d)

4. Schubzahl.

Für den Gesamtschub S von allen z-Blättern ergibt sich während einer Umdrehung der Mittelwert

$$
S=\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{BR}\frac{1}{2}\varrho\, t\, u_t{}^2\omega^2 R^2 c_a\, d\,r\, d\,\psi.
$$

Mit $\sigma=\frac{z\,t}{2\pi}$ bekommt man für die Schubzahl

$$
k_S=\frac{S}{\frac{1}{2}\varrho\,\omega^2 R^4\pi}=\frac{\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{B} u_t{}^2 c_a\, d\,x\, d\,\psi.
$$

Nach Einführung des Anstellwinkels α_r und Trennung der Integrationsbereiche für Vorwärts- und Rückwärtsanblasung erhält man

$$
\left.
\begin{aligned}
k_S = & \frac{\sigma c_a'}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{B}[(\vartheta_0-\vartheta_R\beta)u_t{}^2+u_t u_p]\,d\,x\,d\,\psi\right. \\
& \left.-2\int_0^{2\pi}\int_0^{-\mu\sin\psi}[(\vartheta_0-\vartheta_R\beta)u_t{}^2+u_t u_p]\,d\,x\,d\,\psi\right\}
\end{aligned}
\right\}\quad\ldots\quad(20)
$$

Unter Benutzung von (5), (8) und (7) bekommt man aus (20) nach Auswertung der Integrale bis auf Glieder von der Größenordnung μ^4

$$
\left.
\begin{aligned}
k_S = & \sigma c_a'\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(B^2+\frac{1}{2}\mu^2\right)+\vartheta_0\frac{1}{3}\left(B^3+\frac{3}{2}\mu^2 B-\frac{4}{3\pi}\mu^3\right)\right. \\
& +\frac{1}{8}\mu^3 a_1+\frac{1}{4}\mu^2 B b_2-\vartheta_R\left[\frac{1}{3}a_0\left(B^3+\frac{2}{3}\mu^2 B\right.\right. \\
& \left.\left.\left.-\frac{4}{3\pi}\mu^3\right)-\frac{1}{2}\mu b_1\left(B^2+\frac{1}{4}\mu^2\right)+\frac{1}{4}\mu^2 B a_2\right]\right\}
\end{aligned}
\right\}\quad(21)
$$

5. Gleitzahl.

Zur Ermittlung von Widerstand und Leistung des Rotors ist die Kenntnis der Gleitzahl ε erforderlich, die sich aus den Energieverlusten des Drehflügelsystems berechnet. Diese sind einerseits durch die induzierte Geschwindigkeit, andererseits durch die Widerstände bedingt, die am einzelnen Blattelement bei der Rotation der Blätter auftreten. Der erstgenannte Teil des Verlustes folgt aus Betrachtungen über das Rotorsystem in seiner Gesamtwirkung; die hierfür gültigen Formeln werden durch den Effekt der Blattwinkelrücksteuerung nicht beeinflußt. Aber auch in den Ausdruck für den zweiten Teil des Verlustes geht ϑ_R nicht ein, da zur Erfassung des Widerstands des Blattelements mit einem vom Anstellwinkel unabhängigen mittleren c_w gerechnet wird. Die für die Gleitzahl gültige Beziehung kann also ohne weiteres von Wheatley[6]) übernommen werden. Es ist

$$
\varepsilon=\frac{\bar{c}_w\sigma}{4\mu k_S}\left(1+3\mu^2+\frac{3}{8}\mu^4\right)+\frac{k_S}{4\mu\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}\qquad(22)
$$

6. Momentengleichgewicht um das Drehgelenk.

Alle bisher ermittelten Größen enthalten den Durchflußgrad λ, dessen Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad μ noch zu berechnen ist. Eine Beziehung zwischen λ und μ ergibt sich aus der Momentengleichgewichtsbedingung um das Drehgelenk.

Diese lautet

$$
M_d+\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{BR}\frac{1}{2}\varrho\, t\, u_t{}^2\omega^2 R^2 c_a\,\varphi\, r\, d\,r\, d\,\psi
-\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{1}{2}\varrho\, t\, u_t{}^2\omega^2 R^2\bar{c}_w\, r\, d\,r\, d\,\psi=0
$$

oder

$$
\left.
\begin{aligned}
& \frac{M_d}{\frac{1}{4}\varrho\,\omega^3 R^5\sigma}+\int_0^{2\pi}\int_0^{B} u_t{}^2 c_a\,\varphi\, x\, d\,x\, d\,\psi \\
& \qquad -\int_0^{2\pi}\int_0^{1} u_t{}^2\bar{c}_w\, x\, d\,x\, d\,\psi=0.
\end{aligned}
\right\}
$$

Das erste der beiden Doppelintegrale stellt den Beitrag des Auftriebs, das zweite den Beitrag des Widerstands zum Drehmoment dar. Bei diesem letzten Integral ist von 0 bis 1, nicht nur bis B zu integrieren, da durch den Schubabfall an der Blattspitze der Widerstand nicht vermindert wird.

Mit Berücksichtigung der Rückwärtsanblasung bekommt man nach Einsetzen der für c_a und φ gültigen Ausdrücke

$$
\left.
\begin{aligned}
& \frac{M_d}{\frac{1}{4}\varrho\,\omega^2 R^5\sigma c_a'}+\int_0^{2\pi}\int_0^{B}[(\vartheta_0-\vartheta_R\beta)u_p u_t+u_p{}^2]\,x\,d\,x\,d\,\psi \\
& -2\int_0^{2\pi}\int_0^{-\mu\sin\psi}[(\vartheta_0-\vartheta_R\beta)u_p u_t+u_p{}^2]\,x\,d\,x\,d\,\psi \\
& -\frac{\bar{c}_w}{c_a'}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} u_t{}^2 x\,d\,x\,d\,\psi+2\frac{\bar{c}_w}{c_a'}\int_0^{2\pi}\int_0^{-\mu\sin\psi} u_t{}^2 x\,d\,x\,d\,\psi
\end{aligned}
\right\}\qquad(23)
$$

Nach Ausführung der Integrationen und Ordnung der einzelnen Glieder ergibt sich schließlich

$$
\left.
\begin{aligned}
& \lambda^2\left(B^2-\frac{1}{2}\mu^2\right)+\lambda\left\{\mu a_1\left(B^2-\frac{3}{4}\mu^2\right)+\vartheta_0\left(\frac{2}{3}B^3-\frac{4}{9\pi}\mu^3\right)\right. \\
& \left.-\vartheta_R\left[a_0\left(\frac{2}{3}B^3+\frac{4}{9\pi}\mu^3\right)-\frac{1}{2}\mu b_1\left(B^2-\frac{1}{4}\mu^2\right)\right]\right\} \\
& -\frac{2}{3}\mu B^3 a_0 b_1+\frac{1}{2}\mu^2 B^2\left(a_0{}^2+\frac{1}{2}a_1{}^2-a_0 a_2\right) \\
& -\frac{1}{8}\mu^4 a_0{}^2+\frac{1}{4}B^2\left(B^2+\frac{1}{2}\mu^2\right)(a_1{}^2+b_1{}^2) \\
& +B^4(a_2{}^2+b_2{}^2)+\frac{1}{3}\mu B^3(a_1 b_2-b_1 a_2)+\frac{1}{4}\vartheta_0\mu^2 B^2 b_2 \\
& -\vartheta_R\left[\frac{1}{3}\mu B^3 a_0 a_1+\frac{1}{2}\mu^2 B^2\left(a_0 b_2-\frac{1}{2}a_1 b_1\right)\right. \\
& \left.-\frac{1}{6}B^3\mu(a_1 a_2+b_1 b_2)\right]-\frac{\bar{c}_w}{2c_a'}\left(1+\mu^2-\frac{1}{8}\mu^4\right) \\
& +\frac{M_d}{\frac{1}{4}\varrho\,\omega^2 R^5\pi\sigma c_a'}=0
\end{aligned}
\right\}\qquad(24)
$$

[6]) a. a. O. S. 9.

Digitized by Google

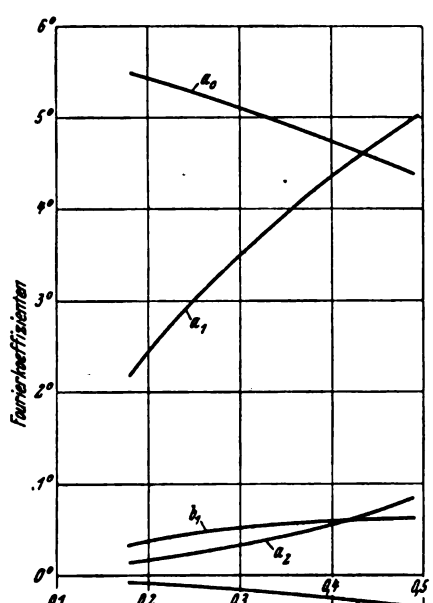


Bild 4. Fourier-Koeffizienten der Schlagbewegung in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad,

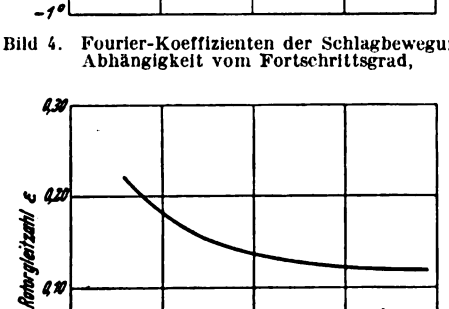


Bild 6. Rotorgleitzahl in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad.

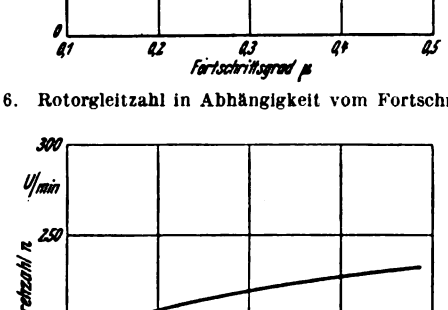


Bild 7. Drehzahl in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad für $G = 900$ kg.

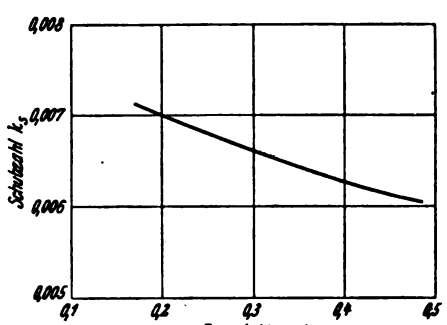


Bild 5. Schubzahl in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad.

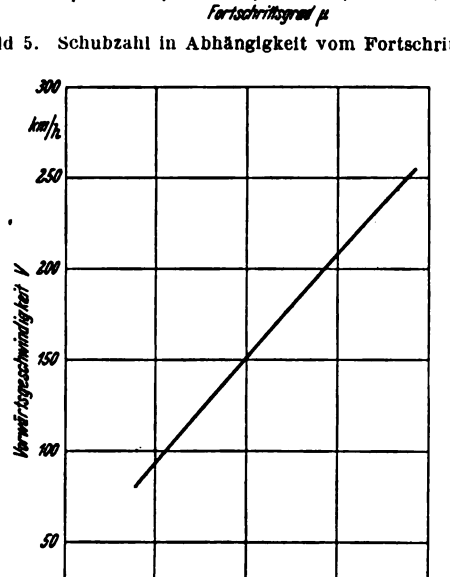


Bild 8. Vorwärtsgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad für $G = 900$ kg.

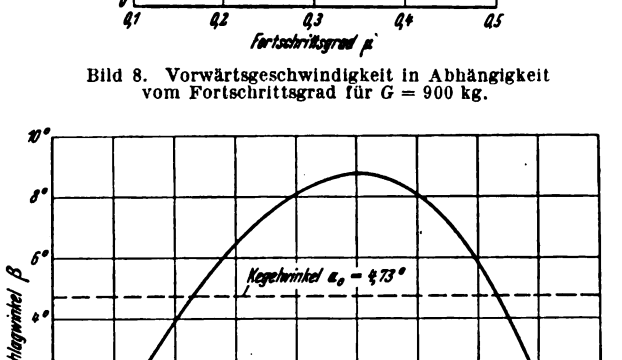


Bild 9. Schlagwinkel in Abhängigkeit vom Drehwinkel für $G = 900$ kg und $\mu = 0{,}4$.

Die praktische Berechnung des Durchflußgrades λ als Funktion von μ ist etwas umständlich, da in (24) die Koeffizienten der Schlagbewegung enthalten sind, die nach (19) ebenfalls von λ und μ abhängen. Ist jedoch λ bekannt, so bereitet die Ermittlung von β, α, k_s, ε weiter keine Schwierigkeiten.

III. Rechnungsbeispiel[7]).

Die in Abschnitt II aufgestellten Formeln seien jetzt auf ein Beispiel angewendet. Der dabei verfolgte Zweck besteht weniger in einer ausführlichen Erläuterung der praktischen Rechnung, die im Prinzip wenig Neues bietet, als vielmehr darin, die Bedeutung der Blattwinkelrücksteuerung für das aerodynamische Verhalten eines Drehflüglers zahlenmäßig abzuschätzen.

Als Beispiel sei ein Tragschrauber der zur Zeit üblichen Bauart gewählt. Im einzelnen seien folgende Ausgangswerte der Rechnung zugrunde gelegt, die der Größenordnung nach den Verhältnissen entsprechen, wie sie etwa beim Muster C 30 zu finden sind.

$G = 900$ kg	$c_a' = 5{,}6$
$R = 6{,}00$ m	$c_w = 0{,}014$
$z = 3$	$\vartheta_0 = 6^0$
$t = 0{,}28$ m	$\vartheta_R = 0{,}45$
$J = 25{,}9$ mkg s²	$B = 0{,}98$
$M_d = 0$	

Mit diesen Werten bekommt man aus (19) in Verbindung mit (24) die in Bild 4 dargestellte Abhängigkeit der

[7]) Die Zahlenrechnungen dieses Abschnitts wurden zum größten Teil von F. Mewes durchgeführt.

Digitized by Google

Fourier-Koeffizienten der Schlagbewegung vom Fortschrittsgrad μ. In Bild 5 ist ferner k_s nach (21) und in Bild 6 die Rotorgleitzahl ε nach (22) aufgetragen. Aus k_s ergibt sich für $A = G$ mit

$$S = \frac{A}{\cos\alpha}$$

die Drehzahl $n = \frac{30}{\pi}\,\omega$ aus der Beziehung

$$k_s = \frac{S}{\frac{1}{2}\varrho\,\omega^2 R^4 \pi}$$

zu

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2G}{k_s \varrho\,\pi R^4 \cos\alpha}}.$$

Das Ergebnis ist für $G = 900$ kg in Bild 7 dargestellt. Die Abhängigkeit der Fluggeschwindigkeit vom Fortschrittsgrad, die man aus der Beziehung

$$V = \frac{\mu\,\omega R}{\cos\alpha}$$

erhält, geht aus Bild 8 hervor. Die Höchstgeschwindigkeit des Flugzeuges wird etwa bei $\mu = 0{,}4$ ($V = 208$ km/h) liegen. Für diesen Flugzustand ist die zugehörige Schlagbewegung in Bild 9 wiedergegeben.

Der mit Kegelwinkel bezeichnete Beiwert a_0 beträgt dabei 4,73°. Zu einem Schlagwinkel dieser Größe gehört ein Blattwinkel von

$$\begin{aligned}\vartheta_\beta = a_0 &= \vartheta_0 - \vartheta_R\, a_0\\ &= 6 - 0{,}45 \cdot 4{,}73\\ &= 3{,}87°.\end{aligned}$$

Der Rotor arbeitet also im Mittel mit einem Blattwinkel der üblichen Größenordnung von $\sim 4°$.

Bild 5 bis 9 zeigen als wesentliches Ergebnis, daß der untersuchte Drehflügler mit Blattwinkelrücksteuerung keinerlei besondere, überraschende Eigenschaften aufweist, sondern sich grundsätzlich wie ein normaler Tragschrauber der Cierva-Bauart verhält. (Man vergleiche hierzu etwa die von Wheatley, NACA-Rep. Nr. 487 und 591 durchgerechneten Beispiele.) Besonders bemerkenswert erscheint die Tatsache, daß die Amplitude der Schlagbewegung, d. h. in der Hauptsache der Beiwert a_1, die gewöhnliche Größe hat, daß also die Blattwinkelrücksteuerung nicht — wie wohl zu erwarten gewesen wäre — zu einer Milderung der Schlagbewegung führt.

Aus alledem ergibt sich die Schlußfolgerung, daß die Kinematik des Drehflüglers mit Blattwinkelrücksteuerung keinerlei Nachteile, aber auch keine besonderen Vorteile besitzt, soweit es die Verhältnisse im stationären Vorwärtsflug betrifft. Es ist allerdings zu bedenken, daß in Flugzuständen mit Böenbeanspruchung die Blattwinkelrücksteuerung dem Rotor eine geringere Böenempfindlichkeit verschafft. Trotzdem würde sich die Anwendung der Rücksteuerung für einen Drehflügler kaum lohnen, wenn dafür besondere konstruktive Maßnahmen erforderlich wären, ohne daß gleichzeitig auch noch andere Vorteile dadurch gewonnen würden. Die Vorzüge der eingangs in Abschnitt I beschriebenen Spinnenkonstruktion sind danach hauptsächlich in den Steuerungsmöglichkeiten des Drehflügelsystems zu suchen, die darin bestehen, daß die Spinnenachse im Ring R auf- und abwärts geschoben und seitlich geneigt werden kann; der Effekt der Blattwinkelrücksteuerung ist nur als eine durch die Konstruktion bedingte Beigabe aufzufassen, die aber das aerodynamische Verhalten des Flugzeugs nicht verschlechtert.

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß man bei einer Verallgemeinerung der aus dem Rechnungsbeispiel gewonnenen Ergebnisse für Rücksteuerungsverhältnisse, die erheblich größer sind als der untersuchte Wert von $\vartheta_R = 0{,}45$ sehr vorsichtig sein muß.

IV. Zusammenfassung.

In der Arbeit wird die von Wheatley entwickelte Methode zur Berechnung der Luftkräfte von Drehflügelflugzeugen dahingehend erweitert, daß an Stelle eines konstanten Blattwinkels eine lineare Abhängigkeit zwischen Blattwinkel und Schlagwinkel der Rechnung zugrunde gelegt wird. Die Anwendung der aufgestellten Formeln auf einen Tragschrauber mit einer Blattwinkelrücksteuerung normaler Größe zeigt, daß beim stationären Vorwärtsflug irgendwelche Besonderheiten im aerodynamischen Verhalten des Flugzeugs nicht auftreten.

Digitized by Google

Der Einfluß der Zahl der Abschreckungen und der Glühdauer auf das Aushärten von Al-Cu-Mg-Legierungen.

Von P. Brenner und H. Kostron, Hannover.

Bericht aus dem Forschungsinstitut der Vereinigten Leichtmetall-Werke, G. m. b. H., Hannover.

Werkstücke aus Al-Cu-Mg-Legierungen werden vielfach einer mehrmaligen Vergütungsbehandlung unterzogen und zwar meist dann, wenn unmittelbar nach dem Abschrecken eine Verformung stattfinden soll (Nieten, Tiefziehbleche). Da gerade in diesen Fällen die Inkubationsfrist und die Verformbarkeit nach dem Abschrecken eine gewisse Größe haben müssen, um genügend Zeit für das Verformen zu lassen, ist es von Bedeutung, zu wissen, ob diese Größen durch eine Wiederholung des Vergütens beeinflußt werden. Aufgabe der im folgenden beschriebenen Untersuchung war die Klärung dieser Frage.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Einfluß der Glühdauer auf die Festigkeits-Endwerte.
III. Aushärtungsverlauf bei 1—9 maliger Abschreckung.
IV. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Die Tatsache, daß Al-Cu-Mg-Legierungen sich nach dem Abschrecken von Vergütungstemperatur zunächst in einem verhältnismäßig weichen, schmeidigen Zustand befinden und erst im Lauf einer längeren Lagerungszeit aushärten, wird vielfach dazu benutzt, während der Zeitspanne guter Verformbarkeit die nötigen Formgebungsarbeiten durchzuführen. Sei es nun, daß die beabsichtigte Verformung zu groß ist, so daß sie nur unterbrochen von Zwischenglühungen zu Ende geführt werden kann (Tiefziehbleche), sei es, daß sie aus Gründen der Betriebsorganisation innerhalb der Zeit, in der der Werkstoff genügend schmeidig ist, nicht durchgeführt werden konnte (wie es oft bei Nieten der Fall ist), es ist häufig notwendig, das Material durch eine neuerliche Wärmebehandlung nochmals in gut verformbaren Zustand zu bringen.

Gerade in diesen Fällen kommt es aber darauf an, genau zu wissen, wie lange Zeit nach dem Abschrecken eine genügende Verformbarkeit vorhanden ist. Es ist daher von Interesse, ob der Verlauf der Aushärtung, im besonderen aber die Größe der Inkubationszeit, durch eine mehrfache Wiederholung des Vergütens geändert wird.

In der Praxis ist manchmal die Ansicht zu finden, daß durch mehrmaliges Vergüten die Aushärtungsgeschwindigkeit erhöht werde. Von M. Abraham sind bei der DVL Versuche angestellt worden, um zu zeigen, ob diese Ansicht richtig sei[1]). Er kommt dabei zu dem Ergebnis, daß »dies nur in so geringem Maße der Fall ist, daß es praktisch gar keine Rolle spielt. Einen vollkommen gleichartigen Verlauf des Härteanstieges erhält man allerdings nur dann, wenn man die Nieten zwischen den einzelnen Glühungen jedesmal voll, also 5 Tage lang, auslagern läßt.«

Wegen der Wichtigkeit der Angelegenheit, aber auch, weil auch in letzter Zeit neuerlich die Ansicht geäußert wurde, daß die Inkubationszeit durch mehrmaliges Vergüten geändert würde, sind nochmals eingehende Untersuchungen über diese Frage durchgeführt worden. Dabei wurde vor allem auch auf einen Punkt besonders geachtet, der in früheren Untersuchungen noch nicht genügend berücksichtigt worden ist.

[1]) Z. Metallkde. Bd. 25 (1933), S. 203—206.

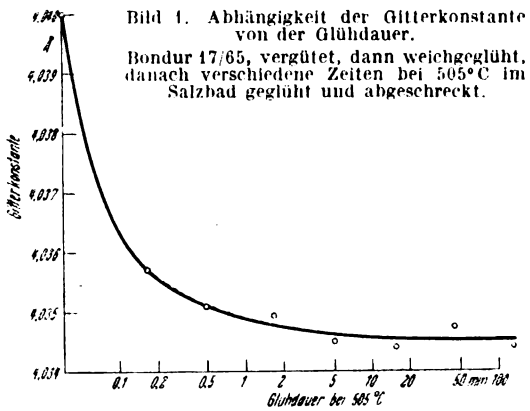


Bild 1. Abhängigkeit der Gitterkonstante von der Glühdauer.
Bondur 17/65, vergütet, dann weichgeglüht, danach verschiedene Zeiten bei 505°C im Salzbad geglüht und abgeschreckt.

Es ist bisher immer nur der Einfluß einer Wiederholung des gesamten Vergütungsvorganges untersucht worden, der aus Erhitzen, Glühen bei konstanter Temperatur und Abschrecken besteht. Es mußte von Interesse sein, auch den Einfluß der Einzelvorgänge auf den Aushärtungsverlauf zu kennen, insbesondere auch zu trennen zwischen dem Einfluß einer verlängerten Glühdauer und jenem einer mehrfach wiederholten Abschreckung. Bei den Versuchen von Abraham entspricht, da jeweils immer 20 min geglüht wurde, einer x-fachen Abschreckung auch die x-fache Glühdauer, so daß ein Trennen der Einzeleinflüsse nicht möglich ist. Die Versuche wurden, der besonderen Aufgabe dieser Trennung entsprechend, so aufgebaut, daß zunächst eingehend der Einfluß der Dauer der Vergütungsglühung und in einer besonderen Versuchsreihe die Wirkung mehrfacher Abschreckung untersucht wurde.

II. Einfluß der Glühdauer auf die Festigkeitsendwerte.

Zweck des Vergütungsglühens ist es, die vergütenden Legierungsbestandteile, die nach den verschiedenen Weichglühbehandlungen im Laufe der Formgebung (walzen, pressen, ziehen) überwiegend in Form intermetallischer Verbindungen ausgeschieden sind, im Mischkristall in Lösung zu bringen.

Ein anschauliches Bild des In-Lösung-Gehens der Legierungsbestandteile kann man durch Bestimmung der Gitterkonstanten bekommen. Wenn es auch nur bei binären Mischkristallen möglich ist, von der Gitterkonstanten eindeutig auf die Zusammensetzung zu schließen, so läßt Bild 1 doch gut erkennen, wie sich die Gitterkonstante vom Wert für weichgeglühtes Material (der etwa dem des Reinaluminiums entspricht) asymptotisch einem Endwert nähert. Es läßt sich dabei natürlich nicht unterscheiden zwischen der Beeinflussung der Gitterkonstanten durch das in Lösung gehende Kupfer und der (entgegengesetzt gerichteten) durch das Magnesium, immerhin läßt sich der Ablauf des Gesamtvorganges erkennen.

Maßgebend für die Bemessung der Vergütungsglühdauer wird in der Praxis immer die Forderung sein, daß der Werkstoff nach dem Aushärten seine optimalen Festigkeitswerte erreichen soll.

Digitized by Google

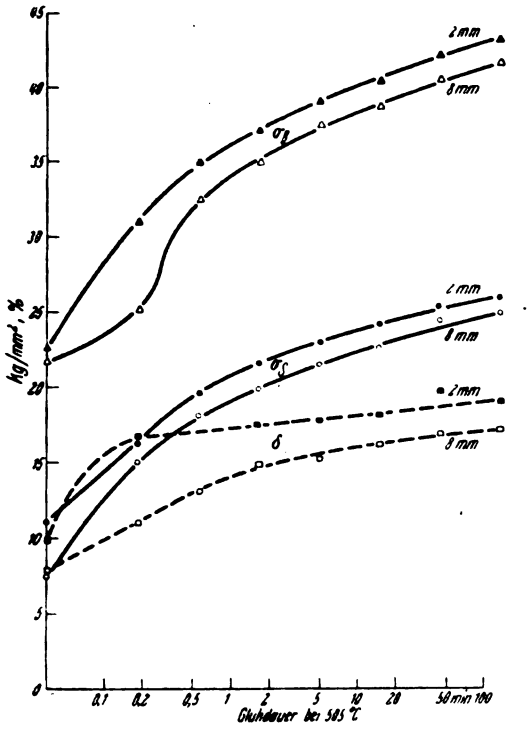


Bild 2. Einfluß der Dauer der Vergütungsglühung auf die Festigkeitswerte nach 7 Tagen Raumtemperaturaushärtung.

Blechstärke	2 mm	8 mm
σ_B	▲	△
σ_S	●	○
δ	■	□

Um die von diesem Gesichtspunkt aus erforderliche Glühdauer zu bestimmen, wurden Versuche an 2 und 8 mm starken Blechen aus der Al-Cu-Mg-Legierung Bondur 17/65 durchgeführt. Es wurden dabei die auf die betreffende Abmessung gewalzten Blechproben, die vorher nur Glühungen bei höchstens 450° C erfahren hatten, verschiedene Zeiten im Salzbad bei 505° C geglüht, abgeschreckt und 7 Tage bei Raumtemperatur (rd. 20° C) gelagert. Die Ergebnisse der Zerreißversuche sind in Bild 2 eingetragen. Jeder der Punkte ist dabei ein Mittelwert aus 3 bis 5 Einzelwerten. Man sieht, daß sich die Festigkeitswerte noch wesentlich langsamer ihrem Endwert nähern als die Gitterkonstante. Auch die Bruchdehnung nimmt mit zunehmender Homogenisierung des Gefüges zu.

Bild 3 zeigt die Abhängigkeit der Festigkeitswerte für Blech, das 8 Stunden bei 505° vorhomogenisiert und danach weichgeglüht worden war.

Es läßt sich zeigen, daß die Zunahme der Werte von Zugfestigkeit, 0,2-Grenze und Bruchdehnung mit wachsender Glühdauer nach einer einfachen Funktion vor sich geht. Rechnet man sich für diese drei Größen den Betrag, um den sie bei 1 min Zunahme der Glühdauer wachsen (also die Neigung der Tangenten an die Kurven in Bild 2), so ergibt sich für diese Größe eine sehr rasche Abnahme mit zunehmender Glühdauer, wie Bild 4 zeigt. Um σ_S, σ_B und δ unmittelbar vergleichen zu können, sind dabei nicht die Absolutbeträge der Änderungen zugrunde gelegt worden, sondern die Beträge der Änderungen, ausgedrückt in % des von der betreffenden Größe bei der längsten Glühzeit erreichten Höchstwertes. Man sieht, daß in Bild 4 die Punkte mit guter Näherung sich längs einer Geraden im doppellogarithmischen System anordnen. Sowohl die Änderungsgeschwindigkeit der Werte als auch die Werte x selbst können daher in Abhängigkeit von der Glühdauer z durch eine Funktion

$$x - x_0 = C_1 \cdot z^{-C_2}$$

dargestellt werden, und zwar scheinen für σ_B, σ_S und δ etwa dieselben Konstanten zu gelten, nämlich (nach Bild 4)

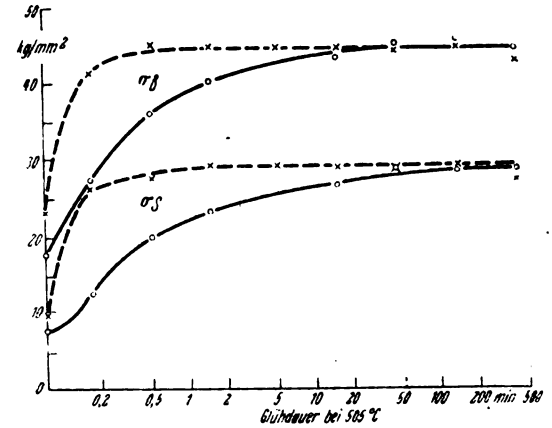


Bild 3. Einfluß der Dauer der Vergütungsglühung. Wirkung des Vorhomogenisierens. (Bondur 17/65, 2 mm-Blech.)
O———O Nicht vorhomogenisiert,
×— — — —× 8 h bei 505° C vorhomogenisiert, 3 h bei 300° C weichgeglüht.

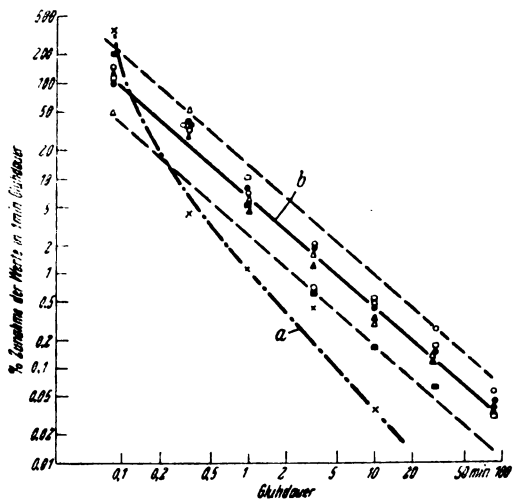


Bild 4. Prozentuale Erhöhung der Festigkeitswerte für jede Minute Zunahme der Glühdauer.
a Blech 2 mm, 8 h vorhomogenisiert.
σ_S ×— · — · —×
b Blech zum 1. Mal vergütet.

Blechstärke	2 mm	8 mm
σ_S	●	○
σ_B	▲	△
δ_{10}	■	□

$C_1 = 1 \cdot 73$, $C_2 = 1 \cdot 76$ für die Abhängigkeit der Änderungsgeschwindigkeit.

Es ergibt sich also ein sehr ausgesprochener Einfluß der Glühdauer auf das Aushärtungsverhalten, wenigstens bei Glühzeiten, wie sie praktisch in Frage kommen.

Die unmittelbare Wirkung des Vergütungsglühens besteht in der Homogenisierung der Legierung. Es durfte wohl erwartet werden, daß eine Aneinanderreihung von mehreren Vergütungsglühungen ohne zwischengeschaltete Heterogenisierungsbehandlungen zu einer immer vollkommeneren Homogenisierung führen und (wenigstens im Hinblick auf die erreichbaren Festigkeitshöchstwerte) einer einzigen Glühung bei derselben Temperatur und mit derselben Gesamtglühdauer gleichwertig sein muß. Später wird darauf noch näher eingegangen werden. Ein anderes Ergebnis kann aber erwartet werden, wenn die durch eine vorhergegangene Vergütung bewirkte Homogenisierung durch »Weichglühen« (Heterogenisieren) wieder aufgehoben wird. Es könnte vermutet werden, daß in diesem Falle eine solche Addition der Wirkungen der Homogenisierungsglühungen nicht auftritt, sondern daß sich der Werkstoff nach dem Vergüten und Weichglühen ebenso verhält wie im weichen Zustand vor dem ersten Vergüten.

Um dies nachzuprüfen, wurde 2-mm-Blech aus Bondur 17/65 erst 8 h bei 505° C geglüht (die lange Glühzeit wurde

Digitized by Google

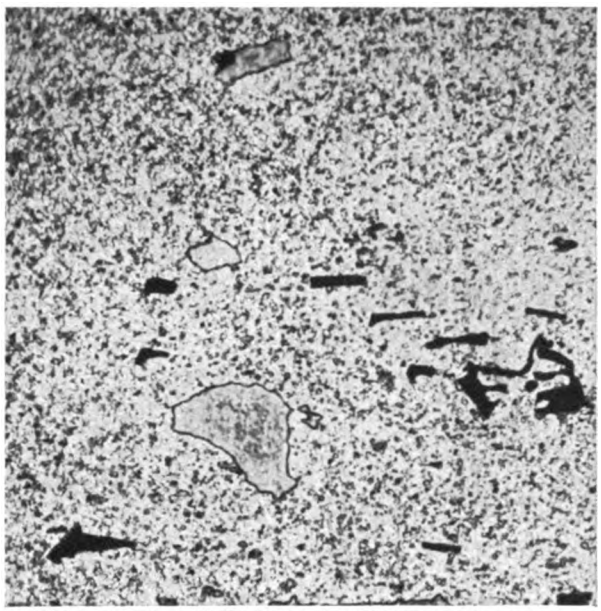


Bild 5. Bondur 17/65, Zustand vor dem Homogenisieren. (Weichgeglüht.) Ätzung 2% HF. Vergr. 800fach.

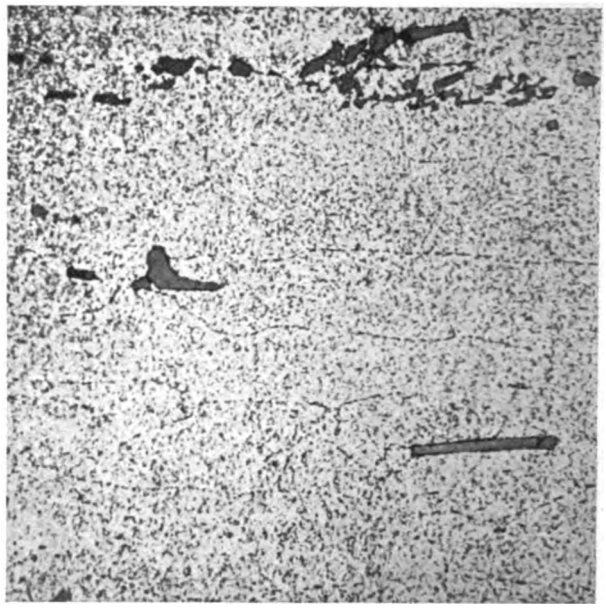


Bild 6. Wie Bild 5, nach 8 h Homogenisieren bei 505° C und anschließend 3 h Weichglühen bei 300° C. Vergr. 800fach.

gewählt, um die Homogenisierung möglichst weit zu treiben), und dann 3 h bei 300° C weichgeglüht. Gefügebilder, Bild 5 und 6, zeigen, daß zwischen dem Zustand nach dem Weichglühen und jenem vor dem Homogenisieren beträchtliche Unterschiede bestehen, trotzdem beide »heterogen« sind und einander sowohl hinsichtlich der Konzentration des Mischkristalls als auch hinsichtlich der mechanischen Gütewerte sehr ähnlich sein müssen. Der am Schliff erkennbare Unterschied ist folgender: während vor dem Homogenisieren noch sehr große Primärausscheidungen von $CuAl_2$ vorhanden sind und auch die Feinausscheidungen in den einzelnen Körnern noch reichlich grob sind, hat sich durch das Homogenisieren die Menge der Primärausscheidungen der Kupferverbindung ganz beträchtlich vermindert; die beim Weichglühen im Korninnern entstandenen Ausscheidungen sind außerordentlich fein und gleichmäßig verteilt.

Schon auf Grund der Gefügebilder ist zu erwarten, daß der vorhomogenisierte Werkstoff wesentlich kleinere Vergütungsglühzeiten brauchen wird. Bild 3 bestätigt dies auch in vollem Maße. Während das nicht vorhomogenisierte Blech rd. ¾ h geglüht werden muß, um die besten Festigkeitswerte zu erreichen, genügt für das vorhomogenisierte Blech schon eine Glühdauer von 1½ min vollständig. In der Darstellung von Bild 4 erkennt man die Wirkung des Vorhomogenisierens noch besonders deutlich: Die Kurve liegt im Bereiche der kleinen Glühzeiten höher, bei den etwas größeren Glühzeiten aber um vieles tiefer als sie sich für das nicht vorhomogenisierte Blech ergeben hatte. Der Zustand, daß 1 min Verlängerung der Glühdauer die Werte um 0,1% erhöht, ergibt sich für das vorhomogenisierte Blech schon nach rd. 5 min, für das nicht vorhomogenisierte (auf Grund der Mittelwertskurve) aber erst nach 35 min. Es ist ja auch erklärlich, daß die Auflösung der hochdispersen, über den ganzen Raum gleichmäßig verteilten Ausscheidungen, wie sie in Bild 6 sichtbar sind, in einem Bruchteil der Zeit erfolgen kann, die zur Auflösung der gröberen Einschlüsse von Bild 5 notwendig ist. Im ersten Falle sind die Diffusionswege dadurch sehr abgekürzt, daß beim Vorhomogenisieren ein weitgehender Konzentrationsausgleich über größere Bereiche schon erzielt worden ist.

Der Einfluß der Vergütungsdauer auf die Festigkeitswerte hängt also vom Entmischungsgrad der Legierung vor dem Vergüten ab. Je größere Diffusionswege zur Erzielung einer über weite Bereiche gleich zusammengesetzten festen Lösung zurückgelegt werden müssen, desto längere Zeiten sind dazu notwendig.

Wenn durch vorhergegangene Vergütungsglühungen schon eine weitgehend gleichmäßige Verteilung der Legierungsbestandteile über größere Bereiche erzielt worden ist, so genügt eine sehr kurze Vergütungsglühung, um die optimalen Festigkeitswerte zu erreichen, was bei der ersten Vergütung noch längst nicht der Fall wäre.

III. Aushärtungsverlauf bei ein- bis neunmaliger Abschreckung.

Ist bisher der Einfluß der Glühbedingungen nur im Hinblick auf die erreichbaren Festigkeitsendwerte untersucht worden, so sollen nun die Wirkungen auf den gesamten Aushärtungsverlauf gezeigt werden. Die Versuche dieser Gruppe wurden an 1-mm-Blech der Bondurlegierung 17/39[2]) durchgeführt. Die angewandten Glühzeiten sind dem Versuchsplan in Bild 7 zu entnehmen. Man sieht, daß in Gruppe A nur einmal, in Gruppe B zweimal, in Gruppe C drei- und in Gruppe D neunmal geglüht und abgeschreckt wurde. Die angewandten Einzelglühzeiten lagen zwischen 10 s und 6 h. Bei mehrfacher Glühung wurde immer dieselbe Einzelglühdauer angewandt. Um bei den kurzen Zeiten eine möglichst rasche Durchwärmung zu erreichen, wurden Glühungen bis 45 min im Salzbad vorgenommen. Die länger dauernden Glühungen erfolgten im Luftumwälzofen.

Ein Einfluß der Raumtemperaturaushärtung zwischen den wiederholten Vergütungsglühungen ist nicht anzunehmen, da er nicht einmal auf eine folgende Warmaushärtung mit Sicherheit nachzuweisen ist[3]); nach Abraham[1]) soll der Einfluß einer Wiederholung des Vergütens sogar stärker sein, wenn zwischen den Vergütungen nicht bei Raumtemperatur ausgehärtet wird. Es konnte die Behandlung der Proben *B* bis *D* daher unbedenklich so vorgenommen werden, daß die Proben unmittelbar nach dem Abschrecken sofort der nächsten Glühung unterworfen wurden.

[2]) Analyse: 4,38% Cu, 0,39% Mn, 0,93% Mg, 0,54% Si, 0,44% Fe.
[3]) P. Brenner und H. Kostron, Z. Metallkde. Bd. 29 (1937), S. 374—379.

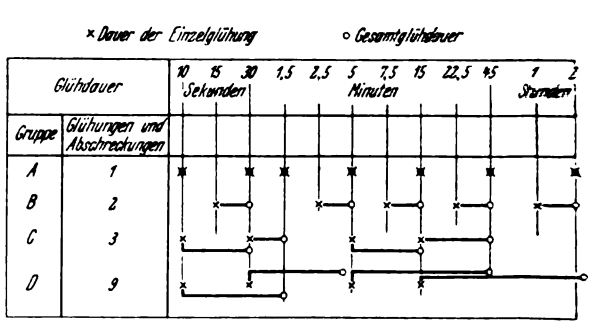


Bild 7. Versuchsplan der angewandten Glühzeiten.

Digitized by Google

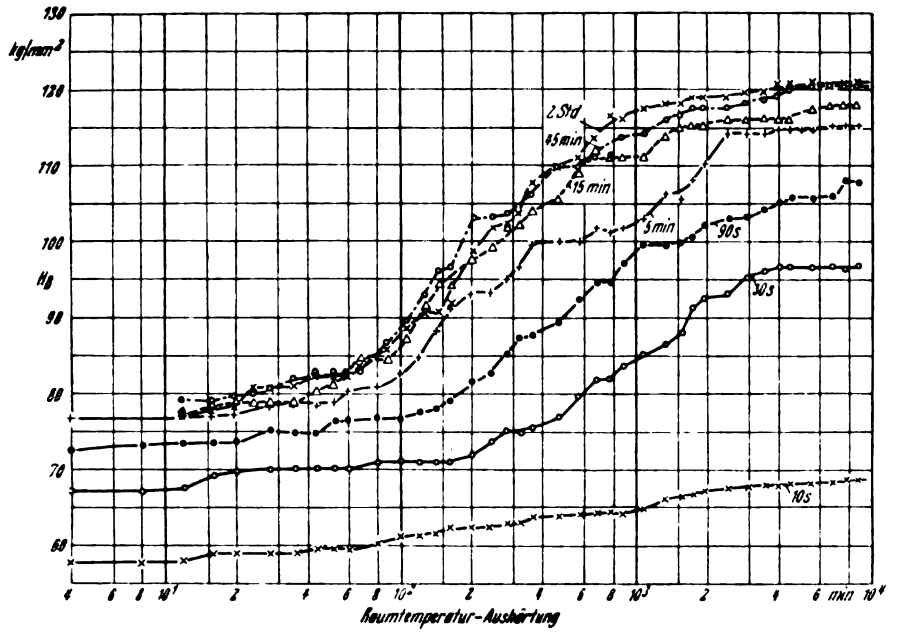


Bild 8. Härtekurven nach einmaliger Glühung verschiedener Länge.

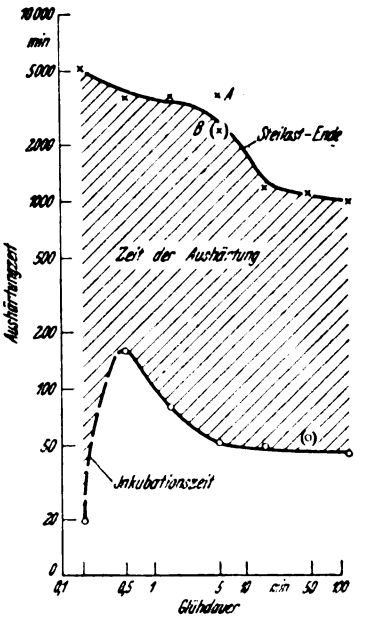


Bild 9. Anfang und Ende (extrapoliert) des Steilastes der Aushärtungskurve. Einmalige Abschreckung.

Die Aushärtungskurven wurden im Bereich von rd. 5 bis 10 min nach dem Abschrecken bis zu 7 Tagen vollständig mit einem selbsttätig arbeitenden Vielfachhärteprüfer[4]) aufgenommen. Dabei wird die Brinellhärte (1 mm/10 kg/30 s) bestimmt, und zwar werden die Eindrücke anfangs in 4 min Abstand gemacht; im Laufe des Versuches vergrößert sich der Zeitabstand nach einer geometrischen Reihe bis auf einen Größtwert von 1040 min. Stichprobenweise (0, 1, 3, 8 h, 1 und 7 Tage nach dem Abschrecken) wurden auch Zerreißversuche gemacht.

Eine Auswertung dieses ziemlich umfangreichen Versuches ist in mehrfacher Hinsicht möglich und soll im folgenden beschrieben werden. Und zwar soll zunächst der Einfluß der Dauer einer einzigen Glühung, dann der Einfluß verschiedener häufiger Wiederholung gleich langer Glühungen[5]) und schließlich der Einfluß einer Aufteilung einer Gesamtglühdauer von bestimmter Länge auf eine verschiedene Zahl von Einzelglühungen gezeigt werden. Hinsichtlich der beiden Veränderlichen: Zahl der Abschreckungen und Gesamtglühdauer sind die drei Auswertungsreihen also folgendermaßen angelegt:

Auswertungsreihe	Zahl der Abschreckungen	Gesamte Glühdauer
I	konst = 1	x
II[5])	x	$x \cdot$ konst
III	x	konst

I. Bild 8 zeigt die Änderung der Brinellhärte im Verlauf der Raumtemperaturlagerung[6]). Es wird darin zunächst das in Bild 2 dargestellte Ergebnis bestätigt, daß für das Erreichen des höchstmöglichen Aushärtungsbetrages eine mindestens $^3/_4$ stündige Glühung notwendig ist; bei kürzerer Glühzeit ist der Härteanstieg wesentlich flacher.

Definiert man die Inkubationszeit als Zeitraum, in dem überhaupt keine Veränderung des Verformungswiderstandes auftreten darf, so würde sie sich mit 12 bis 20 min ergeben, und zwar ohne systematischen Zusammenhang mit der Glühdauer. Eine den technischen Bedürfnissen besser angepaßte Bestimmung dürfte sich ergeben, wenn man durch Extrapolation die Zeit bis zum Beginn des Steilanstieges des über logarithmischem Zeitmaßstab aufgetragenen Härte ermittelt; eine derartige Bestimmung hat auch den Vorteil, von Zufälligkeiten weniger beeinflußt zu sein, als wenn man z. B. einen bestimmten Härteanstieg als Signierung verwendet. Die in der beschriebenen Weise durch Extrapolation gefundene »Inkubationszeit« zeigt einen deutlichen Zusammenhang mit der Dauer der Vergütungsglühung, Bild 9. Sie ergibt ein Maximum für $^1/_2$ min Glühdauer. Nach 10 s Glühung ist der ermittelte Inkubationswert sehr klein; doch ist die Bestimmung in diesem Falle ziemlich unsicher, da der »Steilast« außerordentlich flach verläuft. Betrachtet man nur die Glühdauern, die praktisch in Frage kommen (also von 10 min aufwärts), so ist allerdings die Inkubationszeit nahezu vollständig unabhängig von der Glühdauer; der Kurvenverlauf läßt als sicher annehmen, daß auch bei einer Vervielfachung der größten eingetragenen Glühdauer von 2 h keine wesentlichen Änderungen mehr auftreten werden.

Die Inkubationszeit gibt ein Maß für den Beginn des Steilanstieges der Härte; ob dieser auch in allen Fällen gleichzeitig zu Ende ist, läßt sich nicht mit Sicherheit sagen, da dafür die Versuchsdauer zu kurz war. Der Steilanstieg der Härte ist jedenfalls früher beendet, wenn die Proben länger geglüht werden. Bestimmt man sich auch das Ende des Steilastes durch Extrapolation, so kommt man zu den ebenfalls in Bild 9 eingetragenen Werten. Durch die Kurve der Inkubationsfrist und des Steilastendes ist der Zeitraum der Aushärtung eingeschlossen.

Bei der Bewertung der Ergebnisse ist allerdings zu berücksichtigen, daß eine vollständige Sicherheit bei der Extrapolation oft nicht besteht, da der Steilanstieg vielfach stark von einer Geraden im halblogarithmischen System abweicht. Der mit »*A*« bezeichnete Punkt z. B. ist durch Extrapolation der dem Gesamtverlauf des Steilastes angepaßten Geraden gewonnen, während der offensichtlich besser den Tatsachen entsprechende Punkt *B* nur unter Berücksichtigung des Endes des Steilanstieges bestimmt ist.

Immerhin ist es jedoch sicher, daß eine Änderung der Glühzeit von 15 min auf 2 h (und wahrscheinlich beliebig mehr) den Zeitraum der Aushärtung nicht beeinflußt.

Das Ergebnis der Zerreißversuche in dieser Gruppe ist in Bild 10 (0,2-Grenze) und 11 (Zugfestigkeit) dargestellt. Es stimmt voll mit dem der Härteversuche überein. Zu Bild 11 wäre noch zu sagen, daß das scheinbare Festigkeitsminimum bei 8 h Aushärtungszeit, das bei den 10 s ge-

[4]) H. Kostron, Metallwirtschaft Bd. 18 (1939), S. 106—111.
[5]) Dies entspricht der Arbeitsweise von Abraham vgl. Fußnote 1.
[6]) Die Wellen im ansteigenden Ast der Härtekurven sind nicht etwa durch Meßungenauigkeiten bedingt; sie zeigen örtliche Verformungen der Probe an, die durch Wärmespannungen beim Abschrecken entstanden sind und durch die die Aushärtegeschwindigkeit vergrößert wird, vgl. Fußnote 4.

Digitized by Google

glühten Proben auftritt, nur auf irgendwelche Zufälligkeiten zurückzuführen sein kann.

II. Wiederholt man Vergütungsglühungen mit anschließender Abschreckung mehrfach, so ergibt sich der in Bild 12 bis 21 dargestellte Einfluß auf den Aushärtungsvorgang. Glühungen von 1 bzw. 3 und 9 × 10 s ergeben natürlich sehr stark verschiedenes Aushärten, Bild 12 und 13, da bei diesen kurzen Glühdauern der Einfluß der Glühzeit außerordentlich stark ist, vgl. z. B. Bild 8. Auch nach 1 bzw. 3 und 9 × 30 s Glühung macht sich der Einfluß der Gesamtglühdauer noch sehr stark bemerkbar, Bild 14 u. 15. Nach 5 min Einzelglühdauer rücken die Kurven schon beträchtlich näher aneinander, Bild 16 u. 17; nach Einzelglühungen von 15 min, Bild 18 u. 19, von 45 min, Bild 20, sowie von 2 h, Bild 21, sind systematische Unterschiede zwischen den Kurven für verschieden oft abgeschreckte Proben nicht mehr festzustellen. Die Kurven schneiden sich mehrfach und ihre Reihung läßt einen Zusammenhang

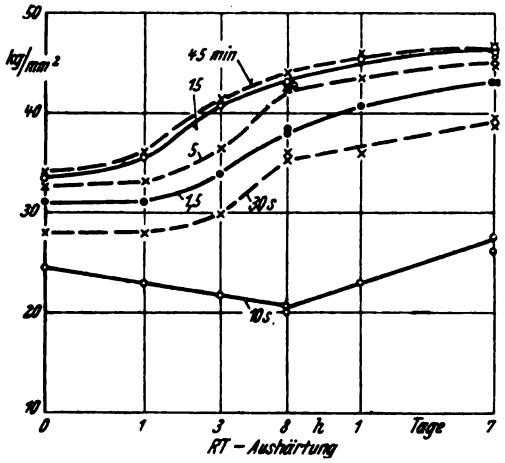


Bild 11 (links). Zugfestigkeit einmal vergüteter Proben.

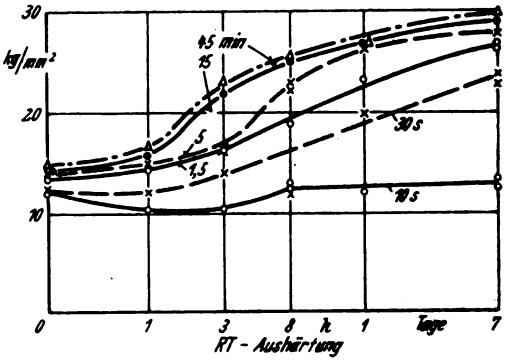


Bild 10. 0,2-Grenze einmal vergüteter Proben.

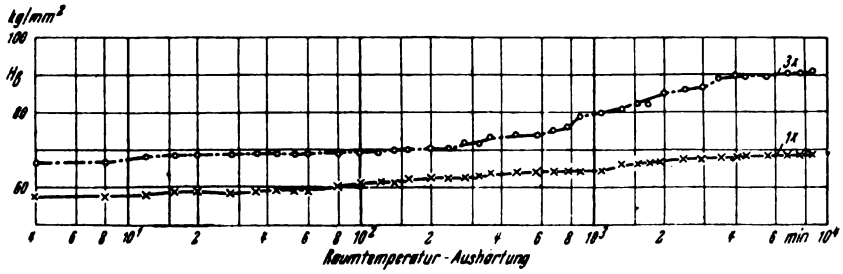


Bild 12. Härtekurven nach ein- bzw. dreimaliger Vergütungsglühung von 10 s Dauer.

Bild 13 (rechts). Zerreißwerte von Proben nach 1 bzw. 3 und 9 × 10 s Vergütungsglühung. 10 s Glühung: 1 × △——▷ 3 × ×– – – –× 9 × O—·—·—O

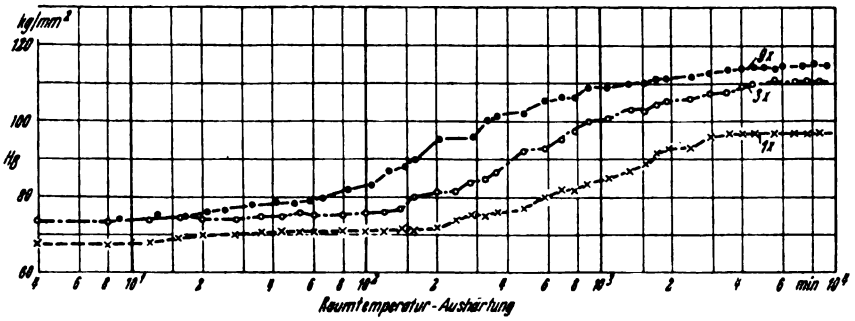


Bild 14. Härtekurven nach 1 bzw. 3 und 9 × 30 s Vergütungsglühung.

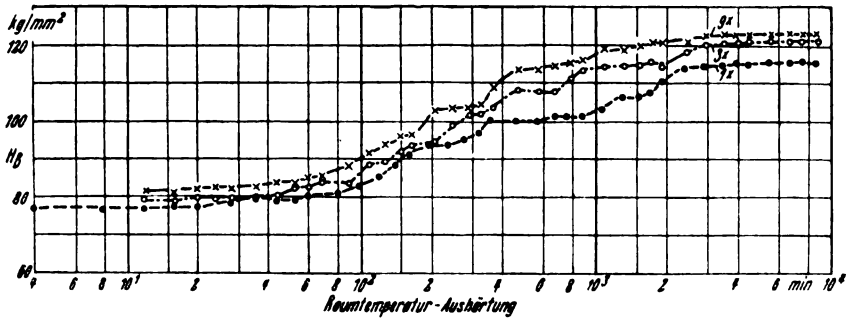
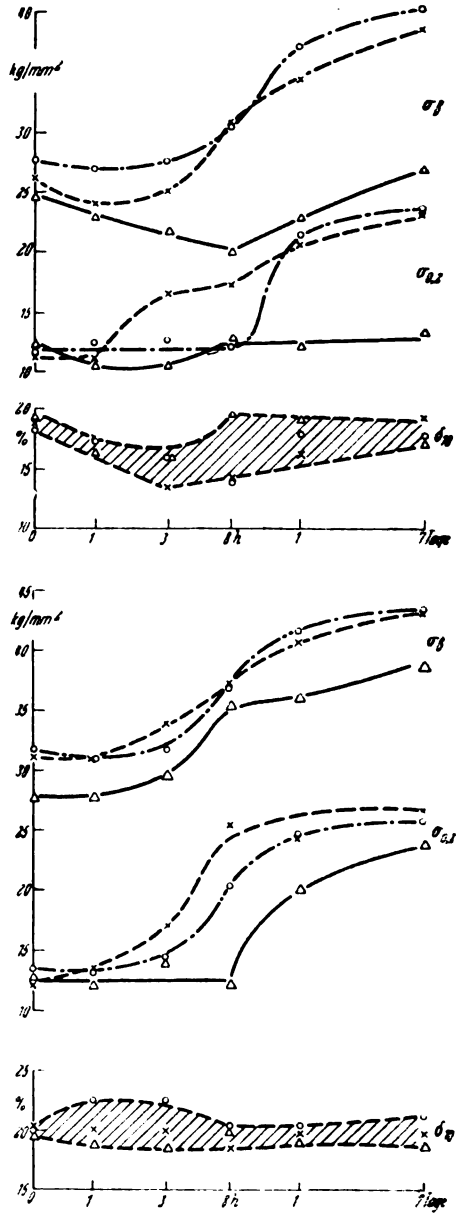


Bild 16. Härtekurven nach 1 bzw. 3 und 9 × 5 min Vergütungsglühung.

Bild 15 (rechts). Zerreißwerte nach 1 bzw. 3 und 9 × 30 s Vergütungsglühdauer. 30 s Glühung: △——△ 1 × ×– – – –× 3 × O—·—·—O 9 ×



Digitized by Google

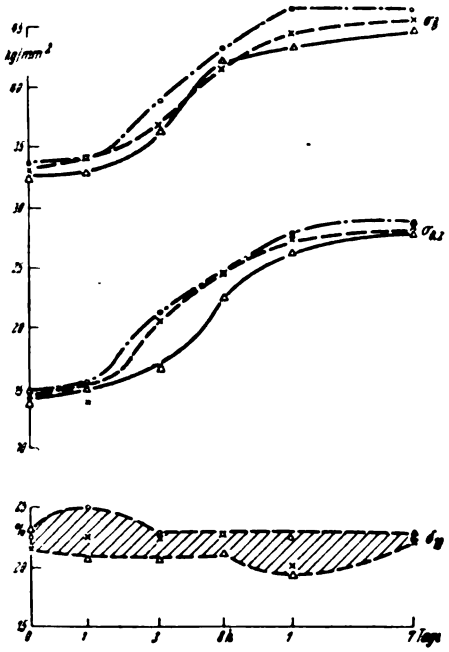


Bild 17. Zerreißwerte nach 1 bzw. 3 und 9 × 5 min Vergütungsglühung.
5 min Glühung: △——△ 1 ×, ×– – –× 3 ×, ○—·—·—○ 9 ×

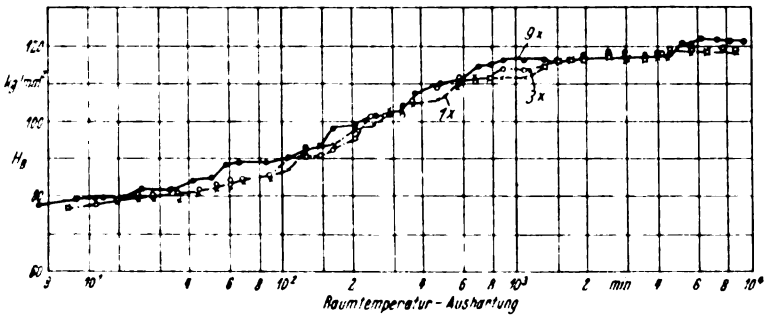


Bild 18. Härtekurven nach 1 bzw. 3 und 9 × 15 min Vergütungsglühung.

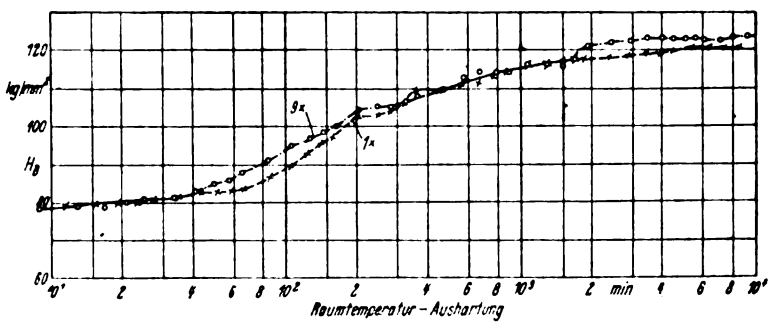


Bild 20. Härtekurven nach 1 bzw. 9 × 45 min Vergütungsglühung.

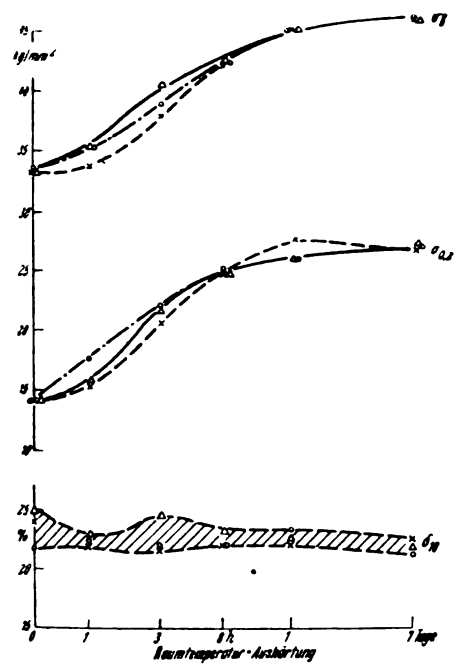


Bild 19 (links). Zerreißwerte für Proben nach 1 bzw. 3 und 9 × 15 min Vergütungsglühung.
15 min Glühung: △——△ 1 ×, ×– – –× 3 ×, ○—·—·—○ 9 ×

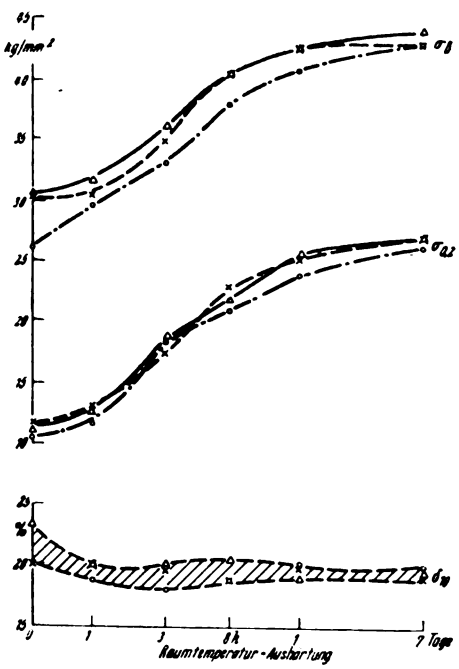


Bild 21 (rechts). Zerreißwerte nach 1 bzw. 3 und 9 × 2 h Vergütungsglühung.
2 h Glühung: △——△ 1 ×, ×– – –× 3 ×, ○—·—·—○ 9 ×

mit der Zahl der Abschreckungen nicht erkennen.

III. Verteilt man eine gleichbleibende Gesamtglühzeit auf eine verschiedene Zahl von Einzelglühungen, so zeigen sich Einflüsse, wie sie in Bild 22 bis 31 dargestellt sind.

Unterschiede im Aushärtungsverlauf, die der Art der Vergütungsglühung zugeordnet werden können, treten nur bei den kurzen Gesamtglühdauern unter 5 min auf; daß sich hier solche Unterschiede ergeben, ist auch begreiflich; denn bei Einzelglühdauern von 10 s wird sicher ein nicht unbeträchtlicher Teil der Zeit für das Anwärmen der Proben benötigt; die wirksame Gesamtglühzeit muß daher, wenn 3 × 10 s geglüht wird, wesentlich kleiner sein als bei einer Glühung von 1 × 30 s. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Anwärmezeit ja nicht nur für das Homogenisieren verloren ist, sondern daß beim Durchlaufen gewisser Temperaturbereiche sogar eine Heterogenisierung auftritt und daß wieder ein Teil der Glühzeit dazu benötigt wird, um die dabei entstandenen Ausscheidungen wieder in Lösung zu bringen.

Schon bei einer Gesamtglühdauer von rd. 5 min verschwinden jedoch diese Unterschiede. Die Aushärtungskurve für 9 × 30 s fällt nahezu vollständig zusammen mit jener für 1 × 5 min, Bild 24. Auch bei den noch größeren Gesamtglühzeiten liegen die Kurven eng nebeneinander; die bestehenden Unterschiede stehen in keinem systematischen Zusammenhang mit der Zahl der Einzelglühungen.

Es ist also eindeutig festzustellen, daß es bei gleicher Gesamtglühdauer für den Aushärtungsverlauf gleichgültig ist, ob diese Gesamtglühdauer durch Abschreckungen mehr oder weniger unterteilt ist. Voraussetzung dafür ist nur, daß die Unterteilung nicht so weit geht, daß ein wesentlicher Teil der Glühdauer auf die Anwärmezeiten entfällt.

Digitized by Google

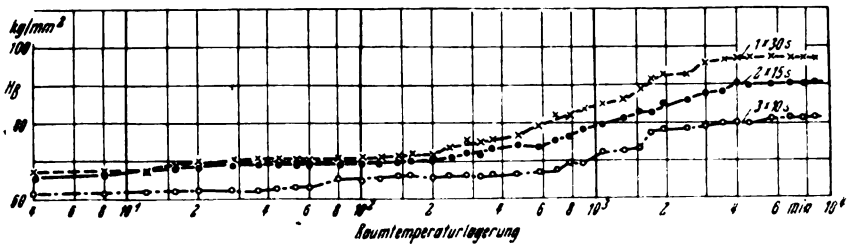


Bild 22. Härtekurven nach 30 s Gesamtglühdauer.

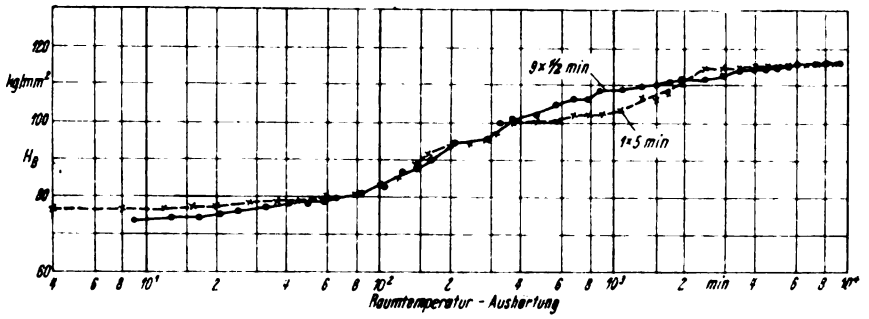


Bild 24. Härtekurven nach 5 min Gesamtglühdauer.

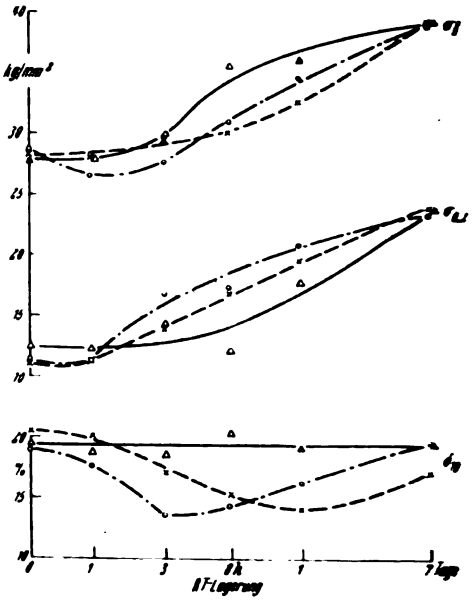


Bild 23. Zerreißwerte nach 30 s Gesamtglühdauer.

○—·—·—○ 3 × 10 s
×— — —× 2 × 15 s
△———△ 1 × 30 s

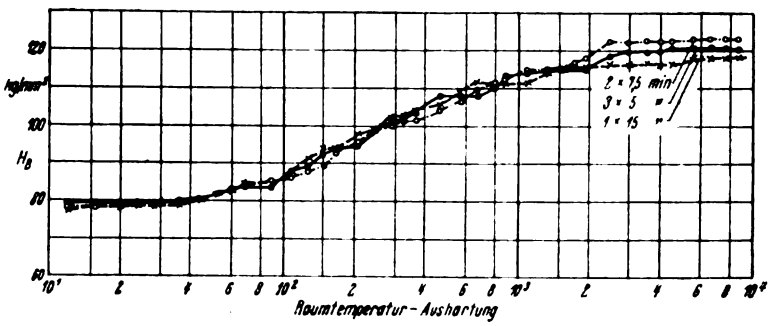


Bild 26. Härtekurven nach 15 min Gesamtglühdauer.

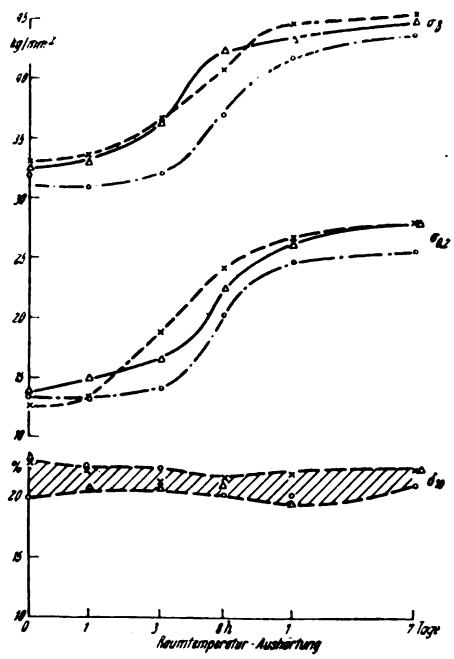


Bild 25. Zerreißwerte nach 5 min Gesamtglühdauer.

○—·—·—○ 9 × 30 s
×— — —× 2 × 2,5 min
△———△ 1 × 5 min

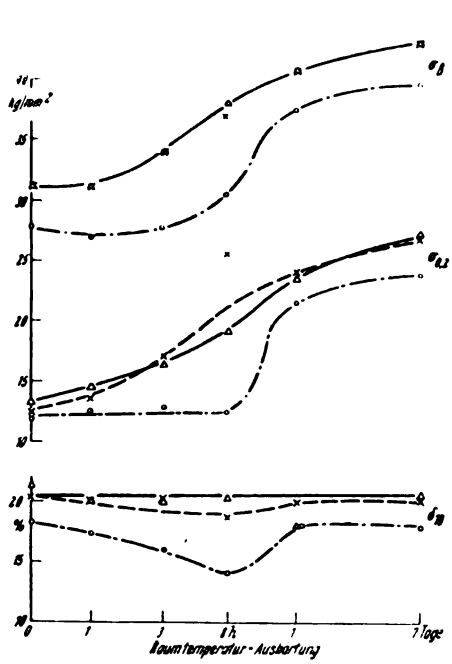


Bild 27. Zerreißwerte nach 1,5 min Gesamtglühdauer.

○—·—·—○ 9 × 10 s
×— — —× 3 × 30 s
△———△ 1 × 90 s

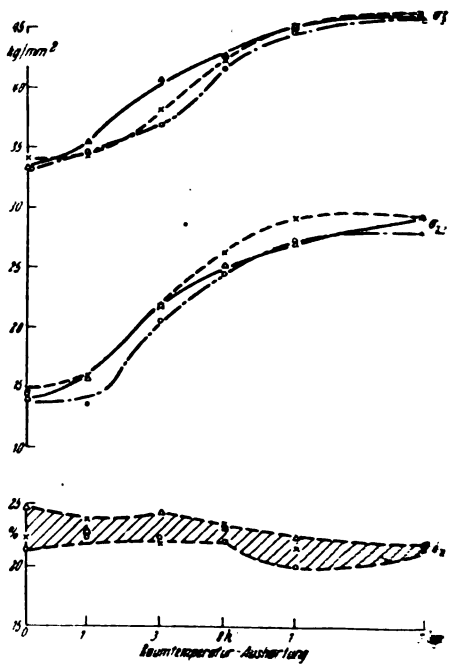


Bild 28. Zerreißwerte nach 15 min Gesamtglühdauer.

○—·—·—○ 3 × 5 min
×— — —× 2 × 7,5 min
△———△ 1 × 15 min

Digitized by Google

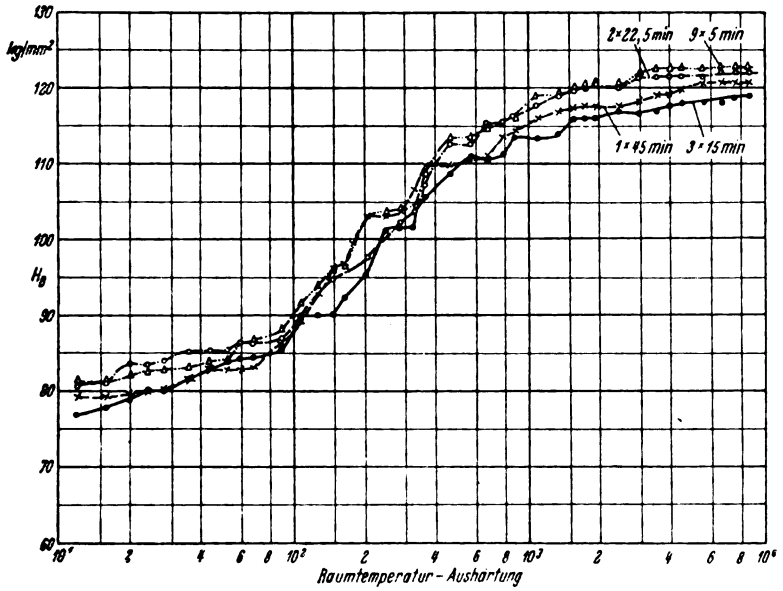
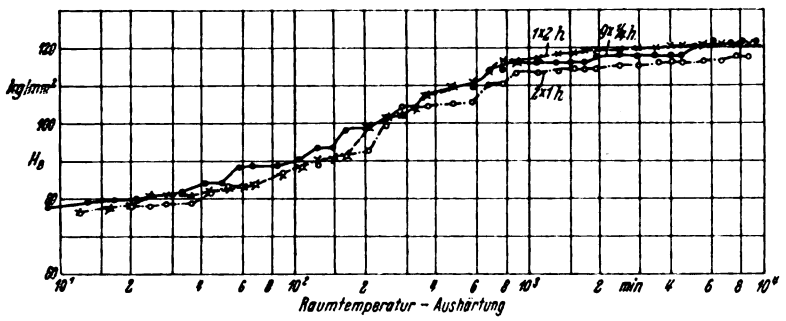


Bild 29. Härtekurven nach 45 min Gesamtglühdauer.



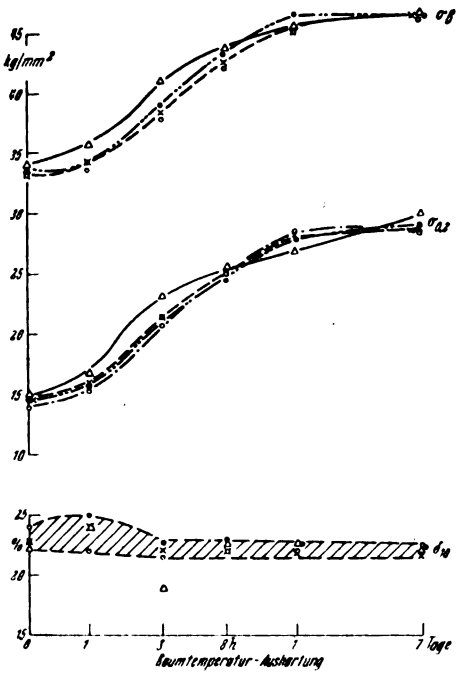


Bild 30. Zerreißwerte nach 45 min Gesamtglühdauer.

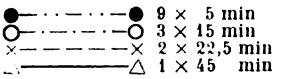
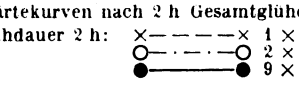


Bild 31. Härtekurven nach 2 h Gesamtglühdauer.



Als Gesamtergebnis kann zusammengefaßt werden, daß eine mehrfache Vergütung nur insofern Einfluß auf das Aushärtungsverhalten hat, als sich mit der Gesamtglühdauer auch die Homogenität der Legierung und damit die erreichbaren Festigkeitswerte einem Höchstwert nähern, der nach ¾ h Gesamtglühdauer praktisch erreicht ist. Über 15 min Glühdauer besteht kein die Streuungen übersteigender Einfluß der Zahl der Abschreckungen bzw. der Gesamtglühdauer auf den Zeitraum, in dem sich der wesentliche Teil der Aushärtung abspielt. Für die untersuchten Legierungen besteht also auch kein Einfluß wiederholter Vergütungen auf die Inkubationszeit.

IV. Zusammenfassung.

An Blechen aus den Al-Cu-Mg-Legierungen Bondur 17/65 und 17/39 ist der Einfluß verschieden langer und verschieden oft wiederholter Vergütungsglühungen auf den Verlauf der Raumtemperaturaushärtung untersucht worden. Dabei hat sich ergeben: Bei erstmaliger Vergütung nähern sich mit zunehmender Glühdauer die Streckgrenzen- und Festigkeitswerte nach voller Raumtemperaturaushärtung nach einer parabolischen Funktion ihren Endwerten; um mit befriedigender Näherung an die Höchstwerte heranzukommen, ist eine Glühung von etwa 45 min bei 505° C nötig. Im praktisch angewandten Bereich bewirkt eine Änderung der Glühdauer keine wesentliche Änderung des Zeitraumes der hauptsächlichen Aushärtung. Bei gleicher Gesamtglühdauer bewirkt eine Unterteilung der Glühzeit durch zwischengelegte Abschreckungen keine Änderung des Aushärtungsverlaufes.

Digitized by Google

Untersuchung von Bleibronze-Ausgüssen in der DVL-Lagerprüfmaschine.

Von G. Fischer.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

An 12 Bleibronze-Legierungen, die von fünf Herstellern geliefert wurden und Bleigehalte zwischen 17 und 42 vH aufweisen, werden die Laufeigenschaften in der DVL-Lagerprüfmaschine auf vergüteten und gehärteten Laufzapfen untersucht. Die Prüfung erstreckt sich auf die Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze und des Verhaltens bei Dauerbeanspruchung sowie bei Einstellung der Ölzufuhr.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Untersuchte Lagerwerkstoffe.
III. Prüfbedingungen und Versuchsdurchführung.
IV Versuchsergebnisse
a) Tragfähigkeitsgrenze unter ruhender und dynamischer Belastung,
b) Verhalten bei Dauerbeanspruchung,
c) Verhalten bei Einstellung der Ölzufuhr zum Lager.
V. Folgerungen aus den Versuchsergebnissen.
VI. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Als Werkstoff für hochbeanspruchte Flugmotorenhauptlager haben sich Lagerausgüsse aus Bleibronze trotz beachtlicher Mängel bis heute behauptet. Zwecks Vermeidung von Bindungsfehlern, Poren und Seigerungen sind umständliche Schmelz- und Gießverfahren erforderlich, die selbst heute noch nicht vollkommen beherrscht werden und Gegenstand umfangreicher metallurgischer Untersuchungen sind[1]). Darüber hinaus wurden in den letzten Jahren zahlreiche, insbesondere Leichtmetall-Lagerwerkstoffe entwickelt, mit denen jedoch unter höchsten thermischen und mechanischen Beanspruchungen im praktischen Betrieb noch keine einwandfreien Ergebnisse erzielt werden konnten. Solange die Werkstofffrage für hochbelastete Lager noch nicht befriedigend gelöst ist, muß angestrebt werden, die Herstellungsbedingungen für Bleibronzen zu verbessern.

Die vorliegenden Untersuchungen, die auf der DVL-Lagerprüfmaschine unter besonderer Berücksichtigung der in Flugmotorenhauptlagern auftretenden Belastungsverhältnisse durchgeführt wurden, liefern einen Beitrag zur Frage der Beanspruchbarkeit von Bleibronze-Ausgüssen und geben Anhaltspunkte für die Weiterentwicklung dieses Lagerwerkstoffes.

II. Die untersuchten Lagerwerkstoffe.

Für die Versuche waren Bleibronze-Ausgüsse verschiedener Herkunft und mit Bleigehalten von 20 bis 40% vorgesehen. Zahlentafel 1 enthält eine Aufstellung der untersuchten Bleibronzen mit Angaben über deren chemische Zusammensetzung und Härte. Die Ermittlung der Härte erfolgte an Proben aus vorbearbeiteten Lagern, deren Ausgußstärke 1 bis 1,2 mm betrug; Lager aus den Legierungen 20 V und 40 V standen für die Härteprüfung im Anlieferungszustand nicht mehr zur Verfügung. Bild 3 bis 15 zeigen die Bleiverteilung der Ausgüsse in parallel zur Lagerachse verlaufenden Schliffen.

Der Einfluß des Pb-Gehaltes auf die Härte des Ausgußwerkstoffes geht aus den in Zahlentafel 1 angeführten

[1]) F. Bollenrath, W. Bungardt und E. Schmidt, Beitrag zur Technologie und Metallurgie von Lagermetallen. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 417 bis 425 (69 Schrifttums-Angaben).

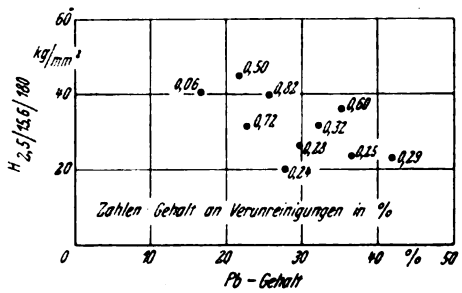


Bild 1. Härte der untersuchten Bleibronze-Ausgüsse in Abhängigkeit vom Bleigehalt.

Zahlentafel 1. Zusammensetzung und Härte der untersuchten Bleibronze-Ausgüsse.

Ausguß aus	Hersteller	Datum der Lieferung	Zusammensetzung in vH					Härte H 2,5/15, 625/180 kg/mm²		Gefüge nach Bild
			Pb	Cu	Ni	Sn + Sb	Rest	bei 20° C	bei 150° C	
Leg. 20*)	I	Sept. 1936	21,70	77,80	Sp.	0,05	0,45	45,0	36,5	3
	III	Aug. 1937	22,58	76,70	Sp.	0,55	0,17	31,7	26,0	4
	IV	Jan. 1938	16,79	83,15	—	—	0,06	40,4	33,1	5
	V	Mai 1937	23,37	76,52	0,10	—	0,01	—	—	6
Leg. 30	I	Sept. 1936	25,60	73,50	0,08	0,13	0,69	39,6	35,3	7
	II	Juni 1937	32,34	67,34	Sp.	Sp.	0,32	31,7	23,8	8
	IV	Jan. 1938	29,70	69,22	0,80	—	0,28	26,9	21,6	9
	V	Febr. 1938	27,79	71,97	Sp.	—	0,24	19,5	14,3	10
Leg. 40	I	Sept. 1936	35,20	64,20	Sp.	0,06	0,54	36,0	32,2	11
	II	Juni 1937	36,62	63,13	Sp.	Sp.	0,25	23,5	19,7	12 u. 13
	IV	Okt. 1938	42,17	57,54	Sp.	Sp.	0,29 (0,28 Fe)	23,2	18,9	14
	V	Mai 1937	38,32	60,55	0,96	—	0,17	—	—	15

*) Leg. 20: 15 bis 25% Pb; Leg. 30: 25 bis 35% Pb; Leg. 40: 35 bis 45% Pb.

Digitized by Google

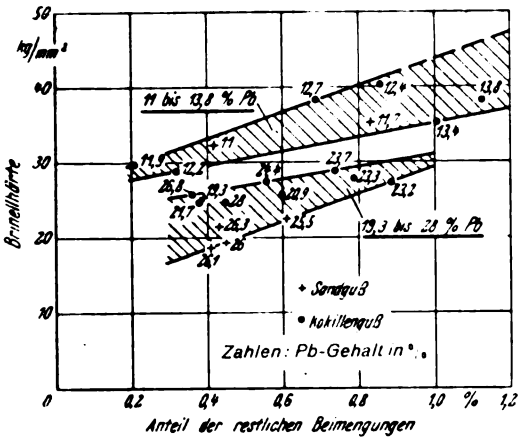


Bild 2. Härte von Bleibronzen in Abhängigkeit vom Gehalt an Verunreinigungen (nach Versuchen von Hensel u. Tichvinsky).

Werten nicht ohne weiteres hervor. Die Darstellung in Bild 1 läßt jedoch trotz starker Streuung der Werte eine Abnahme der Härte mit zunehmendem Pb-Gehalt erkennen. Bemerkenswert ist, daß die oberen Grenzwerte an Ausgüssen mit einem größeren, die unteren dagegen vorwiegend an Ausgüssen mit einem geringeren Anteil an Sn + Sb + Rest (vgl. Zahlentafel 1) festgestellt wurden. Auch die von Hensel und Tichvinsky[1]) untersuchten Bleibronzen weisen gemäß Bild 2 eine deutliche Härtezunahme mit wachsendem Anteil an außer Pb und Cu vorhandenen Bestandteilen auf. Diese geringen, als Verunreinigungen aufzufassenden restlichen Beimengungen müssen demnach stark härtesteigernde Bestandteile enthalten (Nickel bewirkt nach Wecker und Nipper[2]) nur in Verbindung mit Sn und Mn eine Härtezunahme). Zu beachten ist ferner, daß die Härte auch noch durch die Abkühlungsverhältnisse nach dem Vergießen beeinflußt wird. So ermittelten die obengenannten Verfasser[2]) eine Brinellhärte von 44 kg/mm² bei Sandguß und von 51 kg/mm² bei Kokillenguß, und zwar an Bleibronzen von fast gleicher chemischer Zusammensetzung: 75,5 Cu, 17,5 Pb, 3,5 Sn und 3,5 Sb; entsprechende Härteunterschiede lassen sich auch in Bild 2 feststellen. Im übrigen ist die Streuung der Härtewerte in Bild 1 und 2 bedingt durch Unregelmäßigkeiten in der Pb-Verteilung. Nach den Angaben in Zahlentafel 1 liegt die Härte der untersuchten Ausgüsse bei 150° C um 3,8 bis 8,5 Brinelleinheiten (entspr. 11 bis 27%) niedriger als bei Raumtemperatur.

Auf Grund der bisherigen Untersuchungen und Betriebserfahrungen sollen hochbeanspruchte Lagerausgüsse aus Bleibronze eine gleichmäßige Bleiverteilung bei feinglobularer Form der Einschlüsse aufweisen. Gemäß Bild 3 bis 15, die jeweils nur das aus einem 40 mm langen Schliff entnommene Durchschnittsgefüge zeigen, sind diese Bedingungen nur bei den bleiärmeren Ausgüssen 20 I bis 20 IV in etwa erfüllt. Diese Legierungen zeigen jedoch noch nicht den regelmäßigen und feinglobularen bzw. feindendritischen Gefügeaufbau der in Bild 16 und 17 dargestellten ausländischen Bleibronzen. Die übrigen bleireicheren Ausgüsse enthalten mehr oder weniger ausgedehnte Seigerungszonen oder grobe Bleieinschlüsse; zumal die Legierungen 30 I, II und IV sowie 40 II und IV weisen besonders starke Einschlüsse auf, die in den Laufflächen der versuchsfertigen Lager schon mit bloßem Auge deutlich zu erkennen sind; vgl. Bild 18 und 19. Eine Abhängigkeit der Bleiverteilung vom Verunreinigungsgrad bzw. vom Gehalt an Beimengungen (Nickel) läßt sich nicht feststellen. Es scheint daher, daß die Abweichungen im Gefügeaufbau hauptsächlich durch unterschiedliche Gieß- und Abkühlungsverhältnisse bedingt sind. Selbst bei den verschiedenen Legierungen derselben Herkunft treten bisweilen starke Gefügeunterschiede auf; die Herstellung bleiarmer Ausgüsse bereitet offenbar weniger große Schwierigkeiten.

Die Bindung an der Übergangsstelle vom Lagerwerkstoff zur Stahlstützschale war in fast allen Fällen längs der ganzen Schlifffläche einwandfrei; lediglich bei den Legierungen der Gruppe I wurden stellenweise Bleiansammlungen in der Nähe der Bindungszone beobachtet.

[1]) F. R. Hensel und L. M. Tichvinsky, Straight Copper-Lead Alloys Versus Leaded Solid-Solution Bronzes for Heavy-Duty Bearings. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. Bd. 54 (1932) S. 11 bis 24.

[2]) J. Wecker und H. Nipper, Eine Studie über Pb-Bronzen unter besonderer Berücksichtigung des Mn als Legierungselement. Z. Metallkde. Bd. 27 (1935) S. 149 bis 154.

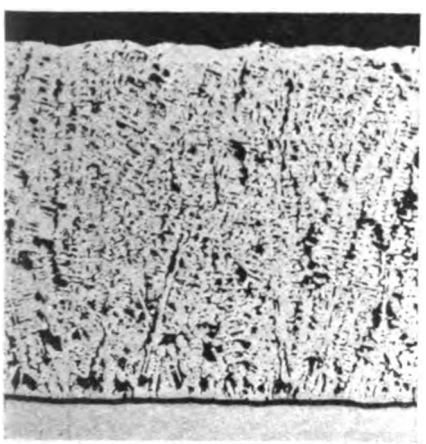


Bild 3. Bleibronze 20 I (21,7 % Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

Bild 4. Bleibronze 20 III (22,6 % Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

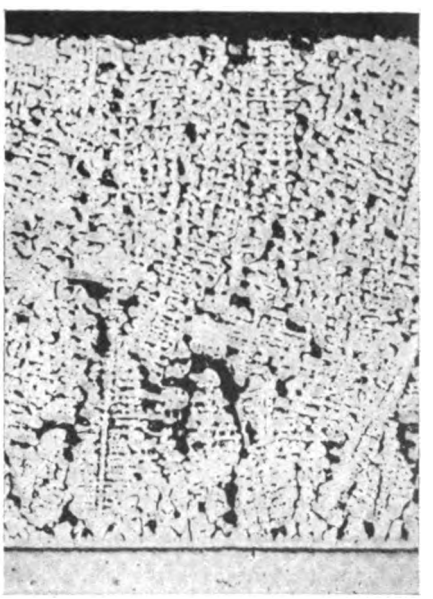


Bild 5. Bleibronze 20 IV (16,8 % Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

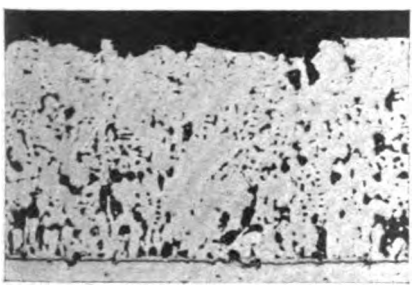


Bild 6 ((inks). Bleibronze 20 V (23,4 % Pb); schwach geätzt. Zustand nach dem Prüflauf. Vergr. 50 fach.

Digitized by Google

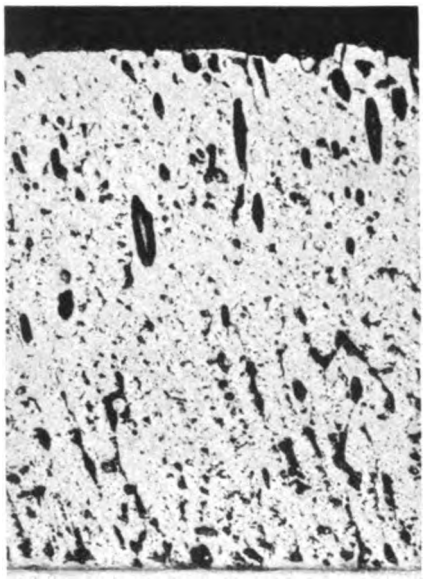


Bild 7. Bleibronze 30 I (25.6% Pb); schwach geätzt. Vergr. 50fach.

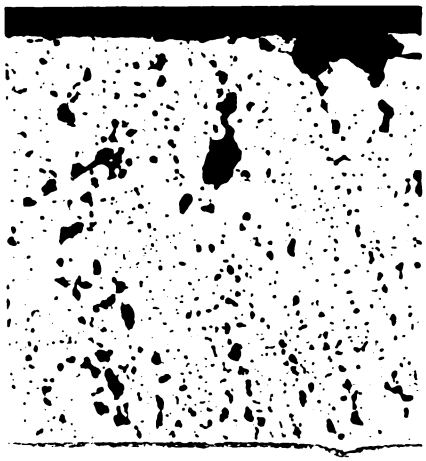


Bild 8. Bleibronze 30 II (32,3% Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

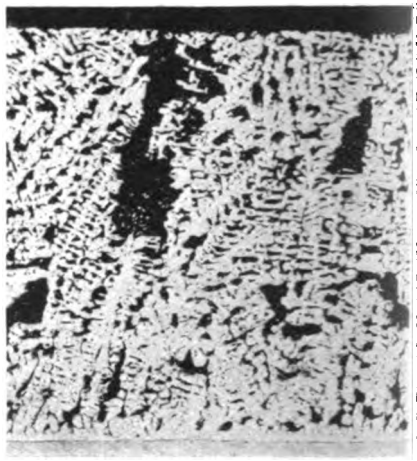


Bild 9. Bleibronze 30 IV (29,7% Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

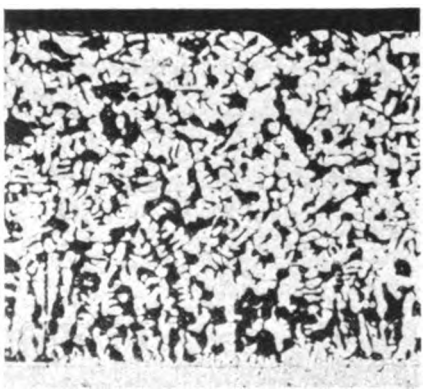


Bild 10. Bleibronze 30 V (27,8% Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

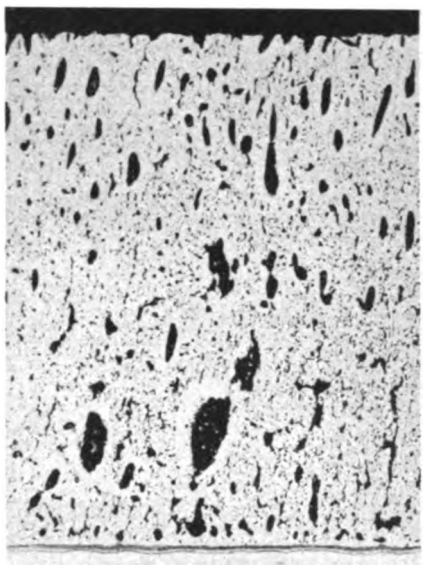


Bild 11. Bleibronze 40 I (35,2% Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

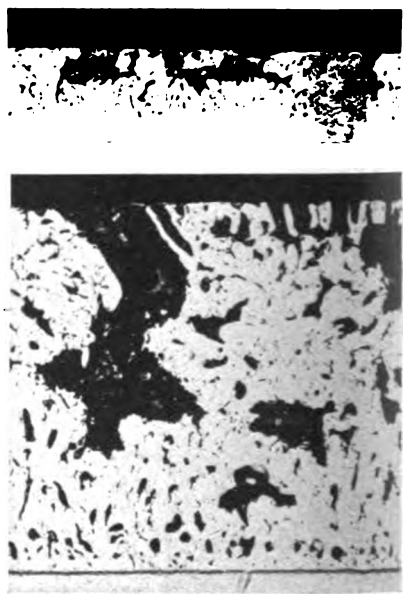


Bild 12 u. 13. Bleibronze 40 II (38,3% Pb); schwach geätzt.
Bild 12 (oben) Vergr. 10fach.
Bild 13 Vergr. 50 fach.

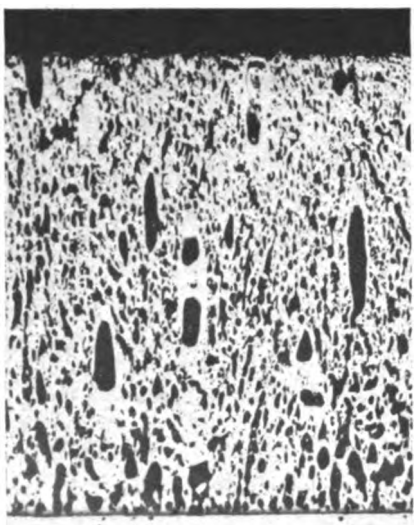


Bild 14. Bleibronze 40 IV (42,2% Pb); schwach geätzt. Vergr. 50 fach.

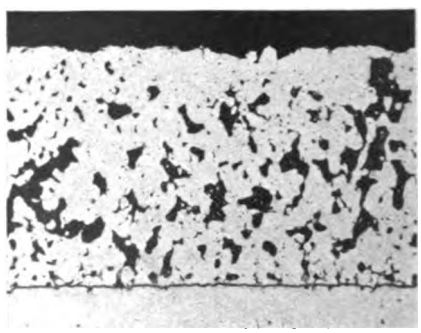


Bild 15. Bleibronze 40 V (38,3% Pb); schwach geätzt. Zustand nach dem Prüflauf. Vergr. 50 fach.

Digitized by Google

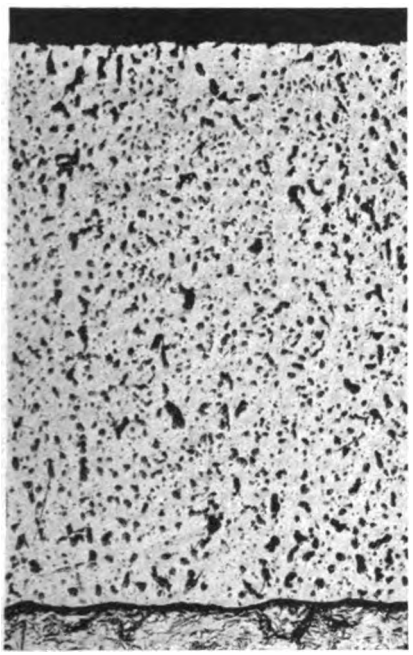


Bild 16. Gleichmäßige und feinglobulare Pb-Verteilung in einer ausländischen Bleibronze. (70,70 Cu; 28,98 Pb; 0,12 Ni; 0,18 Fe; H 2,5/15, 625/180 = 22 kg/mm²). Vergr. 50 fach.

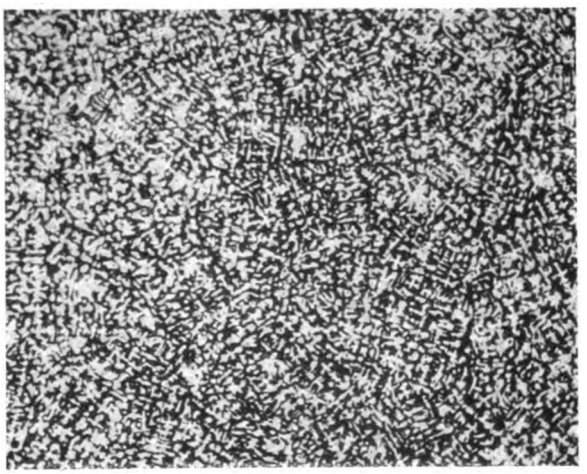


Bild 17. Feindendritischer Gefügeaufbau in einer stark Pb-haltigen ausländischen Bleibronze. Vergr. 100 fach.

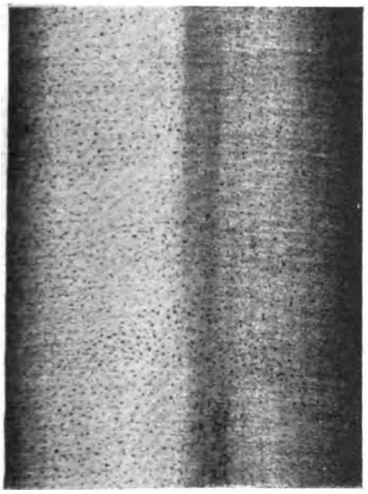


Bild 18. Leg. 30 IV. Zahlreiche kleine Bleieinschlüsse in der Lauffläche nach der Bearbeitung. Vergr. 2 fach.

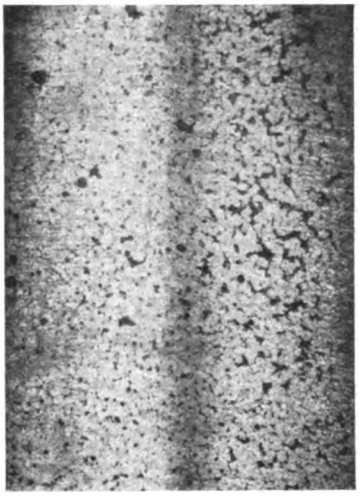


Bild 19. Leg. 40 II. Zahlreiche große Bleieinschlüsse in der Lagerlauffläche nach der Bearbeitung. Vergr. 2 fach.

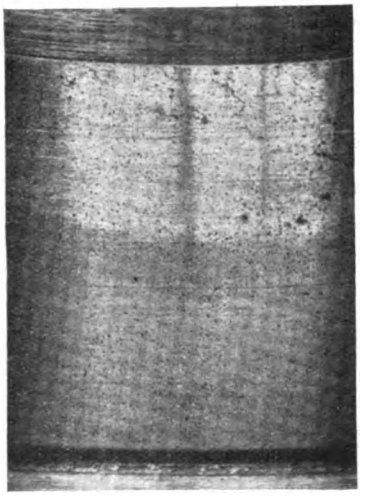


Bild 20. Leg. 30 I (Versuchslager 932). Zahlreiche kleine Poren (an Stelle der vor dem Versuch vorhandenen Bleieinschlüsse); auf der belasteten Seite (oben) kleine Ausbruchstellen und Rißbildung. Zustand nach Prüflauf unter ruhender Last bis $p = 70$ kg/cm² bei Kantenpressung. Vergr. 2 fach.

Mehrere der angelieferten Büchsen mit Poren und Bleieinschlüssen wurden bereits von den Herstellern als fehlerhaft gekennzeichnet. Es ist daher anzunehmen, daß die übrigen Ausgüsse bei der Abnahme im Herstellerwerk als einwandfrei befunden wurden. An einigen der fehlerhaften Lager sollte der Einfluß von Fehlstellen auf das Laufverhalten ermittelt werden; verwendet wurden hierzu die Lager: 522 aus Leg. 20 V, 531 aus Leg. 30 V, 341 und 342 aus Leg. 40 II, 541 und 542 aus Leg. 40 V.

Die oben beschriebenen Bleibronze-Ausgüsse wurden in Verbindung mit vergüteten, einsatzgehärteten und nitrierten Laufzapfen untersucht, über die bereits in einem früheren Aufsatz[4]) eingehend berichtet wurde. In nachstehender Zahlentafel sind die Grenzwerte der Oberflächenhärte für die verschiedenen bei den vorliegenden Versuchen verwendeten Zapfenwerkstoffe nochmals zusammengestellt.

Werkstoffbezeichnung	Oberflächenzustand	Vickerszahl (20 kg Belastg.)
VCMo 140	vergütet (V)	323 bis 327
D 22 S	»	363 » 373
EFD 67 G	einsatz-	675 » 714
EC Mo 80	gehärtet (E)	687 » 755
EFKM 54	nitriert (N)	777 » 791
N 54 G	»	846

III. Prüfbedingungen und Versuchsdurchführung.

In dem obenerwähnten Aufsatz[4]) sind die Prüfverhältnisse für die Untersuchungen in der DVL-Lagerprüfmaschine ausführlich besprochen worden, so daß an dieser Stelle nur kurz darauf eingegangen zu werden braucht.

In Rücksicht auf die allgemein durch die Entwicklungsrichtung im Flugmotorenbau vorgezeichneten Belastungsverhältnisse sollten die Lageruntersuchungen nicht nur unter dynamischer, sondern auch unter ruhender Belastung bei umlaufendem Lager und feststehendem Zapfen durchgeführt werden.

Ausgehend von den im Flugmotorenbetrieb auftretenden normalen und außergewöhnlichen Beanspruchungsfällen wurde folgende Einteilung der Versuche vorgenommen:

a) Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze von Bleibronzeausgüssen,
b) Untersuchung des Laufverhaltens bei Dauerbeanspruchung,
c) Erfassung der Notlaufeigenschaften bei Unterbrechung der Ölzufuhr.

[4]) G. Fischer, Untersuchung von Leichtmetall-Lagerwerkstoffen in der DVL-Lagerprüfmaschine. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), Lfg. 1 S. 1 bis 13.

Digitized by Google

Zahlentafel 2. Bewertung des Zustandes der Zapfen- und Lagerlaufflächen.

Bewertungsziffer	Zustand der Lauffläche von Zapfen*) und Lager: Bleieinschlüsse (*bl*)	Poren (*p*)	Riefen (*r*)	Narben (*n*)	Ausbruchstellen (*a*)	Risse (*rs*)	Freßstellen (*fr*)	Bemerkung
0	Lauffläche glatt							
1	einzelne kleine	einzelne kleine	schwache	—	—	—	—	einwandfei
2	einzelne mittlere	einzelne mittlere	einzelne mittlere	einige kleine	einige kleine	—	—	betriebsfähig
3	einzelne große	einzelne große	mehrere mittlere	zahlreiche kleine	zahlreiche kleine	—	—	bedingt betriebsfähig
4	mehrere kleine o. mittlere	mehrere kleine o. mittlere	zahlreiche mittlere	einige mittlere	einige mittlere	—	—	Beseitigung der Oberflächenverletzung oder Austausch zweckmäßig
5	mehrere große	mehrere große	einzelne starke	zahlreiche mittlere	zahlreiche mittlere	einzelne kurze	schwache	
6	zahlreiche kleine	zahlreiche kleine	mehrere starke	einzelne starke	einzelne starke	mehrere kurze	mittlere	zerstört oder betriebsunfähig
7	zahlreiche mittlere	zahlreiche mittlere	zahlreiche starke	mehrere starke	mehrere starke	lange	einige starke	Beseitigung oder Austauch erforderlich
8	zahlreiche große	zahlreiche große	—	zahlreiche starke	zahlreiche starke (vollst. Zerstörung d. Bindung)	—	zahlreiche starke	

*) An den Laufzapfen wurden nur Riefen und Freßspuren beobachtet.

Für die Untersuchung der Leichtmetallager[4]) bei Dauerbeanspruchung war ein mittlerer Lagerdruck von 400 kg/cm² festgelegt worden. Infolge der wesentlich geringeren Beanspruchbarkeit der Bleibronze-Ausgüsse gegenüber den Leichtmetallagern mußte der Prüfdruck bei den vorliegenden Dauerversuchen auf den für Hauptlager von Flugmotoren vielfach zugelassenen Wert von 250 kg/cm² herabgesetzt werden.

Bei einer Stärke der mit Diamant bearbeiteten Ausgußschicht von rd. 0,5 mm betrug der Innendurchmesser 60 mm und die Laufflächenbreite 25 mm. Mit diesen Abmessungen konnten bei einer oberen Lastgrenze der Prüfmaschine von 7500 kg mittlere Flächenpressungen bis 500 kg/cm² erreicht werden. Die übrigen Prüfbedingungen entsprachen den für die Leichtmetallager-Untersuchungen festgelegten:

Lagerspiel: 1‰ (0,06 mm),
Umlaufgeschwindigkeit: 5 m/s (n = 1600 l/min),
Betriebstemperatur: 120° C, gemessen am Zapfen dicht neben der Laufstelle,
Schmiermittel: auf 90 bis 100° C vorgewärmtes Flugmotorenöl »Stanavo 120«, das nach Durchgang durch ein Filzfeinfilter der unbelasteten Lagerseite unter einem Druck von 4 bis 5 atü zugeführt wird.

IV. Versuchsergebnisse.

a) Tragfähigkeitsgrenze unter ruhender und dynamischer Belastung.

Zur Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze wurde der Lagerdruck jeweils nach annähernd zweistündiger Laufzeit um 100 kg/cm², in einzelnen Fällen auch nur um 50 kg/cm² gesteigert. Die Lastaufgabe von Stufe zu Stufe sollte in Übereinstimmung mit den früheren Versuchen innerhalb 1 bis 2 min erfolgen; bei den höheren Lagerdrücken mußte die Laststeigerung jedoch durchweg in größeren Zeitabschnitten vorgenommen werden, um einen durch Laufstörungen bedingten starken Leistungsanstieg, der zur selbsttätigen Auslösung der Prüfmaschine führen würde, zu vermeiden.

Die fertig bearbeiteten Lager wurden kurz vor dem Prüflauf auf ihren Laufflächenzustand hin untersucht. Als Fehler wurden hauptsächlich Poren und Bleieinschlüsse ermittelt, die je nach Zahl und Größe das Laufverhalten der Lagerausgüsse mehr oder weniger stark beeinflußten. In Zahlentafel 2 sind die vor und nach den Untersuchungen festgestellten Laufflächenfehler und -verletzungen zusammengestellt und durch Bewertungsziffern gekennzeichnet. Zur Erläuterung dieser Angaben dienen die in Bild 18 bis 28 dargestellten Laufflächen einiger Versuchslager. Nach Zahlentafel 3 war der überwiegende Teil der untersuchten Lager vor dem Versuch in nicht einwandfreiem Zustande. Die Ausgüsse aus den Legierungen 30 I, II, IV und 40 I, II enthielten zahlreiche kleine und größere Bleieinschlüsse in der bearbeiteten Lauffläche; vgl. Bild 18 und 19 sowie die entsprechenden Schliffbilder, Bild 7 bis 9, 11 und 12. Die stark porigen Lager 531, 541 und 542 aus Legierung 30 V und 40 V wurden lediglich zur Untersuchung der Wirkung von Poren in den Versuchsplan aufgenommen.

Im Gegensatz zu den früher untersuchten Leichtmetalllagern[4]) erwiesen sich die Bleibronze-Ausgüsse als sehr belastungsempfindlich, insbesondere unter ruhender Last. In vielen Fällen wurde bereits zu Beginn der Lastaufgabe eine starke Zunahme der Antriebsleistung und Lagertemperatur beobachtet. Bei derartigen Laufstörungen mußte die Belastungsgeschwindigkeit herabgesetzt werden, um ein Auslösen der Prüfmaschine und dadurch bedingte Beschädigungen der Lagerlaufflächen zu vermeiden. So konnte bei Lager 1231 aus Leg. 20 III innerhalb der zweiten Belastungsstufe der Lagerdruck von 200 kg/cm² erst nach 5 min erreicht werden; die weitere Erhöhung auf nur 210 kg/cm² nahm bereits 60 min in Anspruch, so daß eine wesentliche Steigerung des Lagerdruckes nicht mehr zu erwarten war. Aus Bild 29 und 30, in denen an einigen Beispielen die für jede Belastungsstufe benötigten Einlaufzeiten in Abhängigkeit vom Lagerdruck dargestellt sind, geht hervor, daß die Einlaufdauer im wesentlichen von den durch Belastungsart und Laufflächenzustand bedingten Schmierverhältnissen abhängt. Nach Bild 29 nimmt die Einlaufzeit der nicht einwandfreien Lager (944; 331; 332) bereits oberhalb 100 bzw. 200 kg/cm² sehr stark zu; der Einlaufvorgang ist zwischen 200 und 230 kg/cm² beendet und eine Steigerung darüber hinaus wegen der durch die ungünstige Laufflächenbeschaffenheit beeinträchtigten Schmierbedingungen nicht möglich. Bei einwandfreier Lauffläche (Lager 821) dagegen erstreckt sich der Einlaufvorgang bis 460 kg/cm²; aber auch hier sind die Einlaufzeiten bereits oberhalb 200 kg/cm² verhältnismäßig lang. Wesentlich günstigeres Verhalten zeigen die unter dynamischer Belastung erprobten

Digitized by Google

Bild 21. Leg. 40 II (Versuchslager 342). Zahlreiche mittlere und starke Poren (an Stelle der vor dem Versuch vorhandenen Bleieinschlüsse, vgl. Bild 19); einige schwache Riefen. Zustand nach 51 stündigem Prüflauf unter dynamischer Last mit $p = 250$ (210) kg/cm². Vergr. 2 fach.

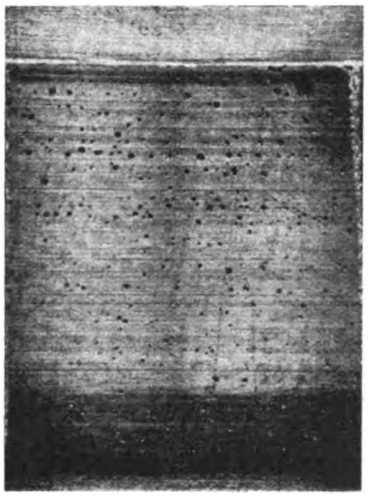


Bild 22. Leg. 30 V (Versuchslager 531). Zahlreiche (vor dem Versuch bereits vorhandene) starke Poren; schwache Riefen. Zustand nach Prüflauf unter ruhender Last bis $p = 135$ kg/cm². Vergr. 2 fach.

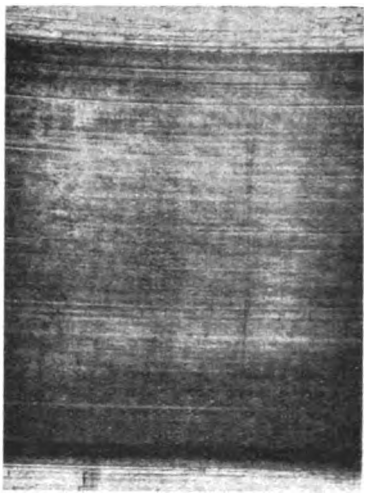


Bild 23. Leg. 40 I (Versuchslager 942). Schwache und einzelne mittlere Riefen. Zustand nach Prüflauf unter dynamischer Last bis $p = 550$ kg/cm². Vergr. 2 fach.

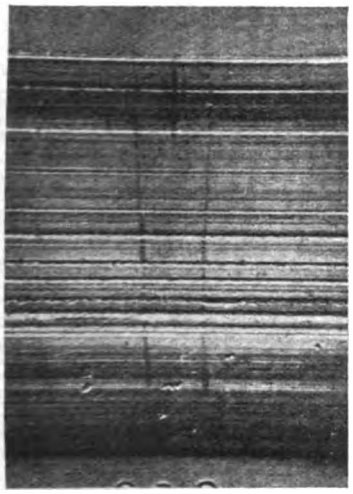


Bild 24. Leg. 20 I (Versuchslager 922). Einige mittlere und 6 sehr starke Riefen; einige schwache Narben. Zustand nach 97 stündigem Prüflauf unter ruhender Last mit $p = 250$ (190) kg/cm² (in der Mitte Meßspuren). Vergr. 2 fach.

Bild 25. Leg. 40 I (Versuchslager 946). Vollständige Zerstörung der Lagerlauffläche durch starke Narben; stellenweise Bleiüberzug (unten). Zustand nach Trockenlauf unter dynamischer Last mit $p = 250$ kg/cm². Vergr. 2 fach.

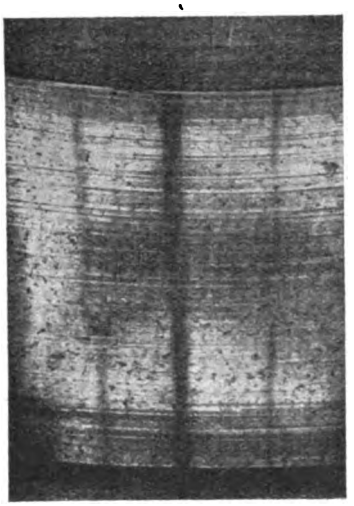


Bild 26. Leg. 20 III (Versuchslager 1231). Zahlreiche kleine Ausbruchstellen und Narben; schwache und einzelne mittlere Riefen. Zustand in der unbelasteten Zone nach Trockenlauf unter dynamischer Last mit $p = 250$ kg/cm². Vergr. 2 fach.

Bild 27 (links). Leg. 30 IV (Versuchslager 831). Vollständige Zerstörung der Lagerlauffläche durch starke Riefen und Freßspuren. Zustand nach Prüflauf unter ruhender Last bis $p = 300$ kg/cm². Vergr. 2 fach.

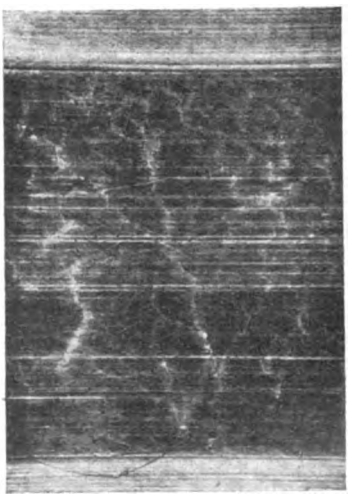


Bild 28 (rechts). Leg. 30 I (Versuchslager 937). Zahlreiche netzartig verlaufende Risse; zahlreiche kleine Poren; schwache Riefen. Zustand nach 13 stündigem Prüflauf unter dynamischer Last mit $p = 250$ (230) kg/cm². Vergr. 2 fach.

Digitized by Google

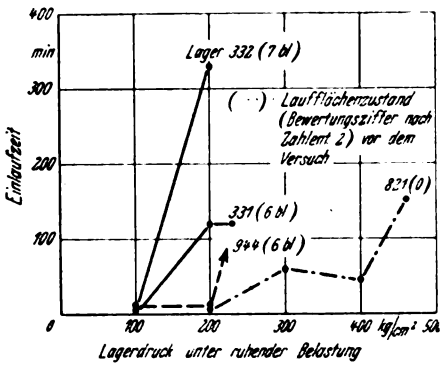


Bild 29 (links). Einlaufzeit für die einzelnen Belastungsstufen bei ruhender Last.

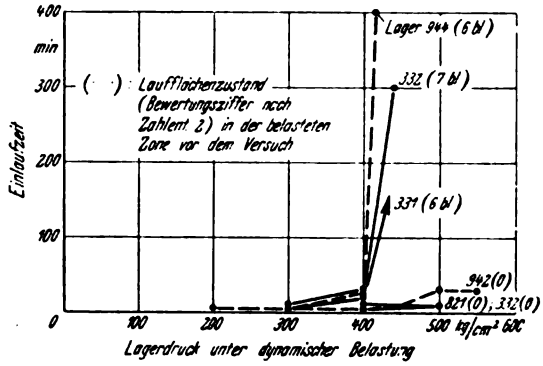


Bild 30 (rechts). Einlaufzeit für die einzelnen Belastungsstufen bei dynamischer Belastung.

Ausgüsse, Bild 30. Hier setzt eine starke Zunahme der Einlaufdauer im Falle nicht einwandfreier Lager (331; 332; 944) erst oberhalb 300 und 400 kg/cm² ein; an Lagern mit guter Lauffläche (821; 332) ist der Einlaufvorgang bei 500 kg/cm², dem höchsten zulässigen Prüfdruck, noch nicht beendet. Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß diese Ausgüsse schon vorher unter ruhender Last bis 200 bzw. 460 kg/cm² beansprucht worden waren; wie jedoch der Versuch mit Lager 942 zeigt, treten auch im nicht vorbeanspruchten Zustande ähnliche Einlaufverhältnisse auf wie bei den unter ruhender Last bereits eingelaufenen Ausgüssen. Die beschriebenen Ergebnisse deuten darauf hin, daß der Einlaufvorgang von Bleibronzelagern im praktischen Betrieb besonders sorgfältig überwacht werden muß. Unter vorwiegend ruhender Belastung bei umlaufendem Lager (z. B. Hauptpleuellager von Sternmotoren) darf die Belastungssteigerung nur in niedrigen Stufen bei jeweils genügend langer Einlaufzeit erfolgen, wenn eine vorzeitige, durch trockene Reibung bedingte Beschädigung der Lauffläche und damit eine Beeinträchtigung der Lauffähigkeit vermieden werden soll.

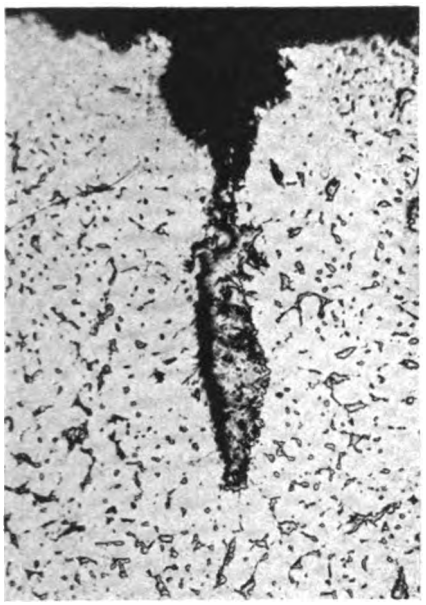
Aus den in Zahlentafel 3 zusammengestellten Werten für die Tragfähigkeitsgrenze geht hervor, daß bei dynamischer Belastung schmiertechnisch wesentlich günstigere Verhältnisse auftreten als bei ruhender Last; im ersten Falle erreicht die Tragfähigkeit durchweg das Doppelte bis Drei-

Zahlentafel 3. Ergebnisse bei Ermittlung der Tragfähigkeitsgrenze.

Lagerlaufschicht aus Leg.	Lager Nr.	Zustand des Lagers vor Versuch	Zapfen Nr.	Lagerspiel in ‰	Tragfähigkeitsgrenze bei ruh. Belastung kg/cm²	Tragfähigkeitsgrenze bei dyn. Belastung kg/cm²	Befund nach Versuch Lager	Befund nach Versuch Zapfen	Gesamtlaufzeit unter Last h	Lagerabnutzung mm · 10⁻³		Zapfenabnutzung mm · 10⁻³	Kurzzeitig zulässiger Lagerdruck[1] kg/cm²
20 I	927	0	3 N	1,17	305	—	7 *rs*, 2 *r*	1 *r*	9	10	11[5]	0	0
20 I	927	7 *rs*, 2 *r*	3 N	—	—	> 500	7 *rs*, 2 *r*	1 *r*	8	2	0	1	—
20 III	1221	0	1 E	1,03	210	—	4 *a*, 2 *r*	2 *r*	5	13	14	1	100
20 III	1221	4 *a*, 2 *r*	1 E	—	—	400	7 *rs*, 4 *a*	2 *r*	9	12	7	0	—
20 IV	821	0	1 E	0,92	460	—	2 *r*	2 *r*	13	23	25	0	400
20 IV	821	2 *r*	1 E	—	—	> 500	2 *r*	2 *r*	7	2	2	0	500
20 V	522	1 *p*	16 E	1,02	395	—	1 *r*	1 *r*	40	119	121	0	350
30 I	932	6 *bl*	15 V	0,95	70[2]	—	7 *rs*, 6 *p*	1 *r*	20	9	3	2	—
30 I	933	6 *bl*	15 V	0,97	125	—	7 *rs*, 6 *p*	2 *r*	9	12	10	5	—
30 I	934	6 *bl*	9 N	1,48	135	—	7 *rs*, 6 *p*, 2 *n*	1 *r*	17	22	18	1	—
30 I	934	7 *rs*, 6 *p*, 2 *n*	9 N	—	—	300	7 *rs*, 6 *p*, 3 *n*	1 *r*	8				—
30 I	936	6 *bl*	9 N	1,02	115	—	7 *rs*, 6 *p*	1 *r*	9	2	13	0	—
30 I	936	7 *rs*, 6 *p*	9 N	—	—	220	7 *rs*, 6 *p*	2 *r*	7	8	0	0	—
30 II	331	7 *bl*	2 E	0,97	230	—	7 *p*, 1 *r*	2 *r*	7	25	30	0	—
30 II	331	7 *p*, 1 *r*	2 E	—	—	400	7 *rs*, 7 *p*	2 *r*	6	16	16	1	—
30 II	332	7 *bl*/0[3]	14 V	0,95	200	—	7 *p*	2 *r*	14	39	41	1	—
30 II	332	7 *p*/0[4]	14 V	—	—	440/>500	7 *p*, 7 *rs*	3 *r*	9/11	21	10	1	—
30 IV	831	6 *bl*	16 E	1,02	300	—	6 *p*, 7 *r*	2 *r*	7	—	—	0	—
30 V	531	8 *p*	2 E	1,13	135	—	8 *p*, 1 *r*	2 *r*	26	111	119	0	—
30 V	533	0	2 E	1,13	470	—	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*	13	10	21	0	300
30 V	533	7 *rs*, 2 *r*	2 E	—	—	> 500	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*	6	0	0	1	—
40 I	942	0	14 V	0,95	—	> 550	2 *r*, 2 *a*	1 *r*	33	38	36	1	550
40 I	944	6 *bl*	4 N	1,07	200	—	5 *rs*, 6 *p*, 4 *a*	2 *r*	10	31	42	0	—
40 I	944	5 *rs*, 6 *p*, 4 *a*	4 N	—	—	415	5 *rs*, 6 *p*, 4 *a*	2 *r*	12	36	10	0	—
40 I	945	6 *bl*	17 E	1,05	200	—	7 *r*, 6 *fr*	5 *fr*	2	240	235	0	—
40 II	341	8 *bl*	8 E	1,07	135	—	8 *p*, 7 *rs*	1 *r*	6	61	58	0	—
40 II	341	8 *p*, 7 *rs*	8 E	—	—	400	8 *p*, 7 *rs*	2 *r*	6	32	12	1	—
40 IV	842	6 *p*	10 V	0,87	170	—	7 *r*	2 *r*	2	87	87	0	—
40 IV	847	4 *p*	3 N	1,07	—	> 500	7 *rs*, 4 *p*	2 *r*	11	20	22	0	—
40 IV	847	7 *rs*, 4 *p*	3 N	—	180	—	7 *rs*, 4 *p*	2 *r*	5	7	6	0	—
40 V	541	7 *p*	1 E	1,07	135	—	7 *p*, 4 *r*	3 *r*	10	103	103	1	—
40 V	542	4 *p*	8 E	1,12	250	—	5 *r*, 4 *p*, *a*	3 *r*	22	154	156	0	—
Elektrolyt-Kupfer	10	0	4 N	1,15	180	—	2 *r*	1 *r*	5	1	6	0	100
	10	2 *r*	4 N	—	—	480	7 *rs*, 2 *r*	1 *r*	10	0	0	0	200

[1]) Unter dem die Zapfen- und Lagerlaufflächen höchstens den der Bewertungsziffer 2 (s. Zahlentafel 2) entsprechenden Zustand erreichen.
[2]) Lager lief mit starker Kantenpressung.
[3]) Zahlreiche mittlere Bleieinschlüsse nur in einer Lagerhälfte.
[4]) Zahlreiche mittlere Poren nur in einer Lagerhälfte; bei Anordnung der Poren in der belasteten Zone wurde der niedrigere, nach Drehung des Lagers um 180° wurde der höhere Wert für die Tragfähigkeit unter dyn. Belastung ermittelt.
[5]) Gemessen in zwei senkrecht zueinander stehenden Ebenen.

Digitized by Google



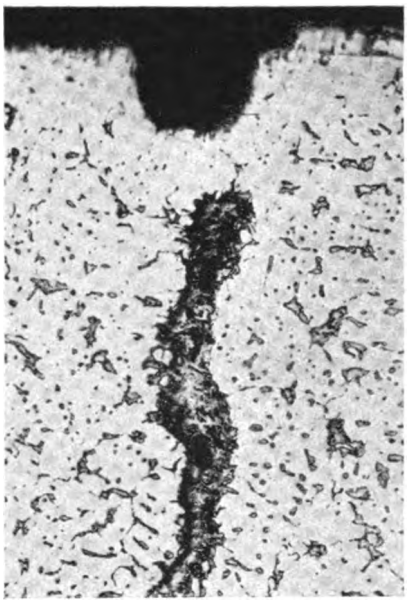


Bild 31 u. 32. Leg. 30 I (Versuchslager 933). Kraterförmige Erweiterung der Poren in der Lauffläche an der Mündungsstelle von Bleiseigerungen. (Die Schliffbilder zeigen Schnitte parallel zur Laufrichtung, so daß die Vertiefungen nicht etwa Riefen darstellen können; in Bild 32 liegt die Schnittebene dicht vor der Einmündung der Seigerung in die Lauffläche.) Vergr. 200 fach.

fache des an demselben Lager unter ruhender Last ermittelten Wertes.

Eine Abhängigkeit der Tragfähigkeitsgrenze vom mittleren Pb-Gehalt der Ausgüsse ist nicht zu erkennen und infolge der oft sehr ungleichmäßigen Bleiverteilung schließlich auch nicht zu erwarten. Zur einwandfreien Beurteilung dieser Wirkung darf daher nur der in der Lauffläche vorhandene Pb-Anteil zugrunde gelegt werden. Über diesbezügliche Beobachtungen wird weiter unten im Zusammenhang mit den Ausführungen über die Wirkung von Verunreinigungen eingehender berichtet.

Von starkem Einfluß auf das Laufergebnis sind die vor dem Versuch in der bearbeiteten Lauffläche erkennbaren Poren und Bleieinschlüsse. Diese beiden Fehler sind bezüglich der Herabsetzung der Belastbarkeit von gleicher Wirkung, da an Stelle der sichtbaren Bleieinschlüsse bereits nach kurzem Leerlauf Poren auftreten, die je nach Größe und Zahl mehr oder weniger starke Schmierfilmstörungen verursachen. Die Beseitigung der in der Laufläche sichtbaren Bleieinschlüsse erfolgt nicht durch chemische Einwirkung; denn nach dreißigstündiger Lagerung einer Bleibronzeprobe in einem Ölbad von 160° C waren noch keine sichtbaren Spuren einer Auflösung des Bleies vorhanden. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß die Bleieinschlüsse durch die im Schmieröl enthaltenen Verunreinigungen mechanisch abgetragen werden. Infolge Wirbelbildung an den allmählich entstehenden Vertiefungen wird die Wirkung später erhöht, so daß schließlich auch der Grundwerkstoff in der Randzone der Poren angegriffen wird. Bild 31 und 32 zeigen auf diese Weise entstandene kraterförmige Erweiterungen der Poren an der Einmündung von Bleiseigerungen in die Lauffläche. Wie stark sich die durch Poren hervorgerufenen Schmierfilmstörungen auf die Belastungsfähigkeit der Lager auswirken, geht insbesondere aus den Versuchsergebnissen mit Lager 332, das nur in einer Hälfte des Ausgusses große Poren aufwies, deutlich hervor (vgl. auch Bild 30). Bei Anordnung dieser Poren in der belasteten Zone wurde nach längerer Laufzeit unter dynamischer Belastung eine Tragfähigkeitsgrenze von 440 kg/cm² ermittelt; nach Drehung des Lagers um 180° konnte der höchstzulässige Prüfdruck von 500 kg/cm² bereits nach kurzer Einlaufzeit erreicht werden, so daß in diesem Falle die eigentliche Grenze der Belastbarkeit noch wesentlich höher anzunehmen ist.

Innerhalb des durch die Prüfbedingungen der vorliegenden Versuche begrenzten Gültigkeitsbereiches kann die Tragfähigkeitsgrenze der Bleibronzelager als unabhängig vom Werkstoff bzw. von der Oberflächenhärte des Laufzapfens angenommen werden. Dies beweisen zur Genüge die Ergebnisse der Untersuchungen an den Lagern 933, 934, 936 sowie 331, 332 und 944, 945. Zumal die mit ruhender Belastung erzielten Werte zeigen in den vergleichbaren Fällen gute Übereinstimmung; dagegen treten bisweilen unter dynamischer Belastung, selbst bei Verwendung desselben Zapfens, größere Unterschiede in der Tragfähigkeit gleichartiger Lager auf; vgl. Lager 934 und 936. Derartige Unregelmäßigkeiten sind zurückzuführen auf eine ungleichmäßige Verteilung der die Schmierfilmstörungen hervorrufenden Fehlstellen. Bei dynamischer Prüfung kann in solchen Fällen sowohl eine stark beschädigte als auch eine weniger fehlerhafte Lagerstelle in die engbegrenzte Höchstlastzone gelangen, so daß die oben bereits für Lager 332 geschilderten Verhältnisse eintreten. Unter ruhender Last dagegen sind derartige Unterschiede bei Prüfung gleichartiger Lager nicht zu erwarten, da sämtliche in der Laufläche vorhandenen Fehlstellen die belastete Zone durchlaufen.

Die an den Lagern 1221, 821 und 936, 831 ermittelten Tragfähigkeitswerte lassen erkennen, daß Ausgüsse mit annähernd gleichem Pb-Gehalt, aber von verschiedener Herkunft sehr starke Unterschiede im Laufverhalten bei gleichen Prüfbedingungen aufweisen können. Es lag nahe, diese Abweichungen dem verschiedenen Gehalt an verunreinigenden Beimengungen zuzuschreiben, deren Einfluß auf die mechanischen Eigenschaften von Bleibronze bereits bei Gelegenheit der Härte-Ermittlung (s. Abschnitt II) festgestellt worden war. In Bild 33 ist die Tragfähigkeitsgrenze bei ruhender Last in Abhängigkeit vom Gehalt an Verunreinigungen (Sn + Sb + Rest) im Ausgußwerkstoff aufgetragen. Die beiden eingezeichneten Schaulinien, die lediglich vergleichbare Versuchswerte miteinander verbin-

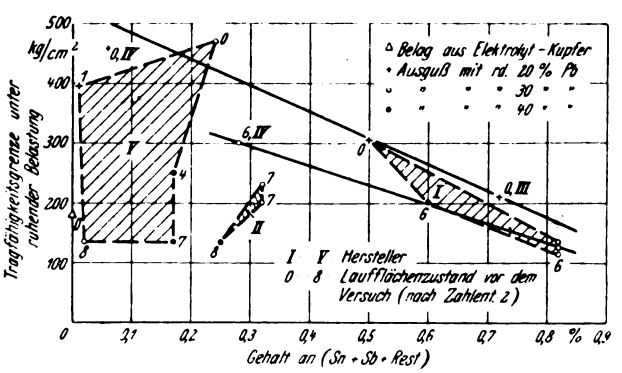


Bild 33. Tragfähigkeitsgrenze in Abhängigkeit vom Gehalt an verunreinigenden Beimengungen.

Digitized by Google

den, deuten auf eine starke Herabsetzung der Höchstbelastbarkeit mit zunehmendem Verunreinigungsgrad hin. Wie leicht festzustellen ist, kann auf Grund der Abhängigkeit der Ausgußhärte vom Verunreinigungsgrad nicht auf eine Beziehung zwischen Härte und Tragfähigkeitsgrenze geschlossen werden. Es ist anzunehmen, daß durch gewisse Verunreinigungen die Bildung von Beilby-Schichten[5]) und damit die Haftfähigkeit des Schmiermittels an der Lauffläche beeinträchtigt wird. In Bild 33 sind die an den Lagern 842 und 847 aus Leg. 40 IV ermittelten Werte für die Tragfähigkeit (170 bzw. 180 kg/cm²) nicht eingetragen; sie liegen weit unterhalb der dem Schaubild entsprechenden Tragfähigkeitsgrenze. Bemerkenswert ist, daß diese Legierung mit 0,28% Fe gegenüber den übrigen Bleibronze-Ausgüssen einen sehr hohen Eisengehalt aufweist. Da dieser Fe-Anteil der Gesamtmenge an Verunreinigungen (0,29%) nahezu entspricht, muß angenommen werden, daß Eisen eine besonders starke Herabsetzung der Tragfähigkeit bei Bleibronzen bewirkt.

Aus Bild 33 geht ferner hervor, daß die Tragfähigkeit von Lagern derselben Herkunft entsprechend der Reihenfolge der Bewertungsziffern für den Laufflächenzustand vor dem Versuch abnimmt.

Unter Berücksichtigung dieser Einflußfaktoren (Verunreinigungsgrad und Laufflächenzustand) läßt sich bei näherer Untersuchung auch eine Abhängigkeit der Tragfähigkeitsgrenze vom Bleigehalt bzw. von dem in der Lauffläche vorhandenen Bleianteil feststellen. Die obere Kennlinie in Bild 33 berücksichtigt die an Lagern mit einwandfreier Lauffläche (Bewertungsziffer 0) ermittelten Versuchswerte 0/IV, 0/V, 0/I und 0/III. Die betreffenden Ausgüsse weisen ein Gefüge mit ziemlich gleichmäßiger Bleiverteilung (vgl. Bild 3, 4, 5 und 10) auf, so daß der in Zahlentafel 1 angegebene mittlere Bleigehalt des Ausgusses annähernd auch dem in der Lauffläche vorhandenen Bleianteil entspricht. Bild 33 ist nun zu entnehmen, daß die an dem bleiärmeren Ausguß (16, 79% Pb) bestimmte Tragfähigkeitsgrenze 0/IV unterhalb und der an dem bleireicheren Lager (27,79% Pb) festgestellte Wert 0/V oberhalb der erwähnten Kennlinie liegt, während die beiden auf der Linie liegenden Versuchswerte 0/I und 0/III an Lagerausgüssen nahezu gleichen, mittleren Pb-Gehalts (21,7 und 22,6% Pb) ermittelt wurden. Demnach ist anzunehmen, daß die Höchstbelastbarkeit mit zunehmendem Pb-Gehalt in der Lauffläche ansteigt. So ergeben auch die Ausgüsse aus Leg. 20 V und 40 V, die gemäß den Schliffbildern in Bild 6 und 15 sehr bleiarme Laufschichten aufweisen, im Vergleich mit den übrigen Werten verhältnismäßig niedrige Tragfähigkeitsgrenzen. Eine weitere Bestätigung der Annahme über den Einfluß des Bleigehalts liefert schließlich noch der Versuch mit einem bleifreien Lager (Belag aus Elektrolytkupfer von ½ mm Stärke), das unter ruhender Last eine Tragfähigkeitsgrenze von nur 180 kg/cm² aufwies. Die übrigen Ergebnisse, die an Ausgüssen mit zahlreichen sichtbaren Bleieinschlüssen ermittelt wurden, kommen für die Beurteilung der Wirkung des Bleigehalts nicht in Frage, da die Bleimenge in den Gleitflächen infolge der oben beschriebenen Porenbildung während des Prüflaufs mehr oder weniger stark herabgesetzt wird. Schließlich darf auch nicht außer acht gelassen werden, daß bei den zahlreichen Einflußfaktoren eine stärkere Streuung der Versuchswerte durchaus möglich ist. Durch geringe Abweichungen in den Prüfbedingungen (Betriebstemperatur, Lagerspiel usw.), vor allem aber durch Schwankungen im Bleigehalt sowie in der Menge und Zusammensetzung der Verunreinigungen, kann die Vergleichbarkeit wesentlich beeinträchtigt werden; außerdem ist zu berücksichtigen, daß der Laufflächenzustand nicht in jedem Falle eindeutig bestimmt ist, da während des Prüflaufs noch zusätzliche Veränderungen (Riefen, Narben usw.) auftreten, deren Einfluß auf die Höchstbelastbarkeit an Hand der bisherigen Ergebnisse noch nicht genau erfaßt werden kann. Jedenfalls ist aber den vorliegenden Versuchsergebnissen zu entnehmen, daß innerhalb der bei den vorliegenden Untersuchungen auftretenden Grenzfälle die Tragfähigkeit von Bleibronzen sowohl durch Bleimangel als auch durch Laufflächenbeschädigung und verunreinigende Zusätze in nahezu gleichem Maße herabgesetzt wird.

Gelegentlich der Untersuchung des Lagers 932 konnte der starke Einfluß einer Kantenpressung auf die Belastbarkeit festgestellt werden. Bei einseitiger Druckverteilung, die sich etwa über die halbe Laufflächenbreite erstreckte (vgl. Bild 20) wurde ein mittlerer Lagerdruck von 70 kg/cm² erreicht, also nur etwa die Hälfte der an gleichartigen Lagern (933, 934 und 936) bei normaler Druckverteilung ermittelten Tragfähigkeitsgrenze.

Die Mehrzahl der in Zahlentafel 3 angeführten Ausgüsse weist nach dem Prüflauf durch zahlreiche Anrisse beschädigte Laufflächen auf. Die Rißbildung setzt in der Regel bereits während des ersten Versuches unter ruhender Last ein; in einigen Fällen dagegen beginnt die Zerstörung erst bei den unter der nachfolgenden dynamischen Prüfung erzielten höheren Drücken. Betrieblich einwandfreie Laufflächen nach dem Versuch zeigen lediglich die hochbelasteten Lager 821, 522 und 942; dagegen treten an dem Ausguß höchster Tragfähigkeit (Lager 533) bereits oberhalb einer Flächenpressung von 300 kg/cm² Risse auf. Zu beachten ist noch, daß die beiden aus Leg. 40 I hergestellten Ausgüsse 944 und 945 sehr verschiedenen Laufflächenzustand trotz gleich hoher Beanspruchung aufweisen. Die Zerstörung durch starke Riefenbildung an dem letzteren Lager ist auf die Wirkung trockener Reibung zurückzuführen, der die Lauffläche infolge nicht sofortiger Entlastung bei Anstieg der Leistung und Lagertemperatur einige Zeit ausgesetzt war. Vermutlich ist diese Wirkung durch den infolge Beseitigung der Pb-Einschlüsse entstandenen Bleimangel in der Lauffläche noch verstärkt worden. Dieser Fall kennzeichnet wieder die hohe Belastungsempfindlichkeit der Bleibronze, die eine sorgfältige Überwachung des Einlaufvorganges erfordert. An den Zapfen wurden vorwiegend geringfügige Verletzungen der Laufflächen festgestellt; lediglich der in Verbindung mit Lager 945 verwendete Zapfen zeigt einige schwache Freßspuren.

Die an den Lagern ermittelten Verschleißwerte schwanken zwischen mehreren tausendstel und einigen zehntel Millimetern. Die größte Abnutzung weist der stark zerstörte Ausguß 945 mit einer Durchmessererweiterung von 0,24 mm auf. Im übrigen ist anzunehmen, daß die Unterschiede in der Abnutzung hauptsächlich bedingt sind durch verschieden lange Belastungsdauer dicht oberhalb der Tragfähigkeitsgrenze.

Der kurzzeitig zulässige Lagerdruck, unter dessen Wirkung höchstens der Bewertungsziffer 2 entsprechende Laufflächenverletzungen auftreten, konnte nur in einigen Fällen ermittelt werden. Die meisten der untersuchten Ausgüsse enthielten bereits vor dem Versuch mehr oder weniger grobe Laufflächenfehler (Bewertungsziffer 4 bis 8), so daß eine Verwendung an hochbeanspruchten Lagerstellen von vornherein ausgeschlossen gewesen wäre. Lediglich die als einwandfrei befundenen Ausgüsse aus Leg. 20 IV (Lager 821), Leg. 20 V (Lager 522) sowie aus Leg. 30 V (Lager 533) weisen nach einer Prüfung mit ruhender Last oberhalb der für Dauerversuche vorgesehenen Flächenpressung (250 kg/cm²) noch gut betriebsfähige Laufflächen auf. Die einwandfreien Lager 927 und 1221 aus Leg. 20 I und 20 III werden infolge vorzeitiger Beschädigung durch Risse und Ausbruchsstellen bereits unter geringer ruhender Beanspruchung unbrauchbar bzw. bedingt betriebsfähig. Die Leg. 40 I ist in einwandfreiem Gußzustand (Ausguß 942 weist als einziger von 10 Ausgüssen derselben Legierung eine einwandfreie Lauffläche auf) bei dynamischer Beanspruchung der hochbelastbaren Legierung 20 IV durchaus gleichwertig; die mit zahlreichen Pb-Einschlüssen versehenen Ausgüsse dieser Legierung (Lager 944 und 945) zeigen jedoch ähnliches Laufverhalten wie die entsprechenden Lager anderer Zusammensetzung und Herkunft.

[5]) D. R. Pye, Surface Films and Lubrication. Journ. Roy. Aeron. Soc. Bd. 40 (1936), S. 754 bis 768.

Digitized by Google

b) Untersuchung des Laufverhaltens bei Dauerbeanspruchung.

Für die Dauerversuche war eine Laufzeit von 100 h und ein Lagerdruck von 250 kg/cm² vorgesehen. Dieser Prüfdruck entspricht den für Flugmotorenhauptlager in mehreren Fällen bereits zugelassenen Beanspruchungen, die bei den vorliegenden Versuchen keinesfalls unterschritten werden sollten. Somit waren auf Grund der Ergebnisse der Tragfähigkeitsermittlung lediglich Ausgüsse aus den Legierungen 20 I, 20 IV, 20 V, 30 IV, 30 V und 40 V für Dauerprüfungen unter ruhender Last geeignet. Lager aus Leg. 20 V und 40 V standen jedoch für Dauerversuche nicht mehr zur Verfügung.

Von den unter ruhender Belastung erprobten Lagern zeigten nur die Ausgüsse 823 und 535 aus Leg. 20 IV und 30 V einwandfreies Laufverhalten während der ganzen Versuchsdauer. Die beiden Lager aus Leg. 20 I und 30 IV versagten nach 80- bzw. 24stündigem Prüflauf unter Bildung stark riefiger bzw. rauher Laufflächen; dieses Verhalten entspricht durchaus den Erwartungen, wenn man den geringen Unterschied des angewandten Prüfdruckes (250 kg/cm²) gegenüber der Tragfähigkeitsgrenze dieser Legierungen (rd. 300 kg/cm²) in Betracht zieht.

Das unter ruhender Last festgestellte einwandfreie Laufverhalten der Ausgüsse aus Leg. 20 IV und 30 V wird durch entsprechende günstige Ergebnisse der dynamischen Prüfung in etwa bestätigt. Auch Leg. 40 I (Lager 946) erträgt die dynamische Dauerbeanspruchung ohne nennenswerte Laufflächenbeschädigung, wenn von den ursprünglich vorhandenen Bleieinschlüssen bzw. Poren, die eigentlich eine Verwendung des Lagers von vornherein ausschließen, abgesehen wird. Die übrigen Legierungen zeigen sich infolge vorzeitig einsetzender Riß- und Riefenbildung bzw. Aufrauhung der Lauffläche den gestellten Anforderungen nicht gewachsen.

Neigung zur Riefenbildung und Aufrauhung ist hauptsächlich bei den Legierungen 20 I und 30 IV (Lager 922, 832 und 833), in geringem Maße auch bei Leg. 20 IV (Lager 823) festzustellen. Aufrauhungen sind als dicht nebeneinanderliegende oder ineinander übergehende Riefen aufzufassen; sie wurden vorwiegend bei Verwendung solcher Zapfen beobachtet, deren Durchmesser im mittleren Laufflächenteil etwas schwächer war. Vermutlich werden sich hier während des Prüflaufs größere Mengen von Ölverunreinigungen ansammeln, so daß die Lagerlauffläche in diesem Bereich stärker angegriffen wird. Bemerkenswert ist, daß nur die obenerwähnten drei Legierungen gemäß Bild 3, 5 und 9 ein ausgeprägt dendritisches Gefüge aufweisen, das auf Grund betrieblicher Erfahrungen allgemein als ungünstig erachtet wird. Die Annahme, daß bei dendritischer Gefügeausbildung ein Ausbröckeln von Cu-Teilchen leichter erfolgen kann als bei globularer Pb-Verteilung, scheint durch die vorliegenden Ergebnisse hinreichend bestätigt zu sein.

Die Ursache für die vorzeitige Rißbildung an Bleibronzelagern läßt sich auf Grund der vorliegenden Prüfergebnisse noch nicht eindeutig feststellen. Bemerkenswert ist, daß einerseits Ausgüsse mit zahlreichen sichtbaren Bleieinschlüssen bzw. Poren nicht immer Risse nach dem Prüflauf aufweisen (vgl. Lager 946 und 342), während andererseits sogar ursprünglich einwandfreie Laufflächen zerstört werden können (vgl. Lager 924 und 1232). Demnach dürfte die Rißbildung nicht allein durch die Kerbwirkung der Einschlüsse bzw. der aus diesen entstandenen Poren bedingt sein. Es liegt auch kein zwingender Grund zu der Annahme vor, daß diese Werkstoffzerstörung hauptsächlich durch Bindungsfehler eingeleitet wird. Es wurde nun beobachtet, daß an einigen zur Rißbildung neigenden Ausgüssen nach längerer Lagerung (2 Monate) im fertig bearbeiteten Zustande zahlreiche sehr feine Risse auftraten, die sowohl vor als auch kurz nach der Bearbeitung selbst bei mikroskopischer Betrachtung nicht bemerkt worden waren; vgl. Bild 34 und 35. Auch nach einer Erwärmung dieser Ausgüsse auf 160° C im Anschluß an die Feinbearbeitung waren die Risse gemäß Bild 36 und 37 deutlich zu erkennen. Aus den Schliffbildern Bild 38 und 39 geht hervor, daß sich in den Rißspalten der gelagerten Ausgüsse Blei abgesetzt hat; die Zerstörung erfolgte also in diesem Falle bereits während der Erstarrung nach dem Vergießen der Bleibronze. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß u. U. schon vor dem Prüflauf im Ausguß feine Anrisse vorhanden sind, die erst dann in der glatten Lauffläche sichtbar werden, nachdem sie sich unter längerer Einwirkung von Zugeigenspannungen weiter ausgedehnt haben. Im Betrieb dagegen erweitern sich die Anrisse mit zunehmender Lagertemperatur, und zwar infolge der stärkeren Wärmeausdehnung der Bleieinschlüsse gegenüber der Kupfergrundmasse; die hierbei erzeugten Druckspannungen sind so groß, daß das Blei aus den größeren Poren und Spalten herausquillt; vgl. Bild 37. Die in der Ausgußschicht vorhandenen Zugeigenspannungen sind auf stärkeren Schwund der Bleibronze gegenüber der Stahlstützschale sowie auf eine überaus schroffe, zur Vermeidung von Pb-Seigerungen vorgesehene Abschreckung nach dem Vergießen zurückzuführen. Die größten Eigenspannungen, d. h. die stärksten Verformungen nach Auflösung der Eigenspannungen durch Auf-

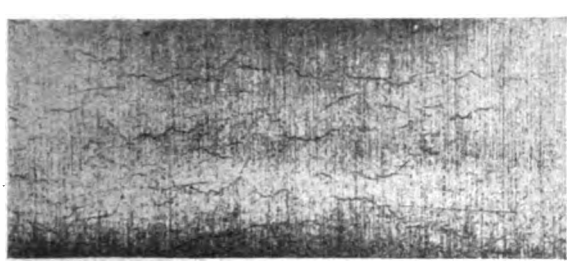


Bild 34. Rißbildung in der bearbeiteten Lauffläche eines Lagers aus Leg. 20 I nach 2monatiger Lagerung. Vergr. 2fach.

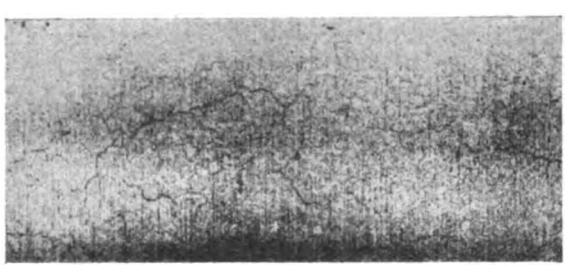


Bild 35. Rißbildung in der bearbeiteten Lauffläche eines Lagers aus Leg. 30 I nach 2monatiger Lagerung. Vergr. 2½fach.

Bild 36. Rißbildung in der bearbeiteten Lauffläche eines Lagers aus Leg. 20 I nach Erwärmung auf 160° C. Vergr. 7,5fach.

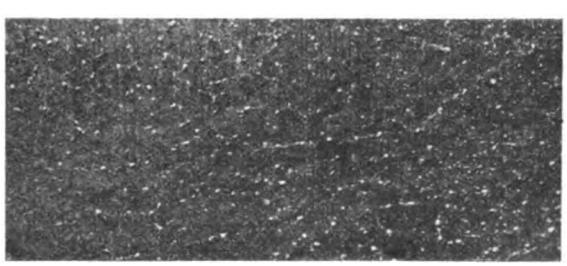


Bild 37. Rißbildung in der bearbeiteten Lauffläche eines Lagers aus Leg. 30 I nach Erwärmung auf 160° C. Vergr. 7.5fach.

Digitized by Google

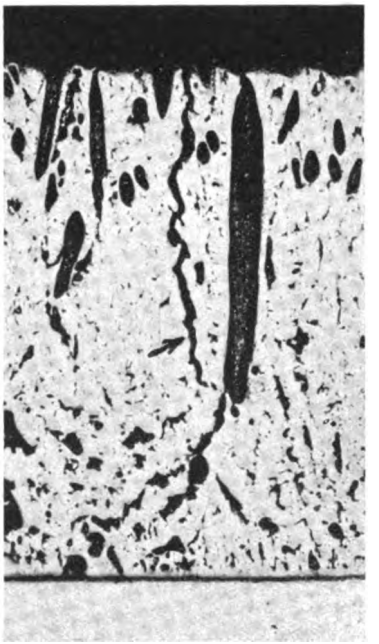


Bild 38 u. 39. Rißverlauf im Innern der in Bild 34 und 35 dargestellten Ausgüsse aus Leg. 20 I und 30 I. Vergr. 50 fach.

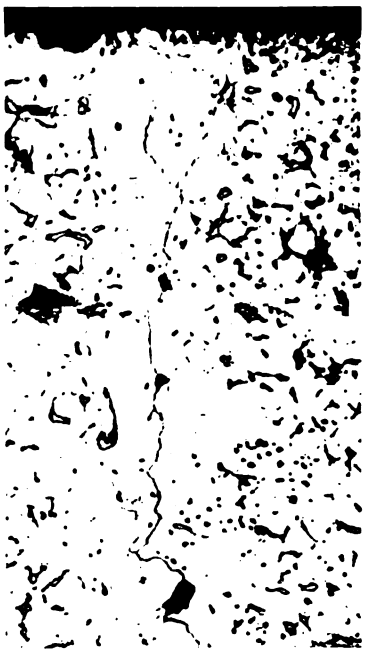


Bild 40. Rißverlauf im Innern eines geprüften Ausgusses aus Leg. 30 I (Lager 933). Vergr. 200 fach.

trennen der Büchsen in Längsrichtung, wurden an den zur Rißbildung neigenden Lagern festgestellt; die Durchmesserabnahme betrug hier 0,8 bis 1,0 mm, in den übrigen Fällen dagegen nur 0,2 bis 0,4 mm. Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß für die Entstehung der Risse als Folge hoher Zugeigenspannungen die Formänderungsfähigkeit der Bleibronze mitbestimmend ist. Diese wird wesentlich beeinflußt durch die Gießbedingungen, die Zusammensetzung und den Gefügeaufbau des Ausgusses. Aus den von Hensel und Tichvinsky[2]) an Bleibronzen gleicher Zusammensetzung (75,5 Cu, 17,5 Pb, 3,5 Sn und 3,5 Pb) durchgeführten Versuchen geht hervor, daß infolge Erhöhung der Gießtemperatur von 1050 auf 1150° C bei Kokillenguß eine Zunahme der Bruchdehnung von 5 auf 14,3%, und bei Sandguß von 11,7 auf 17% erzielt wird. Die von denselben Verfassern an Bleibronzen mit 11,06 bis 28,06% Pb festgestellten Dehnungswerte liegen zwischen 1,8 und 8%. Eine Abhängigkeit dieser Werte vom Bleigehalt ist offenbar infolge des stärkeren Einflusses des Gefügezustandes nicht zu erkennen; trotz gleicher Gießtemperatur und Zusammensetzung sind z. B. in einem Falle Grenzwerte von 2,5 und 7,3% für die Bruchdehnung ermittelt worden. Den bisherigen Erläuterungen ist zu entnehmen, daß die Rißbildung hauptsächlich durch hohe Zugeigenspannungen bei ungenügender Formänderungsfähigkeit des Ausgußwerkstoffes veranlaßt wird. Die Risse sind z. T. bereits im Anlieferungszustand vorhanden, z. T. werden sie wohl auch bei geringer zusätzlicher Beanspruchung während des Betriebes entstehen; vgl. Bild 40. Wenn auch während der 100-h-Dauerversuche keine merkbare Beeinträchtigung des Laufverhaltens durch Rißbildung festgestellt werden konnte, so stellt diese infolge der größeren Gefahr des Ausbröckelns immerhin eine Störungsquelle dar, die in Flugzeugtriebwerken unbedingt vermieden werden muß. Im Zusammenhang hiermit sei darauf aufmerksam gemacht, daß die in Bild 34 dargestellten Risse röntgenographisch nicht nachgewiesen werden konnten; es ist demnach durchaus möglich, daß derartige Fehlstellen bei der Abnahme von Bleibronze-Ausgüssen nicht erfaßt werden.

Besondere Beachtung verdient noch die durch Abblättern des Ausgusses aus Leg. 40 IV bewirkte Zerstörung des Lagers 846; vgl. Bild 41. Man ist zunächst geneigt, diesen Vorgang auf schlechte Bindung des Ausgusses in der Stahlstützschale zurückzuführen. Durch Abheben der gelockerten Schicht konnte jedoch festgestellt werden, daß eine Trennung nur innerhalb der belasteten Zone erfolgt war, und zwar nicht unmittelbar in der Übergangsstelle, sondern etwa 0,1 mm von dieser entfernt im Ausgußwerkstoff. Vermutlich wird das dünnmaschige Netz (vgl. Bild 14) der durch zu hohen Eisengehalt versprödeten Grundmasse lediglich durch die 68stündige Druckschwellbeanspruchung zermürbt worden sein. Bezüglich der Lage der Bruchfläche ist zu beachten, daß die Dauerfestigkeit an der Übergangszone durch Verformungsbehinderung (nur bei guter Bindung), in der Nähe der Lauffläche jedoch durch Verfestigung infolge der vom Lagerdruck erzeugten Druckverformung erhöht wird. Der Bruch verläuft demnach durch eine Schicht, in der die Summe beider Wirkungen ein Minimum aufweist.

Der Lagerverschleiß ist, wie aus den entsprechenden Versuchswerten in Zahlentafel 4 hervorgeht, bei dynamischer Prüfung geringer als bei Beanspruchung mit ruhender Last. Im übrigen ist wegen der unterschiedlichen Laufzeiten und Belastungen ein Vergleich der an den verschiedenen Lagersorten festgestellten Abnutzungswerte nicht statthaft. Hervorzuheben ist noch, daß die Ausgüsse 535 und 536

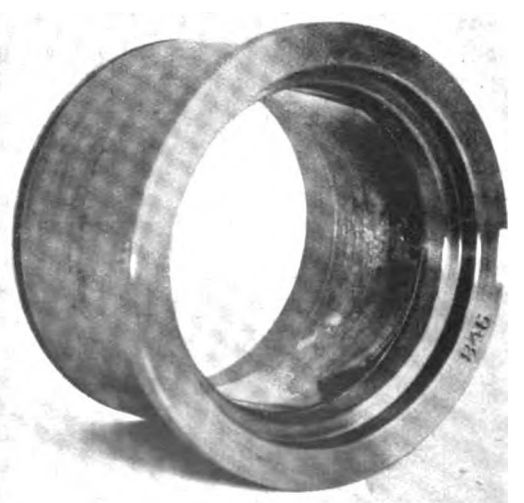


Bild 41. Ausgebrochene Ausgußschicht an Lager 846 aus Leg. 40 IV (42% Pb; 0,38% Fe); Zustand nach 68stündigem dynamischen Prüflauf mit 250 kg/cm².

Digitized by Google

Zahlentafel 4. Ergebnisse der Dauerversuche.

Lagerausguß aus Leg.	Lager Nr.	Zustand des Lagers vor Versuch	Zapfen Nr.	Lagerspiel in ‰	Lagerdruck (Dauerbelastung) bei ruh. Belastung kg/cm²	Lagerdruck (Dauerbelastung) bei dyn. Belastung kg/cm²	Befund nach Versuch Lager	Befund nach Versuch Zapfen	Laufzeit bei Dauerbelastung h	Lagerabnutzung mm · 10⁻³	Zapfenabnutzung mm · 10⁻³	Laufzeit bei einwandfreiem Laufverhalten[1] h
20 I	922	0	14 V	0,98	250/190[2]	—	6 *r*, 2 *n*	5 *r*	80/17	99 130	2	56
20 I	924	0	4 N	1,07	—	250	5 *rs*, 2 *r*	2 *r*	100	28 15	0	0
20 III	1222	0	15 V	1,10	—	250	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*	100	44 24	0	22
20 IV	822	0	14 V	1,02	—	250	2 *r*	2 *r*	96	12 10	0	>96
20 IV	823	0	8 E	1,02	250	—	2 *r*[4]	2 *r*	98	37 38	0	>98
30 I	937	6 *bl*	10 V	1,18	—	250/230[2]	7 *rs*, 6 *p*	1 *r*	11/2	8 3	0	0
30 II	333	7 *bl*	2 E	0,93	—	250/210[2]	7 *p*, 7 *rs*	2 *r*	15/43	83 15	0	0
30 IV	832	6 *bl*	8 E	1,03	—	250	6 *p*, 5 *r*[4]	0	95	61 35	0	0 (62)[3]
30 IV	833	6 *bl*	2 E	1,10	250/220[2]	—	6 *p*, 1 *r*[4]	1 *r*	24/72	98 98	0	0 (24)[3]
30 V	535	2 *p*	14 V	1,05	250	—	2 *p*, 2 *r*	2 *r*	102	38 40	0	>102
30 V	536	0	14 V	1,00	—	250	2 *n*, 2 *r*	2 *r*	106	23 12	0	>106
40 I	946	6 *bl*	10 V	1,17	—	250	6 *p*, 2 *r*	2 *r*	98	12 6	0	0 (>98)[3]
40 II	342	8 *bl*	11 V	0,93	—	250/210[2]	8 *p*, 1 *r*	2 *r*	28/23	62 46	0	0 (28)[3]
40 IV	846	6 *p*	9 N	1,13	—	250	8 *a*, 7 *rs*, 1 *r*	2 *r*	68	69 48	0	0

[1]) Die Zapfen- und Lagerlaufflächen weisen nach den angegebenen Laufzeiten höchstens der Bewertungsziffer 2 entsprechende Verletzungen auf.
[2]) Der Prüfdruck von 250 kg/cm² konnte nach der angegebenen Laufzeit (vgl. »Laufzeit bei Dauerbelastung«) nicht mehr erreicht werden.
[3]) Die Zahl in Klammern bedeutet die Laufzeit bei einwandfreiem Laufverhalten ohne Berücksichtigung der vor dem Versuch bereits vorhandenen Fehlstellen.
[4]) Die Lagerlauffläche ist außerdem stellenweise aufgerauht.

aus Leg. 30 V trotz niedrigster Warmhärte (14,3 kg/mm² bei 150° C) einen verhältnismäßig geringen Verschleiß aufweisen.

Die Versuchszapfen, und zwar sowohl die vergüteten als auch die gehärteten, sind nach dem Prüflauf fast durchweg noch in betriebsfähigem Zustande; ein Verschleiß läßt sich in diesen Fällen nicht nachweisen. Lediglich an dem durch einige starke Riefen verletzten vergüteten Zapfen 10 V (in Verbindung mit Lager 922) wurde eine unbedeutende Abnutzung von 0,002 mm festgestellt.

c) Verhalten bei Einstellung der Ölzufuhr zum Lager.

Die Untersuchung des Notlaufverhaltens erfolgte an bereits geprüften, noch lauffähigen Lagern unter den für die Dauerversuche vorgesehenen Belastungsverhältnissen. Die Ölzufuhr wurde hierbei durch Schließen eines Absperrventils eingestellt, sobald die normalen Betriebsverhältnisse erreicht waren. In den meisten Fällen wurden acht Trockenlaufversuche hintereinander durchgeführt, und zwar jeweils unter Feststellung der Betriebstemperaturerhöhung und der Auslaufzeit bis zur Auslösung der Prüfmaschine.

In der früheren Veröffentlichung[4]) wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Antriebsmotoren der Lagerprüfmaschinen durchschnittlich nur eine 50proz. Leistungssteigerung zulassen. Bei Leichtmetallagern konnte daher der Trockenlaufversuch nicht in allen Fällen bis zur restlosen Zerstörung des Lagers bzw. nicht in der Weise durchgeführt werden, daß eine eindeutige Beurteilung des Notlaufverhaltens der Leichtmetall-Lagerwerkstoffe möglich gewesen wäre. Die dort ermittelten Laufzeiten waren vorwiegend sehr kurz und betrugen bei vollkommener Ölentziehung nur wenige Sekunden. Gemäß Zahlentafel 5 wurden auch bei Untersuchung der Bleibronze-Ausgüsse häufig, zumal zu Beginn der Versuche, Auslaufzeiten von einigen Sekunden festgestellt. Dieses Verhalten ist darauf zurückzuführen, daß beim ersten Trockenlauf die für das Ausschmelzen hinreichender Bleimengen erforderliche Lagertemperatur bis zur Auslösung

Zahlentafel 5. Ergebnisse der Trockenlaufversuche.

Laufschicht aus Leg.	Lager Nr.	Zapfen Nr.	Zustand vor Versuch Lager	Zustand vor Versuch Zapfen	Lagerdruck kg/cm²	Belastungsart	Laufzeit (nach Unterbrechung d. Ölzufuhr)	Anstieg der Betriebstemp. um °C	Zahl der Versuche	Befund nach Versuch Lager	Befund nach Versuch Zapfen
20 I	924	4 N	5 *rs*, 2 *r*	2 *r*	250	dynamisch	37″ bis 11′13″	35° bis 80°	8[1])	7 *rs*, 5 *r*, 4 *n*	2 *r*
20 I	927	3 N	7 *rs*, 2 *r*	1 *r*	250	ruhend	3″ » 1′8″	5° » 40°	8[1])	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*
20 III	1221	1 E	7 *rs*, 4 *a*	2 *r*	250	dynamisch	4″ » 10′34″	5° » 50°	8[1])	7 *rs*, 5 *r*, 4 *a*	2 *r*
20 III	1222	15 V	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*	250	dynamisch	4′55″ » >10′	67° » >72°	8[1])	7 *rs*, 4 *n*, 2 *r*	2 *r*
20 IV	821	1 E	2 *r*	2 *r*	250	dynamisch	4″ » 6′55″	5° » 27°	8[1])	5 *r*, 5 *fr*	5 *r*
20 IV	823	8 E	2 *r*	2 *r*	250	ruhend	52″ » 2′48″	39° » 64°	5[2])	7 *rs*, 1 *r*	2 *r*
30 II	332	14 V	7 *p*, 7 *rs*	3 *r*	250	dynamisch	7″ » 7′10″	6° » 58°	8[1])	7 *p*, 7 *rs*	3 *r*
30 V	533	2 E	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*	250	ruhend	3″ » 4′5″	6° » 38°	8[1])	7 *rs*, 2 *r*	2 *r*
30 V	535	14 V	2 *p*, 2 *r*	2 *r*	250	ruhend	8″ » 21″	7° » 21°	8[1])	5 *r*, 2 *p*	5 *r*
30 V	536	14 V	2 *n*, 2 *r*	2 *r*	250	dynamisch	6″ » 13′42″	7° » >77°	8[1])	2 *n*, 2 *r*	2 *r*
40 I	944	4 N	5 *rs*, 6 *p*, 4 *a*	2 *r*	250	dynamisch	1′52″ » 12′31″	18° » 73°	8[1])	7 *rs*, 6 *p*, 4 *a*	5 *r*
40 I	946	10 V	6 *p*, 2 *r*	2 *r*	250	dynamisch	7′50″	>80°	1[3])	8 *n*	2 *r*
40 II	341	8 E	8 *p*, 7 *rs*	2 *r*	250	dynamisch	8″ » 6′24″	Meßvorrichtung zerstört	8[1])	8 *p*, 7 *rs*	4 *r*
40 IV	847	3 N	7 *rs*, 4 *p*	2 *r*	250	dynamisch	7′29″ » >12′	54° bis >70°	3[2])	7 *rs*, 4 *p*	2 *r*
Elektrolyt-Kupfer	10	4 N	7 *rs*, 2 *r*	1 *r*	250	dynamisch	34″ » 5′23″	26° » 42°	8[1])	7 *rs*, 2 *r*[4])	2 *r*

[1]) Untersuchung anschließend abgebrochen.
[2]) Versuche wegen Laufstörungen in der Prüfmaschine abgebrochen.
[3]) Weitere Versuche nicht möglich, da Lager sich festgefressen hat.
[4]) Außerdem kein meßbarer Verschleiß.

Digitized by Google

der Prüfmaschine noch nicht erreicht ist. Während der folgenden Versuche sammelt sich immer mehr Blei in der Lauffläche an, so daß schließlich eine ausreichende Notlaufschmierung bei verhältnismäßig niedriger Antriebsleistung erzielt wird. Da hierbei ständig Blei seitlich aus der Lauffläche entweicht, steigt die Lagertemperatur nach einiger Zeit so lange an, bis wieder eine genügende Bleimenge in der Lauffläche vorhanden ist. Während eines Trockenlaufversuches wird demgemäß ein stufenweiser Anstieg der Betriebstemperatur und bei jeder Temperaturstufe eine vorübergehende, mehr oder weniger starke Leistungssteigerung beobachtet, die schließlich auch einmal zur Auslösung der Prüfmaschine führt. Unter günstigen Umständen werden nach vollkommener Ölentziehung Trockenlaufzeiten von über 10 min erzielt. In den meisten Fällen wird die Lauffähigkeit dieser Lager trotz der bisweilen durch die Trockenläufe verursachten stärkeren Oberflächenverletzungen nicht wesentlich beeinträchtigt; denn unter den normalen Prüfbedingungen werden nach kurzer Zeit die ursprünglichen Betriebsverhältnisse annähernd wieder erreicht.

Im Gegensatz zu dem Verhalten der Bleibronze-Ausgüsse bei Trockenlauf kann bei den übrigen Lageruntersuchungen unter normalen Schmierverhältnissen eine Beschädigung der Lauffläche (durch Riefenbildung und Freßstellen) eintreten, ohne daß etwa infolge rechtzeitigen Einsetzens der Notschmierung eine Betriebsstörung vermieden wird; vgl. z. B. Lager 831 und 922, Zahlentafel 3 bzw. 4. In diesen Fällen reicht die durch die Kühlwirkung des Schmieröls bedingte Verzögerung des Temperaturanstiegs im Lager bereits aus, um den Ausguß bis zum Stillstand der Prüfmaschine durch trockene Reibung u. U. vollständig zu zerstören. Der Darstellung in Bild 42 ist zu entnehmen, daß auch bei Schmierung des Lagers eine allerdings nur örtliche Bleiausscheidung infolge plötzlich auftretender Laufflächenbeschädigung erfolgen kann. Trotzdem führte diese Laufstörung wegen vorzeitiger Erstarrung der ausgeschiedenen Bleimenge zum Klemmen des Lagers und damit zur Auslösung der Prüfmaschine.

Unter ruhender Last ergaben sich durchweg kürzere Auslaufzeiten als bei dynamischer Prüfung, und zwar auf Grund der ungünstigeren Schmierbedingungen, durch die ja auch eine niedrigere Tragfähigkeitsgrenze bei normalem Prüflauf mit ruhender Last erzielt wird. Die Erhöhung der Betriebstemperatur nimmt mit der Dauer des Trockenlaufs zu, und zwar um 5 bis 80° C bei Auslaufzeiten von 3″ bis 13′. Die Lagerlaufflächen weisen nach den Trockenlaufversuchen gegenüber dem Zustand vor diesen Versuchen stärkere Verletzungen durch Risse, Riefen, Narben und Freßstellen auf; nur bei einigen Lagern bleibt der Ausgangszustand nahezu erhalten, wenn man von den stellenweise an den Laufflächen haftenden Bleischichten absieht. Die Zapfen zeigen nur in wenigen Fällen eine stärkere Riefenbildung nach den Trockenläufen.

Es ist noch hervorzuheben, daß auch die mit Elektrolyt-Kupfer belegte Stahlstützschale unter dynamischer Belastung acht Trockenläufe ohne wesentliche Änderung des Zustandes der Zapfen- und Lagerlaufflächen erträgt. Die erzielten Auslaufzeiten sind allerdings kürzer als die unter denselben Prüfbedingungen an Bleibronze-Ausgüssen festgestellten. Das Laufverhalten von Elektrolyt-Kupfer, sowohl bei normaler Schmierung (vgl. die Ergebnisse der Tragfähigkeitsbestimmung, Zahlentafel 3) als auch bei Ölmangel, kann also entgegen der gelegentlich vertretenen Ansicht im Vergleich mit den vorliegenden Prüfergebnissen an Bleibronzen durchaus nicht als sehr ungünstig angesprochen werden.

Bild 42. Örtliche Bleiansammlung in der Lauffläche an einer während des Dauerversuches durch einen Fremdkörper erzeugten sehr starken Riefe (der herausgelöste Fremdkörper liegt neben der Ausbruchstelle).

V. Folgerungen aus den Versuchsergebnissen.

Den in Abschnitt IV geschilderten Versuchsergebnissen ist zu entnehmen, daß die Mehrzahl der vom Hersteller als einwandfrei befundenen Bleibronze-Ausgüsse keine für hochbeanspruchte Lager ausreichenden Laufeigenschaften aufweist.

Es wurde festgestellt, daß die Tragfähigkeit der Ausgüsse erheblich beeinträchtigt wird durch:

a) zahlreiche, in der Lauffläche des fertig bearbeiteten Lagers mit bloßem Auge erkennbare Bleieinschlüsse bzw. Poren,
b) ungenügenden Bleigehalt in der Lauffläche,
c) verunreinigende Legierungsbestandteile.

Das Versagen der Lager bei Dauerbeanspruchung infolge Riß- und Riefenbildung (Aufrauhung der Lauffläche) ist zurückzuführen auf

d) grobe dendritische Gefügeausbildung des Ausgußwerkstoffes,
e) geringes Verformungsvermögen,
f) Zugeigenspannungen (Schrumpf- und Abschreckspannungen) in der Bleibronze-Schicht.

Die Schwierigkeiten bei der Herstellung von Bleibronze-Ausgüssen in Stahlstützschalen leiten sich ab aus den einander widersprechenden fertigungstechnischen Forderungen:

1. hohe Gießtemperatur und langsame Erstarrung zur Erzielung einer guten Bindung zwischen Ausguß und Stützschale (ausreichende Diffusionsdauer bei hohen Temperaturen);
2. niedrige Gießtemperatur und schnelle Erstarrung zur Erzielung einer günstigen Bleiverteilung (Vermeidung von Schwereseigerung und Koagulation der Bleiteilchen).

Bei den bisher entwickelten Verfahren erfolgt die Herstellung von Bleibronze-Ausgüssen im wesentlichen nach folgenden Grundsätzen: möglichst langandauernde Berührung der Stahlschale mit der heißen Schmelze und nachfolgende schnelle Erstarrung durch Abschrecken. Die nach diesen Verfahren erstellten Ausgüsse zeigen fast durchweg gute Bindung; dagegen werden die übrigen an hochbeanspruchte Bleibronzelager gestellten Anforderungen nicht hinreichend erfüllt.

Erhebliche Schwierigkeiten bereitet die Erzeugung einer durchaus gleichmäßigen und feinglobularen Bleiverteilung, zumal bei höheren Bleigehalten, die gerade zur Erzielung günstiger Laufverhältnisse besonders erwünscht sind. Die Bedeutung des Gefügeaufbaues für das Laufverhalten der Bleibronzen ist schon dadurch gekennzeichnet, daß die Mehrzahl der obenerwähnten Fehler (vgl. Ziffer a, b, d und e) durch ungünstige Bleiverteilung bedingt ist. Trotz zahlreicher Untersuchungen über den Einfluß von Legierungszusätzen auf den Gefügeaufbau der Blei-Kupfer-Legierungen ist eine wesentliche Verbesserung durch legierungstechnische Maßnahmen bisher nicht erzielt worden. Besondere Beachtung verdient daher der Vorschlag[1]), den Ausgußwerkstoff im Hochfrequenzofen (kernlosen Induktionsofen) zu erschmelzen. Die hierbei eintretende wesentliche Verfeinerung des Gefüges ist auf den durch die starke Durchwirbelung des Schmelzgutes bewirkten Konzentrationsausgleich zurückzuführen, durch den wahrscheinlich eine Verzögerung des Entmischungsvorgangs während der Erstar-

Digitized by Google

rung erreicht wird. Zur Vermeidung einer stärkeren Sauerstoffaufnahme sind bei der Hochfrequenzschmelzung sorgfältige und wirksame Abdeckung der Schmelze sowie unmittelbares Vergießen aus dem Schmelztiegel erwünscht.

Die Wirkung der im Ausguß infolge Schrumpfung und Abschreckung entstandenen Zugeigenspannungen auf das Laufverhalten ist bisher wenig beachtet worden. Vor allem ist zu berücksichtigen, daß durch diese Spannungen die Zeit- und Dauerfestigkeit des Ausgußwerkstoffes herabgesetzt wird. Häufig erfolgt trotz guter Bindung und Bleiverteilung vorzeitige Zerstörung durch Rißbildung, die das Ausbrechen von Cu-Teilchen aus der Lauffläche begünstigt. Es ist wahrscheinlich, daß das plötzliche Versagen sonst einwandfreier Bleibronze-Ausgüsse durch derartige Vorgänge bedingt ist. Neben guter Bindung und gleichmäßiger Bleiverteilung ist daher die Vermeidung hoher Zugeigenspannungen eine unerläßliche Forderung, die an hochbeanspruchte Bleibronze-Ausgüsse gestellt werden muß.

Ferner besteht bei den bisherigen Fertigungsverfahren von Bleibronze-Ausgüssen die Gefahr einer Verunreinigung der Schmelze, und zwar entweder durch die Aufnahme von Eisen aus der Stahlstützschale oder infolge der durch wirtschaftliche Forderungen gebotenen Wiederverwendung der reichlich vorhandenen Gußabfälle (Steiger, Trichter, Späne). Die vorliegenden Versuche haben gezeigt, daß bereits geringe Mengen von Verunreinigungen, insbesondere Eisen, die Tragfähigkeit der Bleibronzen wesentlich herabsetzen.

Es liegt nahe anzunehmen, daß die erwähnten Fehler vermieden oder gemildert werden, wenn an den gesondert hergestellten Bleibronzekörpern ein geeigneter Stützschalenwerkstoff angegossen wird[6]). In diesem Falle können die fertigungstechnischen Bedingungen für die Erstellung einer reinen Bleibronze mit günstiger Gefügeausbildung weitgehend berücksichtigt werden; außerdem sind in der Bleibronzeschicht nach dem Angießen der Grundschale Druckeigenspannungen zu erwarten, die eine Erhöhung der Zeit- und Dauerfestigkeit bewirken. Gegebenenfalls ließe sich auch noch eine Steigerung der Haftfestigkeit in der Übergangsschicht durch Verwendung von Bindemitteln mit günstigem Diffusionsverhalten erzielen. Derartige Bindemittel würden es u. U. auch ermöglichen, die getrennt voneinander hergestellten Verbundgußteile durch entsprechende Wärmebehandlung miteinander zu verbinden.

[6]) A. Blankenfeld, Aus der Praxis der Bleibronzen als Lagermetall. Z. Metallkde. Bd. 31 (1939) H. 2 S. 31 bis 45.

VI. Zusammenfassung.

Die in der DVL-Lagerprüfmaschine untersuchten Bleibronze-Ausgüsse erwiesen sich im Gegensatz zu Leichtmetallagern als sehr belastungsempfindlich. Zwecks Vermeidung von Laufflächenbeschädigungen bzw. Laufstörungen darf eine Belastungssteigerung nur in niedrigen Stufen bei jeweils genügend langer Einlaufzeit vorgenommen werden. Durch Bleimangel in der Lauffläche sowie durch verunreinigende Legierungsbestandteile (insbesondere Eisen) und Laufflächenfehler (Poren) wird die Belastbarkeit wesentlich beeinträchtigt. Unter dynamischer Belastung erreicht die Tragfähigkeitsgrenze das Doppelte bis Dreifache des an demselben Lager unter ruhender Last ermittelten Wertes.

Während des 100-h-Dauerversuchs ($p = 250$ kg/cm²) zeigten nur zwei Legierungen mit günstiger Bleiverteilung und niedrigem Verunreinigungsgrad einwandfreies Laufverhalten. Die übrigen Ausgüsse wurden vorwiegend durch starke Riefen und Risse zerstört. Zu starker Riefenbildung neigten insbesondere Legierungen mit ausgeprägt dendritischem Gefügeaufbau. Vorzeitige Rißbildung ist hauptsächlich auf die Wirkung der durch Schwindung, Schrumpfung und Abschreckung hervorgerufenen Zugeigenspannungen in der Bleibronzeschicht zurückzuführen.

Die Auslaufdauer nach Abstellung der Ölzufuhr bis zur Auslösung der Prüfmaschine schwankte bei mehrmals hintereinander durchgeführten Trockenlaufversuchen zwischen einigen Sekunden und mehreren Minuten; die kürzeren Laufzeiten wurden fast durchweg nur bei den ersten Trockenläufen festgestellt, weil hier die zum Ausschmelzen hinreichender Bleimengen erforderliche Lagertemperatur infolge vorzeitiger Auslösung der Prüfmaschine nicht erreicht werden konnte.

Digitized by Google

Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren.

II. Teilbericht: Die Vorgänge in verzweigten Leitungen.

Von O. Lutz, Braunschweig.

Bericht der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig, Institut für Motorenforschung.

Im ersten Teilbericht sind Resonanzschwingungen in unverzweigten Leitungen behandelt worden, wobei sich ein einfaches Zerlegungsverfahren ergeben hat. In dem vorliegenden zweiten Teilbericht werden die Vorgänge in verzweigten Leitungen behandelt und die Ergebnisse auf die Vorgänge in der Ansaugleitung eines 12-Zylinder-Reihenmotors angewandt.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Übersicht.
3. Die einfach verzweigte Leitung.
4. Verschiedene Beispiele.
   a) Mehrfach verzweigte Leitung.
   b) Einfach verzweigte Leitung mit mehrfacher Anregung.
   c) Einfach verzweigte, geschlossene Leitung.
5. Untersuchung der Ansaugleitung eines 12-Zylinder-Doppelreihenmotors.
   a) Anregungsseite.
   b) Resonanzfrequenz des Leitungssystems.
   c) Größe der Anregungsschwankungen eines Zylinders.
   d) Abgekürzte Ermittlung.
6. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Im ersten Teilbericht[1]) wurden Schwingungsvorgänge in unverzweigten, an mehreren Stellen angeregten Leitungen behandelt. Es ist dort ein einfaches Lösungsverfahren gezeigt und begründet worden:

> Man spaltet das Leitungssystem auf in einzelne »offene« Rohre, wobei man dem Zuge der Leitung folgend vom offenen Leitungsende ausgeht und an jeder Anregungsstelle und jedem Querschnittsübergang — kurz: an jeder Stelle mit einer plötzlichen Geschwindigkeits- aber keiner Druckänderung — ein weiteres, an dieser Stelle »offenes« Rohr beginnen läßt; in diesen Einzelrohren können die Vorgänge unabhängig voneinander verfolgt und (es handelt sich um einfachste Schwingungsformen) unmittelbar angeschrieben werden.

In den nachstehenden Betrachtungen sollen in gleicher Weise die Vorgänge in verzweigten Leitungen behandelt werden.

2. Übersicht.

In Ziff. 3 wird eine einfach verzweigte Leitung ausführlich behandelt, um das Lösungsverfahren zu zeigen. Ziff. 4 bringt die Untersuchung von verwickelteren Anordnungen, die schließlich in Ziff. 5 durch ein Beispiel einer Ansaugleitung für einen Zwölfzylinder-V-Motor ergänzt werden.

3. Die einfach verzweigte Leitung.

Die Leitung nach Bild 1 sei am Anfang *o* offen (also $\mathfrak{P}_0^* = 0$) und werde an den Stellen *4* und *5* durch die beliebigen Geschwindigkeitsschwankungen $\mathfrak{V}_I$ und $\mathfrak{V}_{II}$ angeregt. Die drei Leitungsteile[2]) l_0, l_1, l_2 sollen verschiedenen Querschnitt besitzen.

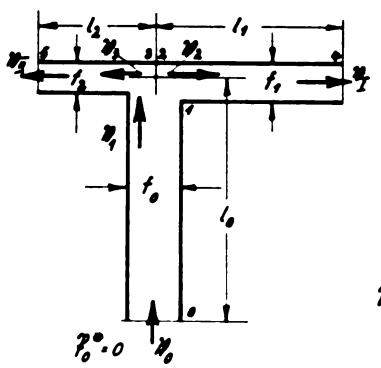


Bild 1 (links). Schema einer einfach verzweigten Leitung.

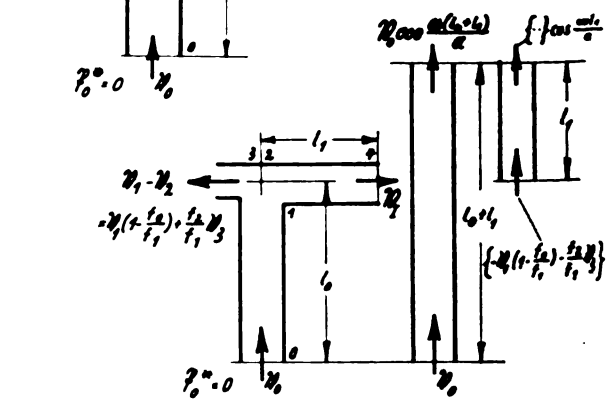


Bild 2. Zerlegungsschema der verzweigten Leitung nach Bild 1.

An der Verzweigung muß die Summe der abgehenden Geschwindigkeitsschwankungen gleich der ankommenden Schwankung sein:

$$f_1 \mathfrak{V}_2 + f_2 \mathfrak{V}_3 = f_0 \mathfrak{V}_1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Da die Stellen *1*, *2* und *3* nur eine gedankliche Aufteilung des gleichen Ortes sind, gilt weiterhin

$$\mathfrak{P}_1^* = \mathfrak{P}_2^* = \mathfrak{P}_3^* \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Es liegt also wieder ein Vorgang mit plötzlicher Geschwindigkeits- aber keiner Druckänderung vor, der in gewohnter Weise behandelt werden kann.

Zunächst soll die rechte Abzweigung betrachtet werden. Bild 2 links. An der Stelle *1*, *2* tritt ein Geschwindigkeitssprung $\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2$ auf, so daß das Ersatzrohr an dieser Stelle von außen mit diesem Sprung angeregt erscheint.

Aus (1) ergibt sich für den Sprung:

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_1 \left(1 - \frac{f_0}{f_1}\right) + \left(\mathfrak{V}_3 \frac{f_2}{f_1}\right) \quad \ldots\ldots (1a)$$

[1]) Luftfahrtforschung Bd. 16 (1939) S. 139; Hinweise ohne Quellenangabe beziehen sich auf diesen Bericht.

[2]) Bei Verzweigungen nach Art von Bild 1 ist heute noch nicht geklärt, bis an welche Stelle die Schwingungslänge der einzelnen Rohrteile zu rechnen ist. Beim Vergleich theoretischer Ergebnisse mit dem Versuch ist dies zu beachten.

Digitized by Google

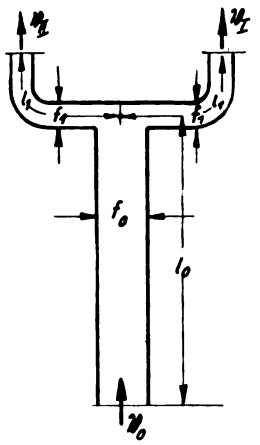


Bild 3 (links). Verzweigte, symmetrische Leitung.

Die rechts in Bild 2 enthaltene Aufspaltung[3]) in einzelne offene Rohre führt zu der ersten Beziehung

$$\mathfrak{V}_I = \mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega\,(l_0+l_1)}{a} - \mathfrak{V}_1\left(1-\frac{f_0}{f_1}\right)\cos\frac{\omega\,l_1}{a} - \mathfrak{V}_3\frac{f_2}{f_1}\cos\frac{\omega\,l_1}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In (3) kann $\mathfrak{V}_1$ noch durch $\mathfrak{V}_0$ ersetzt werden, da

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega\,l_0}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ist.

Nun muß diese Zerlegung sinngemäß auch für den linken Leitungsteil gelten; ohne die Zerlegung im einzelnen durchzuführen, kann entsprechend angeschrieben werden:

$$\mathfrak{V}_{II} = \mathfrak{V}_0 \cos\frac{\omega\,(l_0+l_2)}{a} - \mathfrak{V}_1\left(1-\frac{f_0}{f_2}\right)\cos\frac{\omega\,l_2}{a} - \left(\mathfrak{V}_2\frac{f_1}{f_2}\right)\cos\frac{\omega\,l_2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Zur Ermittlung der Unbekannten $\mathfrak{V}_0$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{V}_3$ stehen die 4 Gleichungen (1), (3), (4) und (5) zur Verfügung.

Die Ausrechnung ergibt

$$\mathfrak{V}_0\left\{f_0\cos\frac{\omega\,l_0}{a} - f_1\sin\frac{\omega\,l_0}{a}\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_1}{a} - f_2\sin\frac{\omega\,l_0}{a}\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_2}{a}\right\} = \frac{f_1\,\mathfrak{V}_I}{\cos\frac{\omega\,l_1}{a}} + \frac{f_2\,\mathfrak{V}_{II}}{\cos\frac{\omega\,l_2}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Resonanzen treten ein, wenn der Klammerausdruck, mit dem $\mathfrak{V}_0$ zu multiplizieren ist, gleich Null wird, und die rechte Seite von (6) dabei endlich bleibt. Für die Resonanzen gilt deshalb:

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega\,l_0}{a} = \frac{f_1}{f_0}\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_1}{a} + \frac{f_2}{f_0}\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_2}{a}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

sie können unterdrückt werden, wenn der Ausdruck für die Anregung verschwindet:

$$\frac{f_1\,\mathfrak{V}_I}{\cos\frac{\omega\,l_1}{a}} + \frac{f_2\,\mathfrak{V}_{II}}{\cos\frac{\omega\,l_2}{a}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Ergebnisse sollen an dem einfachen Beispiel Bild 3 verfolgt werden. Die Abzweigungen haben gleiche Abmessungen, es ist also $l_2 = l_1$ und $f_2 = f_1$.

Aus (7) und (8) wird

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega\,l_0}{a} = \frac{2f_1}{f_0}\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_1}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

und

$$\mathfrak{V}_I + \mathfrak{V}_{II} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

(7a) kann noch umgeschrieben werden in

$$\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_0}{a}\operatorname{tg}\frac{\omega\,l_1}{a} = \frac{f_0}{2f_1}$$

und entspricht damit der Resonanzbedingung für ein einfach angeregtes Rohr mit Querschnittsänderung[4]), dessen Querschnitt auf der Anregungsseite gleich dem doppelten Querschnitt einer Verzweigungsseite ist.

[3]) Vgl. den ersten Bericht, a. a. O. S. 142.
[4]) A. a. O. S. 24.

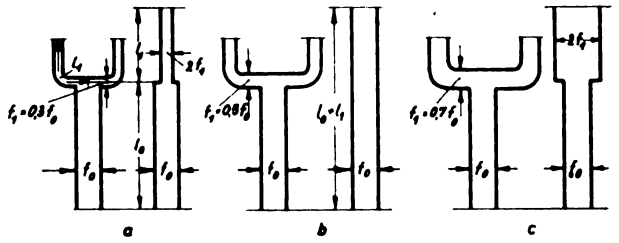


Bild 4. Ersatzschema für eine symmetrisch verzweigte Leitung.

In Bild 4 sind 3 Beispiele für den Vergleich enthalten.

Wenn der Querschnitt der Abzweigung halb so groß wie f_0 ist (Bildteil *b*), verhält sich das Leitungssystem wie einfaches Rohr von der Länge $l_0 + l_1$; die Resonanzfrequenzen treten dann bekanntlich im Verhältnis der ungeraden Zahlen 1:3:5 usf. auf.

Ist das Querschnittsverhältnis kleiner (Bildteil *a*), so werden die Frequenzverhältnisse wesentlich ungeordneter; beispielsweise entnimmt man (7a) für $f_1 = 0{,}3\,f_0$ und $l_1 = l_0$ die Verhältnisse 1,16; 2,84; 5,16 ... (die Leitung scheint abwechselnd verkürzt und verlängert), und für $f_1 = 0{,}7\,f_0$ (Bildteil *c*) ergeben sich die Werte 0,89; 3,11; 4,89 (die Leitung erscheint abwechselnd verlängert und verkürzt).

Aus (8a) folgt, daß Resonanzen nur unterdrückt werden können, wenn $\mathfrak{V}_I$ gleich $-\mathfrak{V}_{II}$ ist, d. h. bei einer Zweizylindermaschine (mit gleichmäßiger Zündfolge) für die Grundharmonische und die 3., 5. usw. Anregungsharmonische.

Man kann zusammenfassen:

1. Bei verzweigten Leitungen treten ähnliche Resonanzerscheinungen auf wie in Leitungen mit Querschnittsänderung (vgl. die Resonanzbedingung (7)).
2. Wie bei mehrfach angeregten Leitungen können Resonanzen unterdrückt werden; für zweifache Anregung gilt hierfür die Bedingung (8).

Um ein Bild zu geben über die mannigfaltigen Resonanzmöglichkeiten bei unsymmetrischen Leitungen sind in Bild 5 die ersten Resonanzfrequenzen bestimmt für eine Leitung, bei der gleiche Querschnitte $f_0 = f_1 = f_2$ vorhanden sind und die Rohrlängen $l_0 : l_1 : l_2$ sich wie 3:2:1 verhalten. Nach (7) wird die Resonanzbedingung hierfür

$$\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

wenn der Ausdruck $\frac{\omega\,l_2}{a}$ mit x bezeichnet wird.

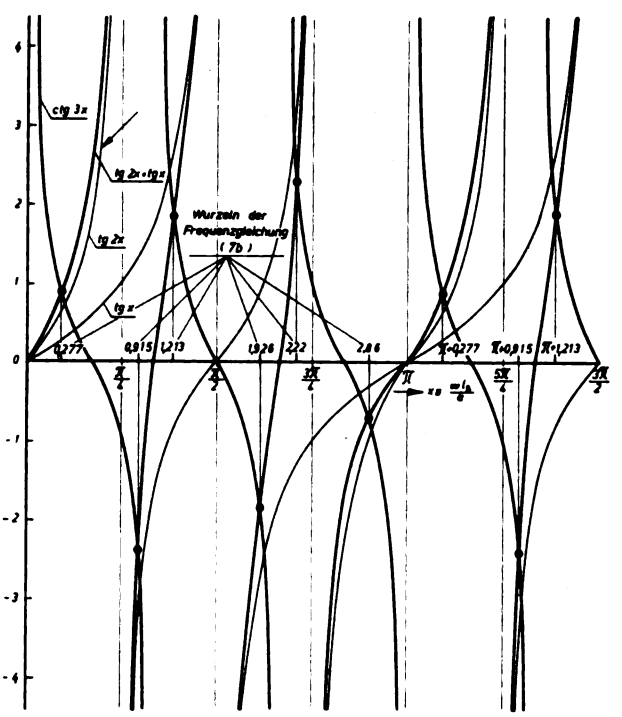


Bild 5. Graphische Lösung der Frequenzgleichung (7b).

Digitized by Google

4. Verschiedene Beispiele.

Die zu behandelnden Beispiele sollen die Anwendung des Lösungsverfahrens im einzelnen zeigen. Da sich in Ziff. 3 ergeben hat, daß gleicher Leitungsquerschnitt $f_1 = f_0$ keine Vereinfachung der Vorgänge mit sich bringt[5]), dagegen eine angenehme formale Vereinfachung bedeutet, so soll in diesen Beispielen überall gleicher Querschnitt angenommen werden. An einer Verzweigungsstelle erhält dann der Ausdruck (1a) für den Geschwindigkeitssprung $\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2$ die einfache Form

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$

Dieser Unterschied gegenüber (1a) ist zu beachten, wenn entsprechende Betrachtungen für Leitungen mit wechselndem Querschnitt angestellt werden sollen.

a) Mehrfach verzweigte Leitung.

Als Beispiel für mehrfache Verzweigung sei eine Ansaugleitung für drei Zylinder gewählt, Bild 6, wobei die gemeinsame Verteilungsleitung soweit von den Zylindern entfernt liege, daß der Schwingungsvorgang im Rohrstück l_3 nicht mehr vernachlässigt werden darf.

An den Abzweigungen muß wieder die Summe der abgehenden Geschwindigkeitsschwankungen gleich der ankommenden Schwankung sein, also

$$\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3 = \mathfrak{V}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9a)$$

und

$$\mathfrak{V}_5 + \mathfrak{V}_6 = \mathfrak{V}_4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9b)$$

$\mathfrak{V}_1$ läßt sich durch $\mathfrak{V}_0$ ausdrücken:

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega l_0}{a}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9c)$$

während sich für $\mathfrak{V}_4$ eine Beziehung aus der ersten Leitungszerlegung nach Bild 7a ableiten läßt:

$$\mathfrak{V}_4 = \mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega (l_0 + l_3)}{a} - \mathfrak{V}_2 \cos \frac{\omega l_2}{a} \quad \ldots \quad (9d)$$

Die Zerlegungen, die zu weiteren Beziehungen führen, sind in Bild 7 enthalten (*b*, *c*, *d*).

Aus *b* liest man ab:

$$\mathfrak{V}_I = \mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega (l_0 + l_1)}{a} - \mathfrak{V}_3 \cos \frac{\omega l_1}{a}; \quad \ldots \quad (9e)$$

aus *c*:

$$\mathfrak{V}_{II} = \mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega (l_0 + l_2 + l_3)}{a} - \mathfrak{V}_2 \cos \frac{\omega (l_2 + l_3)}{a} - \mathfrak{V}_6 \cos \frac{\omega l_3}{a}; \quad \ldots \quad (9f)$$

und aus *d* schließlich:

$$\mathfrak{V}_{II} = \mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega (l_0 + l_2 + l_4)}{a} - \mathfrak{V}_2 \cos \frac{\omega (l_2 + l_4)}{a} - \mathfrak{V}_5 \cos \frac{\omega l_4}{a} \quad \ldots \quad (9g)$$

Aus den Beziehungen (a) bis (g) lassen sich die 6 Unbekannten $\mathfrak{V}_1$ bis $\mathfrak{V}_6$ eliminieren, und nach entsprechenden Zwischenrechnungen kommt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 \{ &(\operatorname{tg} l_3 + \operatorname{tg} l_4)(\operatorname{tg} l_0 \operatorname{tg} l_1 \operatorname{tg} l_2 - \operatorname{tg} l_0 - \operatorname{tg} l_2) \\ &+ 1 - \operatorname{tg} l_0 \operatorname{tg} l_2 - \operatorname{tg} l_0 \operatorname{tg} l_1 \} \\ &= \mathfrak{V}_I \left\{ \frac{1}{\cos l_1 \cos l_2} (1 - \operatorname{tg} l_2 \operatorname{tg} l_3 - \operatorname{tg} l_2 \operatorname{tg} l_4 \right\} \\ &+ \mathfrak{V}_{III} \frac{1}{\cos l_0 \cos l_2 \cos l_3} + \mathfrak{V}_{III} \frac{1}{\cos l_0 \cos l_2 \cos l_4} \\ &\ldots\ldots \quad (10) \end{aligned}$$

Die Erscheinungen können demnach sehr verwickelt und undurchsichtig werden; die Verfolgung bestimmter Anordnungen mit gegebenen Abmessungen bringt jedoch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

[5]) Bei symmetrischen Leitungen nach Bild 3 bringt das Verhältnis $f_1 : f_0 = 0{,}5$ eine Vereinfachung des Vorgangs, vgl. Bild 4 b.

Bild 6 (unten). Schema einer mehrfach verzweigten Leitung.

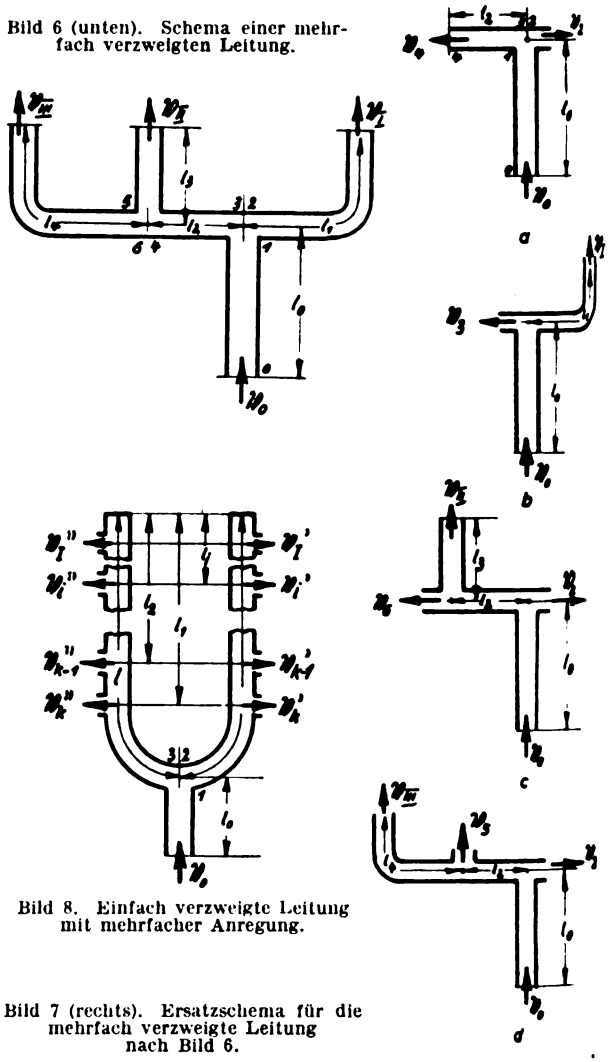


Bild 8. Einfach verzweigte Leitung mit mehrfacher Anregung.

Bild 7 (rechts). Ersatzschema für die mehrfach verzweigte Leitung nach Bild 6.

b) Einfach verzweigte Leitung mit mehrfacher Anregung.

Als zweites Beispiel soll eine symmetrisch ausgeführte einfach verzweigte Leitung mit mehrfacher Anregung nach Bild 8 behandelt werden.

Die Leitung sei über die letzte Anregungsstelle *n* hinaus verlängert. Wie im ersten Bericht[6]) erläutert, ist an jeder Anregungsstelle eine entsprechende Aufspaltung vorzunehmen. Die Verzweigung selbst ist wie in Ziff. 3 zu behandeln; damit kann angeschrieben werden:

für die rechte Leitungsseite:

$$\mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega (l_0 + l)}{a} - \mathfrak{V}_3 \cos \frac{\omega l}{a} - \sum_{i=1}^{i=k} \mathfrak{V}_i' \cos \frac{\omega l_i}{a} = 0 \quad (11a)$$

(die Schwankung am blinden Ende der Leitung muß verschwinden);

für die linke Leitungsseite:

$$\mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega (l_0 + l)}{a} - \mathfrak{V}_2 \cos \frac{\omega l}{a} - \sum_{i=1}^{i=k} \mathfrak{V}_i'' \cos \frac{\omega l_i}{a} = 0 \quad (11b)$$

Zusammen mit der Verzweigungsbedingung

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 \cos \frac{\omega l_0}{a} = \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3 \quad \ldots\ldots \quad (11c)$$

ergibt sich unmittelbar:

[6]) A. a. O. S. 145.

Digitized by Google

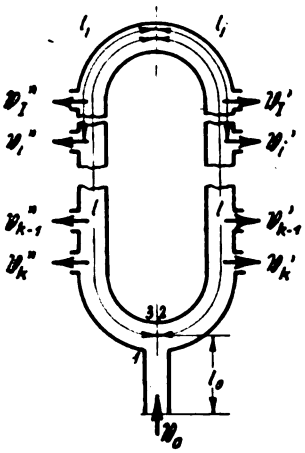


Bild 9. Einfach verzweigte, geschlossene Leitung.

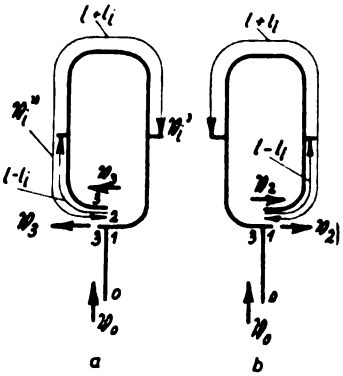


Bild 10. Ersatzschema für die einfach verzweigte, geschlossene Leitung nach Bild 9.

$$\mathfrak{V}_0\left(2\cos\frac{\omega(l_0+l)}{a}-\cos\frac{\omega l_0}{a}\cos\frac{\omega l}{a}\right)=\sum_{i=1}^{i=k}(\mathfrak{V}_i'+\mathfrak{V}_i'')\cos\frac{\omega l_i}{a}$$

oder

$$\mathfrak{V}_0\left(\cos\frac{\omega l_0}{a}\cos\frac{\omega l}{a}-2\sin\frac{\omega l_0}{a}\sin\frac{\omega l}{a}\right)=\sum_{i=1}^{i=k}(\mathfrak{V}_i'+\mathfrak{V}_i'')\cos\frac{\omega l_i}{a} \quad \ldots (12)$$

Der Vergleich mit den Ergebnissen von Ziff. 3 zeigt, daß sich gegenüber der nur zweifach angeregten Leitung lediglich das Anregungsglied (rechte Seite von (12)) ändert, während in den Resonanzfrequenzen kein Unterschied auftritt, was nach den Betrachtungen des ersten Berichtes zu erwarten war.

c) Einfach verzweigte, geschlossene Leitung.

Schließlich soll noch der Fall untersucht werden, daß die Enden der in b) behandelten Leitung zusammengeführt werden (vgl. Bild 9), so daß eine geschlossene Ringleitung entsteht. Zum besseren Vergleich mit b) sind gleiche Bezeichnungen verwendet.

Man teilt das Leitungssystem nach Bild 10 an der Verzweigungsstelle auf, wonach die einfache Leitung nach Bild 10a an der Stelle *1* mit der Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_3$ angeregt wird; im Zuge der Leitung folgen dann die rechtsseitigen Anregungen $\mathfrak{V}_i'$, weiterhin die linksseitigen Anregungen $\mathfrak{V}_i''$, schließlich ist am Ende *3* der Leitung die Geschwindigkeitsschwankung $-\mathfrak{V}_3$ vorhanden.

Damit folgt:

$$-\mathfrak{V}_3=\mathfrak{V}_0\cos\frac{\omega(l_0+2l)}{a}-\mathfrak{V}_3\cos\frac{\omega\cdot 2l}{a}-\sum_{i=1}^{i=k}\mathfrak{V}_i'\cos\frac{\omega(l+l_i)}{a}-\sum_{i=1}^{i=k}\mathfrak{V}_i''\cos\frac{\omega(l-l_i)}{a}; \quad \ldots (13a)$$

und aus der Zerlegung *b* erhält man:

$$-\mathfrak{V}_2=\mathfrak{V}_0\cos\frac{\omega(l_0+2l)}{a}-\mathfrak{V}_2\cos\frac{\omega\cdot 2l}{a}-\sum_{i=1}^{i=k}\mathfrak{V}_i'\cos\frac{\omega(l-l_i)}{a}-\sum_{i=1}^{i=k}\mathfrak{V}_i''\cos\frac{\omega(l+l_i)}{a} \quad \ldots (13b)$$

Unter Beachtung der Verzweigungsbedingung (11c) kommt nach einiger Zwischenrechnung:

$$\mathfrak{V}_0\left(\cos\frac{\omega l_0}{a}\cos\frac{\omega l}{a}-2\sin\frac{\omega l_0}{a}\sin\frac{\omega l}{a}\right)=\sum_{i=1}^{i=k}(\mathfrak{V}_i'+\mathfrak{V}_i'')\cos\frac{\omega l_i}{a}, \quad \ldots (12)$$

also genau das gleiche wie bei der nicht geschlossenen Leitung nach Bild 8.

Der Vergleich lehrt, daß bei einer Leitung nach Bild 9 an der Vereinigungsstelle ein Geschwindigkeitsknoten auftritt, einerlei welche Phasenlage und Amplitudengröße die einzelnen Anregungen haben mögen. Man kann weiter unschwer zeigen, daß auch die Lage der Anregungsstellen belanglos ist, daß also nicht etwa die in Bild 9 vorgesehene symmetrische Anordnung vorhanden sein muß.

Eine wichtige Anwendung ist:

durch Wiedervereinigen der freien Enden einer einfach verzweigten Leitung kann man diese zu einer »symmetrisch vollkommenen« machen, wodurch die Schwingungsvorgänge sehr vereinfacht werden, vgl. Ziff. 3.

Mit dem Ausdruck »symmetrisch vollkommene« Leitung soll angedeutet werden, daß die praktische Verwirklichung einer schwingungsmäßig symmetrisch sich verhaltenden Verzweigung schwierig ist. Der Ausdruck für die Anregung einer verzweigten Leitung (rechte Seite von (6) wird für gleichmäßige Anregung $\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}=-\mathfrak{V}_{\mathrm{II}}$:

$$\frac{\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}}{\cos\frac{\omega l_1}{a}}-\frac{\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}}{\cos\frac{\omega l_2}{a}}.$$

Bei symmetrischer Ausführung ($l_1=l_2$) müßte die Anregung verschwinden; ist aber l_2 auch nur um einen kleinen Betrag größer oder kleiner als l_1, so wird die Anregung unendlich groß für $\cos\frac{\omega l_1}{a}=0$. Führt man beide Leitungen wieder zusammen, so ist die Symmetrie auf einfache Weise sichergestellt.

5. Untersuchung der Ansaugleitung eines 12-Zylinder-Doppelreihenmotors.

Nach den in Ziff. 4 behandelten Beispielen läßt sich die Untersuchung in einfacher Weise durchführen.

a) Anregungsseite.

Zunächst soll die Anregungsseite behandelt werden. In Bild 11a ist der Anregungsteil einer einfach verzweigten, geschlossenen Leitung (vgl. Ziff. 4, c) eines 12-Zylinder-Doppelreihenmotors aufgezeichnet, *b* zeigt die Zündfolge des Motors, die gleichzeitig die Phasenlage der einzelnen Anregungsschwankungen angibt. Die Abmessungen einer Leitungsseite bis zum Vereinigungspunkt *A*, der der Verzweigungsstelle *B* (vgl. Bild 12) gegenüber liegt[7]), sind in Bildteil *c* enthalten; entsprechend dem Aufbau von Gleichung (12) sind die Abstände der einzelnen Anregungsstellen bis zur Vereinigungsstelle *A* der beiden Leitungsteile angegeben.

Nach Gleichung (12) ist die resultierende Anregungsschwankung $\mathfrak{V}_n^*$ für die $n$te Harmonische zu bilden aus

$$\mathfrak{V}_n^*=\sum_{i=1}^{i=k}(\mathfrak{V}_{ni}'+\mathfrak{V}_{ni}'')\cos\frac{n\omega l_i}{a}; \quad \ldots (12a)$$

es sind also etwa die Anregungsschwankungen von Zylinder *3* und von Zylinder *9* vektoriell zu addieren und mit dem Cosinus der durch $\frac{n\omega l_i}{a}$ dimensionslos gemachten Entfernung l_i bis zu Vereinigungsstelle *A* zu multiplizieren. Es wird dabei angenommen, daß die Anregungsschwankungen gleich groß sind und ihre Phasenlage der Zündfolge ent-

[7]) Bei unsymmetrischer Lage der Verzweigungsstelle *B* muß auch *A* unsymmetrisch liegen, nämlich so, daß die beiden Leitungsteile von *B* nach *A* gleich lang sind.

Digitized by Google

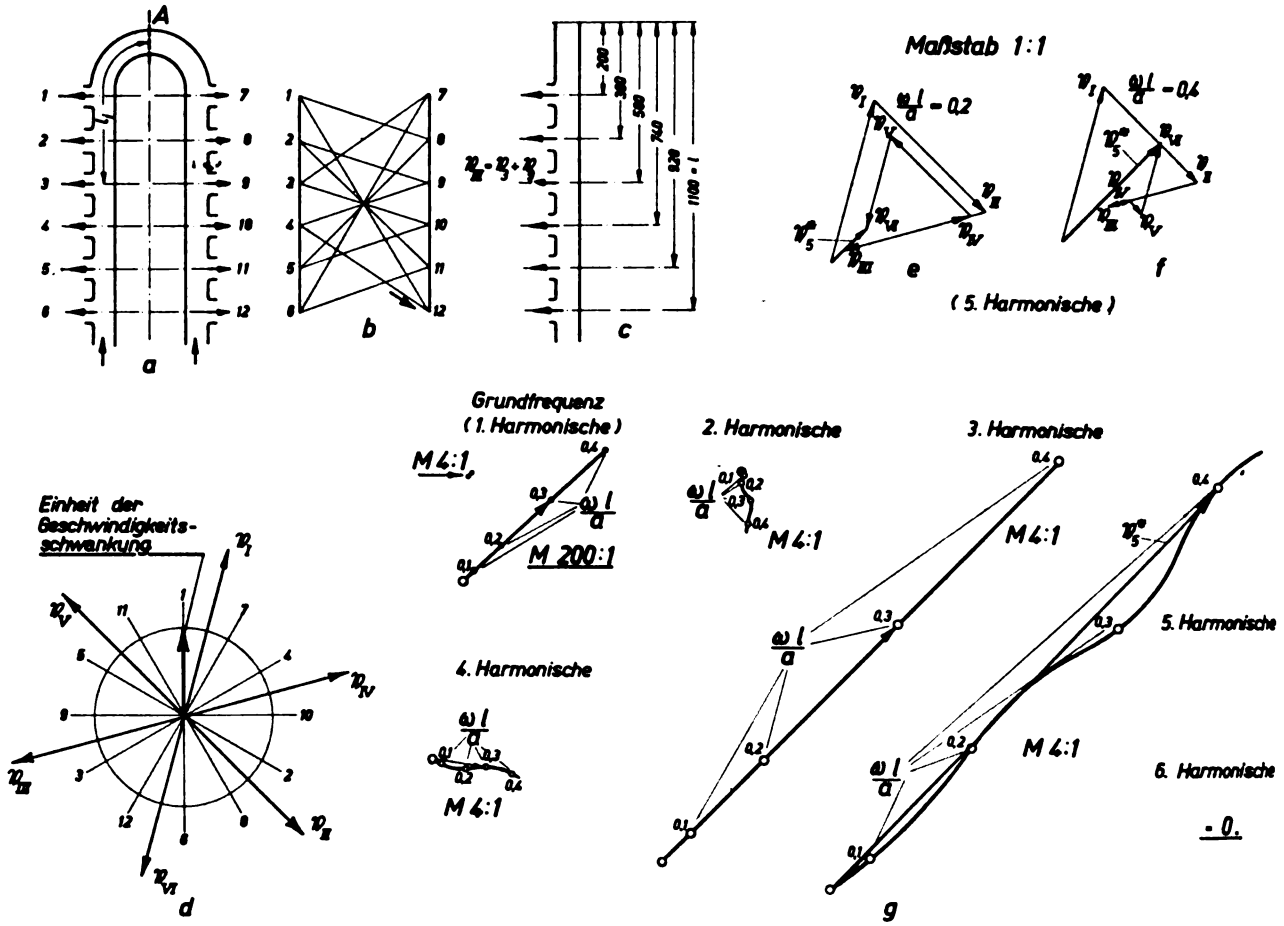


Bild 11. Untersuchung der Ansaugleitung eines 12-Zylinder-Reihenmotors.

spricht. Die vektorielle Summe der Anregungsschwankungen gegenüberliegender Zylinder wird mit lateinischen Indizes:

$$\mathfrak{V}_{III} = \mathfrak{V}_3 + \mathfrak{V}_9 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12b)$$

bezeichnet.

In Bild 11 ist die Untersuchung des Einflusses der 5. Harmonischen durchgeführt. In Bildteil *d* ist zunächst die Phasenlage der Anregungsschwankungen aufgezeichnet. Der Phasenunterschied zwischen zwei in der Zündfolge benachbarten Zylindern (etwa 1 und 8 nach Bildteil *b*) beträgt offensichtlich bei der 5. Harmonischen $\frac{5 \cdot 360}{12} = 150^0$; hieraus ergibt sich die Phasenfolge. Nach (12a) und (12b) sind hieraus die Vektoren $\mathfrak{V}_I = \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_7$, $\mathfrak{V}_{II} = \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_8$ ... zu bilden und, nachdem sie mit $\cos \frac{5\,\omega\, l_i}{a}$ multipliziert sind, vektoriell zu addieren (vgl. Bildteil *e*, wo $\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}2$, also $\frac{5\,\omega\, l}{a} = 1{,}0$ gewählt ist, und Bildteil *f* mit $\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}4$).

In Bildteil *g* ist das Ergebnis (vierfach vergrößert) für die ersten 6 Harmonischen aufgezeichnet, wobei für den Vergleich des Einflusses der verschiedenen Harmonischen zunächst angenommen ist, daß die einzelnen Anregungsschwankungen bei allen Harmonischen gleich sind (Maßstab s. Bildteil *d*).

Bevor die Ergebnisse besprochen werden, ist eine Betrachtung über die Größe von $\frac{\omega\, l}{a}$ angebracht. Das angenommene Triebwerk hat nach Bildteil *c* einen Zylinderabstand von 180 mm, woraus sich die ungefähre Größe des Hubes und mit üblichen Kolbengeschwindigkeiten die Drehzahl zu 2000 bis 2400 U/min ergibt. Bei dem im Viertakt arbeitenden Triebwerk entspricht die Anregungsfrequenz der halben Drehfrequenz, also

$$\omega = \frac{\pi \cdot 2400}{2 \cdot 30} = 125{,}5/\mathrm{s},$$

und mit einer angenommenen Schallgeschwindigkeit von 350 m/s ergibt sich für $n = 2400$ U/min:

$$\frac{\omega\, l}{a} = \frac{125{,}5 \cdot 1{,}1}{350} = 0{,}395.$$

Entsprechend diesem Wert sind die Vektorpläne für $\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}1$, 0,2, 0,3 und 0,4 aufgestellt worden.

Die Grundharmonische ergibt nur eine geringe Anregung, die für $\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}4$ erst 1 vH der Anregungsschwankung eines Zylinders beträgt. Die 2. Harmonische wirkt sich stärker aus; für $\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}4$ werden immerhin 16 vH erreicht; bei der 4. Harmonischen steigt dieser Betrag auf rd. 25 vH, um bei der 6. Harmonischen ganz zu verschwinden.

Starke Anregung bringen dagegen die 3. und 5. Harmonische, die beide für $\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}4$ etwa 5/3 mal so stark anregen als ein einzelner, an der Vereinigungsstelle *A* liegend gedachter Zylinder.

Die Phasenlage der resultierenden Schwankung $\mathfrak{V}_n^*$ ändert sich bei wechselnder Drehzahl nur wenig, und zwar bei allen untersuchten Harmonischen; bei der 3. Harmonischen ist sie sogar konstant.

b) Resonanzfrequenzen des Leitungssystems.

Das Ersatzschema für die in Bild 12a aufgezeichnete Gesamtleitung ist nach Ziff. 3 und 4 eine Leitung mit Querschnittsänderung an der Verzweigungsstelle *B* und Anregung am Ende *A* mit der jeweiligen, unter a) bestimmten Anregungsschwankung $\mathfrak{V}_n^*$. Die Schwankung $\mathfrak{V}_0$ am Leitungsanfang bestimmt sich nach (12) aus

$$\mathfrak{V}_{0n}\left(\cos \frac{n\,\omega\, l_0}{a} \cos \frac{n\,\omega\, l'}{a} - 2 \sin \frac{n\,\omega\, l_0}{a} \sin \frac{n\,\omega\, l'}{a}\right) = \mathfrak{V}_n^* \quad (12c)$$

Resonanzen treten auf, wenn der Beiwert von $\mathfrak{V}_{0n} = 0$ wird (ohne daß die Anregung $\mathfrak{V}_n^*$ verschwindet), also für

Digitized by Google

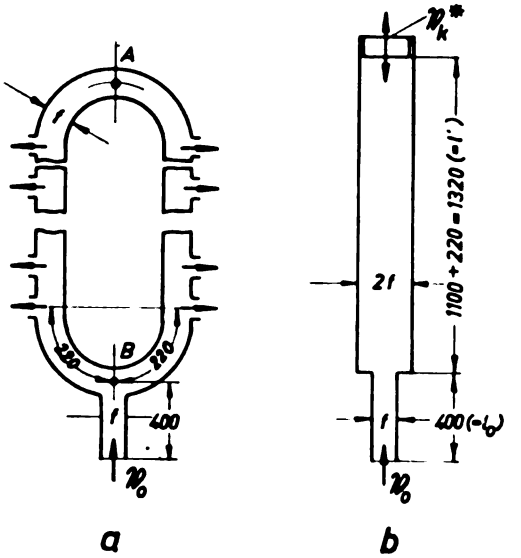


Bild 12. Ersatzschema für die Ansaugleitung.

$$\operatorname{tg}\frac{n\omega l_0}{a}\operatorname{tg}\frac{n\omega l'}{a} = 0{,}5 \quad \ldots\ldots \quad (12\mathrm{d})$$

Setzt man den bei der Bestimmung der Anregung in a) bereits benutzten Wert $\frac{\omega l}{a} = x$, so geht (12d) unter Berücksichtigung der Leitungsabmessungen über in

$$\operatorname{tg}\left(\frac{0{,}4}{1{,}1}nx\right)\operatorname{tg}\left(\frac{1{,}32}{1{,}1}nx\right) = 0{,}5$$

oder

$$\operatorname{tg}(0{,}364\,nx)\operatorname{tg}(1{,}20\,nx) = 0{,}5 \quad \ldots\ldots \quad (12\mathrm{e})$$

Die ersten Wurzeln dieser Gleichung für nx sind:

$$nx = 0{,}839,\ 2{,}854,\ 5{,}11\ldots$$

Nimmt man wieder eine Schallgeschwindigkeit von 350 m/s an, so treten demnach Resonanzen bei den in Zahlentafel 1 zusammengestellten Motordrehzahlen auf.

Zahlentafel 1.

Anregungsharmonische \ Schwingungsform des Rohres	Grundschwingung	1. Oberschwingung
1. Harmonische (Grundfrequenz)	5100	17 360
2. Harmonische	2550	8 680
3. Harmonische	1700	5 787
4. Harmonische	1275	4 340
5. Harmonische	1020	3 472
6. Harmonische	(850)	(2 892)
7. Harmonische	728	2 480
8. Harmonische	637	2 180

(Berechnung: $nx = \frac{1\cdot\omega l}{a} = \frac{\omega\cdot 1{,}1}{350} = 0{,}839$, hieraus $\omega = 267$ s, entsprechend $n = 5100$ min).

Man erkennt, daß nur die Grundschwingungsform der Gassäule im Leitungssystem und die erste Oberschwingung im Betriebsreich des Motors wesentlich angeregt werden, wobei nach den Ergebnissen über die Anregung besonders die Resonanzen der 3. und 5. Harmonischen in Erscheinung treten können.

c) Größe der Anregungsschwankungen eines Zylinders.

Es bleibt noch festzustellen, wie stark die Anregungsharmonischen eines Zylinders (die in Bild 11 der besseren Übersicht wegen gleich angenommen sind) auftreten.

Nimmt man bei einem Viertaktmotor der Einfachheit halber ein theoretisches Einströmgesetz[8]) nach Bild 13 an, wobei die Einströmgeschwindigkeit zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$:

[8]) In einem späteren Bericht wird hierauf näher eingegangen.

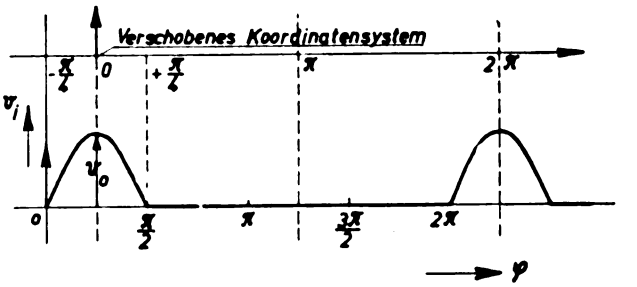


Bild 13.

$$v_i = v_0 \sin 2\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 2π gleich 0 ist, so ergibt die harmonische Zerlegung (für die das Koordinatensystem zweckmäßig um $\frac{\pi}{4}$ verschoben wird, um Symmetrie zu $\varphi = 0$ zu erhalten):

$$v_i = v_0\left(\frac{1}{2\pi} + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi \ldots.\right)$$

mit den Beiwerten der Zahlentafel 2.

Zahlentafel 2.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0,301	0,250	0,1802	0,1061	0,0429	0	— 0,0200	— 0,0212

Die 3. Harmonische ist also 4 mal so groß als die 5. Harmonische, so daß nach den vorstehenden Ergebnissen besonders durch die 3. Harmonische starke Resonanzerscheinungen zu erwarten sind (Drehzahl 1700 U/min nach Zahlentafel 1).

d) Abgekürzte Ermittlung.

Man kann die Untersuchung abkürzen, wenn man sich auf die Vorgänge bei Resonanz beschränken will.

Dann sind zunächst nach b) die Resonanzfrequenzen festzustellen, woraus sich das Drehzahlbild der Zahlentafel 1 ergibt, dem man entnimmt, daß nur die Grundschwingungsform der Gassäule im Leitungssystem und die 1. Oberschwingung praktisch von Bedeutung sind, also die beiden ersten Wurzeln

$$\frac{n\omega l}{a} = 0{,}839 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

und

$$\frac{n\omega l}{a} = 2{,}854$$

der Frequenzgleichung (12e).

Für diese beiden Werte zeichnet man nach a) die Vektorpläne für die Anregungen durch, wobei nach Zahlentafel 1 nur folgende Ordnungszahlen der Oberschwingungen praktische Bedeutung haben:

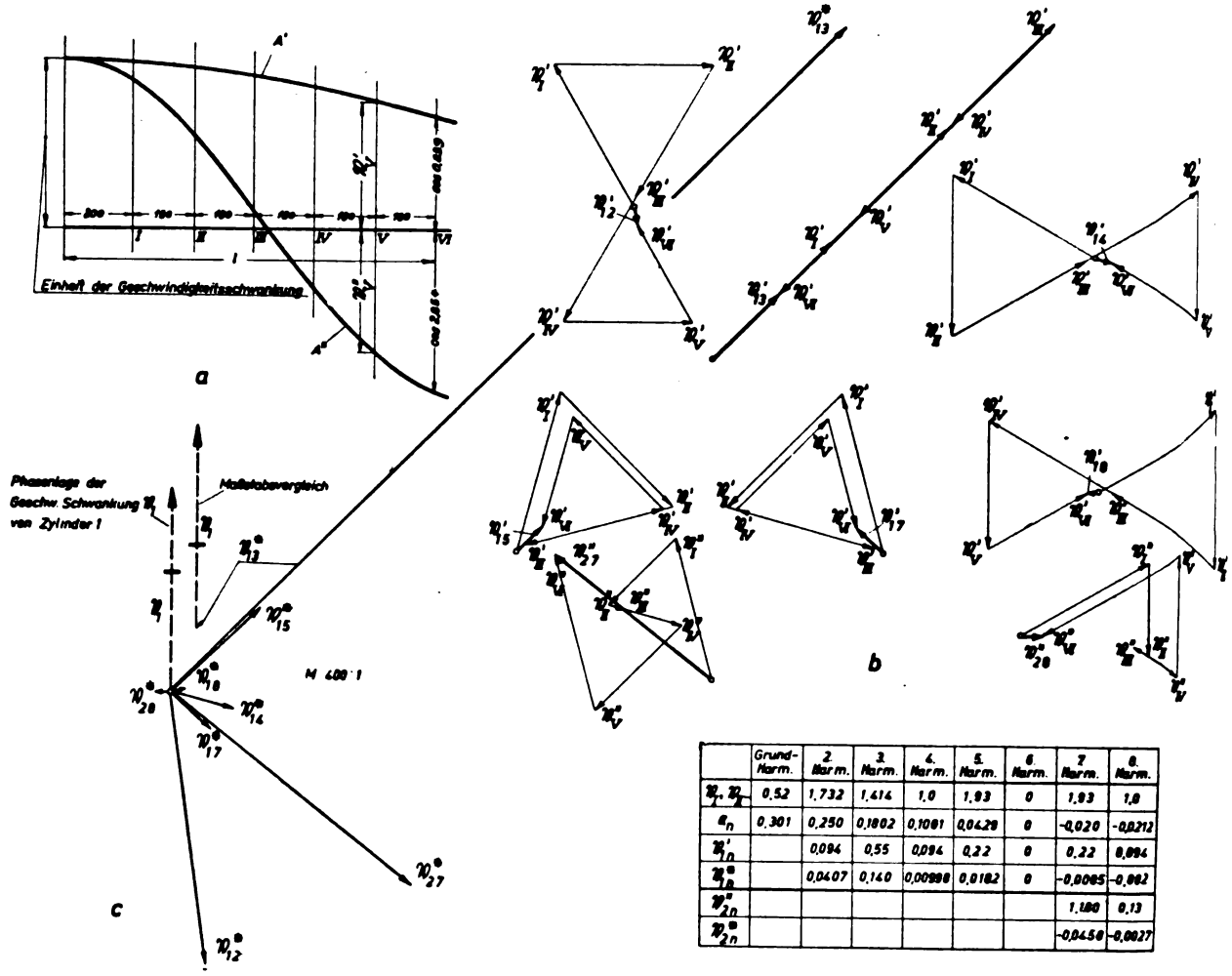
$$\text{für } \frac{n\omega l}{a} = 0{,}839 : = 2, 3, \ldots 8;$$

$$\text{für } \frac{n\omega l}{a} = 2{,}854 : = 7, 8.$$

Das Ergebnis ist in Bild 14 enthalten.

In Bildteil *a* sind über der gegebenen Leitung (mit den Anregungsstellen I bis VI) die beiden Cosinuslinien aufgezeichnet, für die nach (14) an der Stelle VI (also in der Entfernung l von der Vereinigungsstelle A nach Bild 11) die Ordinaten gleich cos 0,839 bzw. cos 2,854 sind. Die Ordinaten an den Anregungsstellen geben die Werte cos $\frac{\omega l_4}{a}$ wieder, die zur Ermittlung der Gesamtanregung nach (12a) notwendig sind.

Digitized by Google



	Grund-Harm.	2. Harm.	3. Harm.	4. Harm.	5. Harm.	6. Harm.	7. Harm.	8. Harm.
$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_4$	0,52	1,732	1,414	1,0	1,93	0	1,93	1,0
a_n	0,301	0,250	0,1802	0,1081	0,0429	0	-0,020	-0,0212
$\mathfrak{V}'_n$		0,094	0,55	0,094	0,22	0	0,22	0,094
$\mathfrak{V}^*_n$		0,0407	0,140	0,00988	0,0182	0	-0,0085	-0,002
$\mathfrak{V}''_{2n}$							1,180	0,13
$\mathfrak{V}^*_{2n}$							-0,0458	-0,0027

Bild 14. Untersuchung der Ansaugleitung eines 12-Zylinder-Reihenmotors.

Die nach Abschnitt a) zu bildenden Vektorsummen sind mit diesen Werten in Bildteil *b* aufgezeichnet. Die resultierenden Vektoren $\mathfrak{V}_{12}'$, $\mathfrak{V}_{13}'$[9]) usw. geben die richtige Phasenlage der Anregungsschwankung an; die wahre Größe $\mathfrak{V}_{12}^*$ der Amplitude ergibt sich nach Multiplikation einerseits mit dem in Bild 11d gefundenen Verhältnisbetrag $\mathfrak{V}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{V}_{\mathrm{II}}$ ... von resultierender Schwankung zweier gegenüberliegender Zylinder zur angenommenen Einheit der Geschwindigkeitsschwankung eines Zylinders, andererseits mit den in Zahlentafel 2 enthaltenen Vorzahlen a_n der betreffenden Harmonischen.

Das Ergebnis ist in die in Bild 14 enthaltene Zahlentafel aufgenommen und die Anregungsvektoren V_{12}^* usw. sind maßstabsgerecht in Bildteil *c* aufgezeichnet.

Die mit Abstand größte Anregung tritt auf bei der Resonanz der 3. Harmonischen der Anregungsschwankung mit der Grundschwingungsform der Gassäule im Leitungssystem (Motordrehzahl 1700/mm); wesentlich schwächer, aber den übrigen Anregungen gegenüber doch noch beträchtlich würde die Grundschwingungsform von der 2. Harmonischen und die erste Oberschwingungsform von der 7. Harmonischen angeregt (Drehzahlen nach Zahlentafel 1: 2550 U/min und 2480 U/min).

[9]) Der erste Index soll die Schwingungsform der Gassäule angeben, der zweite die Ordnungszahl der anregenden Frequenz.

6. Zusammenfassung.

Die in einem früheren Bericht entwickelte Methode zur Berechnung von Resonanzvorgängen in mehrfach angeregten Leitungen wird auf verzweigte Leitungen erweitert; das Beispiel einer Ansaugleitung eines 12-Zylinder-Reihenmotors zeigt die Handhabung des Verfahrens.

In einem weiteren Bericht soll die Art der Anregung beim Ansaugvorgang eines Viertaktmotors näher untersucht werden.

Digitized by Google

Betrachtungen zum Aufbau des elektrischen Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip.

Von Wilhelm Fischer*).

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Bordgerät und Navigation.

Eine Betrachtung über die Fehler der heutigen Drehspulgeräte führt nach Aufstellen der Grundregeln für den richtigen Aufbau von Stahlmagnetanordnungen zu grundsätzlichen Erkenntnissen über den günstigsten Aufbau der Geräte mit Drehspulprinzip. Die wichtigste Ausführungsform, die Zylinderkernmagnetanordnung, wird hinsichtlich Feldverlauf, Kompaßbeeinflussung, Temperatureinfluß untersucht und es werden einige Anwendungsmöglichkeiten und Erläuterungen über den konstruktiven Aufbau gegeben.

Gliederung.

I. Die Gründe für die notwendige Neuentwicklung des Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip.
II. Grundsätzliche Überlegungen zum günstigsten Aufbau des Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip.
1. Zum Aufbau von Stahlmagnetanordnungen.
2. Folgerungen aus der Magnetberechnung im Hinblick auf leichten, streuungsarmen Geräteaufbau und dessen Ausführungsformen.
III. Untersuchung der Zylinderkernmagnetanordnung.
1. Magnetisierung, Luftspaltraum und Feldverteilung.
2. Kompaßbeeinflussung.
3. Temperatureinfluß.
4. Anwendungsmöglichkeiten und konstruktiver Aufbau einiger Geräte.
IV. Zusammenfassung.

I. Die Gründe für die notwendige Neuentwicklung des Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip.

Die gewöhnlichen Anforderungen der stationären Meßtechnik an ein elektrisches Meßinstrument werden im allgemeinen durch das Drehspulgerät sehr gut erfüllt, das bei kleinem Leistungsverbrauch und guter Dämpfung eine gute Anzeige auf linearer Skala sichert. Die Entwicklung des Geräts kann seit vielen Jahren als abgeschlossen betrachtet werden, wenn auch aus Fabrikationsgründen einige Änderungen im Systemaufbau sich allmählich durchsetzen. Die neuerdings aufkommende Anwendung des Geräts im praktischen Flugbetrieb stellt jedoch viele neuartige Forderungen, denen dieses Instrument in seiner jetzigen Form nicht mehr genügt.

Im Flugzeug verbieten die starken Erschütterungen die feine Spitzenlagerung, die zur Herabsetzung der Lagerreibung und Erreichung einer guten Genauigkeit sonst üblich ist, weil das dauernde Trommeln der Spitzen in den Lagersteinen bald Pilzkuppenbildung und Ausmahlen der Lagersteine verursacht, wodurch die erreichte Genauigkeit schon nach kurzer Betriebszeit im Flugzeug verlorengeht. Der Einbau einer erschütterungsunempfindlichen Lagerung (Spitzenlagerung mit größerem Kegelwinkel und Spitzenkrümmungsradius, Bronze als Lagermaterial oder gar Zapfenlagerung) bringt jedoch eine erheblich vergrößerte Reibung mit sich. Die dadurch verursachte Unsicherheit der Zeigerstellung ist um so größer, je kleiner das entwickelte Richtvermögen des Geräts ist.

Die außerdem auftretenden außerordentlichen großen Beschleunigungen (bis zur 7fachen Erdbeschleunigung) erfordern eine genaue Auswuchtung des Systems. Da bei der verlangten Kleinheit der Instrumente ein genügender Massenausgleich auch aus Preisgründen kaum durchführbar ist, bleibt als wirksame Maßnahme gegen den Beschleunigungseinfluß nur großes Richtvermögen, wie es nach obigem auch zur Erreichung einer lebensfähigen Lagerung notwendig ist.

Die Erhöhung des Richtvermögens kann durch Vergrößerung des im Ausschlagbereich durch die Spule geschnittenen Magnetflusses oder durch größere Amperewindungszahl erreicht werden. Eine Vergrößerung der Induktion im Luftspalt oder eine Vergrößerung der Luftspaltfläche bei gleichbleibender Induktion durch größeren Magnetquerschnitt bringt eine Erhöhung des Gesamtgewichts. Außerdem benötigen solche Anordnungen infolge ihrer höheren Streuwirkung zur Vermeidung der Kompaßbeeinflussung einen vergrößerten Abstand der magnetischen Abschirmung, damit diese wie bei den gewöhnlichen Geräten mit verhältnismäßig geringem Gewichtsaufwand durchgeführt werden kann. Dieser vergrößerte Abstand ist jedoch wegen der Normung des Geräts nicht durchführbar.

Eine Vergrößerung der AW-Zahl durch Erhöhung der Windungszahl bei gleichbleibendem Drahtdurchmesser und Magnetabmessungen erfordert eine Erhöhung der an der Spule herrschenden Spannung, so daß die Gesamtspannung des Meßinstruments einschließlich der zur Einhaltung der vorgeschriebenen Temperaturabhängigkeit (Temperaturbereich von $-60°$ bis $+50°$ C) nötigen Vorschaltung entsprechend erhöht wird. Die aus Gewichtsgründen äußerst knapp bemessene Bordbatterie verlangt dagegen kleinen Leistungsverbrauch in den Meßnebenschlüssen, die zu entsprechend kleinen Spannungen am Instrument (60 mV) und am Rähmchen führen. Die Erhöhung der Windungszahl ergibt außerdem entsprechend erhöhtes Rähmchengewicht, so daß der Keinathsche Gütefaktor $\gamma = 10 \frac{D}{G^{1,5}}$, der ein Maß für die Beständigkeit gegen Erschütterungen ist, sinkt, weil das Drehmoment mit dem Mehraufwand an Kupferquerschnitt nur linear steigt, das Gewicht selbst jedoch in die Formel für den Gütefaktor mit der 1,5ten Potenz eingeht. Aus dem gleichen Grunde ist auch eine Erhöhung des Drahtdurchmessers zur Erhöhung der AW-Zahl bei gleichbleibender Windungszahl nicht durchführbar. Mit steigendem Rähmchengewicht steigt also das Drehmoment, während der Gütefaktor dabei absinkt. Die Forderungen großes Drehmoment und großer Gütefaktor widersprechen sich, so daß für unseren Anwendungsfall, bei dem beide nicht befriedigt werden können, Kompromißlösungen auftreten. Die mit dem normalen Aufbau praktisch erreichbaren Werte liegen für Strommesser, bei denen folgende Vorschriften bestehen,

äußere Abmessungen	kleine FALUnorm,
Kompaßbeeinflussung	$< 5°$,
Spannungsabfall	60 mV,
Temperatureinfluß	$< 0{,}5\%/10°$ C,
Gewicht	< 300 g,

*) Von der Technischen Hochschule zu Karlsruhe genehmigte Dissertation D 90.

Digitized by Google

etwa wie folgt:

Richtvermögen . . . . ~ 50 mgcm/90°,
Gütefaktor . . . . . 0,5 bis 1,0.

Untersuchungen mit diesem Aufbau haben jedoch ergeben, daß bei der normalen Fabrikation die Empfindlichkeit gegen Beschleunigungen nicht immer genügend klein gehalten werden konnte (Forderung $M_D \geq 100$ mgcm/90°) und daß sich immer wieder schon nach verhältnismäßig kurzen Schüttelversuchen Lagerschwierigkeiten einstellen (Forderung deshalb $\gamma > 1{,}0$).

Der praktische Flugbetrieb fordert also, da der Leistungsaufwand klein gehalten werden soll, eine Empfindlichkeitssteigerung der Geräte, die jedoch nicht auf Kosten des Platzes und des Gewichtes gehen darf. Es wird demnach eine Induktionssteigerung ohne Magnetgewichtserhöhung verlangt, die, wie die Erfahrung zeigt, mit den normalen Drehspulmagnetanordnungen nicht zu erreichen ist.

Die Forderung nach Induktionserhöhung ohne Gewichtssteigerung tritt infolge der umfassend geltenden Flugzeugforderung nach geringstem Gewicht allgemein bei allen nach dem Drehspulprinzip arbeitenden Bordgeräten auf. Sie wird auch sonst oft beim Aufbau von zu anderen Zwecken verwendeten Dauermagnetanordnungen auftreten, so daß die Klärung der Frage, wieweit eine Induktionssteigerung möglich ist, allgemeinen Wert hat.

II. Grundsätzliche Überlegungen zum günstigsten Aufbau des Flugzeugbordgeräts nach dem Drehspulprinzip.

1. Zum Aufbau von Stahlmagnetanordnungen.

Einer früheren Untersuchung[1]) entnehmen wir die zur Erfüllung der oben geforderten Induktionssteigerung ohne Gewichtserhöhung zu beachtenden Grundregeln für den Aufbau der Magnetanordnung.

Der magnetische Kreis eines Dauermagneten setzt sich im allgemeinen zusammen aus Stahlmagnet M und Polschuhen bzw. Jochen P aus Weicheisen, die den Fluß zum Arbeitsraum L führen:

	Index	Länge	Querschnitt	Permeabilität
1. Stahlmagnet .	m	l_m	F_m	$\mu_m > \mu_0$
2. Polschuhe . .	p	l_p	F_p	$\mu_p \gg \mu_0$
3. Arbeitsraum .	l	l_l	$F_l = c \cdot F_m$	μ_0

$$V = H_c \cdot l_m = H_m \cdot l_m + H_p \cdot l_p + H_l \cdot l_l \quad . . \quad (1)^2)$$

H_c = Koerzitivkraft.

Da $\mu_p \gg \mu_0$, gilt:

$$H_c = H_m + H_l \cdot \frac{l_l}{l_m} \quad . . . . . \quad (2)$$

Weil im Nutzluftspalt im allgemeinen $H_l = \frac{B_l}{\mu_0}$, wird:

$$H_c = H_m + \frac{B_l}{\mu_0} \cdot \frac{l_l}{l_m} \quad . . . . . \quad (3)$$

Setzen wir für den Fluß im Nutzraum $B_l \cdot F_l = B_m \cdot F_m \cdot \eta$, den Fluß im Magneten mal η, dem Verhältnis des im Nutzraum ausgenützten Flusses zu dem aus dem Magneten austretenden Fluß, so bekommen wir:

$$H_c = H_m + B_m \cdot \frac{F_m}{F_l} \cdot \eta \, \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_l}{l_m} \quad . . . . . \quad (4)$$

Da der Zusammenhang zwischen B_m und Magnetspannung graphisch durch die Entmagnetisierungskurve gegeben ist, findet die Lösung dieser Gleichung wie in allen derartigen Fällen am besten graphisch statt.

Zeichnet man in die von den Magnetstahlfirmen angegebene Entmagnetisierungskurve $B = f(H)$, die einen Teil der gesamten Hysteresisschleife darstellt, eine unter dem Winkel α zur Ordinate verlaufende Entmagnetisierungsgerade durch den Koordinatenursprung ein, so gilt (siehe Bild 1):

$$H_c = H_m + B_m \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad . . . . . \quad (5)$$

[1]) W. Fischer, Berechnung von Stahlmagneten. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, S. III 61. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin.

[2]) K. Küpfmüller, Theoretische Elektrotechnik, S. 154.

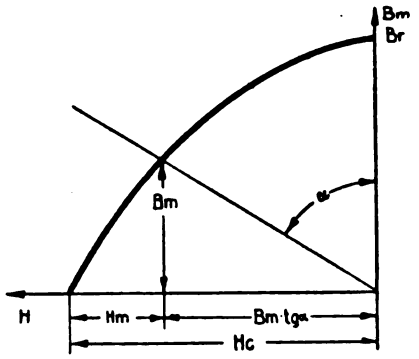


Bild 1. Entmagnetisierungskurve und Entmagnetisierungsgerade.

Macht man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_m}{F_l} \cdot \frac{\eta}{\mu_0} \, \frac{l_l}{l_m} \quad . . . . . \quad (6)$$

so erfüllt der so gewonnene Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve die Gleichung (4). Man kann also aus den Konstruktionsmaßen (l_l; l_m; F_m; F_l) und der Kenntnis von η einen Dauermagneten berechnen.

Der für die magnetische Leistung des Dauermagneten maßgebende Betrag ist die pro Volumeneinheit des Magneteisens in dem Arbeitsraum aufgebaute magnetische Feldenergie.

Die Energie im homogenen Feld ist:

$$W_{\text{Wattsec}} = \frac{1}{2} \cdot H \, \frac{\text{A}}{\text{cm}} \cdot B \, \frac{\text{Vs}}{\text{cm}^2} \cdot V \text{cm}^3 \quad . . . . . \quad (7)$$

Mit

$$H_l = \frac{B_l}{\mu_0}, \quad B_l = B_m \cdot \frac{F_m}{F_l} \cdot \eta, \quad V_l = F_l \cdot l_l$$

wird die magnetische Energie im Nutzraum

$$W = \frac{1}{2} \cdot {B_m}^2 \cdot \frac{{F_m}^2}{F_l} \cdot \frac{\eta^2}{\mu_0} \cdot l_l.$$

Das Magnetvolumen ist $V_m = F_m \cdot l_m$, und es wird die pro Raumeinheit des Magneteisens in dem Nutzraum aufgebaute Energie:

$$w = \frac{W}{V_m} = \frac{1}{2} \cdot {B_m}^2 \cdot \eta \cdot \frac{F_m}{F_l} \cdot \frac{\eta}{\mu_0} \cdot \frac{l_l}{l_m}$$

oder

$$w = \frac{1}{2} \cdot {B_m}^2 \cdot \eta \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad . . . . . \quad (8)$$

Dieses w muß ein Maximum werden, was offenbar bei einem ganz bestimmten Winkel (α_{opt}, flächengrößtes Dreieck $o B_m P$, s. Kurve b in Bild 2) und bei möglichst großem η ($\eta \to 1$) der Fall ist. Aus der Energiekurve des Stahles b bekommt man die Energiekurve des Nutzraumes durch Multiplikation mit η; $w = b \cdot \eta$. Für $\eta = 1$ (ohne Streuung) wird $w = b$.

Noch klarer wird der Einfluß des Verhältnisses η, wenn man die Luftspaltinduktion B_l betrachtet. Diese ist

$$B_l = B_m \frac{F_m}{F_l} \cdot \eta.$$

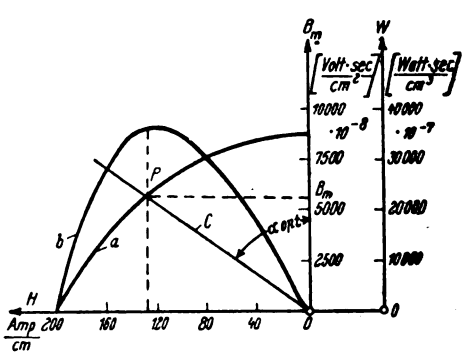


Bild 2. Entmagnetisierungskurve a, Energiekurve b, optimale Entmagnetisierungsgerade c für 30 % Co-Stahl.

Digitized by Google

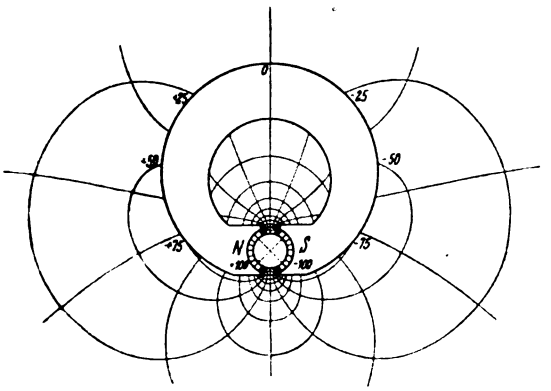


Bild 3. Luftraumfeldverteilung einer Ringmagnetanordnung; Energieausnutzung 40 %.

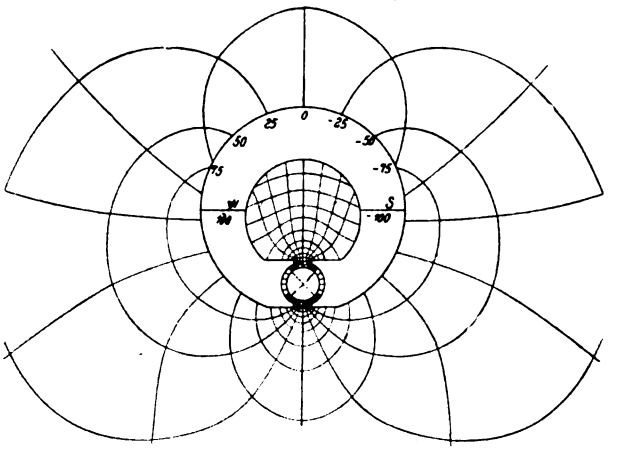


Bild 4. Luftraumfeldverteilung einer Ringmagnetanordnung mit Polschuhen; Energieausnutzung 38 %.

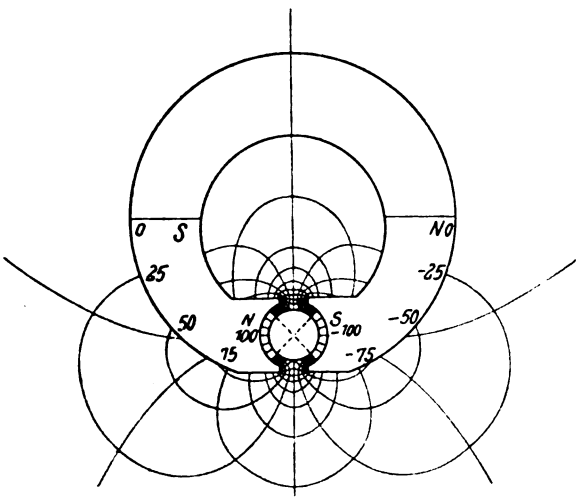


Bild 5. Luftraumfeldverteilung einer Ringmagnetanordnung mit Joch; Energieausnutzung 44 %.

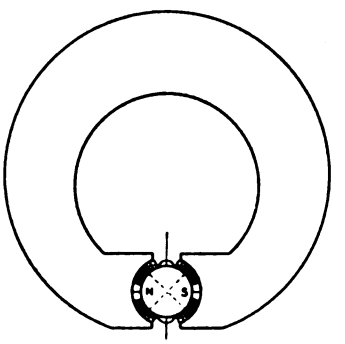


Bild 6. Kernmagnetanordnung. Energieausnutzung 69 %.

Setzen wir konstantes B_m an, am besten $B_{m\,opt}$, was man mit Rücksicht auf höchsten Energieaufbau wohl immer machen wird und was durch die vorläufig freien Größen l_l und l_m möglich ist, so sieht man, daß die Induktion unmittelbar vom Verhältnis $\frac{F_m}{F_l}$ und von dem Ausnutzungsverhältnis η abhängig ist. Bei gleichbleibendem Verhältnis $\frac{F_m}{F_l}$, das z. B. konstruktiv festgelegt sein kann, ist die Luftspaltinduktion direkt η proportional.

Die Frage nach der Größe des Ausnutzungsverhältnisses η für eine bestimmte Anordnung wird am besten in bekannter Weise[3]) durch Aufzeichnen von Feldbildern geklärt. Durch Gegenüberstellung solcher Feldbilder verschiedener Anordnungen (s. Bild 3, 4, 5) kommt man zu zwei Forderungen, wenn ein möglichst großes η erreicht werden soll.

1. Die Pole des Magneten selbst sollen möglichst nahe der Stelle sein, wo die magnetische Energie aufgebaut werden soll (Nutzluftspalt) und

2. die verwendeten Magnete sollen möglichst kurz sein.

Setzt man konstanten Nutzraum voraus, so heißt die zweite Forderung, daß möglichst solche Magnetmaterialien verwendet werden sollen, die im Luftraum einen maximalen Energieaufbau (Forderung von oben) bei möglichst kurzer Baulänge haben. In dieser Richtung werden die modernen Magnetstähle (Al-Ni-, Co-Ti-Stähle) entwickelt.

Diese Stähle weisen außerdem gegenüber älteren Magnetstählen gesteigerte maximale magnetische Energie auf, so daß die Erfüllung der ersten Forderung, die ja eine bauliche, konstruktive Forderung ist, erleichtert wird.

[3]) Siehe R. Richter, El. Maschinen Bd. I, S. 16ff.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die Steigerung der Magnetenergie pro Volumeneinheit des Magnetmaterials im allgemeinen auch eine Magnetanordnung mit größerem η ermöglicht, wodurch die Wirksamkeit der Anordnung über das Maß der Steigerung der spezifischen Magnetenergie bei dem neueren Magnetmaterial erhöht wird.

2. Folgerungen aus der Magnetberechnung im Hinblick auf leichten, streuungsarmen Geräteaufbau und dessen Ausführungsformen.

Aus der Magnetberechnung ergeben sich zur Erreichung des maximalen Nutzenergieaufbaues folgende Forderungen:

1. Verwendung energiereichsten Materials,
2. Einhaltung des günstigsten Arbeitspunktes,
3. Anwendung einer Magnetanordnung mit großem Ausnutzungsverhältnis.

Die zweite Forderung verlangt, daß die Abmessungen so gewählt werden, daß der Entmagnetisierungsfaktor gerade $\operatorname{tg} \alpha_{opt}$ ist.

Die dritte Forderung — höchste Energieausnutzung — wird bei Geräten, die nach dem Drehspulprinzip arbeiten, erfüllt, wenn der elektrische Leiter beim Durchlaufen seines Arbeitsbereiches einen möglichst großen Teil der gesamten aus dem Magneten austretenden Kraftlinien schneidet. Eine vollständige Erfassung ist bei Drehspulgeräten naturgemäß nur möglich, wenn sich die Spule um den ganzen Magnetpol bis an die beiderseitigen magnetischen Mitten des Magnetenergieerzeugers bewegen kann, wozu sich der Magnet ganz oder mindestens einpolig innerhalb des von der Spule beim Ausschlag gebildeten Raumes befinden muß. Eine solche Kernmagnetanordnung ist in Bild 6 gezeigt. Das Energieausnutzungsverhältnis beträgt 69%, wenn der Ausschlagbereich 90° umfaßt. Steigert man bei dieser Anordnung den Ausschlagswinkel, so geht die Energieausnutzung in

Digitized by Google

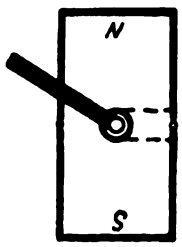


Bild 7. Kernmagnetanordnung mit Bohrung (gestrichelt mit Nut).

Bild 8. Kernmagnetanordnung mit besonders ausgebildeten Magneten.

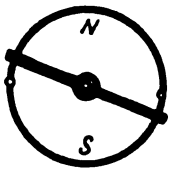


Bild 9. Zylinderkernmagnetanordnung mit symmetrischer Spule.

Bild 10. Kernmagnetanordnung mit Weicheisenrückführung.

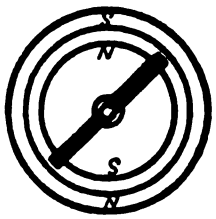


Bild 11. Anordnung mit Rückführung aus Magnetmaterial; keine reine Kernmagnetanordnung.

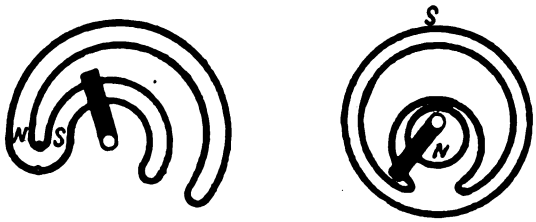


Bild 12 bis 14. Kernmagnetanordnung für großen Winkel.

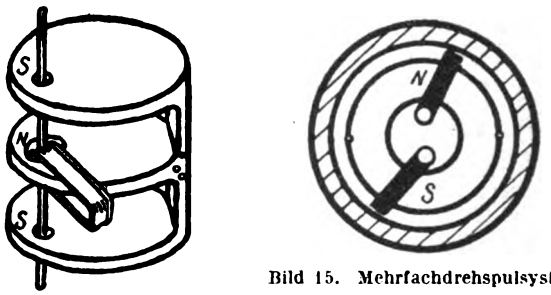


Bild 15. Mehrfachdrehspulsystem.

die Höhe, ganz gleich wie die Feldverteilung im Luftspalt ist, während sie bei den üblichen Geräten mit normalem Luftspalt bei Überschreitung eines Ausschlagbereiches von etwa 90% abnimmt. Die hohe Energieausnutzung, die mit dem Ausschlagswinkel ansteigt, ist wohl der bemerkenswerteste Vorteil einer solchen Kernmagnetanordnung gegenüber Außenmagnetanordnungen und macht diese Geräte hauptsächlich für Großwinkelgeräte geeignet.

Die Anwendung der Innenkernmagnetanordnung für Geräte, die nach dem Drehspulprinzip arbeiten, ist natürlich nicht an die in Bild 6 gezeigte Magnetausführungsform gebunden. Für die verschiedenen Ausführungsformen gilt jedoch allgemein, daß sich die Drehachse der Spule möglichst nahe bei der neutralen Zone des Magneten befindet, was nötigenfalls durch eine Bohrung oder Nut, Bild 7, im Magnetmaterial bzw. durch geeignete Ausbildung des Magneten selbst, Bild 8, geschieht. Dabei bewegt sich die Spule um den ganzen Magnetpol bis möglichst nahe an die beiderseitigen neutralen Zonen des Magneten heran. Im Verlaufe der Drehung bewegt sich der eine Pol oder auch beide Pole, Bild 9, des Magneten bezüglich der Spulenfläche durch diese hindurch. Die Anordnung kann also so getroffen sein, daß die Kraftlinien nur an einem Pol benutzt werden, Bild 7 und 8, oder so, daß bei Durchlaufen des Ausschlagbereiches die eine Spulenhälfte die Kraftlinien an einem Pol, die andere Spulenhälfte die Kraftlinien am anderen Pol durchschneidet, Bild 9.

Zur Erhöhung des magnetischen Flusses kann bei allen diesen Anordnungen eine magnetisch gut leitende Rückführung angeordnet werden, Bild 10, die gegebenenfalls aus Magnetmaterial bestehen kann, was bei einer Luftspaltanordnung mit großem Widerstand sehr zweckmäßig sein kann, Bild 11. Es kann das Magnetsystem auch so geformt werden, daß Polschuhe oder Rückführungen entbehrlich werden, Bild 12 bis 14.

Es ist selbstverständlich, daß in dem Arbeitsraum mehrere miteinander verbundene oder unabhängige Spulen angeordnet werden können, wie es z. B. zum Aufbau von Quotienten-, Differenzmessern oder Mehrfachsystemen, Bild 15, nötig wird.

Die kinematische Umkehrung aller Systeme führt zu entsprechenden Drehmagnetwerken mit feststehender Spule und sich drehendem Magneten. Es sind auch Anordnungen denkbar, bei denen sich sowohl die Spule als auch der Magnet bewegen können.

Als einfachste Anordnung wurde zunächst die Zylinderkernmagnetanordnung, die durch einen Zylinderkernmagneten innerhalb eines Weicheisenringes gekennzeichnet ist, untersucht, Bild 17.

III. Untersuchung der Zylinderkernmagnetanordnung.

Die aus Zylinderkernmagnet innerhalb eines Weicheisenringes bestehende Magnetordnung hat eine weit höhere Energieausnutzung als die für Drehspulgeräte normal verwandten Magnetanordnungen und ermöglicht deshalb grundsätzlich eine höhere Induktion im Arbeitsraum. Die mit dieser Anordnung im Arbeitsraum erzielbare Induktionsverteilung hängt jedoch nicht nur wie bei sehr langen Magneten (Ring- und Hufeisenmagnete) von der Luftspaltformung ab, sondern ist wegen der Kürze der Magnetisierungswege weitgehend von den bei der Magnetisierung eingehaltenen Bedingungen abhängig, die den Feldverlauf im Kern bei der Magnetisierung beeinflussen.

1. Magnetisierung, Luftspaltraum und Feldverteilung.

Wir unterscheiden zwei Magnetisierungsarten (homogener und unhomogener Feldverlauf bei der Magnetisierung), die zusammen mit den zwei verschiedenen Einbauarten (Zylinderkernmagnet mit dazu konzentrischem Weicheisenrückführungsring und Zylindermagnet mit besonders geformtem Weicheisenrückführungsring) vier Ausführungsmöglichkeiten ergeben.

Bisher ist bei der Magnetisierung von Dauermagnetstählen allgemein nur längshomogen magnetisiert worden, weil wegen der großen Länge des zu magnetisierenden Dauermagneten, die bisher infolge der Werkstoffeigenschaften der älteren Magnetstähle bei den meisten Konstruktionen nötig gewesen ist, jede andere bestimmt gewollte Formung der Kraftlinienröhren im Dauermagneten als die längshomogene bei der Magnetisierung praktisch ausgeschlossen war. Andererseits ist jedoch auch bei Magnetanordnungen mit nur kurzen Magnetlängen keine unhomogene Feldverteilung bei der Magnetisierung angewandt worden, weil die Wirkung der verschiedenen Magnetisierungsarten auf den Feldverlauf nicht bekannt war.

a) Homogener Feldverlauf im Kern bei der Magnetisierung.

Zur Erzeugung eines homogenen Feldes bei der Magnetisierung im Zylinderkern (1) wird dieser mit der in Bild 16

Digitized by Google

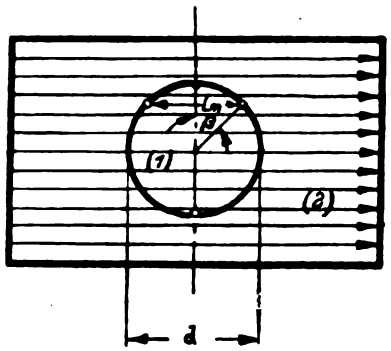


Bild 16. Magnetisierungshilfsvorrichtung zur Erreichung eines homogenen Feldes im Kern bei der Magnetisierung.

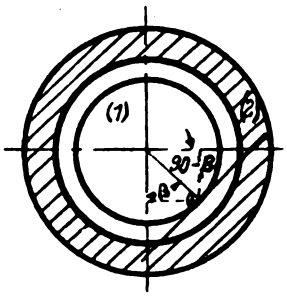


Bild 17. Magnetanordnung mit Zylinderkernmagnet und konzentrischem Luftspalt.
(1) Kern, (2) Weicheisenrückführungsring.

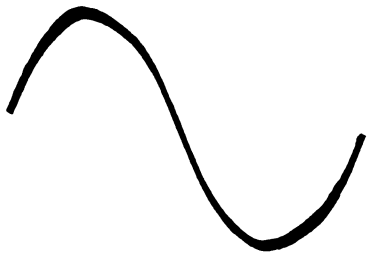


Bild 19. Sinusförmiger Feldverlauf im konzentrischen Luftspalt.

gezeigten Magnetisierungshilfsvorrichtung (2), die aus dem gleichen Magnetmaterial wie der Kern (1) besteht, in der angegebenen Pfeilrichtung magnetisiert. Die zu den einzelnen Umfangspunkten gehörenden Magnetisierungslängen l_m des Kernes werden dann gleich dem doppelten senkrechten Abstand von der 0-0-Linie.

$$l_m = d \sin \beta.$$

Konzentrischer Luftspalt. Verwendet man den so homogenen magnetisierten Kern in der in Bild 17 gezeigten Magnetanordnung, so beträgt für jeden Umfangspunkt des Kernes das Verhältnis Luftspaltfläche zu Magnetfläche

$$c = \frac{F_l}{F_m} = \frac{1}{\sin \beta} \text{ (Bild 17).}$$

Die Luftspaltfläche wird dabei am Kernumfang gemessen, was bei den üblichen kleinen Luftspalten zulässig ist.

Für eine axial sehr lange Anordnung kann der Einfluß der beiden Enden vernachlässigt werden, so daß man $\eta = 1$ setzen kann. Mit diesen Werten für c und η erhält man in der früher angegebenen Formel für den Entmagnetisierungsfaktor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta}{c} \cdot \frac{l_l}{\mu_0 l_m} = \sin \beta \frac{l_l}{\mu_0 d \cdot \sin \beta} = \frac{l_l}{\mu_0 \cdot d}.$$

Der Entmagnetisierungsfaktor ist also nach dem Zusammenbau der Magnetanordnung für alle Magnetisierungsröhren gleich und nur vom Kerndurchmesser und dem Luftspalt abhängig. Die Induktion im Luftspalt wird dann

$$B_l = B_m \cdot \frac{\eta}{c} = B_m \sin \beta.$$

Der Verlauf des magnetischen Feldes im Arbeitsraum einer konzentrischen Zylinderkern-

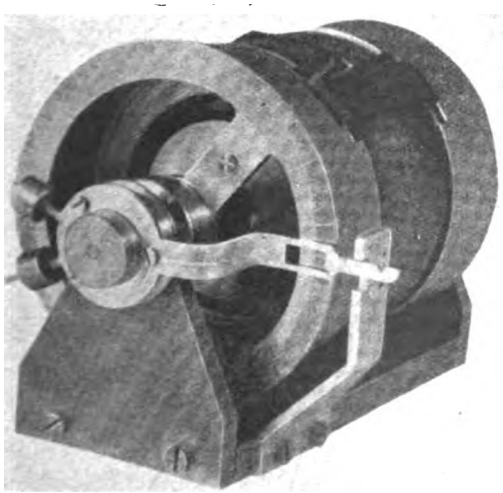


Bild 18. Feldprüfgerät für Zylinderkernmagnetanordnung.

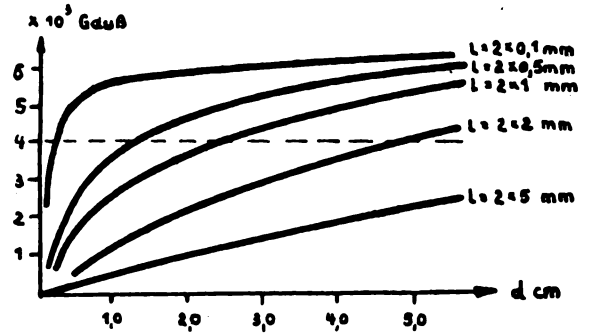


Bild 20. Sinusfeld; Amplitude der Induktion in Abhängigkeit vom Luftspalt und Durchmesser.

magnetanordnung mit homogen magnetisiertem Kern ist sinusförmig. Diese Induktionsverteilung wurde auch mittels des in Bild 18 abgebildeten Feldprüfgerätes festgestellt, bei dem die Feldstärke des Luftspaltfeldes durch Auswiegen der Kraft einer stromdurchflossenen Spule in diesem Feld oder auch durch Bewegung eines Leiters und Aufnahme der entstehenden Spannung gemessen werden kann, Bild 19, Oszillographenaufnahme.

Die errechneten Amplitudenwerte der Induktion sind in Abhängigkeit vom Durchmesser und dem Luftspalt in Bild 20 aufgetragen. Für das sinusförmige Feld ist die Induktion im Magneten gleich der Maximalinduktion im Arbeitsraum, so daß sofort entlang der gestrichelten Horizontalen durch $B = 4000$ Gauß $= B_{m\,\text{opt Oerstit 500}}$ die für die maximale Energieabgabe einzuhaltende Bindung zwischen Luftspalt und Durchmesser zu ermitteln ist.

Nichtkonzentrischer Luftspalt. Zur Erreichung einer anderen als sinusförmigen Luftspaltfeldverteilung muß bei Verwendung des homogen magnetisierten Zylindermagneten eine Luftraumformung vorgenommen werden. Diese Möglichkeit der Luftspaltfeldbeeinflussung ist vom Aufbau der Quotientenmeßgeräte her bekannt. Hierbei ist jedoch die Entmagnetisierung in den einzelnen Kraftlinienröhren nicht mehr konstant, und es kommt im Magneten ein innerer Fluß in Richtung von den Röhren größerer Entmagnetisierung zu den Röhren geringerer Entmagnetisierung zustande. Wir vernachlässigen zunächst diesen Einfluß, rechnen ein Beispiel durch und werten die Wirkung der ungleichmäßigen Entmagnetisierung anschließend.

Bei dem durchgerechneten Beispiel wird bei homogener Magnetisierung im Kern homogener Feldverlauf in einem gewissen Luftspaltbereich verlangt. Der angegebene Weg kann auch für andere Feldverläufe und auch für den Fall der Kernformung sinngemäß angewandt werden, wenn aus irgendeinem Grunde die Luftspaltraumformung durch Formung des Magnetkernes oder von Kern und Rückführungsring vorgenommen werden soll.

Forderung: Luftspaltfeld homogen, also für alle Kraftlinienröhren ν

$$B_{l_\nu} = \frac{\eta}{c_\nu} \cdot B_{m_\nu} = \text{konst.} = \frac{F_{m_\nu}}{F_{l_\nu}} \cdot B_{m_\nu}, \text{ da } \eta = 1.$$

Digitized by Google

F_m ist bei homogener Magnetisierung für alle Kraftlinienröhren gleich, so daß verlangt wird

$$\frac{B_{m_\nu}}{F_{l_\nu}} = \text{konst. und da, Bild 18, } F_{l_\nu} = \frac{F_{m_\nu}}{\sin \beta_\nu},$$

heißt die Bedingung für homogenes Feld im Luftspalt

$$B_m \cdot \sin \beta = \text{konst. für alle Röhren } \nu.$$

Bei homogener Magnetisierung muß für homogenes Luftspaltfeld bei steigendem $\sin \beta$ B_m abnehmen, und zwar so, daß

$$B_m = \frac{B_l}{\sin \beta} \cdot \quad B_l = \text{Luftspaltfeld.}$$

Im praktischen Anwendungsfall kann man für die Ausschlagsgrenzen die Induktion $B_{m\beta_0}$ bestimmen, da die hierzu notwendigen Werte alle bekannt sind

$$\left(l_{l\beta_0};\ c = \frac{1}{\sin \beta_0};\ l_{m\beta_0}\right)$$

hinreichend genau. Hieraus erhält man $B_l = B_{m\beta_0} \cdot \sin \beta_0$, so daß man sich die zu den anderen Kernumfangspunkten gehörenden $B_m = \frac{B_l}{\sin \beta}$ errechnen kann. Aus der Entmagnetisierungskurve bekommt man dann den zu dem errechneten B_m gehörigen tg α und kann aus diesem, da im übrigen alle Werte festliegen, l_l ermitteln.

Beispiel: Drehspulgerät, Kerndurchmesser 18 mm, Rähmchenbreite 8 mm, Ausschlagwinkel 90°, geringst möglicher Luftspalt 2 × 1,5 mm.

Forderung: Luftspaltfeld muß über 135° konstant sein.

Mit den gegebenen Abmessungen errechnet sich für die Ausschlagsgrenzen der tg α zu:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\eta \cdot l_l}{\mu_0 \cdot c \cdot l_m} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \sin \beta_0 \cdot \frac{0{,}15 \cdot 2}{1{,}8 \cdot \sin \beta_0} = \frac{0{,}167}{\mu_0}.$$

Da definitionsgemäß μ_0 = Gauß/Oersted ist, so hat diese Entmagnetisierungsgerade eine Neigung von tg α = 0,167 Oersted/Gauß. Zeichnet man sie in die Materialkurve von Koerzit 30 bzw. Oerstit 500 ein, so bekommt man die zugehörigen B_m-Werte zu

$$B_{m\beta_0\,\text{Ko}\,30} = 1400 \text{ Gauß},$$
$$B_{m\beta_0\,\text{Oe}\,500} = 2500 \text{ Gauß}.$$

Die dazugehörigen Luftspaltinduktionen sind

$$B_l = \frac{\eta}{c} \cdot B_m = \sin \beta_0 \cdot B_m = 0{,}382 \cdot B_m,$$
$$B_{l\beta_0\,\text{Ko}\,30} = 0{,}382 \cdot 1400 = 535 \text{ Gauß},$$
$$B_{l\beta_0\,\text{Oe}\,500} = 0{,}382 \cdot 2500 = 955 \text{ Gauß}.$$

In der Zahlentafel Bild 21 sind die zu den Umfangspunkten mit dem Winkel β gehörigen B_m eingetragen, dann aus der Entmagnetisierungskurve tg α ermittelt, aus dem dann der zugehörige l_l-Wert bestimmt wird

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mu_0} \frac{\eta}{c} \cdot \frac{l_l}{l_m} = \frac{1}{\mu_0} \sin \beta \cdot \frac{l_l}{l_m};$$
$$l_l = \mu_0\, d \cdot \text{tg}\,\alpha, \text{ da } l_m = d \cdot \sin \beta.$$

β	$\sin \beta = 1/c$	Koerzit 30				Oerstit 500			
		$B_m = \frac{B_l}{\sin \beta}$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mu_0} \sin \beta \frac{l_l}{l_m}$ in Oe/G	$l_l = \mu_0 \cdot d \cdot \text{tg}\,\alpha$	l_l 2 cm	$B_m = \frac{B_l}{\sin \beta}$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mu_0} \sin \beta \frac{l_l}{l_m}$ in Oe/G	$l_l = \mu_0 \cdot d \cdot \text{tg}\,\alpha$	l_l 2 cm
22,5	0,38	1400	0,17	0,3	0,15	2500	0,17	0,3	0,15
30	0,5	1070	0,21	0,38	0,19	1914	0,22	0,4	0,2
40	0,64	832	0,28	0,52	0,26	1490	0,3	0,54	0,27
50	0,77	700	0,33	0,6	0,3	1250	0,38	0,68	0,34
60	0,87	620	0,40	0,72	0,36	1106	0,45	0,81	0,41
70	0,94	572	0,44	0,79	0,4	1020	0,49	0,88	0,44
80	0,99	545	0,47	0,85	0,42	974	0,52	0,94	0,47
90	1,0	536	0,48	0,86	0,43	951	0,54	0,97	0,49

Bild 21. Zahlentafel zur Berechnung der Luftspaltwege.

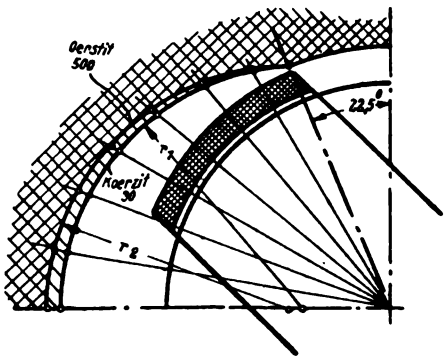


Bild 22. Luftspaltformung einer Zylinderkernmagnetanordnung für homogenes Luftspaltfeld bei homogener Kernmagnetisierung für zwei verschiedene Werkstoffe.

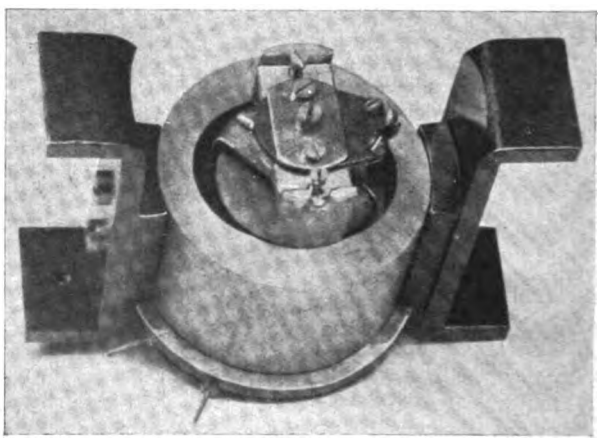


Bild 23. Drehspulgerät mit homogenem magnetisiertem Zylindermagneten und ungleich geformten Rückführungsring zur Erzeugung homogener Luftspaltfeldverteilung.

Wie man aus Bild 22 ersieht, bei dem für die beiden Magnetmaterialien die Luftspaltumrisse aufgetragen sind, benötigt die Magnetanordnung mit Oerstit 500 — Zylinderkern infolge der größeren Ausbauchung der Entmagnetisierungskurve gegenüber Koerzit 30 trotz gleichem Luftspalt an den Ausschlagsenden weiteren Luftspalt in der Mitte des Ausschlagbereiches.

Das Verhältnis Luftspalt in der Mitte des Ausschlagsbereiches zu Luftspalt an den Ausschlagsenden wird natürlich um so größer, je größer der Bereich ist, in dem die Induktion konstant sein soll. Da hierbei die mögliche Induktion gleichzeitig absinkt, so macht man den Bereich möglichst klein. Bei 90°-Geräten sollten also nicht so extrem breite Rähmchen verwendet werden wie in dem angeführten Beispiel. Außerdem sollte versucht werden, den Luftspalt an den Ausschlagsgrenzen möglichst klein zu halten, damit man zu höherer Induktion kommt. Bild 23 zeigt ein nach dieser Berechnungsmethode gebautes Drehspulgerät mit homogenem Luftspaltfeld. Die erhaltene Eichkurve hat nach einem halben Jahr noch keine Veränderung gezeigt, obwohl der nach dem Einbau sich im Kern einstellende magnetische Fluß nicht mehr homogen ist.

Für alle Fälle, bei denen ein anderer als homogener Feldverlauf verlangt wird, ist der angeführte Weg entsprechend abzuändern. Soll also in einem Anwendungsfall das Feld in der Mitte noch mehr als bei einem sinusförmigen Feld gegenüber den Ausschlagsgrenzen verschieden sein, so müssen entsprechend dem gewünschten Verlauf die Wege an den Ausschlagsenden vergrößert werden. Es wurde oben gefordert, daß der Magnet immer derartig belastet wird, daß er maximale Energie aufbaut. Bei dem homogen magnetisierten Zylinderkern im ungleich geformten Rückführungsring arbeiten die einzelnen Röhren mit verschiedenem tg α. Für welche Röhre wird nun am besten $B_{m\,\text{opt}}$ hergestellt. Bei dem durchgerechneten Beispiel wird infolge eines zu großen Luftspalts an den Ausschlagsenden in keiner

Digitized by Google

Röhre der optimale Energieaufbau erreicht. Wird der Luftspalt kleiner, oder der Zylinderkerndurchmesser größer gemacht, so wird zuerst in der Röhre β_0 tg α_{opt} erreicht. Bei weiterer Verkleinerung des Luftspalts bzw. bei weiter wachsendem Kerndurchmesser wird eine Röhre mehr der Ausschlagsmitte zu mit tg α_{opt} arbeiten, während die Röhre β_0 über dem Optimum weg ist; bis endlich alle Röhren mit größerem B_m als $B_{m\,opt}$ arbeiten. Wenn es konstruktiv möglich ist, sollte man die Röhre mit $B_{m\,opt}$ arbeiten lassen, bei der gerade die beiden Röhren β_0 und β_m gleiche Energie aufbauen, wobei also $B_{m\beta_0} > B_{m\,opt} > B_{m\beta_m}$ und $W_{\beta_0} = W_{\beta_m}$, weil dann die gesamte aufgebaute Energie am größten ist. Diese Angabe ist hinreichend genau; theoretisch müßte der genaue Verlauf der Energiekurve berücksichtigt werden. Für irgend andere Feldverteilungen ist ebenfalls die maximale Gesamtenergie, die aufgebaut werden kann, richtunggebend für die Bemessung der Gesamtanordnung.

Die Tatsache, daß die nach der beschriebenen Rechnungsart berechnete Magnetanordnung ein homogenes Feld ungefähr in der angegebenen Stärke besitzt, läßt den eingeschlagenen Berechnungsgang für die Praxis berechtigt erscheinen. Es wird dabei angenommen, daß der nach dem Zusammenbau sich im Magnetkern einstellende Fluß nur in der Magnetisierungsrichtung verläuft. Tatsächlich tritt jedoch in den einzelnen Kraftlinienröhren bei allen nichtkonzentrischen Luftspaltraumformungen verschiedene Entmagnetisierung in den einzelnen Röhren auf, infolge der die Röhren mit größerer Scherung (relativ größerem Luftspalt) geringeren magnetischen Spannungsabfall im Magnetkern haben. Die Feldstärke in diesen Röhren ist geringer als in den Röhren mit geringer Entmagnetisierung. Wir haben also senkrecht zur Feldstärke eine Änderung der Feldstärke; das Feld besitzt demnach Wirbel auch innerhalb des Kernes, so daß wir auch mit einem Fluß rechnen müssen, der sich innerhalb des Kernes bereits schließt. Die zu den Feldstärkewirbeln notwendige elektrische Strömung (da rot $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$) denken wir uns durch ein vergrößertes Nachlassen der beim Magnetisieren erreichten Magnetordnung in den Röhren mit größerer Entmagnetisierung verwirklicht[4]). Der innere Fluß von den Röhren, stärker zu denen geringerer Entmagnetisierung gerichtet, ist naturgemäß kleiner als der äußere Hauptfluß, weil der MMK der Röhren mit stärkerer Entmagnetisierung die MMK der Röhren mit schwächerer Entmagnetisierung entgegengeschaltet ist, während der Widerstand einer Röhre des inneren Kreises und des äußeren Kreises etwa gleich sind (bei tg α_{opt} ist ja $R_i = R_a$).

Die Störung des der Berechnung zugrunde gelegten Feldverlaufes kann aus diesen Gründen nicht allzu groß sein. Sie wirkt sich für die Röhren, bei denen der innere Fluß in Richtung des Hauptflusses verläuft, in einer Erhöhung des B_m, also in einer Belastung, also in einer Herabdrückung der nach außen zur Verfügung stehenden Spannung aus und umgekehrt. Es erfolgt demnach ein Ausgleich der nach außen wirkenden magnetischen Spannung, so daß man eine etwas geringere Ausbauchung des Luftraumfeldverlaufes vor der Polmitte der Magnete nötig hat. Eine genauere Nachprüfung, wieweit Abweichungen von der mit der angegebenen Berechnungsart errechneten Luftraumform nötig sind, unterblieb wegen der erfolgreicheren Luftspaltfeldbeeinflussung mittels Kraftlinienröhrenformung bei der Magnetisierung, die im nächsten Abschnitt beschrieben ist. Die durchgeführte Prüfung ergab mit der errechneten Luftspaltform für Meßgeräte genügende Homogenität (linearer Skalenverlauf).

b) Nichthomogener Feldverlauf im Kern bei der Magnetisierung.

Konzentrischer Luftspalt. Die in Bild 23 verwendete Luftspaltform ist zur einfachen Herstellung durch

[4]) Nach der Weißschen Theorie denkt man sich durch gleichgerichtete schnell kreisende elektrische Elementarladungen bis zur Sättigung magnetisierter Bezirke, die bei Unordnung den unmagnetischen Zustand ergeben. Bei der Magnetisierung werden die Achsen dieser Bezirke unter der Einwirkung des äußeren Feldes ausgerichtet, so daß sich eine magnetische Wirkung nach außen ergibt. Bei Abschalten des Feldes bleibt infolge der Eigenschaft des Magnetstahles die angenommene Ordnung im wesentlichen erhalten.

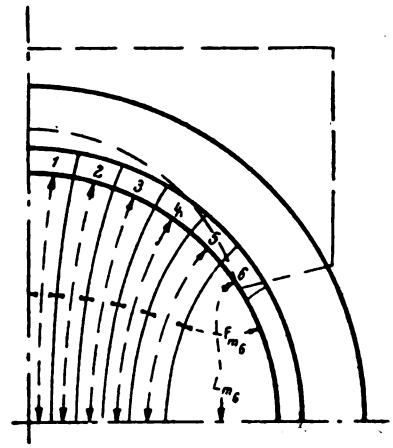


Bild 24. Innerer Magnetisierungsverlauf im Kern einer konzentrischen Zylinderkernmagnetanordnung für homogenes Luftspaltfeld.

Röhre	l_l	l_m	l_l/l_m	F_l	F_m	F_l/F_m	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu_0} \frac{l_l}{c} \frac{}{l_m}$	B_m	B_l
1	0,1	1,00	0,100	0,175	0,110	1,59	0,0628	4520	2840
2	0,1	0,98	0,102	0,175	0,112	1,56	0,0654	4450	2850
3	0,1	0,93	0,108	0,175	0,116	1,51	0,0712	4300	2850
4	0,1	0,86	0,116	0,175	0,125	1,40	0,0832	4000	2850
5	0,1	0,76	0,132	0,175	0,150	1,16	0,1128	3350	2870
6	0,1	0,58	0,172	0,175	0,380	0,46	0,3750	1300	2830

Kreiszylinderflächen angenähert worden. Die dabei nicht vermeidbaren Abweichungen von der errechneten Form des Ringes hatte jedoch keinen merkbaren Einfluß auf den Luftspaltfeldverlauf. Der Einbau eines solchen durch Fräsen geformten Rückführungsringes ist jedoch noch für viele Zwecke unmöglich, so daß sich die Aufgabenstellung aufdrängt, bei der konstruktiv weit einfacheren rein konzentrischen Zylinderkernmagnetanordnung beliebige Feldverteilung zu erreichen. Die Untersuchung dieser Frage ist um so wichtiger, als dadurch, daß wenn sich das Feld im Luftspalt beherrschen läßt, sich nicht nur die konzentrische Anordnung, also einfachster Aufbau und Herstellung ermöglicht, sondern auch geringste Lagerhaltung für die verschiedensten Verwendungszwecke ergibt.

Bei der im vorigen Kapitel beschriebenen Anordnung wurde zur Erreichung eines homogenen Luftspaltfeldes in den Kreis der Röhren mit großer magnetischer Spannung ein entsprechend großer magnetischer Widerstand außerhalb des Magneten eingeschaltet (großer Luftspalt). Jetzt liegt der Luftspaltwiderstand fest (konzentrischer Luftspalt); deshalb wird ein für die größeren magnetischen Spannungen entsprechend größerer magnetischer Widerstand innerhalb des Magneten durch relative Bemessung der Röhrenquerschnitte zueinander eingeschaltet. Es wird also eine Zuordnung von Kraftlinienröhrenaustrittsfläche und Röhrenausbildung verlangt. Als Beispiel der Wirkungsweise einer derartigen Zuordnung wird in der Zahlentafel zu der in Bild 24 gezeigten Anordnung das Luftspaltfeld errechnet. Es ergibt sich ein etwa über 120° homogener Luftspaltfeldbereich.

Man kann für eine gegebene Konstruktion und gewünschte Luftspaltfeldverteilung den notwendigen inneren Feldverlauf im Magneten ausprobieren, indem man jeweils ein Feld, von dem man glaubt, daß es richtig ist, aufzeichnet, die noch notwendigen Größen (l_m, F_m) daraus entnimmt und das Feld auf seine Richtigkeit prüft. Für die einzelnen Kraftlinienröhren ist natürlich $\eta = 1$, und für F_l und F_m sind Mittelwerte zu bilden; nötigenfalls ist die Unterteilung in Einzelröhren enger zu wählen.

Nach Ermittlung des Feldverlaufes ist dann die Aufgabe gestellt, die Zuordnung von Oberflächenteilen des Magneten und Kraftlinienröhrenausbildung vorzunehmen, die naturgemäß bei der Magnetisierung vorgenommen wird. Den Oberflächenteilen, die relativ größeren inneren Quer-

Digitized by Google

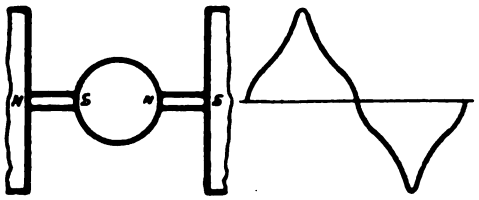


Bild 25. Magnetisierungsbedingungen und Feldverlauf; stark ausgeprägte Magnetpole.

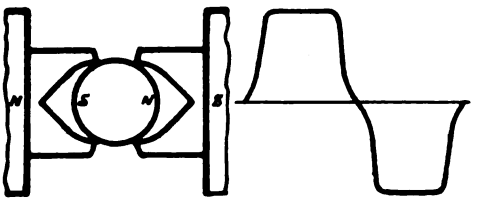


Bild 26. Magnetisierungsbedingungen und Feldverlauf; homogener Feldverlauf im Mittelbereich.

schnitt erhalten sollen, müssen mehr Kraftlinien zugeleitet werden, so daß sich diese Kraftlinienbündel im Kern bei der Magnetisierung ausbreiten. Die Wirkung dieser durch verschiedene Magnetisierungsbedingungen erreichten Kraftlinienröhrenformung im Magneten auf die Luftspaltfeldverteilung nach erfolgtem Einbau in den konzentrischen Rückführungsring wird in Bild 25 und 26 verdeutlicht. Die Zuleitung des Kraftflusses geschieht dabei mittels einer Magnetisierungshilfseinrichtung, über deren Ausbildung durch die Kenntnis des inneren Feldverlaufes bereits eine qualitative Aussage vorliegt (Ort größter und kleinster Annäherung der Vorrichtung an den Kern ist bekannt; siehe z. B. gestrichelte Hilfsvorrichtung in Bild 24. Die endgültige Form muß jedoch empirisch durch einige Magnetisierungstastversuche und Feldmessungen der zusammengebauten Anordnung gefunden werden, weil die Ausbildung des Flusses im Magnetkern außerdem weitgehend von der bei der Magnetisierung zur Verfügung stehenden magnetischen Spannung und von dem magnetischen Widerstand des übrigen magnetischen Kreises abhängt.

Will man ohne genaue Aufzeichnung der inneren Feldverteilung und Nachrechnung die ungefähre Höhe der zu erwartenden Induktion abschätzen, so kann man nach unseren Erfahrungen so rechnen, als ob die $B = f(\alpha)$-Flächen der aufgezeichneten gewünschten Feldverteilung und einer sinusförmigen Feldverteilung, die für gleichen Durchmesser und Luftspalt gilt, gleich wären. Bringt es die gewünschte Feldverteilung allerdings mit sich, daß die Arbeitspunkte bei der Anordnung mit der gewünschten Feldverteilung sehr viel anders liegen als bei sinusförmiger Verteilung, so daß sich der Energieaufbau im magnetischen Feld in den beiden Fällen allzustark unterscheidet, so gilt diese Annäherung nicht mehr. Dies ist besonders bei stark punkt- oder linienförmiger Einleitung des Flusses in den Kern der Fall, wobei sich gleichzeitig eine ungenügende Sättigungsmagnetisierung des Magnetmaterials bemerkbar macht, die die Entmagnetisierungskurve in Teilgebieten des Kernes zu geringeren Werten verschiebt. Nach unseren Erfahrungen gilt bei homogenen Feldern die Überschlagsrechnung ungefähr bis zu 110° Ausschlagsbereich. Bei Überschreitung dieses Bereiches werden die Röhren gegen die Ausschlagsendlagen sehr breit, s. Bild 24, so daß die Magnetinduktion und infolgedessen die abgegebene Energie stark abfällt, s. Zahlentafel zu Bild 24.

Bei der konzentrischen Zylinderkernmagnetanordnung tritt also zur Beeinflussung des Luftspaltfeldes an Stelle der üblichen Formung des Luftspaltraumes, also an Stelle der Bemessung der Kraftlinienröhren im Luftspaltraum eine Formung der Kraftlinienröhren im Magneten ein, deren Querschnittverhältnis ebenfalls auf die Arbeitsverhältnisse der Magnetanordnung einwirken.

Die Feldverteilung ist durch die Kraftlinienröhrenformung in weiten Grenzen änderbar, so daß die konzentrische Zylinderkernmagnetanordnung wegen ihrer einfachsten Herstellungsart und Lagerhaltung die allgemeinste Verwendung finden dürfte.

Nichtkonzentrischer Luftspalt. In der Praxis kann gegebenenfalls durch gleichzeitige Anwendung der Formung des Luftspaltes und Formung der Kraftlinienröhren im Kern eine bessere Ausnutzung erreicht werden. Solche Formen wird man sinngemäß nach den schon obenerwähnten Einzelfällen behandeln.

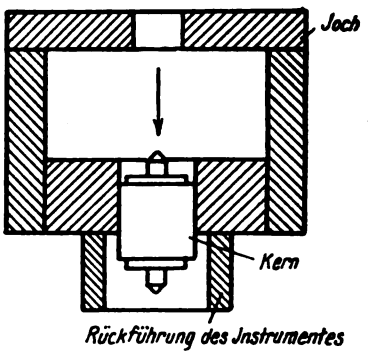


Bild 27. Hilfsmagnetisierungseinrichtung mit Joch.

c) Zusammenbau.

Bei den Versuchen wurde, um genau festliegende Verhältnisse zu haben, immer ein geschlossener Einbau vorgenommen, wozu eine Hilfsmagnetisierungsvorrichtung mit Joch verwendet wurde, Bild 27. Das Jochstück der Vorrichtung wird nach dem Magnetisieren, wenn sich der zu magnetisierende Magnet und die gerade benutzten Backen noch zwischen den Polen des Elektromagneten befinden, aufgelegt, so daß der magnetische Kreis beim Ausbauen aus dem Elektromagneten für den magnetischen Kern noch vollkommen geschlossen ist. Der Einbau erfolgt dann in der in Bild 27 gezeigten Art.

Es ist selbstverständlich, daß in allen Fällen, in denen die Stärkeverteilung des in den Kern einzuleitenden Flusses nicht zu sehr unterschiedlich ist (z. B. bei den in der Praxis normal verlangten Geräten), diese Verteilung auch durch den Rückführungsring hindurch erreicht werden kann. Man hat dazu nur genügend Fluß zuzuleiten, so daß der Rückführungsring gesättigt wird. Die Magnetisierungshilfsvorrichtungen werden dann außen an den Rückführungsring des vollständig zusammengebauten Geräts angelegt. In dem Fall ist das zur Vermeidung einer ungewollten Scherung oben beschriebene Schließen der Magnetisierungshilfsvorrichtung mittels Jochstücks überflüssig.

2. Kompaßbeeinflussung.

Die Untersuchungen gerade an der Zylinderkernmagnetanordnung sind mit angeregt worden durch die geringere Beeinflussung des Außenraumes gegenüber üblichen Anordnungen. Bei den früheren Anordnungen liegt die untere Grenze der Beeinflussung eines Kompasses in 10 cm äußerem Abstand vom Kompaß bei doppelt angeordneter Eisenkapselung etwa bei 5°. Die Herabdrückung des Kompaßfehlers unter 1°, die auf weitere Sicht gefordert werden muß, dürfte infolge des streuungsreichen Aufbaues auch bei noch stärkerer Abschirmung nicht möglich sein, da sich immer Lücken in der Abschirmung befinden. Für die untersuchten Zylinderkernmagnetanordnungen, bei denen neben den in den Ausschlagsbereich ausgestrahlten Kraftlinien auch die allermeisten Streulinien zwangsläufig durch den Flußrückführungsring zurückgeführt werden, liegt die Kompaßbeeinflussung durch die natürliche Abschirmung weit unter 5°. Sie ist von der Dicke und dem Material des Ringes, von Durchmesser und Material des Kernes sowie vom Luftspalt abhängig. In Bild 28 ist für einen 15 mm Oerstit 500-Kern in Abhängigkeit vom Luftspalt und Überstand des Rückführungsringes über den Kern die Kompaß-

Digitized by Google

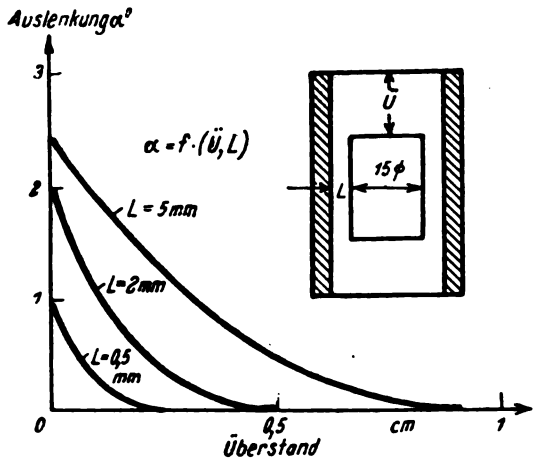


Bild 28. Kompaßbeeinflussung als Funktion von Überstand und Luftspalt. Kern Oerstit 500, 15 mm Dmr. Rückführungsring Hyperm 4.

ablenkung aufgetragen. Der ungesättigte Rückführungsring bestand aus Hyperm 4 (H_c = 0,1 — 0,4 Oersted).

Die Kurven lassen erkennen, daß bei richtiger Dimensionierung des Überstandes die Kompaßbeeinflussung auch bei sehr großen Luftspalten rasch unter die geforderte Grenze von 1° fällt. Bei größeren Kernen sinkt die Kompaßablenkung bei den normal vorkommenden Luftspalten ebenfalls sehr rasch mit dem Ringüberstand ab. Das Zylinderkernmagnetgerät mit Weicheisenrückführung benötigt also bei richtiger Bemessung des Überstandes keine weitere Abschirmung.

Weicheisen allein verursacht bereits eine Störung des Erdfeldes, die hauptsächlich von der größten Länge des Weicheisens abhängig ist. Die Magnetanordnung mit ihrem Weicheisenmantel darf deshalb bei 1° zugelassener Kompaßbeeinflussung in 10 cm Entfernung vom Kompaß eine Mantellänge von 10 cm nicht überschreiten.

3. Temperatureinfluß.

Bei Verwendung der modernen Stähle ist der Temperaturkoeffizient des Luftspaltfeldes infolge des bei sehr hohen Temperaturgraden (~ 700°) liegenden Curiepunktes des Materials sehr gering, so daß er gewöhnlich vernachlässigt werden kann.

Bei Spezialgeräten, bei denen auch dieser geringe Fehler noch kompensiert werden muß, sowie bei Geräten, bei denen eine in die Messung eingehende Temperaturabhängigkeit irgendeines anderen Geräteteils, welche bei höherer Temperatur geringeren Ausschlag ergibt, beseitigt werden muß, verwendet man magnetische Nebenschlüsse, deren magnetischer Leitwert mit steigender Temperatur abnimmt, so daß durch die hervorgerufene Vergrößerung des Nutzflusses der alte Wert in der Anzeige erreicht wird.

Bei Kernmagnetgeräten, bei denen die Spule direkt den Kern umfaßt, muß man das temperaturabhängige Material

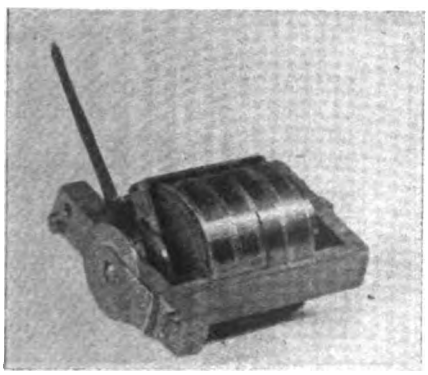


Bild 30. Drehspulsystem mit geschichtetem Zylinderkern. 18 mm Dmr., Luftspalt 2 × 1 mm, Temperaturgang 5%/10°C, fiktive Induktion 1500 Gauß.

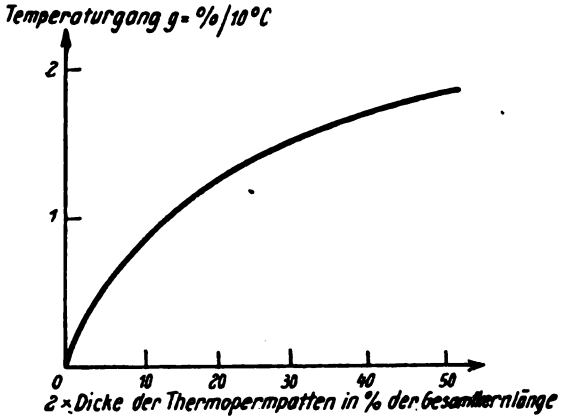


Bild 29. Temperaturgang der Induktion eines Zylinderkerndrehspulsystems in Abhängigkeit von Thermopermplättchendicke an der Ober- und Unterseite des Kernes. Kernabmessung 18 mm Dmr., 15 mm Länge.

ebenfalls innerhalb der Spule anbringen. Bringt man die temperaturabhängigen Plättchen an den Enden des Kernes an, so ergeben sich die in Bild 29 dargestellten Verhältnisse. Während die Empfindlichkeit des Geräts mit der axialen Länge entsprechend dem Zunehmen des Thermopermplättchens abnimmt, nimmt der Temperaturkoeffizient des Magnetflusses anfänglich rasch und später langsam zu, was auf die beschränkte Tiefenwirkung der Thermopermplättchen auf den Kern zurückzuführen ist. Der durch die Plättchen dem Luftspalt entzogene Fluß strebt also bei Vergrößerung der Plättchendicke einem Grenzwert zu. Axial sehr langen Anordnungen (theoretisch unendlich langen) kann also mit Ober- und Unterplättchen allein überhaupt kein Temperaturgang aufgezwungen werden. Zur Erhaltung der Empfindlichkeit des Geräts und zur Vergrößerung der Wirksamkeit der Thermopermplättchen wurde deshalb ein geschichteter Kern eingeführt, Bild 30.

4. Anwendungsmöglichkeit und konstruktiver Aufbau.

Generatoranordnungen. Der rein sinusförmige Verlauf, der mit der Zylinderkernmagnetanordnung zum ersten Male mit einfachsten Mitteln erreichbar ist, dürfte besonders für den Aufbau von Meßgeneratoren Beachtung finden, die infolge der rein zylindrischen Form des Rotors für allerhöchste Drehzahlen gebaut werden können (Tonfrequenzmaschinen). Die änderbare Feldverteilung macht die Zylinderkernmagnetanordnung besonders für Spezialgeneratoren geeignet, bei denen ein ganz bestimmter Wechselverlauf vorgeschrieben ist.

Meßgeräte. Die Zylinderkernmagnetanordnung mit sinusförmigem Luftspaltfeld ist z. B. für den Aufbau eines Gerätes zu verwenden, bei dem die entwickelte Kraft proportional dem Strom und dem Sinus des Ausschlagswinkels

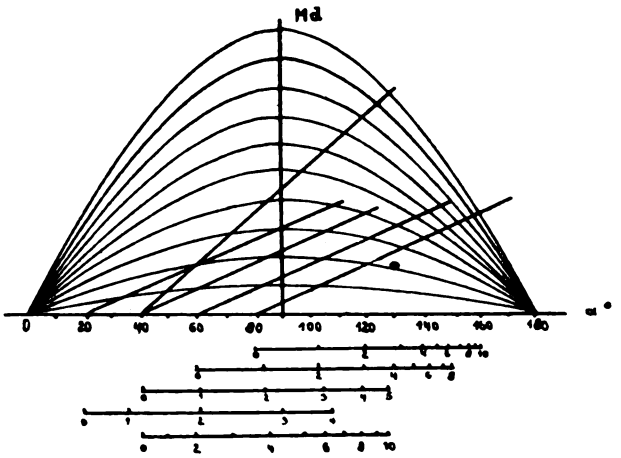


Bild 31. Ermittlung des Skalenverlaufes bei sinusförmigem Luftspaltfeld und linearer Federcharakteristik.

Digitized by Google

sein soll. Sie kann auch für den Aufbau eines Anzeigegeräts verwendet werden, bei dem eine 360°-Anzeige durch eine dreifache Spule erreicht wird, in deren einzelnen gegenseitig um 120° versetzten Spulen jeweils solche Ströme fließen, daß die entwickelten Drehmomente bei der gewünschten Einstellung gerade Null ergeben.

Da mancherlei Anwendungen für ein mit linearer Federcharakteristik und sinusförmigem Luftspaltfeld ausgestattetes Drehspulwerk denkbar sind, so wurde der dabei mögliche Skalenverlauf näher untersucht. Wie man aus Bild 31 sieht, ist er in weiten Grenzen durch Änderung der Nullage der Spule gegenüber dem Magnetkern zu beeinflussen, was einer Verschiebung der Federcharakteristik in Abszissenrichtung in dem Bild gleich kommt. Stärkere Federn erweitern den Meßbereich, ändern jedoch den Skalencharakter nicht, während man durch Ausschlagsbegrenzung einen günstig erscheinenden Teil einer Gesamtkurve ausschneiden kann.

Die Nullage der Spule zum Kern richtet sich also nach dem gewünschten Skalenverlauf. Bei einem 90°-Gerät bekommt man nach Bild 31 gleichmäßige Unterdrückung am Ende und Anfang der Skala, wenn die Nullage der Spule etwa 25 bis 30° von der neutralen Zone des Magnetkernes entfernt liegt. Die Skaleneinheit an den Ausschlagsenden beträgt dabei etwa 35 bis 40% der Einheit in der Mitte der Skala. Das entwickelte Drehmoment für Vollausschlag beträgt bei diesem Skalenverlauf etwa $^9/_{10}$ des Drehmoments bei homogenem Luftspaltfeld, das einen Betrag der Induktion gleich der Amplitude des sinusförmigen Feldes hat. Durch Verschieben des Kernes gegenüber dem Federnullpunkt erreicht man bei solchen Geräten eine Veränderung des Skalenbildes, so daß man hiermit mit einfachsten Mitteln die Möglichkeit hat, durch Verdrehen des Kernes einen Teil des Meßbereiches empfindlicher zu messen, also die Skala dort auseinanderzuziehen. Eine Doppelskala oder eine mit der Kernumschaltung auswechselbare Skala würde dabei eine sofortige Ablesung ermöglichen.

Die Verwendung des Sinusfeldes bei Kreuzspulgeräten ermöglicht wegen des Nullwerdens der Induktion im Arbeitsraum die Darstellung großer Stromverhältnisse, ohne daß die Feldverteilung wie bei den üblichen Anordnungen durch äußere Magnetfelder beeinflußt werden kann.

Die Möglichkeit, mit gleicher Magnetanordnung verschiedene Feldverteilungen zu erreichen, ermöglicht einfache Lagerhaltung. So können z. B. gleiche Anordnungen ohne weiteres für den Aufbau von Drehspulwerken mit homogenem Feld und für Quotientengeräte mit beliebigem Feld verwendet werden. Dieses Beispiel erklärt am besten die allgemeine und dabei einfache Verwendungsmöglichkeit der Zylinderkernmagnetanordnung.

Der konstruktive Aufbau wird durch die Forderung der Verwendung energiereichster Stähle, also der zur Zeit praktischen verwertbaren Al-Ni-, Al-Ni-Co- und Co-Ti-Stähle bestimmt. Diese Stähle erhalten ihre Gütewerte durch Anwendung eines Ausscheidungshärtungsverfahrens, das naturgemäß zu inneren Spannungen und Rissebildung führt. Die außerordentliche Härte dieser Materialien läßt nur noch eine Bearbeitung durch Schleifen zu, so daß eine grobe Formgebung durch Gießen von Rohlingen erfolgt, wobei jedoch eine große Lunkerbildung zu beachten ist.

Der Aufbau wird aus diesen Gründen zweckmäßig so gewählt, daß das Material durch Klemmverbindung gehalten wird (z. B. Bild 30, festgeklemmter geschichteter Kern), wobei das Eingießen von Löchern bis zu 8 mm herunter mancherlei Erleichterungen verschafft (z. B. Drehmagnete für Motoren und Generatoren auf Achse aufgesetzt). Das Eingießen von anderen Metallteilen erweitert ebenfalls die konstruktiven Möglichkeiten (z. B. Eingießen von Befestigungsmaterial, in dem Gewinde angebracht wird). Bei dem in Bild 18 gezeigten Feldprüfgerät wurde die Befestigung des Versuchskernes durch Auflöten von zwei Messingzapfenträgern auf die Zylinderober- und -unterseite erreicht. Es

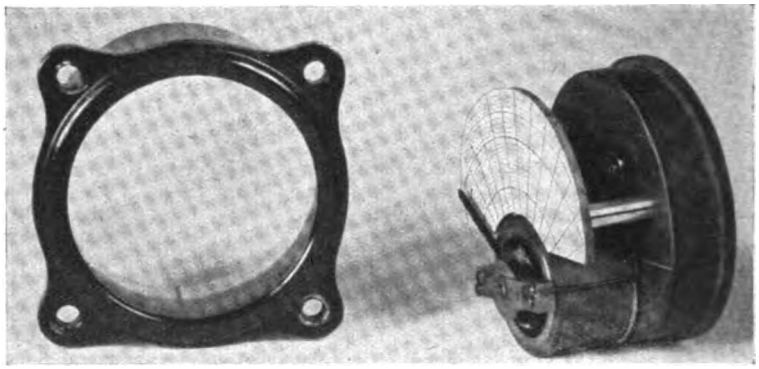


Bild 32. Drehspulgerät.

hat sich dabei gezeigt, daß Weichlotverbindungen, auch wenn die entsprechende Verbindungsstelle auf dem Magneten verkupfert wurde, keine mechanisch festen Verbindungen ergeben. Hartlotverbindungen sind in dieser Hinsicht bedeutend besser; es empfiehlt sich jedoch die Verwendung von Loten mit niedriger Temperatur, um die Gütewerte des Magnetstahles nicht herabzudrücken.

Das in Bild 32 gezeigte Drehspulgerät in der kleinen FALUnorm (Scheibendurchmesser 48 mm), dessen geschichteter Kern in Bild 30 abgebildet ist, läßt deutlich die Kleinheit eines derartigen Meßsystems erkennen, das trotz Temperaturkompensation ein über 120° homogenes Luftspaltfeld von 1500 Gauß besitzt. Bei einem wirksamen magnetischen Fluß bei 20° C von 4300 Maxwell und einem Temperaturgang von 5%/10° C beträgt bei diesem Gerät das Gewicht des aufgewandten Magnetmaterials 17 g und das Gesamtgewicht des Systems (ohne Gehäuse und ohne Skala) 60 g.

Eine kurze Betrachtung über die Dimensionierung derartiger Zylinderdrehspulgeräte sei noch eingefügt. Vergrößert man die Ausdehnung und den Durchmesser der Spule linear, so geht das entwickelte Drehmoment etwas mehr als quadratisch in die Höhe, weil bei gleichbleibendem Luftspalt auch die Induktion etwas ansteigt. Man stellt dann fest, daß bei linear steigender Leistung und etwas weniger als linear steigendem Rähmchengewicht (gleichbleibendes Grundgewicht für Zeiger, Achse, Feder) der für die Beständigkeit gegen Erschütterungen maßgebende Wert, der Gütefaktor nach Keinath $\gamma = 10 \frac{D}{G^{1,5}}$ bei größerem Rähmchen besser wird. Bei der heute üblichen Anordnung mit Außenmagnet ist jedoch eine derartige Spulenabmessung nicht verwendbar, weil die Normung für Abmessungen und Gewicht die Abmessungen des Magneten und damit den zur Verfügung zu stellenden Fluß einengen. Das beste Verhältnis von Durchmesser zu axialer Länge des Rähmchens ist von Magnetmaterial, Luftspalt und Durchmesser abhängig; es liegt ungefähr bei 3:2.

Vergleicht man das abgebildete Gerät mit Vollmagnetkern (ohne Temperaturkompensation) mit einem heutigen Tisch-Präzisionsgerät mit dem üblichen Hufeisenmagnet, so ergeben sich bereits bei der Spulengröße des abgebildeten Kernmagnetgeräts bessere Empfindlichkeitswerte. (1,95 AW/gcm bei einem handelsüblichen 10-Ohmgerät, 1,7 AW/gcm bei Kernmagnetgerät.) Bei größeren Spulen überwiegt die Empfindlichkeit der Zylinderkerngeräte bedeutend.

Bild 33 zeigt einen Schwingungsmeßgeber, bei dem verlangt war, daß auch bei großer Nullpunktverstellung noch gleiche Feldverhältnisse für die Spule herrschen. Es wurde bei dieser Anordnung ein über 130° homogenes Feld erreicht. Der zylindrische Kernmagnet ist innerhalb des magnetischen Flußrückführungsringes, auf dem die Spulen fest angeordnet sind, drehbar gelagert. Eine Masse an einem Hebelarm, die durch eine Spiralfeder in der Horizontallage gehalten wird, bringt den Kern bei Vertikalerschütterungen zum Drehen. Die Aufzeichnung geschieht durch einen Oszillographen. Die entstehende Spannung ist proportional der

Digitized by Google

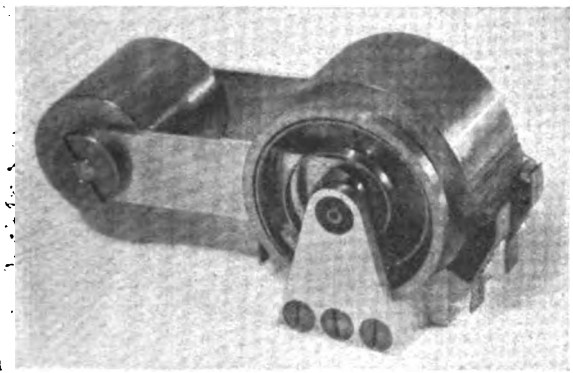


Bild 33. Schwingungsgeber.

Geschwindigkeit der Kerndrehung. Die Leistung des Geräts genügt zur Speisung einer 10-mA-Schleife im Siemens-Reiseoszillographen.

Frequenzbereich	5 — 100 Hz.
Amplitudenbereich	10 — 0,5 mm.
Gewicht	350 g.

IV. Zusammenfassung.

Eine Betrachtung über das heutige elektrische Flugzeugbordgerät nach dem Drehspulprinzip ergibt, daß im allgemeinen eine Verbesserung des Geräts nur noch erfolgen kann, wenn es gelingt, die Induktion im Arbeitsraum ohne eine Magnetgewichtserhöhung herauszusetzen. In einer grundsätzlichen Behandlung der Stahlmagnetanordnungen wird gezeigt, daß dieses nur möglich ist, wenn das Ausnutzungsverhältnis Nutzfluß/Gesamtfluß gesteigert wird, wozu an Hand einiger Feldbilder die zu beachtenden Grundregeln aufgestellt werden. Die Anwendung dieser Regeln führt bei Drehspulmagnetanordnungen zu der Kernmagnetanordnung, deren Ausführungsmöglichkeiten kurz behandelt werden. Die wichtigste Kernmagnetform, die Zylinderkernmagnetanordnung in einem Weicheisenrückführungsring, wird dann zunächst auf die Feldverteilung untersucht. Diese Verteilung der Kraftlinien im Luftraum hängt nicht nur von der Luftspaltraumausbildung, sondern auch von den Magnetisierungsbedingungen ab. An der Hand von Beispielen wird die Möglichkeit der Formung der Kraftlinienröhren und ihre Wirkung auf die Feldverteilung näher erläutert. Die Zylinderkernmagnetanordnung wurde weiterhin hinsichtlich Kompaßbeeinflussung und Temperatureinfluß untersucht. Einige Betrachtungen über Anwendungsmöglichkeiten und konstruktiven Aufbau sind angeschlossen.

Digitized by Google

Digitized by Google

East Anglia Library

NOV 16 1939

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 8 enthält Arbeiten von: E. Cambilargiu S. 403—411, W. Sottorf S. 412—418. W. Haack S. 419—424, F. Schultz-Grunow S. 425—428, J. Meyer S. 429—430, F. Seeber S. 431—437, W. Glaser S. 438—446, W. Oppelt S. 447—472.

LUFTF.-FORSCHG. BAND 16 | LFG. 8 SEITE 403 BIS 472 | MÜNCHEN, 20. 8. 1939

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Berechnung der Verdrehung kastenförmiger Träger, denen eine Wand fehlt. Von E. Cambilargiu . . . . . Seite 403

Neues Verfahren der Übertragung des Modellwiderstandes eines Gleitfahrzeuges auf die Hauptausführung. Von W. Sottorf . . . . . Seite 412

Beeinflussungswiderstand zwischen Flügel und Rumpf. Von W. Haack Seite 419

Zur Vorausbestimmung der turbulenten Ablösestelle. Von F. Schultz-Grunow . . . . . Seite 425

Zur Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses auf die Biegeeigenfrequenzen von Luftschrauben. Von J. Meyer . . . . . Seite 429

Neuere Verfahren der Kraftstoffprüfung. Von F. Seeber . . . . . Seite 431

Der Einfluß der Betriebsbedingungen auf das Kolbenringstecken bei der Betriebsstoffdauerprüfung. Von W. Glaser . . . . . Seite 438

Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmäßigkeit. Von W. Oppelt . . . . . Seite 447

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 16 20. August 1939 Lfg. 8

Berechnung der Verdrehung kastenförmiger Träger, denen eine Wand fehlt[1]).

Von E. Cambilargiu, Bologna*).

Die Verdrehung kastenförmiger Träger mit rechteckigem Querschnitt, denen eine äußere Wand fehlt und deren Kanten durch Gurte verstärkt sind, wird nach der Energiemethode berechnet. Die Verdrehungsbeanspruchung wird hauptsächlich durch die Biegung der beiden parallelen Wände aufgenommen, deren Steifigkeit durch die dritte Wand erhöht wird. Das Ergebnis wird experimentell an Kastenträgern aus Duralumin und Sperrholz geprüft. Infolge Selbstversteifung sind die gemessenen Verdrehungen 10 bis 30 vH geringer als die berechneten.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Theoretische Berechnung der Verdrehung.
III. Experimentelle Untersuchung.
a) Versuche mit dem geschlossenen Duraluminkasten zur experimentellen Bestimmung von *G*.
b) Belastungsversuche mit dem offenen Kasten aus Duralumin.
c) Versuche mit dem geschlossenen Sperrholzkasten zur experimentellen Bestimmung von *G*.
d) Belastungsversuche mit dem offenen Sperrholzkasten.

I. Einleitung.

Kastenförmige (rechteckige) Träger, denen eine Außenwand fehlt, mit oder ohne Schottwände, finden bei flugtechnischen Konstruktionen häufig Verwendung, so z. B. beim Flügel im Gebiet der Behälter oder der Lager für die Bomben oder das Fahrwerk, oder auch im Rumpf im Gebiet einer breiten Tür oder des Laderaums für abwerfbare Last (Bomben, Proviant), oder bei der Aufstellung von Waffen. Näherungsweise kann man als solche Träger auch Schalenkonstruktionen mit rechteckigem, abgerundetem Querschnitt betrachten, wie sie beim Flügel und Rumpf im Gebiet einer Öffnung gebräuchlich sind, die sich bis zu einer inneren Wand erstreckt oder jedenfalls beträchtliche Weite hat.

In Abschnitt II des vorliegenden Berichts wird gezeigt, daß es nicht möglich ist, einen solchen Aufbau nach der Methode von Bredt zu berechnen. Die Berechnung wird dann nach der Methode von Minelli durchgeführt.

In Abschnitt III wird ein experimentelles Verfahren angegeben, um die Werte des Gleitmoduls G exakt abzuleiten. Man bestimmt zunächst experimentell die Werte des Gleitmoduls G und des Elastizitätsmoduls E des verwendeten Werkstoffes und macht dann nacheinander einen Verdrehungsversuch und eine Verdrehungsberechnung der prismatischen dünnwandigen Träger mit rechteckigem Querschnitt, denen eine Wand fehlt. Als Baustoff dient Duralumin und Sperrholz. Die Rechenergebnisse werden erörtert und mit den Versuchsergebnissen verglichen.

[1]) Il calcolo torsionale delle travi a cassone mancanti di una parete.
*) Prof. a. d. Universität Bologna.

II. Theoretische Berechnung der Verdrehung.

Die Theorie von Bredt für die Verdrehung von hohlen Zylindern und Prismen mit dünnen Wänden besagt, daß ein Körper dieser Art die Torsionssteifigkeit Null hat, wenn ein Teil fehlt, der zwischen zwei Erzeugenden liegt, oder einfacher gesagt, wenn der Körper längs einer Erzeugenden zerschnitten wird. Es genügt, die Torsionssteifigkeitsformel von Bredt

$$B = \frac{4 G S^2}{\int \frac{d c}{s}}$$

zu prüfen. Wenn für einen noch so kleinen Bereich $s = 0$ ist, folgt daraus $B = 0$.

Statt dessen zeigt die Erfahrung, daß es möglich ist, eine gewisse, nicht vernachlässigbare Verdrehsteifigkeit für hohle, dünnwandige Prismen, die abgeschottet und offen sind, zu erhalten. (Die Abschottung entspricht der in der Theorie von Bredt betrachteten.) Die Prismen müssen nur an einem Ende oder an beiden — dieser Fall ist technisch wenig wahrscheinlich — derart eingespannt sein, daß sich der Endquerschnitt nicht axial verwerfen kann.

Die Verdrehsteifigkeit kann sehr vergrößert werden durch Gurte, die längs der Kanten des betrachteten hohlen und offenen Prismas verlaufen. Es handelt sich deshalb um eine Verdrehungsbeanspruchung, die nicht der klassischen nach St. Venant-Bredt entspricht, sondern eher um eine Beanspruchung, bei der der betrachtete Hohlkörper, den die äußere Kraft zu verdrehen versucht und tatsächlich verdreht, nicht allein mit Schubspannungen reagiert, sondern auch mit Normalspannungen. Anders ausgedrückt: Mehr als ein eigentlicher »Hohlkörper« liegt ein »System« von Trägern vor, die längs der Kanten verbunden sind, von denen jeder einzeln der Scherung und Biegung unterworfen ist.

Wenn man eine Art der Einspannung hätte, welche die axiale Verwerfung des Endquerschnittes nicht verhinderte, dann könnte der Hohlkörper keine von Null verschiedene Verdrehsteifigkeit haben. Wären die senkrechten Wände an der Einspannstelle mit einem zylindrischen Scharnier mit waagerechter Achse angeschlossen und die waagerechte Wand mit einem zylindrischen Scharnier mit senkrechter Achse, so daß der eingespannte Querschnitt sich beliebig verwerfen könnte, dann hätten wir die Verdrehsteifigkeit Null. Nehmen wir also an, daß die Einspannung in Wirklichkeit so ist, wie wir sie eingangs angegeben haben, und untersuchen wir die Torsion eines offenen, dünnwandigen Prismas mit Gurten, das abgeschottet ist, wie Bild 1 zeigt.

Das Verdrehmoment werde mittels zweier senkrechter Kräfte P übertragen, die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind und die an den senkrechten Wänden im End-

Digitized by Google

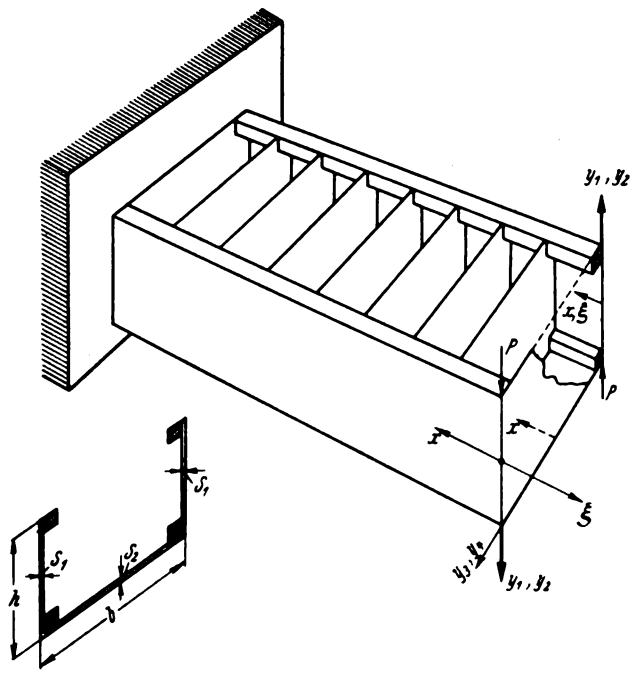


Bild 1. Schematische Darstellung des kastenförmigen Trägers.

querschnitt angreifen. Wir wollen sehen, welches die elementaren Formänderungen sind, aus denen der gesamte Formänderungszustand besteht.

Die zwei senkrechten Wände verformen sich durch antisymmetrische Biegemomente von gleicher und entgegengesetzter Größe. Wir bezeichnen die Biegungs- und Scherungsordinaten einer senkrechten Wand mit y_1 bzw. y_2.

Der Neigung der linken bzw. der rechten Wand, sich nach unten bzw. oben durchzubiegen, wirkt die Verbindung der senkrechten Wände mit der waagerechten Wand längs der Kanten entgegen. Tatsächlich will die waagerechte Wand verhindern, daß die untere Kante der senkrechten linken Wand kürzer und die der rechten Wand länger wird. Aus diesem Grunde entsteht an den senkrechten Wänden gegenüber der waagerechten Wand längs der Kante eine Gegenwirkung, die eine Dehnung dieser Wände in axialer Richtung hervorruft. Man muß daher eine axiale Gesamtverschiebung $\xi(x)$ der Querschnitte an den senkrechten Wänden in Betracht ziehen, natürlich in entgegengesetzter Richtung, und zwar in Richtung der negativen x-Achse für die linke Wand und in Richtung der positiven x-Achse für die rechte Wand.

Die waagerechte Wand empfängt ihrerseits von den senkrechten Wänden Reaktionen in axialer Richtung, die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, auf welche sie nur mit der Biegung y_3 und gegebenenfalls mit der Scherung y_4 reagieren kann. Aber sie wird sich nicht als Ganzes dehnen, d. h. ihre Mittellinie wird die ursprüngliche Länge behalten.

Der Verformungszustand ist daher auf die fünf Parameter y_1, y_2, ξ, y_3, y_4 zurückgeführt. Die positiven Richtungen dieser Formänderungen sind diejenigen, die in Bild 1 eingezeichnet sind. Man ersieht aus Bild 1 auch, daß die x-Achse für jede Wand mit dem Ursprung im äußeren freien Ende angenommen wurde. Die positive Richtung zeigt vom freien Ende zur Einspannung. Wir benutzen zur Untersuchung des Formänderungszustandes die energetische Methode, die auf dem Prinzip der virtuellen Arbeiten beruht[2]).

Man bezeichne mit L die Formänderungsarbeit und mit U die Summe der Skalarprodukte aus äußeren Kräften und Verschiebungswegen ihrer Angriffspunkte, und man bilde den Unterschied $L-U$. Das Prinzip besagt, daß zwischen allen mit der Art der Auflagerung vereinbarten Formänderungszuständen derjenige Zustand der wirkliche ist, für welchen $L-U$ zum Minimum wird. Drückt man also $L-U$ in Abhängigkeit von den Formänderungen aus und bestimmt man diese derart, daß sie den Auflagerbedingungen und der Minimumbedingung für $L-U$ genügen, so hat man den wirklichen Formänderungszustand. In dem betrachteten Falle ist:

$$U = P\left\{y_1(0) + y_2(0)\right\} = -\int_0^l P\,(y_1' + y_2')\,dx.$$

Nun soll L ausgedrückt werden.

Wir bezeichnen mit J_v bzw. J_0 das Trägheitsmoment einer senkrechten bzw. der waagerechten Wand, mit Ω die Querschnittsfläche einer senkrechten Wand, mit s_1 bzw. s_2 die Dicke einer senkrechten Wand von der Höhe h bzw. der waagerechten Wand von der Höhe b.

In Ω sind die Gurte enthalten, die als gleich vorausgesetzt sind; sie sind auch in J_v eingerechnet. Wenn man anstatt dessen die unteren Gurte der waagerechten Wand zuschriebe, müßte man J_v den Wert geben, welcher der senkrechten Wand ohne den unteren Gurt entspräche, wobei die neutrale Achse der Wand nach oben verschoben wäre. Wir nehmen an, daß die Spannung τ längs des Wandstegs gleichförmig verteilt ist und damit auch $\tau = -G\,y_2'$, und zwar sowohl in den senkrechten Wänden als auch in der waagerechten Wand. So ergibt sich:

$$L = \int_0^l \Big\{ 2\,\frac{1}{2}\,E J_v\,y_1''^2 + \frac{E J_0}{2}\,y_3''^2 + 2\,\frac{1}{2}\,E\,\Omega\xi'^2 + 2\,\frac{1}{2}\,G s_1 h\,y_2'^2 + \frac{G s_2 b}{2}\,y_4'^2 \Big\}\,dx \qquad (0)$$

und wir können $L-U$ ausdrücken:

$$L-U = \int_0^l \Big\{ E J_v\,y_1''^2 + \frac{E J_0}{2}\,y_3''^2 + E\Omega\xi'^2 + G s_1 h\,y_2'^2 + \frac{G s_2 b}{2}\,y_4'^2 + 2P\,(y_1' + y_2') \Big\}\,dx \qquad (1)$$

Wir haben also ein Funktional, das von fünf Funktionen abhängt, welche es zum Minimum machen müssen. Die Kontinuitätsbedingung zwischen zwei Wänden längs der Kante eliminiert eine von ihnen. Infolge der Gleichheit der Dehnung längs der Kante gilt für die beiden senkrechten Wände:

$$\xi + \frac{h}{2}\,y_1' = \frac{b}{2}\,y_3'.$$

Daraus folgt:

$$y_3' = \left(\frac{2}{b}\,\xi + \frac{h}{b}\,y_1'\right) \qquad (2)$$

Substituieren wir diesen Ausdruck für y_3 in Gl. (1), so ist das neue Funktional auf die vier Funktionen y_1, y_2, y_4, ξ reduziert und wir erhalten

$$L-U = \int_0^l \Big\{ E J_v\,y_1''^2 + \frac{E J_0}{2}\left(\frac{2}{b}\,\xi' + \frac{h}{b}\,y_1''\right)^2 + E\Omega\xi'^2 + G s_1 h\,y_2'^2 + \frac{G s_2 b}{2}\,y_4'^2 + 2P\,(y_1' + y_2') \Big\}\,dx \qquad (3)$$

Beim Aufsuchen der Funktionen y_1, y_2, y_4, ξ, welche dieses Funktional zum Minimum machen, hat man die folgenden Grenzbedingungen zu beachten, welche die geometrischen Zwängungen an der Einspannung widerspiegeln:

$$y_1(l) = y_2(l) = y_4(l) = 0;\quad y_1'(l) = 0;\quad \xi(l) = 0 \qquad (4)$$

Wir wenden eine Variation $\varepsilon\eta$ getrennt auf jede der vier Funktionen an. Wenn wir das entsprechende Funktional als Funktion $\Phi(\varepsilon)$ betrachten, können wir schreiben:

$$\left(\frac{\partial\,\Phi(\varepsilon)}{\partial\,\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \qquad (5)$$

η muß natürlich den aufgestellten Grenzbedingungen genügen, denen auch y_1, y_2, y_4, ξ genügen. Gl. (5) ist die bekannte Gleichung der Variationsrechnung.

[2]) C. Minelli, Nuovo calcolo energetico-variazionale di »travi a cassone« sottoposte a torsione. Ricerche di ingegneria, November-Dezember 1937. — In der vorliegenden Arbeit entspricht die Bezeichnungsweise der angegebenen Arbeit von C. Minelli.

Digitized by Google

Wir beginnen damit, die Variation auf y_4 anzuwenden.

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\varepsilon)=\int_0^l\Big\{&E J_v y_1''^2+\frac{E J_0}{2}\left(\frac{2}{b}\xi'+\frac{h}{b}y_1''\right)^2+E\Omega\xi'^2\\&+G s_1 h y_2'^2+\frac{G s_2 b}{2}(y_4'+\varepsilon\eta_4')^2+2P(y_1'+y_2')\Big\}dx\end{aligned}\right\}\quad(5a)$$

Wenden wir Gl. (5) an, so ergibt sich sofort

$$\left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\int_0^l G s_2 b\, y_4\eta_4'\,dx=0\quad(5b)$$

oder

$$\int_0^l y_4'\eta_4'\,dx=0\quad(6)$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^l y_4'\eta_4'\,dx=|y_4'\eta_4|_0^l-\int_0^l y_4''\eta_4\,dx=&-y_{4(0)}'\eta_{4(0)}\\&-\int_0^l y_4''\eta_4\,dx=0\end{aligned}\right\}\quad(6a)$$

Diese Gleichung wird für beliebige Form der Funktion η_4 dann und nur dann befriedigt, wenn

$$y_4''=0;\ y_4'(0)=0\quad(7)$$

Wenn noch die bekannte geometrische Bedingung $y_4(l)=0$ hinzukommt, so hat man sofort y_4, für das sich ergibt:

$$y_4(x)=0\quad(8)$$

Kehren wir also zum Funktional zurück, in dem wir $y_4=0$ setzen, und wenden wir die Variation auf y_2 an. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\varepsilon)=\int_0^l\Big\{&E J_v y_1''^2+\frac{E J_0}{2}\left(\frac{2}{b}\xi'+\frac{h}{b}y_1''\right)^2+E\Omega\xi'^2\\&+G s_1 h(y_2'+\varepsilon\eta_2')^2+2P(y_1'+y_2'+\varepsilon\eta_2')\Big\}dx\end{aligned}\right\}\quad(8a)$$

Wenden wir Gl. (5) an, so ergibt sich eine Beziehung, die, durch 2 geteilt, die Form hat:

$$\int_0^l(G s_1 h y_2'\eta_2'+P\eta_2')\,dx=0\quad(9)$$

Man kann sie auch schreiben:

$$\int_0^l\eta_2'(G s_1 h y_2'+P)\,dx=0\quad(9a)$$

Gl. (9a) wird für eine beliebige Funktion η_2 erst dann befriedigt, wenn

$$G s_1 h y_2'+P=0\quad(10)$$

Integrieren wir Gl. (10) unter Berücksichtigung der Gl. (4) für y_2, d. h. setzen wir $y_2(l)=0$ ein, so folgt

$$y_2=\frac{P}{G s_1 h}(l-x)\quad(11)$$

Wenden wir nun die Variation auf ξ an, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\varepsilon)=\int_0^l\Big\{&E J_v y_1''^2+\frac{E J_0}{2}\left[\frac{2}{b}(\xi'+\varepsilon\eta')+\frac{h}{b}y_1''\right]^2\\&+E\Omega(\xi'+\varepsilon\eta')^2+G s_1 h y_2'^2+2P(y_1'+y_2')\Big\}dx\end{aligned}\right\}\quad(11a)$$

Wenden wir Gl. (5) an, so erhalten wir:

$$\int_0^l\left\{E J_0\left(\frac{2}{b}\xi'+\frac{h}{b}y_1''\right)\frac{2}{b}\eta'+2E\Omega\xi'\eta'\right\}dx=0\quad(12)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{b^2}{2}$, ordnen wir die Glieder um und klammern wir schließlich den gemeinsamen Faktor η' aus, so wird

$$\int_0^l\eta'\left\{(2E J_0+E\Omega b^2)\xi'+h E J_0 y_1''\right\}dx=0\quad(13)$$

Diese Gleichung wird für eine beliebige Funktion η befriedigt, wenn

$$\xi'=\frac{-h E J_0}{2E J_0+E\Omega b^2}y_1''\quad(14)$$

Wir wenden nun die Variation auf y_1 an.

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\varepsilon)=\int_0^l\Big\{&E J_v(y_1''+\varepsilon\eta_1'')^2\\&+\frac{E J_0}{2}\left[\frac{2}{b}\xi'+\frac{h}{b}(y_1''+\varepsilon\eta_1'')\right]^2+E\Omega\xi'^2\\&+G s_1 h y_2'^2+2P(y_1'+\varepsilon\eta_1'+y_2')\Big\}dx\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Durch Anwendung von Gl. (5) ergibt sich:

$$\int_0^l\left\{2E J_v y_1''\eta_1''+E J_0\left(\frac{2}{b}\xi'+\frac{h}{b}y_1''\right)\frac{h}{b}\eta_1''+2P\eta_1'\right\}dx=0\quad(15a)$$

Durch Umordnen folgt daraus:

$$\int_0^l\left\{\left(2E J_v+\frac{h^2}{b^2}E J_0\right)y_1''\eta_1''+\frac{2h}{b^2}E J_0\xi'\eta_1''+2P\eta_1'\right\}dx=0\quad(15b)$$

Integrieren wir partiell, so wird der erste Ausdruck des Integrals:

$$\int_0^l y_1''\eta_1''\,dx=|y_1''\eta_1'|_0^l-\int_0^l y_1'''\eta_1'\,dx=-y_1''(0)\eta_1'(0)-|y_1'''\eta_1|_0^l$$
$$+\int_0^l y_1^{IV}\eta_1\,dx=-y_1''(0)\eta_1'(0)+y_1'''(0)\eta_1(0)+\int_0^l y_1^{IV}\eta_1\,dx\quad(16)$$

Entsprechend entwickeln wir den zweiten Ausdruck des Integrals.

$$\int_0^l\xi'\eta_1''\,dx=|\xi'\eta_1'|_0^l-\int_0^l\xi''\eta_1'\,dx=-\xi'(0)\eta_1'(0)-|\xi''\eta_1|_0^l$$
$$+\int_0^l\xi'''\eta_1\,dx=-\xi'(0)\eta_1'(0)+\xi''(0)\eta_1(0)+\int_0^l\xi'''\eta_1\,dx\quad(17)$$

Was den dritten Ausdruck anbetrifft, so wissen wir, daß er $-2P\eta_1(0)$ geschrieben werden kann. Wir können deshalb zusammen mit (16) und (17) die Gl. (15a) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}&-\left(2E J_v+\frac{h^2}{b^2}E J_0\right)y_1''(0)\eta_1'(0)+(2E J_v\\&+\frac{h^2}{b^2}E J_0)y_1'''(0)\eta_1(0)+\int_0^l\left(2E J_v+\frac{h^2}{b^2}E J_0\right)y_1^{IV}\eta\,dx\\&-\frac{2h}{b^2}E J_0\xi'(0)\eta_1'(0)+\frac{2h}{b^2}E J_0\xi''(0)\eta_1(0)\\&+\int_0^l\frac{2h}{b^2}E J_0\xi'''\eta_1\,dx-2P\eta_1(0)=0\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Wir ordnen die Integrale in ein einziges Integral ein, wobei wir die Ausdrücke nach $\eta(0)$ und $\eta'(0)$ getrennt in zwei Gruppen unterteilen.

$$\left.\begin{aligned}&-\eta_1'(0)\left[\frac{2h}{b^2}E J_0\xi'(0)+\left(2E J_v+\frac{h^2}{b^2}E J_0\right)y_1''(0)\right]\\&+\eta_1(0)\left[\frac{2h}{b^2}E J_0\xi''(0)\right.\\&\left.+\left(2E J_v+\frac{h^2}{b^2}E J_0\right)y_1'''(0)-2P\right]\\&+\int_0^l\eta_1\left[\frac{2h}{b^2}E J_0\xi'''+\left(2E J_v+\frac{h^2}{b^2}E J_0\right)y_1^{IV}\right]dx=0\end{aligned}\right\}\quad(18a)$$

Digitized by Google

Gl. (18a) wird dann und nur dann befriedigt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{2h}{b^2} E J_0 \xi''' + \left(2 E J_v + \frac{h^2}{b^2} E J_0\right) y_1^{IV} = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{2h}{b^2} E J_0 \xi''(0) + \left(2 E J_v + \frac{h^2}{b^2} E J_0\right) y_1'''(0) - 2P = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{2h}{b^2} E J_0 \xi'(0) + \left(2 E J_v + \frac{h^2}{b^2} E J_0\right) y_1''(0) = 0 \qquad (20a)$$

Wir haben also eine Differentialgleichung, nämlich (19), und zwei Grenzbedingungen, nämlich (20) und (20a).

Integrieren wir Gl. (19) unter Berücksichtigung von Gl. (20), so ergibt sich:

$$\frac{2h}{b^2} E J_0 \xi'' + \left(2 E J_v + \frac{h^2}{b^2} E J_0\right) y_1''' - 2P = 0 \qquad (21)$$

Integrieren wir Gl. (21) unter Berücksichtigung von Gl. (20a), so folgt:

$$\frac{2h}{b^2} E J_0 \xi' + \left(2 E J_v + \frac{h^2}{b^2} E J_0\right) y_1'' - 2Px = 0 \qquad (21a)$$

Neben Gl. (21a) schreiben wir wieder Gl. (14), welche wir aus der Minimumbedingung in bezug auf ξ erhielten.

$$\xi' = \frac{-h E J_0}{2 E J_0 + E \Omega b^2} y_1'' \qquad (14)$$

Eliminieren wir ξ' aus Gl. (21a) und (14), so erhalten wir nach leichten Umformungen:

$$y_1'' = \frac{Px}{E J_v + \frac{h^2}{2\left(\frac{2}{E\Omega} + \frac{b^2}{E J_0}\right)}} \qquad (22)$$

Integrieren wir, indem wir für y_1 die Beziehung (4) berücksichtigen, so folgt sofort:

$$y_1 = \frac{P}{6} \cdot \frac{x^3 - 3l^2 x + 2l^3}{E J_v + \frac{h^2}{2\left(\frac{2}{E\Omega} + \frac{b^2}{E J_0}\right)}} \qquad (23)$$

Wenn wir Gl. (14) integrieren und für ξ und y_1 die Beziehung (4) berücksichtigen, so erhalten wir:

$$\xi = \frac{-h E J_0}{2 E J_0 + E \Omega b^2} y_1' \qquad (14a)$$

Da wir y_1 aus (23) kennen, folgt hieraus:

$$\xi = \frac{E J_0 h}{2 E J_v (2 E J_0 + b^2 E \Omega) + h^2 E J_0 \cdot E \Omega} P(l^2 - x^2) \qquad (24)$$

Da ξ und y_1 nun bekannt sind, bleibt y_3 zu berechnen. Wenn man Gl. (2) und Gl. (14a) gebraucht, findet man eine Beziehung zwischen y'_3 und y'_1; aus dieser, unter Berücksichtigung, daß $y_3(l) = y_1(l) = 0$, ergibt sich schließlich:

$$y_3 = \frac{b h E \Omega}{2 E J_0 + b^2 E \Omega} y_1 \qquad (25)$$

Die Aufgabe, den Verformungszustand zu bestimmen, ist also vollständig gelöst, nachdem $y_1(x)$ aus (23), $y_2(x)$ aus (11), $y_3(x)$ aus (25), $\xi(x)$ aus (24) bestimmt sind, und da $y_4(x) = 0$ ist.

Sieht man sich den Aufbau von Gl. (23) an, so geht hervor, daß $y_1(x)$, d. h. die Biegelinie einer senkrechten Wand, übereinstimmt mit der Biegelinie eines eingespannten, freitragenden Balkens mit einer Belastung P am freien Ende, der das Trägheitsmoment

$$J_v + \frac{h^2}{2\left(\frac{2}{\Omega} + \frac{b^2}{J_0}\right)} = J_v \left(1 + \frac{h^2}{2 J_v \left(\frac{2}{\Omega} + \frac{b^2}{J_0}\right)}\right) \qquad (23a)$$

hat, während das natürliche Trägheitsmoment des Wandquerschnitts nur J_v beträgt. Die Formel (23a) drückt klar und geschlossen den Einfluß aus, den die Anwesenheit der waagerechten Wand auf die Biegungssteifigkeit der senkrechten Wände ausübt.

Die Formänderungen infolge Scherung sind bei einer senkrechten Wand gleich denjenigen eines Trägers, der ebenso groß, eingespannt, freitragend und in derselben Weise belastet ist.

Die Momente in den senkrechten Seitenwänden, positiv im Sinne des von P herrührenden Moments, sind in einem beliebigen Querschnitt

$$M_v = E J_v y_1'' = \frac{P x}{1 + \frac{h^2}{2 E J_v \left(\frac{2}{E\Omega} + \frac{b^2}{E J_0}\right)}} \qquad (26)$$

Man ersieht, daß das Moment gegeben ist durch das Produkt aus $P \cdot x$, dem Moment, das wir in einer senkrechten Wand haben würden, die den Zusammenhang mit der waagerechten nicht mehr hätte, und einem Korrekturfaktor < 1, der klar die Beanspruchungsverkleinerung zum Ausdruck bringt, die eine senkrechte Wand dem Zusammenhalt mit der waagerechten verdankt.

Aus Gl. (24) erhält man die spezifische Dehnung ξ'.

$$\xi' = \frac{-2 E J_0 h}{2 E J_v (2 E J_0 + b^2 E \Omega) + h^2 E J_0 \cdot E \Omega} P x \qquad (27)$$

Die gesamten Normalspannungen (positiv, wenn es sich um Zug handelt) in der oberen und der unteren Kante der linken senkrechten Wand sind gegeben durch die folgende Formel, wobei sich das obere bzw. untere Vorzeichen auf die obere bzw. untere Kante bezieht

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\substack{\text{oben}\\\text{unten}}} &= -E\xi' \pm \frac{M}{J_v}\frac{h}{2} = -E\xi' \pm \frac{E J_v y_1''}{J_v}\frac{h}{2} \\ &= E\left(-\xi' \pm \frac{h}{2} y_1''\right) \end{aligned}\right\} \qquad (27a)$$

Aus Gl. (14) folgt ξ' als Funktion von y_1'', und somit ergibt sich sofort:

$$\sigma_{\substack{\text{oben}\\\text{unten}}} = \frac{E h}{2} \left(\frac{2 E J_0}{2 E J_0 + E \Omega b^2} \pm 1\right) y_1'' \qquad (28)$$

In den entsprechenden Kanten der rechten Wandseite erhalten wir gleich große, entgegengesetzt gerichtete Spannungen wie in Gl. (28).

III. Experimentelle Untersuchung.

Im Anschluß an die Berechnungen sind Versuche an Kästen aus Duralumin und aus Sperrholz ausgeführt, um die Schlußfolgerungen der vorangehenden Theorie über offene Kästen zu prüfen und um die praktische Annäherung zu verwerten.

Es ist ja vorauszusehen, daß durch die Wirkung der Selbstversteifung infolge der großen Formänderungen die Berechnungsergebnisse im Vergleich mit der Wirklichkeit zu ungünstig sein werden: in der Praxis schadet es aber nicht, wenn der Rechner und der Konstrukteur sich auf »die sichere Seite« begeben.

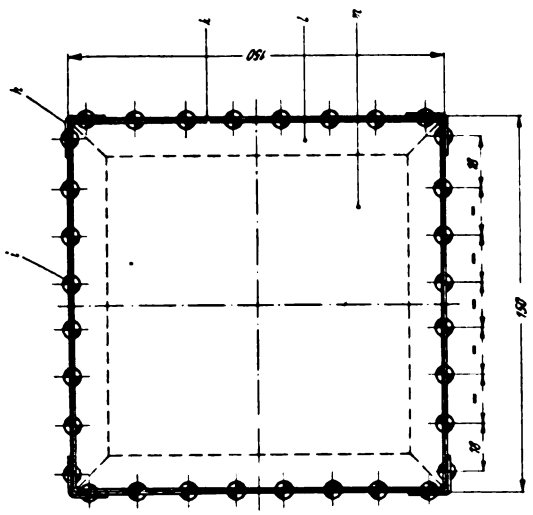
Die voranstehende Theorie besagt, daß die offenen Kästen eine kleine Gesamtverdrehsteifigkeit haben im Vergleich mit einem geschlossenen Kasten mit den gleichen Abmessungen. Aber sie ist nicht gleich Null, wie die Theorie von Bredt in dem von ihm betrachteten Fall behauptet.

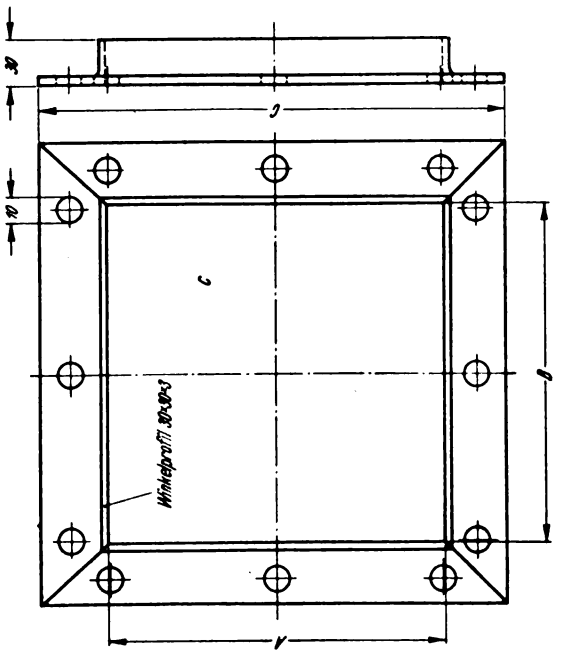
Aus der oben dargelegten Theorie geht auch hervor, daß die Verdrehsteifigkeit des offenen Kastens von der Biegungssteifigkeit der senkrechten Wände herrührt, deren Durchbiegungen sich die waagerechte Wand widersetzt. Diese erleidet keinen Schub; sie biegt sich nur durch. Die senkrechten Wände erleiden sehr kleine Schübe, die wohl wenig Einfluß auf die Formänderungen des Systems haben. Man kann wohl sagen, daß das System vorwiegend mit Normalspannungen auf das ausgeübte Verdrehmoment reagiert, so daß man den Ausdruck »Verdrehung« ungern auf die hier betrachtete Beanspruchungsart anwendet.

a) Versuche mit dem geschlossenen Duraluminkasten zur experimentellen Bestimmung von G.

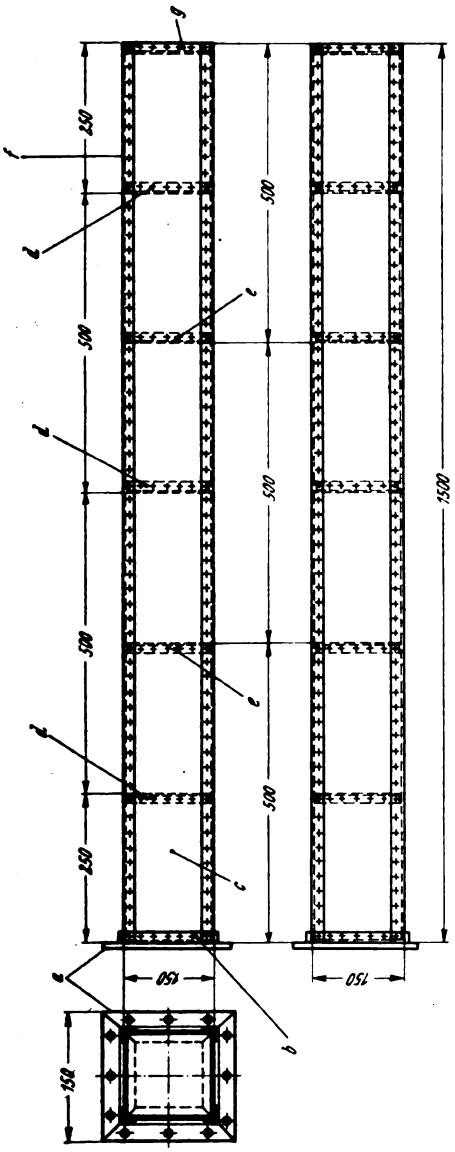
Vor der Ausführung der Verdrehungsprüfung des kastenförmigen Trägers, dem eine Wand fehlt, soll durch den Versuch der Wert von G des verwendeten Aluminiumbleches abgeleitet werden. Dieser Wert soll in die Berechnungen

Digitized by Google

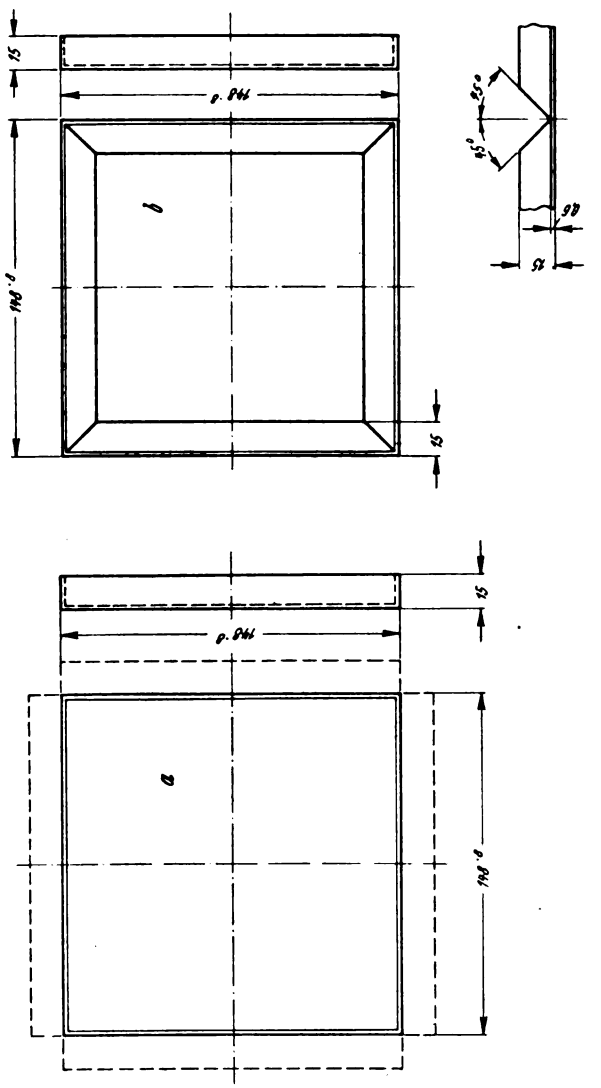




Tafel 2.
a Schottwand aus Duraluminblech,
2 Stück aus $^{6}/_{10}$-mm-Blech,
2 Stück aus $^{6}/_{10}$-mm-Blech,
b Winkelprofile aus Duralumin,
3 Stück aus $^{6}/_{10}$-mm-Blech,
c Befestigungsflansch aus Winkeleisen.



Tafel 1.
Baustoff Duralumin.
Stückzahl: 1.
Maßstab 1:12,5.
a Befestigungsflansch,
b Schottwand aus Duralumin,
g Schottwand aus $^{6}/_{10}$-mm-Duraluminblech,
c Einzelteile im Maßstab 1:3,
c Duraluminblech,
d Winkelprofile aus Duralumin,
e Schottwände aus Duralumin,
f Niettellung 18 mm,
h Winkelprofil,
i Nieten,
k Bekleidung $^{6}/_{10}$-mm-Duraluminblech,
l Winkelprofil,
m Schottwand.



Digitized by Google

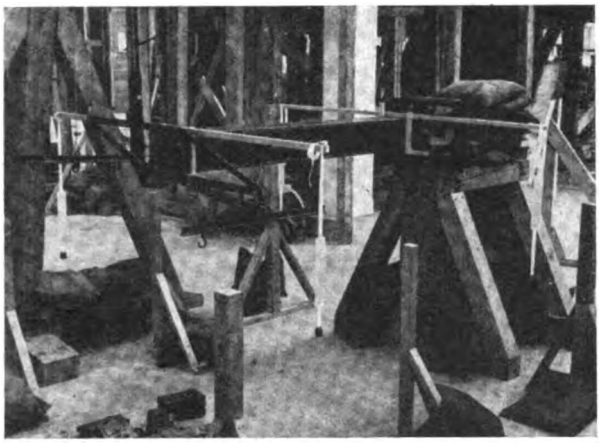


Bild 2. Belastungsversuch mit dem geschlossenen Duraluminkasten zur Bestimmung des Gleitmoduls G.

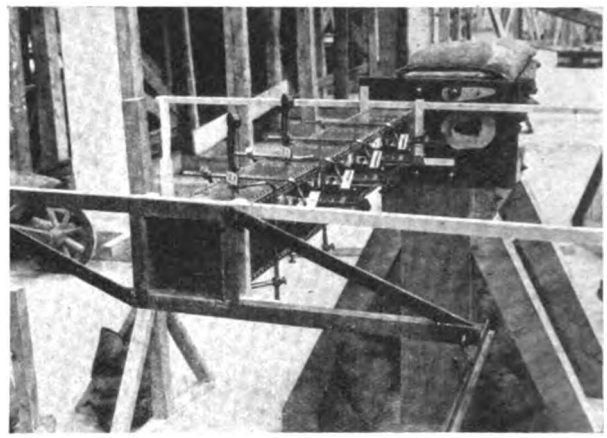


Bild 3. Bestimmung von G mit Huggenbergerschen Dehnungsmessern.

für den Kastenträger, dem eine Wand fehlt, eingeführt werden. Die Bestimmung von G wird durch die Verdrehung eines dünnwandigen Trägers von quadratischem Querschnitt vorgenommen, s. Tafel 1 u. 2. Der quadratische Querschnitt ist aus folgenden Gründen gewählt.

Wenn man ein rechteckiges, hohles, abgeschlossenes Prisma hat, das so gelagert ist, daß eine Verwerfung möglich ist, so sind die Verwerfungswinkel einer senkrechten Wand und die einer waagerechten Wand verhältnisgleich $\left(\frac{h}{s_1} - \frac{b}{s_2}\right)$. Da nun bei einem quadratischen Querschnitt konstanter Dicke $h = b$ und $s_1 = s_2$ ist, werden die Verwerfungswinkel gleich Null, d. h. es wird keine Verwerfung vorhanden sein. Wenn man einen solchen Kasten derart einspannt, daß die Verwerfung verhindert wird, so wird das keinerlei Wirkung haben, da keine Normalspannungen infolge Biegung entstehen können. Auch vielleicht vorhandene Gurte haben keinen Grund, sich positiv oder negativ zu dehnen. All dies ist nun günstig für die Konstruktion eines Versuchskastens, bei dem man Gurte längs der Kanten anordnen muß. Außerdem ergibt sich, daß es einfacher ist, den kastenförmigen Träger einzuspannen und an ihm einen robusten Flansch anzubringen, der gewiß die Verwerfung verhindert. Deswegen muß das G, das durch die Verdrehung des besprochenen Kastens abgeleitet ist, exakt richtig sein.

Für den kastenförmigen Träger quadratischen Querschnitts von der Seitenlänge h und der Dicke s folgt:

$$B = \frac{4\,G\,h^4}{4\,\frac{h}{s}} = G\,h^3\,s.$$

Der Winkel am äußersten Ende beträgt

$$\vartheta\,(0) = \frac{M_t\,l}{B} = \frac{M_t\,l}{G\,h^3\,s}.$$

Für $l = 149{,}5$ cm, $h = 15$ cm, $s = 0{,}06$ cm ergibt sich

$$\vartheta\,(0) = M_t\,\frac{149{,}5}{G \cdot 15^3 \cdot 0{,}06},$$

und somit für G:

$$G = \frac{149{,}5}{15^3 \cdot 0{,}06}\,\frac{M_t}{\vartheta\,(0)} = 0{,}74\,\frac{M_t}{\vartheta\,(0)}.$$

Mißt man die senkrechten Verschiebungen y_1 und y_2 an den Enden eines waagerechten Stabes von 1,6 m Länge und übt man ein Verdrehmoment mit zwei Lasten P, die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, im Abstand 100 cm aus, so wird

$$M_t = P \cdot 100 \text{ kg/cm},$$

$$\vartheta\,(0) = \frac{(y_1 + y_2)}{160} \text{ (im Bogenmaß)},$$

$$G = 0{,}74\,\frac{P \cdot 100}{\frac{y_1 + y_2}{160}} = 11840 \cdot \frac{P}{y_1 + y_2} \cdot \text{kg/cm}^2 \qquad (29)$$

Die Meßwerte sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Die beiden letzten Werte für G entsprechen einem Formänderungszustand bei beginnender Einbeulung; es sind daher scheinbare, nicht tatsächliche Werte von G.

Zahlentafel 1.

P kg	y_1 cm	y_2 cm	$y_1 + y_2$ cm	$\frac{P}{y_1 + y_2}$	G kg/cm²
10	0,2	0,2	0,4	25	296000
20	0,45	0,45	0,9	22,2	263000
30	0,65	0,65	1,3	23	272000
40	0,95	0,95	1,9	21	249000
50	1,25	1,25	2,5	20	237000

Aus den ausgeführten Versuchen ergibt sich der Mittelwert $G = 270000$ kg/cm².

Bilder 2 und 3 zeigen die Versuchsanordnung. Auf Bild 3 sieht man die Versuchsanordnung für eine Meßreihe mit Dehnungsmessern der Bauart Huggenberger; diese wurden gebraucht, um G auch durch ein anderes Verfahren zu messen.

b) Belastungsversuche mit dem offenen Kasten aus Duralumin.

Die Abmessungen des untersuchten offenen kastenförmigen Trägers sind auf Tafel 3 angegeben. Die Durchführung des Versuchs wird in Bild 4 dargestellt.

Das Verdrehmoment wird am freien Kastenende durch einen zweiarmigen Hebel ausgeübt, bei dem die Kraftangriffspunkte 100 cm Abstand haben. Da der Kasten 20 cm breit ist, ist die Kraft, die in Abschnitt II mit P be-

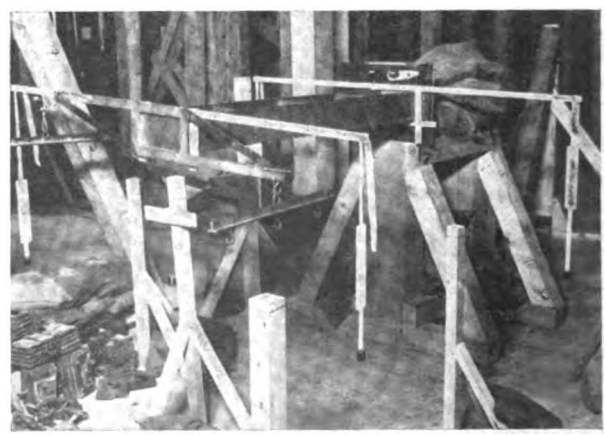
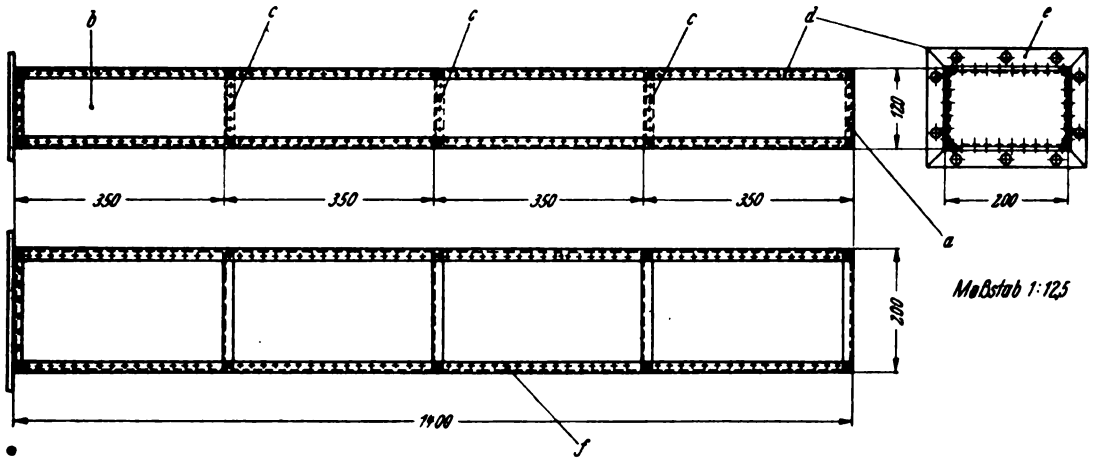
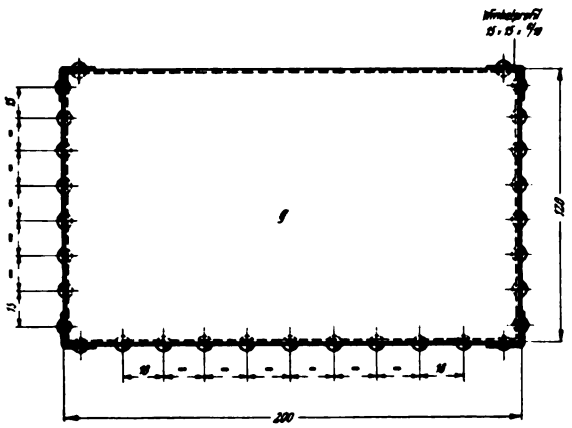
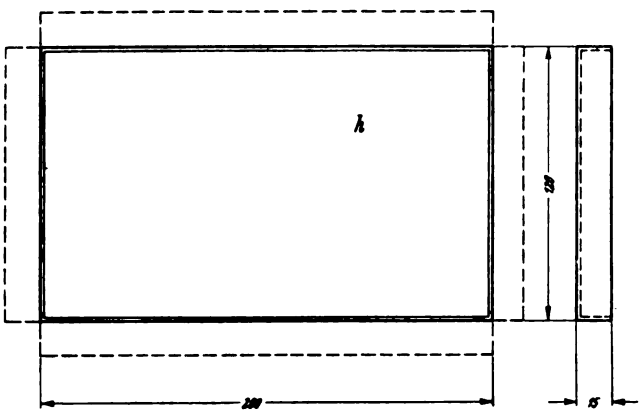


Bild 4. Belastungsversuch mit dem offenen Duraluminkasten

Digitized by Google







Tafel 3.
a Schottwände,
b Duraluminblech,
c Schottwände,
d Winkelprofile,
e Befestigungsflansch aus Winkeleisen,
f Nietteilung,
g Schottwand aus Duralumin. Maßstab 1:3,5,
h Baustoff Duralumin,
2 Stück aus $^{6}/_{10}$-mm-Blech,
3 Stück aus $^{6}/_{15}$-mm-Blech.

zeichnet wurde, in jedem Fall $\frac{100}{20} = 5$mal größer als die auf die beiden Enden des Hebels ausgeübte Belastung während des Versuches.

Beim Versuch wurden gemessen

1. die beiden senkrechten, entgegengesetzt gerichteten Verschiebungen y_s und y_d an den beiden Enden des waagerechten Stabes von 160 cm Länge, wobei der Meßpunkt auf der Mittelebene der Stabbefestigung lag;
2. die waagerechte Verschiebung y_0 der unteren waagerechten Wand. Die drei Ordinaten y_s, y_d, y_0 wurden am freien Kastenende gemessen.

y_0 entspricht dem Wert $y_3(0)$ der Theorie. y_s und y_d, die im Verhältnis der waagerechten Abstände reduziert sind, entsprechen der Größe $y_1(0) + y_2(0)$ und es gilt genau:

$$y_1(0) + y_2(0) = \frac{20}{160} y_s = \frac{20}{160} y_d.$$

Deswegen wird in der folgenden Zahlentafel 2 für $y_1(0) + y_2(0)$ der Ausdruck $\frac{20}{160} \cdot \frac{y_s + y_d}{2}$ benutzt.

Zahlentafel 2.

P kg	y_s (links) mm	y_d (rechts) mm	y_0 mm	$y_1(0) + y_2(0)$ mm
5	12	12,5	0,5	1,53
10	24	25	1,0	3,06
15	35	36,5	1,5	4,47
20	48,5	51	2,0	6,22
25	59	62	2,5	7,56
30	71	73	3,0	9,00

Gemäß Zahlentafel 2 besteht also eine deutliche Proportionalität zwischen den Torsionsmomenten und den Formänderungen.

Wir kommen nun zu den Formeln der vorangehenden Theorie. Macht man $x = 0$ in den Ausdrücken für y_1, y_2 und y_3, so ergibt sich:

$$y_1(0) = \frac{P l^3}{3 E J_v \left(1 + \frac{h^2}{2 J_v \left(\frac{2}{\Omega} + \frac{b^2}{J_0}\right)}\right)} \tag{30}$$

$$y_2(0) = \frac{P l}{G s_1 h} \tag{31}$$

$$y_3(0) = \frac{b h \Omega}{2 J_0 + b^2 \Omega} y_1(0) \tag{32}$$

Wir berechnen nun J_v, Ω und J_0. Der Querschnitt eines Gurtprofils beträgt 30 mm² = 0,3 cm², Bild 5. Das Trägheitsmoment einer senkrechten Wand mit zwei Gurtprofilen beträgt, da der Abstand zwischen den Schwerpunkten der Gurtprofile $12 - (2 \cdot 0{,}4) = 11{,}2$ cm ist:

$$J_v = \frac{0{,}06 \cdot 12^3}{12} + \frac{0{,}3 \cdot 11{,}2^2}{2} = 8{,}64 + 18{,}80 = 27{,}44 \text{ cm}^4.$$

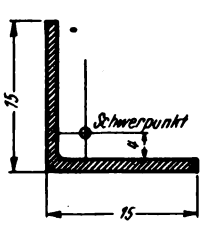


Bild 5. Gurtprofil.

Digitized by Google

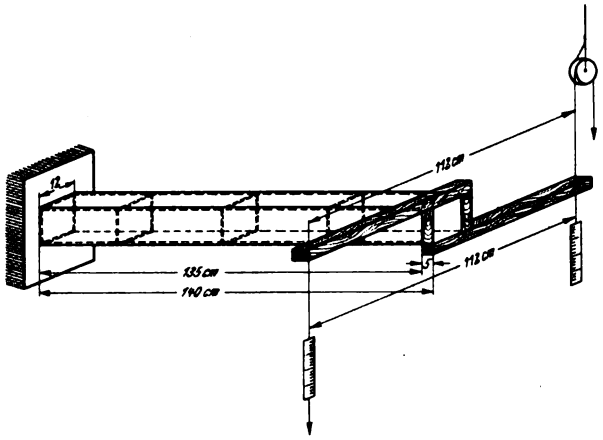


Bild 6. Versuchsanordnung zur Bestimmung von G mit dem geschlossenen Sperrholzkasten.

Das Trägheitsmoment der waagerechten Wand beträgt:

$$J_0 = \frac{0{,}06 \cdot 20^3}{12} = 40\ \text{cm}^4.$$

Der Querschnitt Ω einer der zwei senkrechten Wände einschließlich der beiden Gurtprofile beträgt:

$$\Omega = 0{,}06 \cdot 12 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}32\ \text{cm}^2,$$

$$E J_v \left(1 + \frac{h^2}{2 J_v \left(\frac{2}{\Omega} + \frac{b^2}{J_0}\right)}\right) = \alpha\, E J_v \qquad (33)$$

wobei:

$$\alpha = 1 + \frac{h^2}{2 J_v \left(\frac{2}{\Omega} + \frac{b^2}{J_0}\right)} \qquad (34)$$

α ist eine Art Vergrößerungsfaktor von $E J_v$, der das Hinzukommen der waagerechten Wand einbezieht.

$$\alpha = 1 + \frac{12^2}{2 \cdot 27{,}44 \left(\frac{2}{1{,}32} + \frac{20^2}{40}\right)} = 1{,}228$$

$$\alpha E J_v = 1{,}228 \cdot 750\,000 \cdot 27{,}44 = 26{,}3 \cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2.$$

Die Kastenlänge beträgt ohne den Einspannflansch ungefähr 135 cm.

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) + y_2(0) &= \frac{P l^3}{3 \alpha E J_v} + \frac{P l}{G s_1 h} \\ &= P\left(\frac{135^3}{3 \cdot 26{,}3 \cdot 10^6} + \frac{135}{270\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 12}\right) \\ &= P\,(0{,}0312 + 0{,}0007) = 0{,}0319\,P \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Nun ist

$$y_1(0) = 0{,}0312\,P,$$

und somit wird

$$\left.\begin{aligned} y_3(0) &= \frac{b h \Omega}{2 J_0 + b^2 \Omega} \cdot y_1(0) = \frac{20 \cdot 12 \cdot 1{,}32}{2 \cdot 40 + 20^2 \cdot 1{,}32} y_1(0) \\ &= 0{,}521\, y_1(0) = 0{,}521 \cdot 0{,}0312\,P = 0{,}01625\,P \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

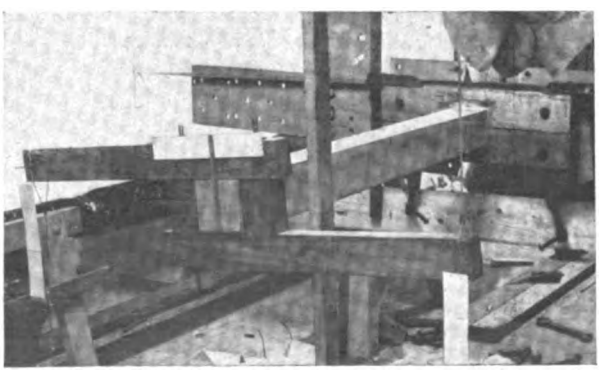
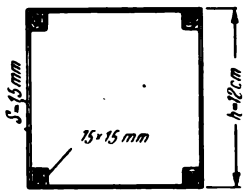


Bild 8. Belastungsversuch mit dem geschlossenen Sperrholzkasten zur Bestimmung von G.

Bild 7. Querschnitt durch den kastenförmigen Träger.



Bei $P = 30$ kg wird $y_1(0) + y_2(0) = 0{,}319 \cdot 30 = 0{,}957$ cm gegenüber dem angegebenen Meßwert von 0,9 cm. Wir erhalten für $y_3(0) = 0{,}01625 \cdot 30 = 0{,}48$ cm gegenüber 0,3 cm beim Versuch. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist befriedigend.

c) Versuche mit dem geschlossenen Sperrholzkasten zur experimentellen Bestimmung von G.

Auch in diesem Fall wird vor dem Belastungsversuch mit dem kastenförmigen Träger, dem eine Wand fehlt, der Wert von G experimentell bestimmt. Dieser Wert soll in die Berechnungen eingeführt werden.

Es wurde ein dünnwandiger Träger mit quadratischem Querschnitt gebaut und untersucht, der dieselben Abmessungen hatte wie der aus Metall (s. Tafel 1 und 2). Für die Wände wurde Birkensperrholz von 1,5 mm Dicke verwendet. Die Wände und die zwischenliegenden Schottwände wurden mit quadratischen Leisten von 10 × 10 mm² aneinander befestigt. Für die zwei Schottwände am Ende wurde Birkensperrholz von 2 mm Dicke verwendet. Die quadratischen Gurtleisten waren aus Spruce von 15 × 15 mm², Bild 6 und 7.

Der Abstand des Kräftepaars und der Meßskalen beträgt $d = 112$ cm. Die Versuchsanlage ist in Bild 8 dargestellt. Es ist

$$B = \frac{4 S^2}{\int_c \frac{d c}{s}} G = \frac{4 h^4}{4 \frac{h}{s}} G = G h^3 s \qquad (37)$$

$$\vartheta(0) = \frac{M_t l}{B} = \frac{P d l}{G h^3 s} = \frac{y_d + y_s}{d} \qquad (38)$$

y_d und y_s sind die Ablesungen auf der rechten bzw. linken Meßskala.

Nach Gl. (38) ist der experimentelle Wert von G:

$$G = \frac{P d^2 l}{h^3 s (y_d + y_s)} = 6770 \frac{P}{y_d + y_s} \qquad (39)$$

Die aus den Versuchen abgeleiteten Werte und die Ergebnisse der Berechnung sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt.

Zahlentafel 3.

Last P kg	y_d mm	y_s mm	$y_d + y_s$ mm	$\frac{P}{y_d + y_s}$	G kg/cm²
5	12,5	12	24,5	2,04	13800
10	25	24	49	2,04	13800
15	41	39	80	1,875	12700
20	58	55	113	1,77	12000
25	78	76	154	1,62	11000

Da bei $P = 15$ kg kritische Erscheinungen hervortreten, wird der Wert $G = 13800$ kg/cm² behalten.

Setzen wir $m = 3$, so würde sich ergeben:

$$E = \frac{2(m+1)}{m} G = 2{,}67 \cdot 13800 = 36800\ \text{kg/cm}^2.$$

d) Belastungsversuche mit dem offenen Sperrholzkasten.

Die Abmessungen des untersuchten offenen kastenförmigen Trägers, dessen Form ganz dem Metallkasten von Tafel 3 entspricht, gehen aus Bild 9 hervor.

Die Seitenwände und Schottwände sind aus 1,5 mm Birkensperrholz, die äußeren Schottwände aus 2,0 mm

Digitized by Google

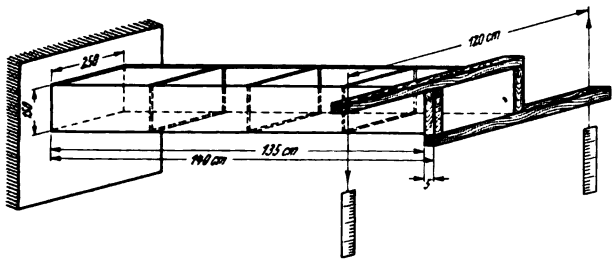


Bild 9. Versuchsanordnung mit dem offenen Sperrholzkasten.

Birkensperrholz. Die Gurtleisten sind aus Spruce, 15 mal 15 mm². Die Versuchsanordnung geht aus Bild 10 hervor.

Wie in Abschnitt II gezeigt wurde, ist

$$y_1(0) = \frac{P\,l^3}{3\,E\,J_v\left(1+\dfrac{h^2}{2\,J_v\left(\dfrac{2}{\Omega}+\dfrac{b^2}{J_0}\right)}\right)} \tag{40}$$

wo jetzt für $h = 15$ cm, $b = 25$ cm und s (Wanddicke) = 0,15 cm zu setzen ist.

Nun haben die Wände des betrachteten Kastens ein $G = 13800$ kg/cm² und ein $E = 36800$ kg/cm², wie durch die Versuche festgestellt wurde. Aber für die Spruceleisten ist ungefähr $E = 100000$ kg/cm². Deshalb muß in der Berechnung für Ω (Querschnitt der einen Wand einschließlich der Leisten) und für J_v (Trägheitsmoment derselben), ebenso wie man das bei Eisenbeton macht, die Fläche des Spruce, d. h. die des härteren Baustoffs, multipliziert werden mit

$$n = \frac{E_{\text{Spruce}}}{E_{\text{Sperrholz}}} = \frac{100000}{36000} = \sim 3.$$

Somit wird, Bild 11

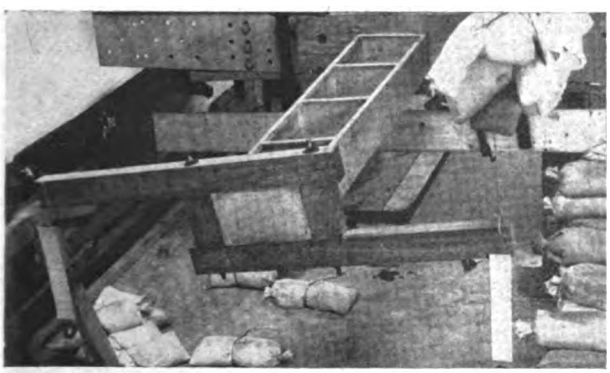
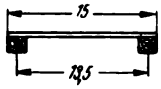


Bild 10. Belastungsversuch mit dem offenen Sperrholzkasten.

Bild 11. Wandquerschnitt.



$$\Omega = 0{,}15 \cdot 15 + 3 \cdot 2 \cdot 1{,}5^2 = 15{,}75\ \text{cm}^2 \tag{41}$$

$$J_v = 0{,}15 \cdot \frac{15^3}{12} + 3 \cdot 1{,}5^2\,\frac{13{,}5^2}{2} = 656\ \text{cm}^4 \tag{42}$$

$$\frac{b^2}{J_0} = \frac{25^2}{0{,}15 \cdot \dfrac{25^3}{12}} = \frac{12}{0{,}15 \cdot 25} = 3{,}2 \tag{43}$$

$$\frac{2}{\Omega} + \frac{b^2}{J_0} = \frac{2}{15{,}75} + 3{,}2 = 0{,}127 + 3{,}2 = 3{,}327 \tag{44}$$

$$\frac{h^2}{2\,J_v\left(\dfrac{2}{\Omega}+\dfrac{b^2}{J_v}\right)} = \frac{15^2}{2 \cdot 656 \cdot 3{,}327} = 0{,}0515 \tag{45}$$

$$y_1(0) = \frac{P \cdot 135^3}{3 \cdot 36{,}800 \cdot 656 \cdot 1{,}0515} = 0{,}0336\,P \tag{46}$$

$$y_2(0) = \frac{P \cdot 135}{13{,}800 \cdot 0{,}15 \cdot 15} = 0{,}00434\,P \tag{47}$$

$$y_1(0) + y_2(0) = (0{,}0336 + 0{,}00434)\,P = 0{,}03794\,P \tag{48}$$

$$\vartheta(0) = \frac{2 \cdot 0{,}038\,P}{25} = 0{,}00304\,P \tag{49}$$

Betrachten wir z. B. die Last 10 kg und denken wir daran, daß der Abstand zwischen dem Kräftepaar 120 cm beträgt und daß $b = 25$ cm ist, dann wird

$$P = \frac{120}{25}\,10 = 48\ \text{kg},$$

$$\vartheta(0)_{\text{berechnet}} = 0{,}00304 \cdot 48 = 0{,}146$$

anstatt eines beobachteten Meßwertes von 7,8 cm, dem ein

$$\vartheta(0)_{\text{gemessen}} = \frac{2 \cdot 7{,}8}{120} = 0{,}13$$

entspricht. Auch in diesem Fall ist also die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch befriedigend.

In Zahlentafel 4 sind die Lasten, die ihnen proportionalen Momente M_t und die abgelesenen Formänderungen zusammengestellt; daneben die gemessenen und die berechneten Werte von $\vartheta(0)$.

Zahlentafel 4.

P kg	$M_t = P \cdot 120$ kg/cm	y_d (rechts) mm	y_s (links) mm	$\vartheta(0)_{\text{gemessen}}$ im Bogenmaß	$\vartheta(0)_{\text{berechnet}}$ im Bogenmaß
5	600	32	32	0,053	0,073
6	720	41	41	0,067	0,087
7	840	50	49	0,082	0,102
8	960	61	60	0,101	0,117
9	1080	69	67	0,114	0,131
10	1200	79	77	0,130	0,146
11	1320	88	86	0,145	0,160
0		6	5		

Digitized by Google

Neues Verfahren der Übertragung des Modellwiderstandes eines Gleitfahrzeuges auf die Hauptausführung.

Von W. Sottorf.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Seeflugwesen in Hamburg.

Nach Darlegung des bisherigen Standes der Übertragung wird ein Verfahren angegeben, das unter Anwendung einer Reibungskorrektur eine exaktere Übertragung vom Modell zur Zeit üblicher Größe auf beliebig große Schwimmwerke zuläßt.

Gliederung.

I. Bisheriger Stand der Übertragung.
II. Neues Verfahren.
III. Kurze Zusammenfassung des Übertragungsverfahrens.
IV. Übertragungsbeispiele.
V. Schrifttum.

Bezeichnungen.

Modell: Index M,
Hauptausführung: Index H.

W	Widerstand (kg),
W_N	Normalwiderstand (kg),
W_R	Reibungswiderstand (kg),
T	Tangentialkraft (kg),
A	hydrodynamischer Gesamtauftrieb = Belastung (kg),
G	Fluggewicht (kg, t),
M	Moment (mkg),
F	benetzte Fläche (m²),
F_D	Druckfläche bei gekielter Gleitfläche (m²),
$\mathfrak{F}$	Froudesche Zahl, bezogen auf eine Körperlänge,
$\mathfrak{F}^*$	» » , bezogen auf eine der Belastung zugeordnete Länge,
R	Reynoldssche Zahl,
v	Geschwindigkeit (m/s),
v'	Geschwindigkeitskomponente (m/s),
l	Länge der benetzten Fläche (m),
l_m	mittlere Länge der Druckfläche bei gekielter Gleitfläche (m),
b	Breite der Gleitfläche (m),
b_{St}	Breite des Schwimmwerks an der Stufe (m),
b_{nat}	natürliche Breite der Druckfläche bei gekielter Gleitfläche (m),
q	Staudruck (kg/m²),
γ	spez. Gewicht (kg/m³),
g	Erdbeschleunigung (m/s²),
k_s	äquivalente Sandrauhigkeit (cm),
c_f	Reibungsbeizahl aus Reibungsmessungen,
c_f'	Reibungsbeizahl der Gleitfläche,
$c_{i\alpha}$	abgeleitete Auftriebsbeizahl der Gleitfläche,
c_B	Belastungsbeizahl,
ϱ	Dichte (kgs²/m⁴),
ν	kinematische Zähigkeit (m²/s),
α	Anstellwinkel der im Mittellängsschnitt am Stufenpunkt errichteten Tangente gegen Horizontale,
ϑ	Kielung = Neigung des Bodens am Stufenpunkt gegen Horizontale (evtl. Wellenbinderform bleibt unberücksichtigt),
λ	Modellmaßstab.

I. Bisheriger Stand der Übertragung.

Die Übertragung des Widerstandes eines an der Wasseroberfläche sich bewegenden Fahrzeuges, also auch eines Schwimmwerks oder Gleitboots, vom Modell auf die Hauptausführung soll nach dem der Untersuchung zugrunde liegenden Froudeschen Modellverfahren nach folgender Formel erfolgen

$$\underbrace{W_H}_{\substack{\text{Gesamtwiderstand der Hauptausführung}}} = \Big(\underbrace{W_M}_{\substack{\text{Gesamtwiderstand des Modells}}} - \underbrace{c_{f_M} \cdot F_M \cdot \varrho/2 \cdot v_M^2}_{\substack{\text{Reibungswiderstand des Modells}}} \Big) \cdot \lambda^3 + \underbrace{c_{f_H} \cdot F_H \cdot \varrho/2 \cdot v_H^2}_{\substack{\text{Reibungswiderstand der Hauptausführung}}} \quad (1)$$

wenn man Temperatur- und Dichteunterschiede zwischen Tank- und Seewasser vernachlässigt.

Bekannt sind zunächst der gemessene Modellwiderstand W_M, der Maßstab λ und die Dichte ϱ des Wassers.

Unsicher zu bestimmen waren bisher folgende Werte:

1. Der Reibungsbeiwert des Modells c_{fM} nach Bild 1, der im unteren Bereich Reynoldsscher Zahlen erheblich schwankt, je nachdem, ob die Grenzschicht voll turbulent ist oder laminar anläuft. Hingegen kann die Oberfläche des Modells als technisch glatt angesehen werden,
2. der Reibungsbeiwert der Hauptausführung c_{fH}, der durch Rauhigkeit beeinflußt wird, wie sie durch Plattenstöße, Nietung und Anstrich entsteht, wobei auch Herstellungsgüte und Erhaltungszustand von erheblicher Bedeutung sind [1],

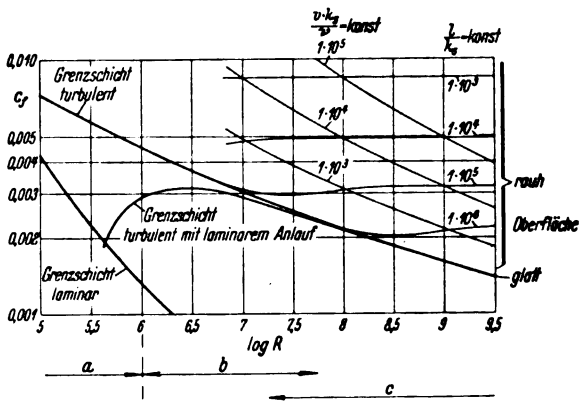


Bild 1. Die Reibungszahl c_f in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\frac{v \cdot l}{\nu}$ für verschiedene Grenzschichtzustände und relative Rauhigkeiten l/k_s (k_s = äquivalente Sandrauhigkeit) nach Schlichting [1].
a) Bereich wegen zu kleiner Modellabmessungen und daraus sich ergebenden Einflusses der Oberflächenspannung ungeeignet.
b) Modellbereich bei normalen Abmessungen des Modells.
c) Bereich der Hauptausführung.

Digitized by Google

3. die einzusetzende Geschwindigkeit, die durch den Druckverlauf am Gleitboden örtlich beeinflußt ist und daher im Mittel von der Fortschrittsgeschwindigkeit des Schwimmwerks v abweicht [6].
Unbekannt blieb:
4. die Größe der benetzten Fläche F, die sich mit Geschwindigkeit und Anstellwinkel ändert und deren Bestimmung im Versuch zu einer übermäßigen Komplizierung desselben führen würde.

Vor allem der letztgenannte Grund und die unter 1. erwähnten Schwankungen im unteren Bereich Reynoldsscher Zahlen führten dazu, den Modellmaßstab so groß zu wählen, daß man auch bei Nichtberücksichtigung des Maßstabseinflusses, d. h. bei Annahme von

$$W_H = W_M \cdot \lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ergebnisse erhält, die von den wahren Werten nur innerhalb einer bei derartigen Modellversuchen üblichen, etwa mit 5% anzusetzenden Übertragungsgenauigkeit abweichen, wobei der übertragene Modellwert höher als der Wert der Hauptausführung liegt, so daß eine Reserve eingeschlossen ist [2].

Bei den in neuerer Zeit geplanten Großflugbooten [3] würde jedoch die Anwendung entsprechend großer Modelle zu unerwünschter Verteuerung und Erschwerung des Versuchs führen, so daß die Übertragung vom Modell normaler Größe ($b_{St} = 0{,}300$ m) auf Grund erweiterter Erkenntnisse neu zu behandeln ist. Die folgende Untersuchung soll sich dabei auf stationäre hydrodynamische Vorgänge beschränken.

II. Neues Verfahren.

In Bild 2 sei zunächst der in bekannter Weise nach dem Auswahlverfahren oder an Hand der Ergebnisse der vollständigen Schleppmethode [4] ermittelte Belastungs-, Widerstands- und Anstellwinkelverlauf für ein Flugboot von 10 t Fluggewicht vorgegeben, und zwar für die Hauptausführung übertragen unter Anwendung von

$$v_H = v_M \cdot \lambda^{1/2}$$
$$W_H = W_M \cdot \lambda^3$$
$$M_H = M_M \cdot \lambda^4.$$

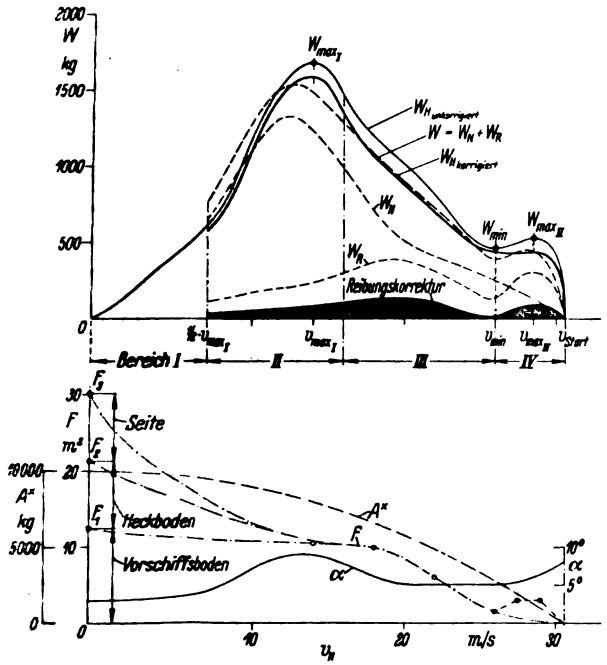


Bild 2. Widerstandszerlegung, Flächenbestimmung und Reibungskorrektur für ein Flugboot von
$G = 10000$ kg, $b_{St} = 1{,}65$ m,
$\frac{l_L}{b_{St}} = 9{,}19$, $\vartheta = 20°$, $\lambda = 5{,}5$.

Für den Bereich reinen Gleitzustandes hatte sich nach [5] aus der Untersuchung einer Familie ebener rechteckiger Gleitflächen bei modellähnlichen Versuchsbedingungen Ähnlichkeit der Druckflächen und Momente, d. h. also auch ähnliche Lage der resultierenden Wasserkraft ergeben, sofern nicht eine untere Grenze der Modellbreite, die etwa bei $b_{St} = 0{,}150$ bis $0{,}200$ m je nach Belastung liegt, unterschritten wird. Bei Anwendung vorstehender Momentenübertragung erhält man daher den gleichen Anstellwinkel für Hauptausführung und Modell

$$\alpha_H = \alpha_M \text{ [1]}.$$

Denkt man sich nun den Schwimmer-Vorschiffsboden durch einen in Längsrichtung ungekrümmten Boden konstanter Breite b_{St} und konstanter, der Hauptstufe entsprechender Kielung ϑ ersetzt, so ist in Bereich III (vgl. Bild 2) der Normalwiderstand dieser Gleitfläche

$$W_N = A \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

näherungsweise gleich dem Normalwiderstand des Schwimmers, wenn der Gesamtwiderstand in Normal- und Reibungswiderstand

$$W = W_N + W_R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zerlegt wird [2].

In Bild 2 kann daher der Verlauf des Normalwiderstandes W_N eingetragen werden, dessen Übertragung mit λ^3 gerechtfertigt ist. Eine Erweiterung in das Gebiet des ersten Widerstandsmaximums — Bereich II — stellt nur eine grobe Näherung für W_N dar, da hier der Einfluß der Vorschiffskrümmung und des Hecks beträchtlich ist. Die W_N-Kurve hat jedoch, wie man sieht, den gleichen Charakter wie die übertragene W_H-Kurve. Die Ausbildung des Widerstandsmaximums wird also maßgeblich durch den Verlauf des Anstellwinkels α bestimmt. Zu Beginn des Bereichs II fallen W_N und W_H praktisch zusammen, so daß der Anteil von W_R hier nicht erheblich sein kann (wobei nicht außer acht zu lassen ist, daß W_N nur eine Näherung darstellt).

Den Reibungswiderstand des Ersatzbodens berechnet man mit Hilfe der Versuchsergebnisse der ebenen und gekielten Gleitflächen, für die die Reibungsbeizahlen c_f' aus [5] bekannt sind:

$$W_R = W - A \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{\cos \alpha} \cong T = c_f' \cdot F \cdot q^2) \quad (5)$$

Man muß dann aber auch in die Formel als Fläche die benetzte Fläche der dem Schwimmer äquivalenten Gleitfläche einsetzen, d. h. die Fläche, die den gleichen abgeleiteten Auftriebsbeiwert wie der Schwimmer hat:

$$\frac{c_B}{\alpha} = \frac{A}{\alpha \cdot b^2 \cdot q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dieser Auftriebsbeiwert hängt für die Gleitfläche nur vom Seitenverhältnis l/b und von der Froudeschen Zahl

$$\mathfrak{F}^* = \frac{v}{\sqrt{g \cdot (A/\gamma)^{1/3}}}$$

ab. Aus Bild 3 [4]) kann daher die dem Schwimmer äquivalente ebene Gleitfläche bestimmt werden. Für den Fall, daß die Druckfläche gekielt ist, geht man folgendermaßen vor: Die Größe der Druckfläche ergibt sich analog dem Verfahren bei der ungekielten Fläche; statt der oben angegebenen Werte rechnet man jetzt unter Berücksichtigung des Kielungswinkels ϑ nach den Formeln:

$$\frac{c_B}{\cos \vartheta \cdot \alpha}, \quad l_m/b \equiv l/b \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}^* = \frac{v}{\sqrt{g \cdot \left(\frac{A}{\cos \vartheta \cdot \gamma}\right)^{1/3}}}.$$

[1]) Die weiteren Ausführungen erfolgen unter dieser Annahme, obwohl bei der Untersuchung von Schwimmerfamilien auch eine geringe Änderung des Anstellwinkelverlaufs mit dem Maßstab festgestellt worden ist.

[2]) Die Näherung ist um so zutreffender, je besser sich der Schwimmerboden vor der Stufe durch eine in Längsrichtung ungekrümmte, eben gekielte Gleitfläche — wie z. B. beim DVL-Einheitsschwimmer — ersetzen läßt.

[3]) Bei kleinem α, wenn $N \cong A$.

[4]) Dieses Bild ist aus Bild 9 der unter [5] genannten Arbeit entstanden durch Multiplikation des abgeleiteten Auftriebsbeiwertes c_α mit l/b.

Digitized by Google

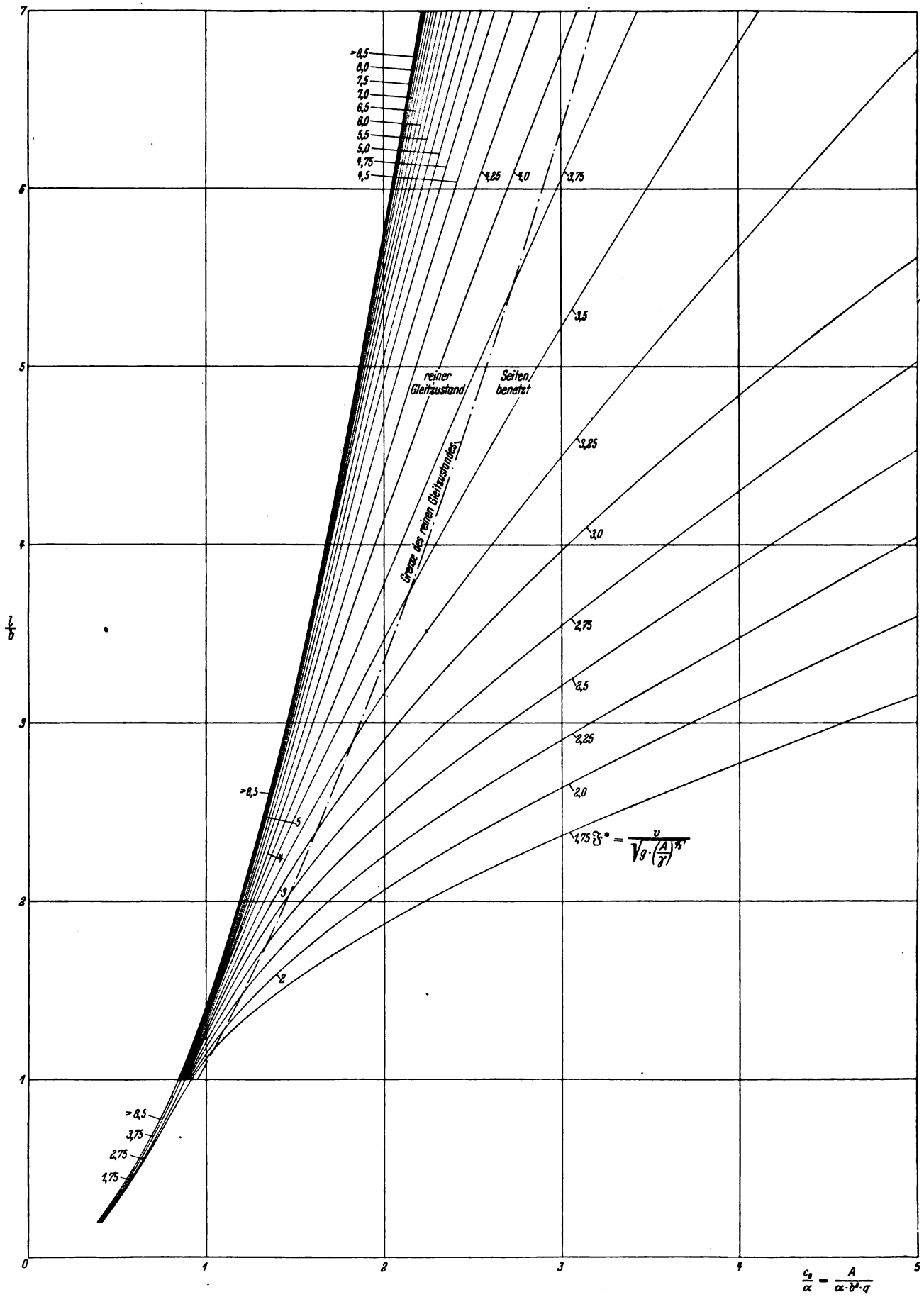


Bild 3. Das Seitenverhältnis der Gleitfläche l/b in Abhängigkeit von der abgeleiteten Belastungsbeizahl $\frac{c_a}{\alpha}$ mit der Froudeschen Zahl $\mathfrak{F}^* = \frac{v}{\sqrt{g \cdot (A/\gamma)^{1/3}}}$ als Parameter.

Digitized by Google

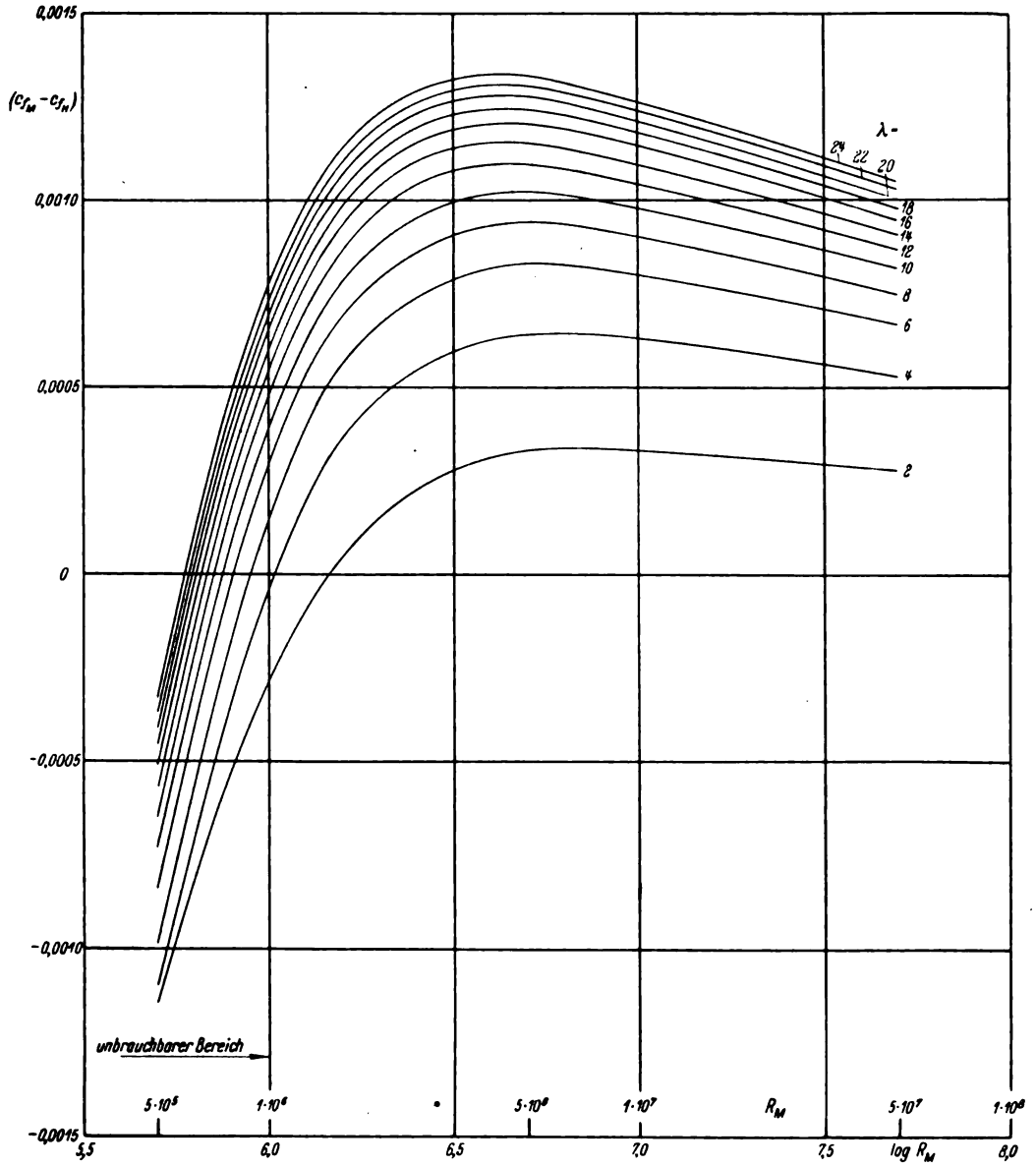


Bild 4. Der Korrekturfaktor $(cf_M - cf_H)$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl des Modells R_M mit dem Maßstab λ als Parameter.

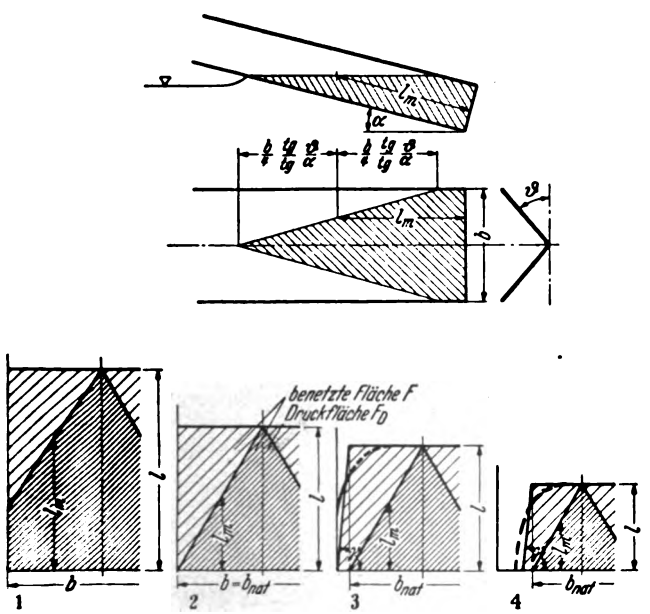


Bild 5. Druckfläche und benetzte Fläche bei gekielter Gleitfläche.

Für die benetzte Fläche, die in diesem Fall von der Druckfläche wesentlich verschieden ist, wird aus [5] folgende Abschätzung entnommen (vgl. Bild 5):

Fall 1) belastete Breite: b, wenn $\dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{4\operatorname{tg}\alpha} < \dfrac{l_m}{b}$

Fall 2) belastete Breite: $b = b_{nat}$, wenn $\dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{4\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{l_m}{b}$

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{l \cdot b}{\cos\vartheta} \\ R &= v \cdot \frac{l}{b} \cdot \frac{b}{\nu}, \text{ worin } \frac{l}{b} = \frac{l_m}{b} + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{4\operatorname{tg}\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Fall 3) belastete Breite: b_{nat}, wenn $\dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{4\operatorname{tg}\alpha} > \dfrac{l_m}{b}$

und $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{2 \cdot l}{b - b_{nat}} > 10.$

Es ist dann unter Einsetzung von $\dfrac{l_m}{b_{nat}} = \dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{4 \cdot \operatorname{tg}\alpha}$

$$b_{nat} = \sqrt{\frac{A}{c_{it} \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{l_m}{b_{nat}} \cdot q \cdot \alpha}}$$

und

$$l = 2 \cdot \frac{l_m}{b_{nat}} \cdot b_{nat},$$

Digitized by Google

dafür

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{l\,(b + b_{nat})}{2 \cdot \cos\vartheta} \\ R &= \frac{v \cdot l}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Fall 4) belastete Breite: b_{nat}, wenn $\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{4 \operatorname{tg}\alpha} > \frac{l_m}{b}$

und $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2 \cdot l}{b - b_{nat}} < 10.$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{l\left(b_{nat} + \frac{l}{10}\right)}{\cos\vartheta} \\ R &= \frac{v \cdot l}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

In den Fällen 1 und 2 überdeckt das an der vorderen Kontur der benetzten Fläche austretende und als Wasserschleier an der Fläche entlanglaufende Wasser fast die ganze Breite der Fläche, so daß l als Länge für die Bestimmung von F und R einzusetzen ist. In Fall 3 ist die Grenze der Spritzwasserbenetzung etwa durch die gestrichelte Linie gegeben, die durch den ausgezogenen Linienzug gemittelt wird. In Fall 4 tritt bei weiterer Verbreiterung der Gleitfläche eine Benetzung der Randteile nicht mehr ein. Als Grenzwert gilt $\operatorname{tg}\gamma = 10$.

Da man den Reibungswiderstand während des ganzen Startvorgangs bestimmen will, brauchen wir den Verlauf der benetzten Fläche F für den ganzen Geschwindigkeitsbereich. Für einige Punkte v in den Bereichen II und III wird die benetzte Fläche wie oben angegeben errechnet. Außerdem können bei $v = 0$ noch folgende drei Strakpunkte aufgetragen werden (s. Bild 2):

In F_1 = Vorschiffsboden = größtmögliche Druckfläche beginnt der Strak 1 für die äquivalente Gleitfläche. Diese Fläche zeigt über das $W_{max\,I}$ hinaus nur geringen Abfall, weil jenseits vom Maximum trotz wachsenden Staudrucks die Fläche wegen des fallenden Anstellwinkels nahezu gleich groß bleibt. Erst wenn bei etwa 20 m/s der durch Höhenruder konstant zu haltende Anstellwinkel $\alpha = 5^0$ erreicht ist, nimmt die Fläche schnell ab.

Zwischen $F_2 = F_1$ + Heckboden und dem Endpunkt von Bereich II bezeichnet der Strak 2 die zusätzlich benetzte Heckbodenfläche, und Strak 3 gibt die benetzte Seitenfläche an, deren Benetzung nach Strömungsbeobachtung etwa bei 12 m/s aufhört; F_3 stellt die gesamte benetzte Fläche in Ruhelage dar.

Das 2. Widerstandsmaximum ist auf zusätzliche Reibung an der Heckbodenfläche zurückzuführen, die eintritt, wenn bei hohem Staudruck und kleiner Restbelastung die Breite der bei gekieltem Boden entstehenden keilförmigen Druckfläche die Breite des Schwimmers an der Stufe unterschreitet ($b_{nat} < b_{St}$). Der Anteil des durch die Druckfläche hervorgerufenen Reibungswiderstandes am gesamten Reibungswiderstand ist kurz vor dem Abheben gering. Es erübrigt sich daher im allgemeinen, bei einer Übertragung die im Bereich $b_{nat} < b_{St}$ umständlichere Trennung der Reibungswiderstandsanteile durchzuführen. Da in diesem Bereich die Benetzung der Heckbodenfläche Ursache des hohen Reibungswiderstandes ist, soll ⅓ der Heckbodenfläche und für die Bestimmung der Reynoldsschen Zahl $\frac{v \cdot l}{\nu}$ ⅓ der Länge des Hecks von der Hauptstufe bis zur Heckstufe mit entsprechendem Übergang von v_{min} und Auslauf bis v_{Start} eingesetzt werden. Diese Maßnahme ist als Behelfsmittel anzusehen, denn die Benetzung der unter Spritzwasserwirkung stehenden Heckfläche unterscheidet sich physikalisch von der Benetzung einer Druckfläche. Unbekannt bleibt die tatsächliche Flächengröße, die Dichte der Benetzung und die Auftreffgeschwindigkeit des Spritzwassers. Da jedoch nur die Differenz der Reibungsbeiwerte von Modell und Hauptausführung in die Übertragung eingeht, ist der voraussichtliche Fehler tragbar.

Im Bereich des 1. Widerstandsmaximums wird der gesamte, den rechnerisch ermittelten Reibungswiderstand überschreitende Restwiderstand als Normalwiderstand gewertet, da hier, wie schon erwähnt, durch Vorschiffskrümmung und Heckeinfluß eine Abweichung zwischen rechnerisch ermitteltem und wahrem Normalwiderstand auftreten muß. Es werden also zur Bestimmung des Reibungswiderstandes die Teilflächen F_1, F_2 und F_3 zur interpolierten Gesamtfläche F zusammengezogen, wobei

$$l = \frac{F \cdot \cos\vartheta}{b_{St}}$$

angenommen wird.

Nachdem die in Gl. (5) für den Reibungswiderstand einzusetzende Fläche bestimmt worden ist, fehlt nur noch der Zahlwert c_f' zur Widerstandsberechnung. Dieser wird der von Prandtl angegebenen Kurve für die turbulente Grenzschicht mit laminarem Anlauf entnommen (Bild 1).

$$c_f = \frac{0{,}455}{(\log R)^{2.58}} - 1700/R,$$

die nach [5] alle Gleitflächenversuche befriedigend deckte[5]). Man erhält somit die W_R-Kurve der Hauptausführung mit ausgeprägten Maxima und als Summe die Kurve des rechnerisch ermittelten Gesamtwiderstandes $W = W_N + W_R$, deren Differenz gegenüber der nach der Messung übertragenen W_H-Kurve durch den Maßstabseinfluß hervorgerufen wird — vorausgesetzt, daß sie dem tatsächlichen Widerstand voll entspräche.

Nachdem nunmehr festgestellt ist, daß der rechnerisch ermittelte und der aus Messung übertragene Gesamtwiderstand im ganzen betrachteten Startbereich ähnlich verlaufen, kann die Korrektur erfolgen.

Als Reibungskorrektur ist nach Formel (1)

$$(c_{f_M} - c_{f_H}) \cdot F_H \cdot \varrho/2 \cdot v_H^2 \quad \ldots\ldots (10)$$

in Abzug zu bringen. Die R-Zahl der Hauptausführung ist nach dem Modellgesetz

$$R_H = R_M \cdot \lambda^{3/2} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

In Bild 4 ist der Korrekturfaktor $(c_{f_M} - c_{f_H})$ als Funktion von $R_M = \frac{v_M \cdot l_M}{\nu}$ mit λ als Parameter aufgetragen.

Die reduzierte W_H-Kurve ist ebenfalls in Bild 2 eingetragen. Sie deckt sich, wie erwartet, im Bereich reinen Gleitzustandes nahezu mit der rechnerisch ermittelten W-Kurve.

Einfluß der Rauhigkeit.

Über Maßstabsversuche, die unter Einbeziehung der Hauptausführung über den ganzen Geschwindigkeitsbereich ausgedehnt worden sind, wird in [7] berichtet, der Bild 6 entnommen ist. Im oberen Geschwindigkeitsbereich wird eine unerwartete Abweichung festgestellt, indem der Widerstand der Hauptausführung die übertragenen Modellwiderstände überschreitet. Der höhere Widerstand wird auf den Einfluß von Nietung und Überlappungen zurückgeführt, eine Analyse wird jedoch nicht gegeben.

Der Rauhigkeitszuschlag — s. Bild 1 — kann für die Hauptausführung nach Schlichting [1] erfolgen, wenn durch Versuch die deren Oberflächenzustand entsprechende äquivalente Sandrauhigkeit k_s bestimmt ist. Da Göttinger Mitteilungen über systematische Versuche mit Platten-

[5]) Folgender Ausnahmefall sei erwähnt: ein zu kleines Modell ($b_{St} \leq 0{,}15$ m) ist für die Untersuchung des I. Widerstandsmaximums wegen zu erwartender Unähnlichkeit des Strömungszustandes ungeeignet. Es kann jedoch u. U. noch im Bereich reinen Gleitzustandes und im Gebiet vor dem Abheben benutzt werden. Hier werden die R-Zahlen bei der Übertragung wegen der geringen Abmessungen jedoch so klein, daß sie im allgemeinen im Bereich $R_M < 3 \cdot 10^6$ liegen, in dem besonders große Unterschiede zwischen $c_{f\,turbulent}$ und $c_{f\,laminar\text{-}turbulent}$ auftreten. Da die Heckbenetzung vor dem Abheben Hauptursache des hohen Widerstandes ist und daher von einem laminaren Anlauf einer Grenzschicht nicht die Rede sein kann, ist es begründet, die Reibungskorrektur in solch einem Falle unter Anwendung der Kurve turbulenter Grenzschicht:

$$c_f = \frac{0{,}455}{(\log R)^{2.58}}$$

zu bestimmen, wie ein hier nicht näher behandeltes Beispiel mit 2 ähnlichen Modellen von 0,15 und 0,3 m Breite durch gute Übereinstimmung zwischen Messung und Übertragung bestätigte.

Digitized by Google

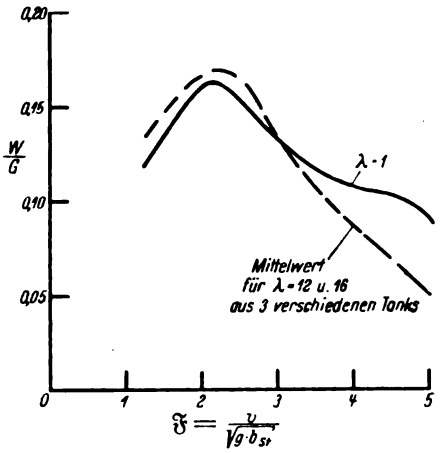


Bild 6. Ergebnis englischer Maßstabsversuche mit der Singapore II C.

rauhigkeiten, wie sie dem Boden eines Schwimmwerks entsprechen würden, nicht vorliegen, sollen durch eine Überschlagsrechnung die niedrigste Rauhigkeit des Schlichtingschen Programms und die Sandrauhigkeit, auf die die Versuche bezogen werden, überprüft werden.

Als Beispiel sei die Länge der Fläche $l = 1$ m und die Geschwindigkeit $v = 30$ m/s angenommen, also ein Zustand vor dem Abheben. Mit $\nu = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ m²/s ist dann $R = 2{,}3 \cdot 10^7$ und dafür

$$c_{f_{\text{glatt}}} = 0{,}00266.$$

Die geringste Rauhigkeit ergab sich für Kalotten, die flachen Nietköpfen entsprechen, von 2,6 mm Höhe und 8 mm Durchmesser in 40 mm Abstand über die Fläche verteilt (Platte XIII, $k_s = 0{,}059$ cm). Es ist die relative Rauhigkeit $l/k_s = 3{,}23 \cdot 10^3$ und dafür

$$c_{f_{\text{rauh}}} = 0{,}0063, \text{ d. h. } 137\,\% \text{ Rauhigkeitszuschlag.}$$

Die Sandrauhigkeit, die durch Sand von einer mittleren Korngröße von 1,35 mm, durch Lack auf der Oberfläche befestigt, hervorgerufen wird, hat mit $k_s = 0{,}222$ cm bei $l/k_s = 4{,}5 \cdot 10^2$ ein

$$c_{f\,\text{rauh}} = 0{,}0106, \text{ d. h. } 300\,\% \text{ Rauhigkeitszuschlag,}$$

wodurch der starke Einfluß der Rauhigkeit bei hohen Gleitgeschwindigkeiten offenbar wird.

Durch einen Kontrollversuch mit einem 0,3 m breiten Einheitsschwimmermodell, dessen Ergebnisse in Bild 7 wiedergegeben sind, wurde eine quantitave Überprüfung für das Modell vorgenommen, insbesondere in bezug auf die durch Spritzwasserwirkung auf die Heckbodenfläche mögliche Widerstandserhöhung vor dem Abheben.

Die obere Diagrammhälfte zeigt für eine konstante Belastung von 50 kg die Gleitzahl des 1. Widerstandsmaximums $\varepsilon = \frac{W_{\max}}{A}$ abhängig vom Anstellwinkel α für drei Modellzustände: 1. Modell glatt, 2. Hinterschiffsboden durch eine Sandschicht von 1,35 mm Korngröße aufgerauht und 3. ganzer Boden aufgerauht.

Es zeigt sich, daß die Rauhigkeit des Hinterschiffs allein praktisch keinen Einfluß hat, da am 1. Widerstandsmaximum das Heck nur noch am äußersten Ende belastet ist. Die Rauhigkeit des Vorschiffs ist jedoch von beträchtlichem Einfluß. Bei kleinen Anstellwinkeln ist die Widerstandserhöhung wegen der größeren benetzten Länge am größten; bei einer Anstellung von 9,5°, wie sie am Maximum etwa zu erwarten ist, beträgt der Zuwachs 41%.

Die untere Diagrammhälfte zeigt einen Zustand kurz vor dem Abheben mit 10 kg Belastung bei 15,5 m/s Geschwindigkeit. Zu den vorgenannten drei Modellzuständen ist noch ein vierter hinzugekommen: Vorschiff allein, glatt. Hier zeigt sich deutlich die durch Spritzwasserbenetzung des Hecks bedingte Widerstandszunahme mit wachsendem Anstellwinkel gegenüber dem Zustand: Vorschiff allein. Während durch Rauhigkeit des Hecks der Gesamtwider-

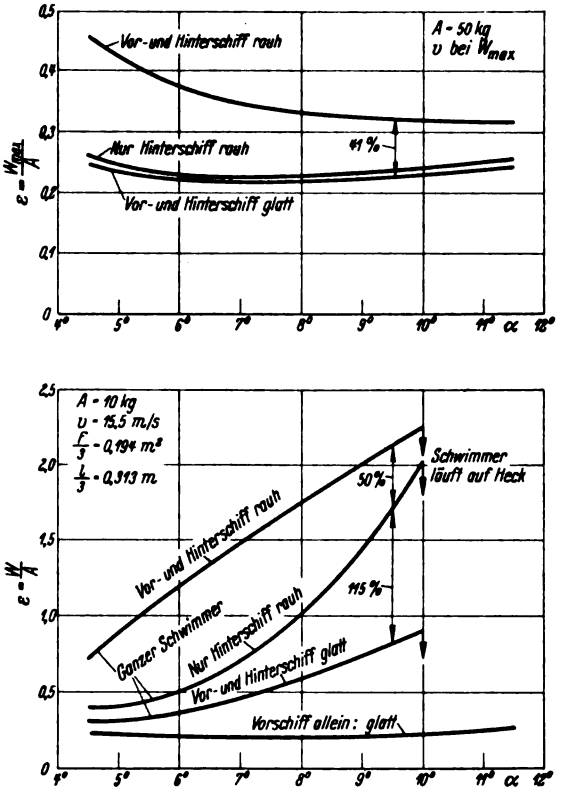


Bild 7. Rauhigkeitseinfluß auf den Widerstand eines Schwimmermodells von 0,3 m Breite am Widerstandsmaximum und vor dem Abheben.

stand bei 9,5° — dem größten Winkel, der zum frühzeitigen Abheben erreichbar ist — um 115% anwächst, steigt dieser Hundertsatz bei Rauhigkeit auch des Vorschiffs nur noch um 50%.

Setzt man nach dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren bei der Bestimmung des Beiwertes c_f ⅓ der Heckfläche und ⅓ der Hecklänge ein, so erhält man nach Schlichting ein $c_{f\,\text{rauh}}$ von 0,015. Den gleichen Wert bestimmt man aus der Messung bei $\alpha = 9{,}5°$. Bei glattem Modell ist Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch bei $\alpha = 7{,}5°$. D. h. die Annahmen bezüglich Größe und Länge der benetzten Heckbodenfläche sind bestätigt bei den hohen Anstellungen, die zwecks schnellen Abhebens angestrebt werden.

Wenn daher die in vorstehender Arbeit behandelte Korrektur zwar auch im Bereich des 2. Widerstandsmaximums einen Abzug ergibt, so ist doch volle Aufmerksamkeit der Tatsache zu schenken, daß durch Widerstandserhöhungen, die auf Rauhigkeitseinfluß zurückzuführen sind, das Abhebevermögen hochbelasteter Seeflugzeuge stark beeinträchtigt werden kann[6]).

III. Kurze Zusammenfassung des Übertragungsverfahrens.

1. Es werden $W_H = W_M \cdot \lambda^3$, A^* und α als Funktion von v_H aufgetragen.
2. Es werden $W_{\max I}$, $W_{\max II}$ und $W_{\min}$ markiert.
3. Der Bereich III, reiner Gleitzustand, wird an Hand der Strömungsbeobachtungen eingegrenzt (im allgemeinen kurz oberhalb $v_{\max I}$ bis $v_{\min}$).
4. Als Anfangsordinate wird $\frac{v_{\max I}}{2}$ gewählt. Endordinate ist v_{Start}.
5. Für etwa 3 Punkte im Bereich III, reiner Gleitzustand, und 1 Punkt bei $v_{\max I}$ wird die äquivalente Druckfläche

[6]) Zu gleichen Feststellungen kommt Parkinson in einem während der Drucklegung vorliegender Arbeit erschienenen Bericht [9], worin jedoch auf Grund der Untersuchung eines mit Nietknöpfen versehenen Modells der Rauhigkeitszuschlag der geringeren Rauhigkeitsdichte entsprechend geringer (40 %) bestimmt wird.

Digitized by Google

F_D und die benetzte Fläche F der Gleitfläche bestimmt. Die Kielung ϑ der Gleitfläche entspricht hierbei der Kielung des Schwimmerbodens an der Hauptstufe ohne Berücksichtigung eventueller Wellenbinderform. Unter Einbeziehung der drei Ausgangspunkte bei $v = 0$ und des Endpunktes bei v_{Start} kann nun F als Funktion von v dargestellt werden.

6. Als Fläche im Bereich IV wird im mittleren Drittel dieses Bereichs ⅓ der Heckbodenfläche angenommen, während beiderseits der Abfall zur vorherbestimmten Fläche geradlinig erfolgt.
7. Zur Bestimmung der R-Zahl wird als Länge l im Bereich II und III die Länge der äquivalenten benetzten Fläche

$$l = \frac{F \cdot \cos \vartheta}{b_{St}}$$

und im Bereich IV im mittleren Drittel ⅓ der Länge des Hecks von Hauptstufe bis 2. Stufe, anschließend geradlinig abfallend zum Anschlußpunkt, bezw. zu Null, eingesetzt.
8. Nach Formel (10) wird die Korrektur bestimmt und von W_{II} in Abzug gebracht.

IV. Übertragungsbeispiele.

In Bild 8 ist zur Feststellung des Einflusses zunehmenden Fluggewichtes auf den Maßstabseffekt die Übertragung des Beispieles zu Bild 2 auf 100 t Fluggewicht vorgenommen worden und in dimensionsloser Auftragung $\frac{W}{G}$ als $f(\tilde{v})$ zu $G_M = 60$ kg und $G_H = 10$ t in Vergleich gesetzt. Man erkennt — vor allem an der gesonderten Auftragung der Reibungskorrektur für 10 und 100 t —, daß die Korrektur beim Sprung des Fluggewichtes von 10 auf 100 t nur noch eine relativ geringe Zunahme erfährt.

In Bild 9 ist für eine Maßstabsuntersuchung von Schmidt [8], die mit Modellen im Maßstab $\lambda = 5$ und $2\frac{1}{2}$ und der Hauptausführung, gemessen am Versuchsflugzeug, durchgeführt worden ist, der Widerstandsverlauf mit und ohne Reibungskorrektur sowie der Anstellwinkelverlauf, der eine leichte Abhängigkeit vom Maßstab zeigt, eingetragen. Die Anwendung der Korrektur bringt die Ergebnisse von Modell und Hauptausführung gut zur Deckung.

V. Zusammenfassung.

Das bisher angewandte Verfahren, den gesamten Modellwiderstand mit λ^3 auf die Hauptausführung zu übertragen und auf eine gesonderte Übertragung des Reibungswiderstandes zu verzichten, war bei großen Modellen und Schwimmwerken normaler Größe zulässig. Eine Neubehandlung der Frage der Übertragung ist jedoch bei Steigerung der Flugzeuggrößen notwendig. Es wird ein Verfahren beschrieben, bei dem unter Anwendung der Analyse von Gleitflächenversuchen der Verlauf der benetzten Fläche über dem Startbereich rechnerisch ermittelt wird.

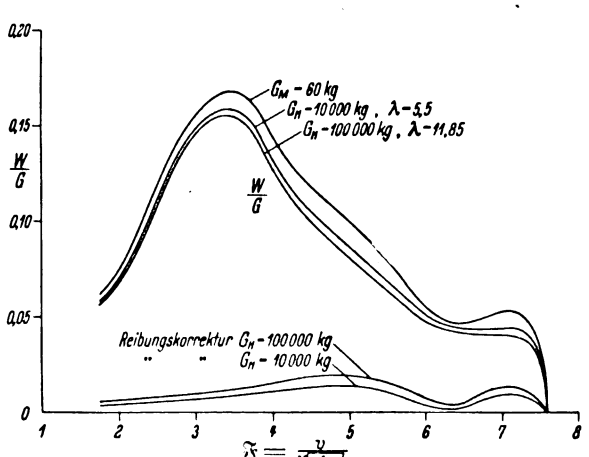


Bild 8. Vergleich der korrigierten Widerstandskurven eines Flugbootes bei Steigerung des Fluggewichts von 10 auf 100 t.

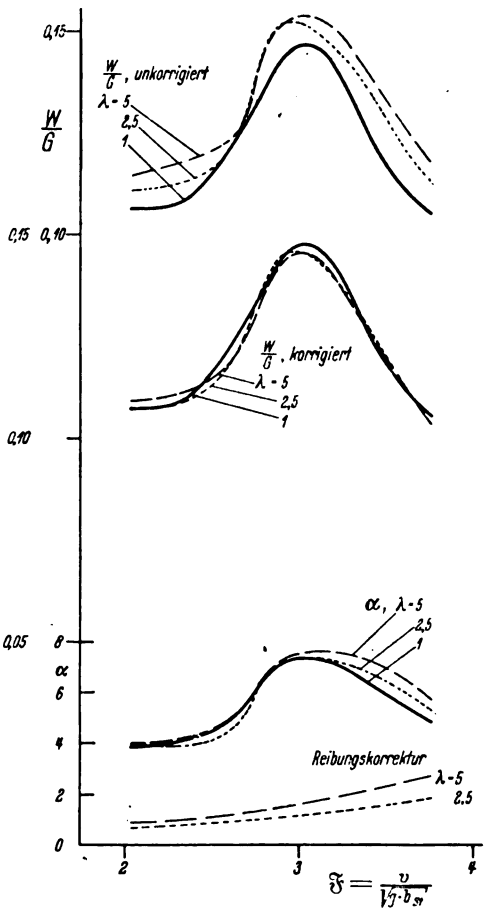


Bild 9. Korrektur eines mit Hauptausführung »III« und 2 Modellen ermittelten Widerstandsverlaufs aus der Maßstabsreihe von Schmidt.

Die Reibungsbeiwerte sind der Prandtlschen Kurve für turbulente Grenzschicht mit laminarem Anlauf zu entnehmen. Mit diesen beiden Werten ist eine Reibungskorrektur bestimmbar.

Beispiele zeigen die brauchbare Annäherung rechnerisch ermittelter und aus Messungen übertragener Widerstandsverläufe. Eine alte Maßstabsreihe wird durch Anwendung der Korrektur zu guter Übereinstimmung dreier Widerstandskurven geführt. Der Schritt vom 10-t- zum 100-t-Flugboot wird bei Anwendung der Korrektur als nicht kritisch festgestellt für die Übertragung von einem Modell zur Zeit üblicher Größe.

VI. Schrifttum.

[1] Schlichting, Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem. Ingenieur-Archiv (1936) Febr.
[2] Sottorf, Über den Einfluß des Modellmaßstabes bei der Untersuchung von Flugzeugschwimmern. 2. Flugtechn. Bd. 22 (1932), H. 24.
[3] Sikorsky, Das Großflugboot. Jahrb. d. d. Luftfahrtforschg. 1938. Ergänzungsband S. 11.
[4] Sottorf, Gestaltung von Schwimmwerken. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), H. 4/5.
[5] Sottorf, Analyse experimenteller Untersuchungen über den Gleitvorgang an der Wasseroberfläche. Jahrb. d. d. Luftfahrtforschg. 1937, S. I 320 und Werft — Reed. — Hafen (1938) H. 5/6.
[6] Sottorf, Versuche mit Gleitflächen, III. Teil. Werft — Reed. — Hafen (1933) H. 4/5.
[7] Hanson, Full Scale Water Resistance of the Singapore II C in Steady Motion. R. u. M. 1805.
[8] Schmidt, Der Maßstabseinfluß beim Schleppversuch mit Flugzeug-Schwimmwerken. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 224.
[9] Parkinson, The Effect of Rivet Heads on the Water Performance of a Seaplane Float. NACA T. N. Nr. 657.

Digitized by Google

Beeinflussungswiderstand zwischen Flügel und Rumpf.

(Auswertung amerikanischer Messungen.)

Von W. Haack.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof, Direktion Flugwerk.

Amerikanische Messungen an verschiedenen Flügel-Rumpf-Kombinationen, durchgeführt von N. Jacobs und E. Ward im NACA-Überdruckkanal, werden derart ausgewertet, daß für zwei verschiedene Flugzustände (Schnellflug und Steigflug) und bei Verwendung eines Rechteckflügels und runden Rumpfes ein direkter Vergleich des Kombinationswiderstandes bei verschiedenen Flügelhochlagen und verschiedenen Flügelwurzelauskleidungen möglich ist. Durch zusätzliche Auftragung des gerechneten Kombinationswiderstandes ergibt sich der Widerstandsanteil, welcher auf gegenseitige Beeinflussung zurückzuführen ist. Schließlich wird der Einfluß der Flügel- bzw. Rumpfform und der Schränkung von Flügelsehne und Rumpflängsachse auf den Kombinationswiderstand ermittelt.

Gliederung.

I. Einführung.
II. Bezeichnungen.
III. Modellbeschreibung.
IV. Ermittlung des rechnerischen Kombinationswiderstandes und des Beeinflussungswiderstandes.
V. Einfluß der Flügelhochlage auf den Kombinationswiderstand bei Rechteckflügel und rundem Rumpf.
a Schnellflug ($c_{a_K} = 0{,}2$),
b Steigflug ($c_{a_K} = 0{,}6$).
VI. Einfluß der Flügelform bzw. der Rumpfform auf den Kombinationswiderstand.
VII. Einfluß der Schränkung von Flügelsehne und Rumpflängsachse auf den Widerstand der Kombination I.
VIII. Zusammenfassung.
IX. Schrifttum.

I. Einführung.

Um eine weitere Steigerung der Fluggeschwindigkeit zu erzielen, ist eine weitere Verringerung des Luftwiderstandes anzustreben. Hierbei ist nicht allein auf die Widerstandsverminderung der einzelnen Bauteile, sondern in immer steigendem Maße auf den gegenseitigen Beeinflussungswiderstand zu achten.

Im Verlauf entsprechender Arbeiten in der DVL wurden amerikanische Messungen [1] bis [5] nach diesen Gesichtspunkten ausgewertet. Hierbei handelt es sich um Messungen, welche zwar im turbulenzreichen Überdruckkanal des NACA durchgeführt wurden, jedoch wegen Verwendung heute üblicher Dickenverhältnisse der Flügelprofile und wegen der Ausschaltung jeglicher Störquellen für Vergleichsbetrachtungen besonders geeignet erschienen. Bei den Messungen waren sowohl Flügel- und Rumpfform als auch ihre gegenseitige Lage und ihr Einstellwinkel geändert worden, so daß eine Berücksichtigung dieser Einflüsse ebenfalls möglich war.

In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse mitgeteilt, jedoch nur insofern, als sie sich auf die Widerstandsmessungen beziehen. Bezüglich der Ergebnisse der Auftriebsmessungen sei auf die amerikanischen Berichte [1] bis [5] verwiesen. Es muß jedoch betont werden, daß weniger eine quantitative als vielmehr eine qualitative Auswertung der Messungen beabsichtigt war, wodurch gleichzeitig dem hohen Turbulenzgrad des Versuchskanals Rechnung getragen wird.

Um bei der Auftragung der Meßergebnisse in Abschnitt V, VI und VII die verschiedenen Einflüsse auf den Widerstand der einzelnen Flügel-Rumpf-Kombinationen klarer hervortreten zu lassen, wurde vom gesamten Kombinationswiderstand jeweils der induzierte Widerstand entsprechend elliptischer Auftriebsverteilung ($c_{w_i} = c_a^2/\pi \cdot \Lambda$) abgezogen.

II. Bezeichnungen.

Modelldaten:

b = Spannweite,
t = Flügeltiefe,
F = Flügelfläche,
$\Lambda = b^2/F$ = Flügelstreckung,
d/t = Dickenverhältnis des Flügels,
l = Rumpflänge,
D_{max} = größter Rumpfdurchmesser,
h = Abstand der Profilsehne in 0,25 t von der Rumpflängsachse (vgl. Bild 1),
β = Schränkungswinkel zwischen Profilsehne und Rumpflängsachse.

Beiwerte (bezogen auf Flügelfläche und 0,25 t-Achse):

c_a = Auftriebsbeiwert,
c_w = Widerstandsbeiwert,
c_{w_i} = Induzierter Widerstandsbeiwert bei elliptischer Auftriebsverteilung,
c_m = Momentenbeiwert (kopflastiges Moment positiv),
α = Anstellwinkel der Profilsehne.

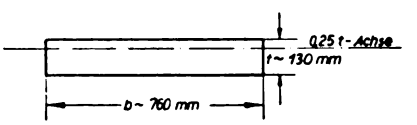
Indizes:

»F« Flügel,
»R« Rumpf,
»K« Kombination von Flügel und Rumpf.

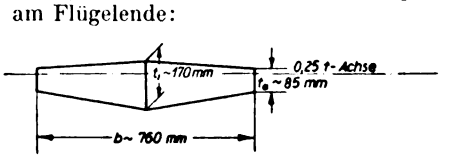
III. Modellbeschreibung.

Es soll hier nur insoweit eine Zusammenstellung der Versuchsmodelle gegeben werden, als es für das Verständnis der später mitgeteilten Meßergebnisse erforderlich ist[1]). Benutzt wurden folgende vier Modelle:

1. Rechteckflügel mit konstantem NACA-Profil 0012 entsprechend skizzierter Draufsicht:



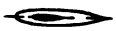
2. Trapezflügel mit NACA-0018 als Innenprofil und NACA-0009 am Flügelende:



[1]) Genaue Beschreibung der Versuchsdurchführung und der Modelle vergl. N.A.C.A.-Rep. 540.

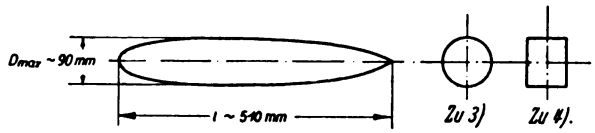
Digitized by Google

Tafel 1.

Kombination Nr.	Bildliche Darstellung	Grundriß	Flügel-NACA-Profil innen	Flügel-NACA-Profil außen	Spannweite*)	Tiefe*) innen	Tiefe*) außen	Rumpfquerschnitt
I = (1 + 3)		Rechteck	0012	0012	~760	~130	~130	Kreis
II = (2 + 3)		Trapez	0018	0009	~760	~170	~ 85	Kreis
III = (1 + 4)		Rechteck	0012	0012	~760	~130	~130	Rechteck
IV = (2 + 4)		Trapez	0018	0009	~760	~170	~ 85	Rechteck

*) Maße in mm.

3. Runder Rumpf mit einem größten Durchmesser von $D_{max} \sim 90$ mm und folgender Ansicht:



4. Rechteckrumpf mit abgerundeter Rumpfspitze, dessen größte Querschnittsfläche mit der des runden Rumpfes übereinstimmt und dessen größte Höhe gleich dem größten Durchmesser des runden Rumpfes ist.

Diese Modelle wurden im wesentlichen zu vier in Tafel 1 beschriebenen Kombinationen zusammengestellt, welche im Verlauf der Messungen nur noch durch verschiedene Flügelhochlagen, verschiedene Flügelwurzelauskleidungen und verschiedene Flügeleinstellungen zur Rumpflängsachse geändert wurden.

Als Beispiel seien die Flügellagen der Kombination I in Bild 1 dargestellt. Die angedeuteten Hoch- bzw. Tieflagen des Flügels sind im Verhältnis zur Flügeltiefe angegeben und betragen:

$\frac{h}{t} = \pm$	0	0,08	0,16	0,24	0,28	0,34	0,40

wo h den Abstand der Profilsehne von der Rumpflängsachse bedeutet.

Die beiden verwendeten Flügelwurzelauskleidungen sind in Bild 2 und 3 dargestellt.

IV. Ermittlung des rechnerischen Kombinationswiderstandes und des Beeinflussungswiderstandes.

In der Einführung war bereits darauf hingewiesen worden, daß bei sorgfältiger Formgebung einzelner Flugzeugteile auch auf den Beeinflussungswiderstand Rücksicht genommen werden muß, wobei im vorliegenden Falle unter Beeinflussungswiderstand die Differenz zwischen dem gemessenen Kombinationswiderstand und dem aus Einzelmessungen errechneten zu verstehen ist. Wie die Ermittlung des rechnerischen Kombinationswiderstandes erfolgt, sei an einem Beispiel erläutert.

Es soll der Widerstand der Kombination I (vgl. Tafel 1) für $c_{a_K} = 0{,}2$ aus den zur Verfügung stehenden Widerstandsmessungen sowohl des Flügels als auch des Rumpfes allein berechnet werden:

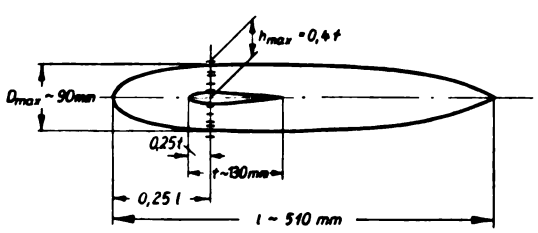


Bild 1. Kombination I mit eingezeichneten Hochlagen der 0,25 t-Achse des Flügels.

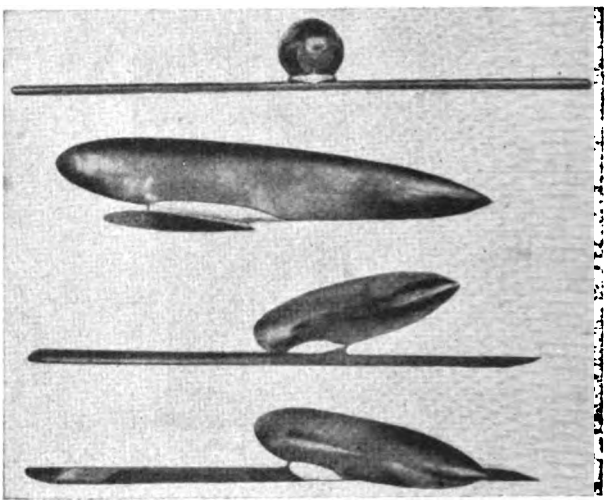


Bild 2. Kleine Wurzelauskleidung.

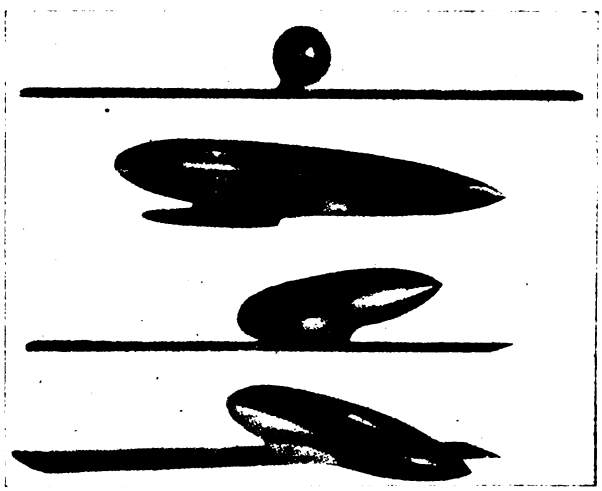


Bild 3. Große Wurzelauskleidung.

1. Flügelwiderstand.

Der gemessene Flügelwiderstandsbeiwert bei $c_{a_F} = 0{,}2$ beträgt $c_{w_F} = 0{,}0084$. Dieser Wert reduziert sich bei der Kombination um den vom Rumpf verdeckten Flügelteil. Bei der Berechnung dieses Widerstandsanteiles ist zu beachten, daß das Flügelmodell mit stumpfen Flügelenden hergestellt war, infolgedessen als Widerstandsbeiwert für mittlere Flügelprofile nicht der am Gesamtflügel gemessene Beiwert eingesetzt werden darf. Es wurde deshalb unter Verwendung früherer DVL-Messungen (vgl. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 4/5 S. 173) eine Abschätzung des Einflusses der stumpfen Flügelenden so vorgenommen, daß der Widerstandsbeiwert $c_{w_F} = 0{,}0084$ im Verhältnis der Widerstandsbeiwerte umgerechnet wurde, welche im DVL-Kanal an Flügelmodellen mit abgerundeten und stumpfen Enden

Digitized by Google

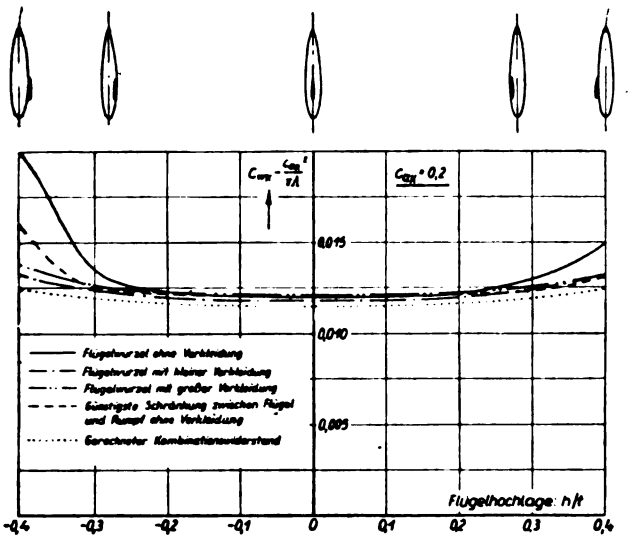


Bild 4. Einfluß der Flügelhochlage auf den Widerstand der Kombination I im Schnellflug (ausschließlich c_{w_i}).

gemessen worden waren. Als Flügelwiderstandsbeiwert ergibt sich somit:

$$c_{w_F} = 0{,}0084 - 0{,}0084 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}116 = 0{,}0075,$$

wobei der Faktor 0,93 das Verhältnis der Widerstandsbeiwerte bei abgerundeten und stumpfen Flügelenden darstellt und der Faktor 0,116 das Verhältnis der vom Rumpf verdeckten Flügelfläche zur Gesamtfläche bedeutet.

2. Rumpfwiderstand.

Der gemessene Rumpfwiderstandsbeiwert bei einem Anstellwinkel entsprechend $c_{a_F} = 0{,}2$, bezogen auf die Flügelfläche, beträgt $c_{w_R} = 0{,}0041$. Durch den Anbau des Flügels verringert sich die Rumpfoberfläche um den doppelten Betrag eines Profilquerschnitts. Diese Fläche wird als reine Reibungsfläche aufgefaßt, und der ihr entsprechende Reibungswiderstand bei der Reynoldsschen Zahl des Rumpfes ist ebenfalls in der Rechnung berücksichtigt. In diesem Falle beträgt der Einfluß auf den Kombinationswiderstand $c_w = 0{,}0001$, ist also sehr gering.

Für die Kombination I ergibt sich somit für $c_{a_K} = 0{,}2$ ein rechnerischer Widerstandsbeiwert von $c_{w_K} = 0{,}0115$.

V. Einfluß der Flügelhochlage auf den Kombinationswiderstand bei Rechteckflügel und rundem Rumpf.

Um den Einfluß der Flügelhochlage auf den Widerstand der Kombination I (vgl. Tafel 1) abschätzen zu können, wurden die Widerstandsbeiwerte c_{w_K} als Funktion der Flügelhochlage für zwei verschiedene Auftriebsbeiwerte — $c_{a_K} = 0{,}2$ und 0,6 — aufgetragen, um so die wichtigsten Flugzustände, nämlich Schnellflug und Steigflug, zu berücksichtigen.

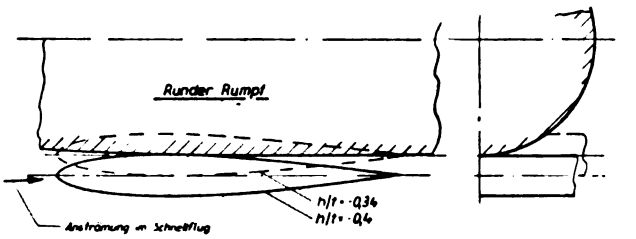


Bild 5. Flügel-Rumpf-Übergang der Kombination I bei verschiedenen Flügeltieflagen.

a) Schnellflug ($c_{a_K} = 0{,}2$).

Vergleicht man in Bild 4 die gemessenen Kombinationswiderstandsbeiwerte bei unverkleideter Flügelwurzel mit den gerechneten, bei denen ja vorausgesetzt wurde, daß eine Strömungsablösung durch gegenseitige Beeinflussung nicht erfolgt, so fällt zunächst die große Differenz im Bereich großer Flügeltieflagen auf. Bei entsprechenden Hochlagen des Flügels ist die Abweichung der beiden Kurven, d. h. der Beeinflussungswiderstand, wesentlich geringer, während im Bereich des Mitteldeckers Messung und Rechnung völlig parallel verlaufen. In diesem Bereich beträgt der Beeinflussungswiderstand $\sim 4\%$ des Gesamtwiderstandes und ist zurückzuführen auf erhöhte Strömungsgeschwindigkeiten am Rumpf durch den Flügel und umgekehrt, geringe Strömungsablösung am Flügel-Rumpf-Übergang infolge der von Prof. Prandtl angegebenen Sekundärströmung und gegebenenfalls auf ungenaue Bestimmung des Profilwiderstandsbeiwertes bei der Widerstandsberechnung des vom Rumpf verdeckten Flügelteils.

Vergegenwärtigt man sich nun bei Flügeltieflagen von $h/t = -0{,}25$ bis $-0{,}4$, bei welchen sich ein plötzlicher Widerstandsanstieg bemerkbar macht, den Übergang vom Flügel zum Rumpf (vgl. Bild 5), so ist in Strömungsrichtung eine starke Querschnittserweiterung zu erkennen. Die hierdurch bedingte Vergrößerung des auf der Flügeloberseite ohnedies schon vorhandenen Druckanstieges kann die Strömung nicht überwinden und reißt ab, worauf im wesentlichen der starke Widerstandsanstieg zurückzuführen ist. Einen geringen Einfluß übt noch die Vergrößerung des induzierten Widerstandes infolge des Auftriebsverlustes im abgerissenen Strömungsbereich aus. Dieser Auftriebsverlust erklärt gleichzeitig die Erhöhung des für konstanten Auftriebsbeiwert erforderlichen Anstellwinkels von $\alpha_K = 2{,}5^0$ beim Mitteldecker auf $\alpha_K = 3{,}3^0$ bei einer Flügeltieflage von $h/t = -0{,}4$.

Faßt man den mittleren Flügelbereich als im überzogenen Zustand befindlich auf, so erhält man die gleichen Strömungsverhältnisse wie zuvor. Der Vorteil dieser Auffassung besteht darin, daß die gemessenen Momentenwerte der Kombinationen leichter erklärt werden können. Es sei in diesem Zusammenhang daran erinnert, daß die Strömung um ein überzogenes Profil den Druckanstieg auf der Saugseite nicht überwindet, abreißt und sich infolgedessen das Unterdruckgebiet bis zur Profilhinterkante ausbreitet (vgl. Bild 6).

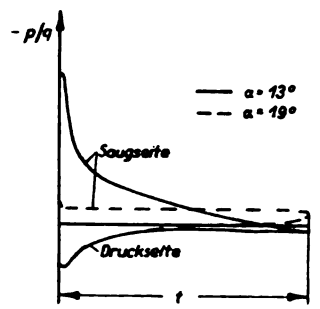


Bild 6. Druckverteilung am symmetrischen R. A. F. 30 Profil (Messung im VDT-Kanal entsprechend N.A.C.A.-Rep. 360).

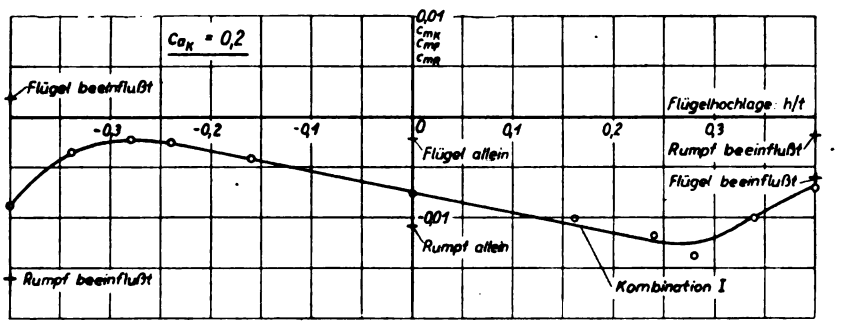


Bild 7. Momentenbeiwert der Kombination I und des Flügels allein in Gegenwart des Rumpfes und umgekehrt jeweils bezogen auf die Flügelfläche und auf 0,25 t.

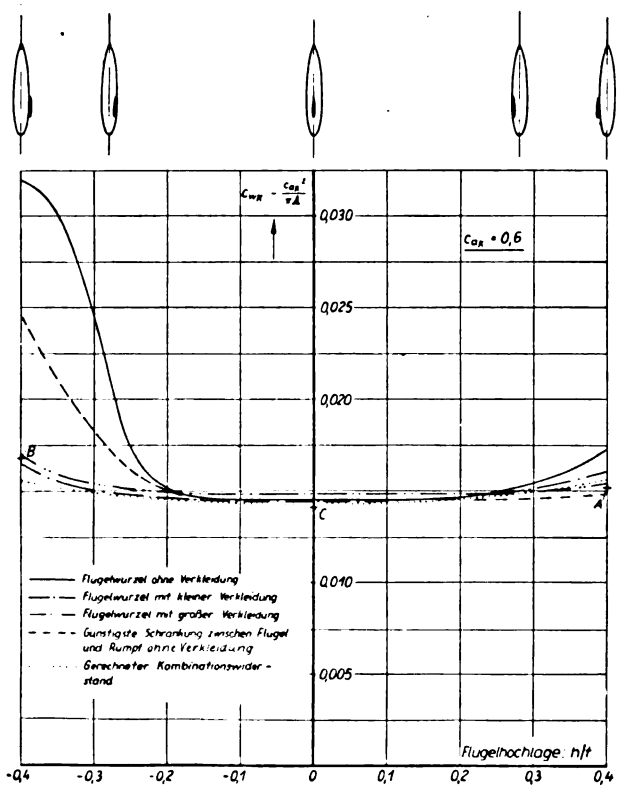
Digitized by Google

In Bild 7 ist nun der Momentenbeiwert der Kombination I wieder als Funktion der Flügelhochlage aufgetragen, sowie bei Flügellagen von $h/t = \pm 0{,}4$ Einzelwerte für den Flügel allein in Gegenwart des Rumpfes und umgekehrt. Sämtliche Werte sind auf die ursprüngliche Flügelfläche und auf die 0,25-t-Achse bezogen. Daß die Summe von Flügel beeinflußt plus Rumpf beeinflußt nicht mit dem entsprechenden Wert der Kombination übereinstimmt, dürfte auf einen geringen Spalt zwischen Flügel und Rumpf zurückzuführen sein, welcher sich bei getrennter Messung wohl nicht vermeiden läßt.

Man erkennt sofort, wie mit wachsender Flügeltieflage eine plötzliche Änderung im Momentenverlauf eintritt. Es hat also die Strömungsablösung im Flügelmittelteil eine Vergrößerung der Schwanzlastigkeit zur Folge. Für den Rumpf allein in Gegenwart des Flügels ergibt sich ein großes schwanzlastiges Moment, während der Flügel allein in Gegenwart des Rumpfes ein geringes kopflastiges Moment aufweist (für den Flügel ohne Beeinflussung durch den Rumpf wurde $c_{m_F} = -0{,}002$ gemessen). Diese Ergebnisse sind wohl auf ein Unterdruckgebiet zwischen Flügel und Rumpfunterseite zurückzuführen, welches an der Rumpfunterseite eine nach abwärts und an der Flügeloberseite eine gegen die Flügelhinterkante verschobene (vgl. Bild 6) und nach aufwärts gerichtete Kraft bewirkt.

Für den Hochdecker ($h/t > 0{,}25$) gelten die gleichen Verhältnisse, jedoch in geringerem Maße (Bild 4 und 6). Das ist darauf zurückzuführen, daß durch den Anbau des Rumpfes eine Strömungsstörung an der Flügelunterseite erfolgt. Bei symmetrischem Profil und kleinem Auftriebsbeiwert ist an der Unterseite geringerer Druckanstieg als auf der Oberseite vorhanden. Es wird daher zu geringerer Strömungsablösung kommen.

Im Bereich mittlerer Flügelhochlagen ergibt sich durch gegenseitige Beeinflussung eine Differenz zwischen dem Momentenwert der Kombination und der Summe der Einzelmomente. Außerdem ist ebenfalls durch gegenseitige Beeinflussung die Änderung des Kombinationsmomentes bei Änderung der Flügelhochlage der durch den Rumpfwiderstand verursachten Momentenänderung direkt entgegengerichtet. Eine Erklärung dieser Ergebnisse konnte aus den vorliegenden Messungen nicht gefunden werden.



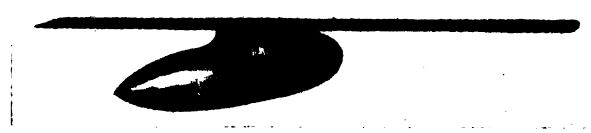


Bild 9. Kombination I bei einer Flügelhochlage von $h/t = +0{,}4$ und großer Flügelauskleidung (nach N.A.C.A.-Rep. 540).

Eine Möglichkeit, die entsprechend Bild 5 bei Hoch- und Tiefdeckern vorhandene schädliche Querschnittserweiterung zu vermeiden, besteht bekanntlich in einer Auskleidung des Flügel-Rumpf-Überganges. Um den Einfluß solcher Flügelwurzelauskleidungen deutlich hervortreten zu lassen, wurden in Bild 4 Widerstandsbeiwerte für zwei verschieden große Ausrundungen aufgetragen. Man erkennt tatsächlich eine wesentliche Widerstandsersparnis, wobei sich die kleine Auskleidung als günstiger erweist. Eine Erklärung wird in Abschnitt V b für den Steigflug gegeben.

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit verwiesen, durch geeignete Schränkung von Flügel und Rumpf zum mindesten eine starke Herabsetzung des Druckanstieges an der Flügelwurzel und somit eine Widerstandsersparnis trotz evtl. Vergrößerung des Rumpfwiderstandes zu erzielen (vgl. Bild 4). Inwieweit durch den Fortfall der Flügelwurzelauskleidung bzw. durch eine Schränkung von Flügel und Rumpf Fragen der Längsstabilität bzw. der Landung berührt werden, soll hier nicht weiter erörtert werden. (Es sei noch erwähnt, daß die Widerstandsbeiwerte für Flügellagen von $h/t = \pm 0{,}4$ aus einer Schar von Meßwerten in anderer Auftragung extrapoliert worden sind, jedoch bis $h/t = \pm 0{,}28$ direkte Meßwerte darstellen.)

b) Steigflug ($c_{a_K} = 0{,}6$).

Der Gang der Untersuchungen entspricht völlig dem für den Schnellflug. In Bild 8 sind in Abhängigkeit von der Flügelhochlage die gleichen Widerstandsbeiwerte aufgetragen wie in Bild 4. Beim Übergang vom Schnellflug zum Steigflug tritt wegen der größeren Formwiderstände eine Verschiebung der Kurven zu höheren Widerstandsbeiwerten ein. Der Kurvenverlauf im allgemeinen ist jedoch der gleiche geblieben. Nur beim unverkleideten Tiefdecker ist bereits bei Tieflagen von $h/t \sim -0{,}2$ ein Abreißen der Strömung zu beobachten, was wie im Schnellflug durch Flügelwurzelauskleidung verhindert werden kann. Hierbei erweist sich im weitaus größten Bereich die kleine Auskleidung als am günstigsten. Ausnahmen, bei welchen die große Verkleidung Vorteile bringt, bilden lediglich Kombinationen mit extremen Flügelhochlagen. Versucht man hierfür eine Erklärung anzugeben, so ist folgendes zu beachten:

1. Die große Wurzelauskleidung wirkt beim Hochdecker als Vergrößerung der Flügeloberseite (vgl. Bild 9), was im Flügelmittelteil eine Auftriebserhöhung zur Folge hat. (Beim Tiefdecker umgekehrte Verhältnisse.)

2. Die erforderlichen Anstellwinkel α_K bei konstantem Auftriebsbeiwert $c_{a_K} = 0{,}6$ sind in Bild 10 aufgetragen. Die Differenz der beiden Kurven beträgt bei einer Flügelhochlage von $h/t = +0{,}4$ etwa 1°, wobei der geringe Wert der großen Auskleidung entspricht. (Beim Tiefdecker wieder entgegengesetzte Verhältnisse.)

Bild 8 (links). Einfluß der Flügelhochlage auf den Widerstand der Kombination I im Steigflug (ausschließlich c_{w_i}).

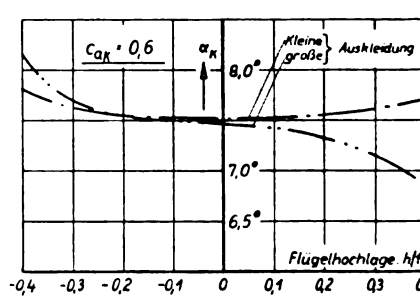


Bild 10. Einfluß der Flügelhochlage und der Flügelwurzelauskleidung auf den Anstellwinkel der Kombination I bei konstantem $c_{a_K} = 0{,}6$.

Digitized by Google

3. Dieser Anstellwinkeldifferenz entspricht eine Änderung des Formwiderstandes, und zwar sowohl des Flügels als auch des Rumpfes. Subtrahiert man diesen Widerstandsbetrag vom Beiwert der Kombination mit kleiner Auskleidung, so erhält man den in Bild 8 eingetragenen Wert A. (Bei $h/t = -0{,}4$ erhält man auf gleiche Weise den Wert B.)

4. Die verbleibende Differenz zwischen dem bei großer Verkleidung gemessenen Beiwert und A enthält noch den Einfluß der Oberflächenvergrößerung durch die große Auskleidung und den Einfluß der Auftriebsverteilungsänderung auf den induzierten Widerstand. Letzterer dürfte jedoch gering sein.

Die gleichen Verhältnisse treten im Schnellflug auf, nur mit dem Unterschied, daß die Widerstandsdifferenz zwischen großer und kleiner Verkleidung geringer ist. Das ist darauf zurückzuführen, daß einmal die Änderung des erforderlichen Anstellwinkels mit Vergrößerung der Auskleidung (kleiner Gesamtauftrieb) klein ist, zum anderen im Bereich kleiner Anstellwinkel kaum eine Abhängigkeit des Formwiderstandes des Flügels bzw. Rumpfes vom Anstellwinkel zu beobachten ist.

Die in Bild 8 ebenfalls eingetragenen Widerstandsbeiwerte für günstigste Flügel-Rumpf-Schränkung lassen vor allem einen sehr geringen Widerstand für den Hochdecker erkennen, d. h. es ist zur Vermeidung großer Beeinflussungswiderstände nicht unbedingt eine Flügelwurzelauskleidung notwendig. (Auch hier sind die Werte für $h/t = \pm 0{,}4$ aus einer Schar von Meßwerten in anderer Auftragung extrapoliert, während bis Hochlagen von $h/t = \pm 0{,}28$ direkte Meßwerte vorlagen.)

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß im Bereich des Mitteldeckers kaum ein Unterschied zwischen Rechnung und Messung auftritt. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die Rechnung für einen Anstellwinkel von $\alpha_F = 7{,}8^0$ entsprechend $c_{a_F} = 0{,}6$ durchgeführt wurde, während durch den Anbau des Rumpfes bereits bei $\alpha_K = 7{,}5^0$ der gleiche Auftrieb erzielt wird. Der in Bild 8 eingetragene Punkt C stellt zum Vergleich einen gerechneten Kobinationswiderstand bei $\alpha_F = 7{,}5^0$ dar.

VI. Einfluß der Flügelform bzw. der Rumpfform auf den Kombinationswiderstand.

Die Ausführungen im vorigen Kapitel bezogen sich ausschließlich auf die Kombination I, d. h. auf die Verwendung eines Rechteckflügels mit verhältnismäßig geringer Flügelwurzeldicke ($d/t = 12\%$) und eines runden Rumpfes. Es erhebt sich nunmehr die Frage, wie sich die Verhältnisse bei einer Formänderung einzelner Bauteile ändern. In Bild 11 sind deshalb für die in Kapitel III beschriebenen Kombinationen I bis IV die Widerstandsbeiwerte für den Schnellflug und in Bild 12 die gleichen Werte für den Steigflug aufgetragen.

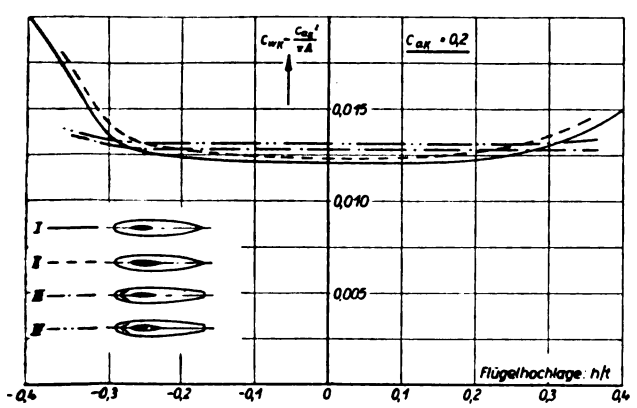


Bild 11. Einfluß der Flügelhochlage auf den Widerstand der Kombinationen I bis IV im Schnellflug (ausschließlich c_{wi}).

Bild 11 ist zu entnehmen, daß für die beiden Kombinationen I und II sehr gute Übereinstimmung im Kurvenverlauf besteht. Das besagt aber, daß bei gleichem Rumpfquerschnitt die im vorigen Kapitel beschriebenen Meßergebnisse und Erklärungen auch bei größeren Flügeldicken Gültigkeit behalten. Denn der Übergang vom Rechteckflügel zum Trapezflügel würde den Kurvenverlauf im wesentlichen durch die Verdickung des Flügelmittelteils beeinflussen. Eine Formänderung des Rumpfquerschnittes hingegen kann bei Hoch- bzw. Tieflage des Flügels wesentlichen Einfluß auf den Kombinationswiderstand ausüben. Entsprechende Beiwerte sind in Bild 11 z. B. für einen rechteckigen Rumpfquerschnitt aufgetragen. Die Unabhängigkeit des Kombinationswiderstandes von der Flügelhochlage sowie die bei Flügeltieflage erkennbare Widerstandsdifferenz zwischen den Kombinationen mit rundem bzw. rechteckigem Rumpf ist darauf zurückzuführen, daß beim rechteckigen Rumpfquerschnitt auch bei extremen Flügelhochlagen an der Flügelwurzel keine übermäßige Querschnittserweiterung und damit Strömungsablösung vorhanden ist. In Bild 12 sind dieselben Kurven für den Steigflug aufgetragen. Man erkennt, daß für sie die gleichen Verhältnisse gelten wie für den Schnellflug.

Bemerkenswert ist bei einem Vergleich von Bild 11 und 12 noch folgendes: Während im Schnellflug die Kombinationen mit Rechteckflügel geringere Widerstände ergeben als diejenigen mit Trapezflügel, was auf die Widerstandsdifferenz der Flügel allein zurückzuführen ist, beobachtet man im Steigflug die geringeren Widerstände gerade für die Kombinationen mit Trapezflügel. Dies dürfte im wesentlichen auf die Differenz des Anstieges des induzierten Widerstandes mit wachsendem Auftriebsbeiwert zurückzuführen sein. Es sei daran erinnert, daß sowohl Rechteckflügel als auch Trapezflügel ohne Verwindung ausgeführt waren und sich somit für den Rechteckflügel eine stärkere Zunahme des induzierten Widerstandes mit wachsendem Auftriebsbeiwert ergibt als für den Trapezflügel der gezeigten Zuspitzung. Der verschiedenen Abhängigkeit des Formwiderstandes vom Auftriebsbeiwert dürfte nur geringere Bedeutung zukommen. Berechnet man nämlich für den Steigflug die Differenz des induzierten Widerstandes bei Rechteck- und Trapezflügel und zieht hiervon die Differenz entsprechend dem Schnellflug ab, so ergibt sich ein Wert von $\Delta c_{wi} = 0{,}0006$, welcher recht gut mit der Summe der entsprechend Bild 11 und 12 gemessenen Widerstandsdifferenzen übereinstimmt.

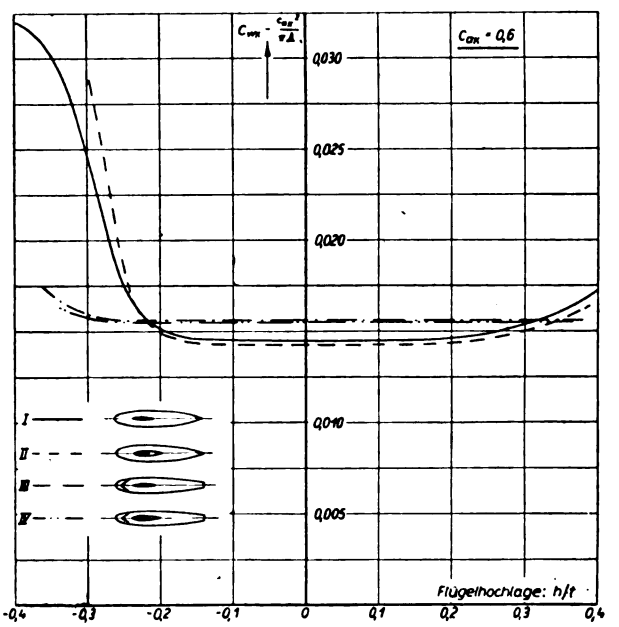


Bild 12. Einfluß der Flügelhochlage auf den Widerstand der Kombinationen I bis IV im Steigflug (ausschließlich c_{wi}).

Digitized by Google

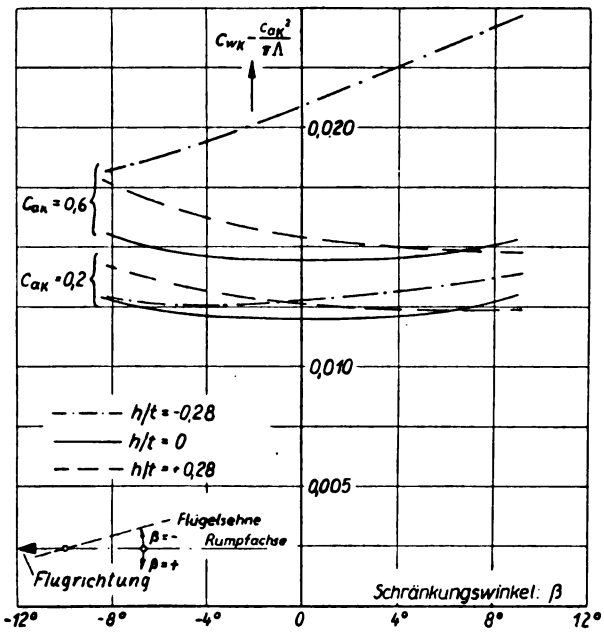


Bild 13. Einfluß der Flügel-Rumpf-Schränkung auf den Widerstand der Kombination I bei Flügellagen von $h/t = \pm 0{,}28$ (ausschließlich c_{wi}).

VII. Einfluß der Schränkung von Flügelsehne und Rumpflängsachse auf den Widerstand der Kombination I.

In Bild 4 und 8 waren Widerstände der Kombination I bei günstigstem Schränkungswinkel zwischen Flügel und Rumpf angegeben. Um nun die Größenordnung dieses Winkels bzw. den Einfluß desselben auf den Kombinationswiderstand zu erkennen, ist in Bild 13 für Flügellagen von $\pm 0{,}28$ sowohl für den Schnellflug als auch für den Steigflug der Kombinationswiderstand (ohne c_{wi}) in Abhängigkeit vom Schränkungswinkel β aufgetragen. Wie auf Grund der in Kapitel V beschriebenen Zusammenhänge zu erwarten war, sind beim Hochdecker positive, beim Tiefdecker negative Schränkungswinkel günstig, denn dadurch wird in jedem Falle die Querschnittserweiterung zwischen Flügel und Rumpf und somit der Druckanstieg der Strömung vermindert. Ferner zeigt sich, daß eine Abweichung vom günstigsten Schränkungswinkel um etwa 2°, im Bereich des Mitteldeckers sogar bis zu 5°, keinen nennenswerten Einfluß auf den Widerstandsbeiwert ausübt.

VIII. Zusammenfassung.

1. Bei Verwendung heute üblicher Flügeldicken und eines runden Rumpfes macht sich bei Flügeltieflagen eine starke Vergrößerung des Kombinationswiderstandes bemerkbar. Bei Flügelhochlagen treten in geringerem Maße die gleichen Erscheinungen auf. Diese sind zurückzuführen auf Strömungsablösung am Flügel-Rumpf-Übergang.

2. Bei einer Auskleidung des Flügel-Rumpf-Überganges wird Strömungsablösung und somit Widerstandsvergrößerung vermieden. Es zeigt sich, daß zu große Auskleidungsradien wieder ungünstig werden.

3. Durch geeignete Flügel-Rumpf-Schränkung können im Bereich des Mitteldeckers fast die gleichen Widerstandsherabsetzungen erzielt werden wie durch Flügelwurzelauskleidungen. Im Bereich des Hochdeckers ergeben sich durch geeignete Schränkung sogar die geringsten Widerstandsbeiwerte.

4. Bei rechteckigem Rumpfquerschnitt ist der Kombinationswiderstand praktisch unabhängig von der Flügelhochlage. Es erübrigen sich also auch bei extremen Flügellagen besondere Maßnahmen zur Herabsetzung des Beeinflussungswiderstandes.

5. Die günstigsten Schränkungswinkel zwischen Flügelsehne und Rumpflängsachse betragen bei extremen Flügellagen ($h/t = \pm 0{,}4$) bis zu $\pm 8°$, wobei im allgemeinen eine Abweichung vom Bestwert um 2°, im Bereich des Mitteldeckers sogar bis zu 5°, nur geringen Einfluß auf den Kombinationswiderstand ausübt.

IX. Schrifttum.

[1] N. Jacobs und E. Ward, Interference of wing and fuselage from tests of 209 combinations in the N.A.C.A. variable-density tunnel. N.A.C.A.-Rep. No. 540.

[2] A. Sherman, Interference of wing and fuselage from tests of 28 combinations in the N.A.C.A. variable-density tunnel. N.A.C.A.-Rep. No. 575.

[3] A. Sherman, Interference of wing and fuselage from tests of 18 combinations in the N.A.C.A. variable-density tunnel. Combinations with split flaps. N.A.C.A.-Techn. notes No. 640.

[4] A. Sherman, Interference of wing and fuselage from tests of 17 combinations inthe N.A.C.A. variable-density tunnel. Combinations with special junctures. N.A.C.A.-Techn. notes No. 641.

[5] A. Sherman, Interference of wing and fuselage from tests of 8 combinations in the N.A.C.A. variable-density tunnel. Combinations with tapered fillets and straight-side junctures. N.A.C.A.-Techn. notes No. 642.

Digitized by Google

Zur Vorausbestimmung der turbulenten Ablösestelle.

Von F. Schultz-Grunow, Göttingen.

Es wird über eine ergänzende Auswertung der Versuchsunterlagen über die verzögerte turbulente Grenzschicht berichtet.

Gliederung.

I. Grundsätzliches.
II. Art der Auswertung.
III. Prüfung am Versuch.
IV. Vorausbestimmung der Ablösung.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

I. Grundsätzliches.

Eine Schwierigkeit bei der Aufstellung eines Berechnungsverfahrens für die verzögerte turbulente Grenzschichtströmung, in deren Verlauf die Ablösung eintreten kann, besteht darin, daß sich der Schubspannungsverlauf in der Grenzschicht nicht einfach genug formulieren läßt, um die Berechnung aus der Bewegungsgleichung heraus noch praktisch durchführen zu können. Man hat daher versucht, die Grenzschichtströmung näherungsweise so zu erfassen, daß man nach Vorschlägen von Prandtl [1] eine Impulsbetrachtung für die Grenzschicht anstellte, den dem $^1/_7$-Geschwindigkeitsverteilungsgesetz entsprechenden Wandschubspannungsansatz für gleichförmige Strömung übernahm und die Verformung der Geschwindigkeitsprofile im Verlaufe der Verzögerung durch einen Formparameter unter der Annahme formulierte, daß die Profile eine einparametrige Kurvenschar darstellen. Die Verformung wurde aus Versuchen mit verschiedenartigen Verzögerungen und Beschleunigungen ermittelt, um zu möglichster Allgemeingültigkeit zu gelangen. Auf dieser Grundlage sind die Doktorarbeiten von Buri [2] und Gruschwitz [3] durchgeführt worden. Buri sieht die Wandtangente an das Schubspannungsprofil als charakteristisch für die Profilform an, Gruschwitz entwickelt dagegen einen Formparameter $\eta = 1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2$ aus dem Verhältnis der Geschwindigkeit u in einem gewissen Wandabstand y zur Geschwindigkeit U am Rande der Grenzschicht, und zwar setzt er diesen Wandabstand gleich der sog. »Impulsdicke« ϑ:

$$y = \vartheta = \int_0^\delta \frac{(U-u)\cdot u}{U^2}\, dy$$

mit δ = Grenzschichtdicke. Der Formparameter wächst im Verlaufe der Verzögerung.

II. Art der Auswertung.

Das von Gruschwitz ausgearbeitete Berechnungsverfahren hat sich allgemein anwendbar erwiesen, und die Untersuchungen von Schmidbauer [4] zeigten, daß es auch an erhaben gekrümmten Oberflächen die tatsächlichen Verhältnisse mit befriedigender Genauigkeit wiedergibt. Jedoch verliert das Verfahren seine Gültigkeit, wenn der Formparameter über den Wert 0,8 steigt. Da sich aber bei kleineren Werten niemals Ablösung ergab und teilweise bei wenig höheren Werten bereits Ablösung einsetzte, so konnte Gruschwitz feststellen, daß beim Überschreiten des Wertes 0,8 Ablösegefahr besteht. Schmidbauer erreichte dann wesentlich höhere Formparameterwerte, ohne daß Ablösung einsetzte; er erreichte den Wert 0,95. Um deshalb zu einer besseren Beurteilung der Ablösegefahr zu gelangen, wird hier ein Weg eingeschlagen, bei dem der Schubspannungsverlauf nicht bekannt zu sein braucht. Zu dem Zwecke werde die Grenzschichtbewegungsgleichung angeschrieben. u, v, x, y seien die Geschwindigkeitskomponenten und Koordinaten parallel und senkrecht zur Wand, τ sei die Schubspannung, ϱ die Dichte, p der Druck. Man hat dann bei gerader Wand und ebener Bewegung

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Es wird fernerhin mit U die Potentialgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht bezeichnet. Dann ist

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}.$$

Um nun ohne Kenntnis der Schubspannung weiterzukommen, stellen wir uns die Frage, ob auf einer Linie y/d = konst. (d = eine die Grenzschichtdicke charakterisierende Länge)

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ist. Betrachten wir nämlich das Versuchsmaterial über verzögerte Grenzschichtbewegung, so finden wir, daß in Wandnähe $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ positiv ist und es ist zu vermuten, daß $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ im allgemeinen mit zunehmender Beschleunigungskomponente $v\frac{\partial u}{\partial y}$ wächst. Würde das Experiment die Frage bejahen, so ergäbe sich eine bedeutende Vereinfachung, indem dann auf einer Linie y/d = konst. die Bewegungsgleichung

$$u\frac{du}{dx} = U\frac{dU}{dx}$$

lautete, welche sich sofort integrieren läßt zu

$$u_2^2 - u_1^2 = U_2^2 - U_1^2.$$

Index 1 möge sich auf einen Querschnitt durch die Grenzschicht am Beginn oder in der turbulenten Verzögerungsstrecke, Index 2 möge sich auf den Querschnitt an der Ablösestelle beziehen. Die Ablösestelle selbst sei durch $u_2 = 0$ gekennzeichnet, so daß dann

$$U_2^2 = U_1^2 - u_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

gilt.

Für die gekrümmte Wand lautet die Bewegungsgleichung im ebenen Fall in Polarkoordinaten

$$u\frac{\partial u}{r\,d\varphi} + \frac{uv}{r} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{r\,\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2}{\varrho}\frac{\tau}{r}.$$

Bei kreisförmig gekrümmter Wand, wie sie Schmidbauer untersuchte, hat man am Rande der Grenzschicht die angenäherte Bewegungsgleichung

$$U\frac{\partial U}{r\,\partial \varphi} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{r\,\partial \varphi}.$$

Digitized by Google

Um hier ebenfalls auf die Beziehung (2) zu kommen, hat man festzustellen, ob

$$\frac{uv}{r} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2}{\varrho}\frac{\tau}{r}$$

sich am Versuch betätigen läßt.

Linien y/d lassen sich außer mit der Grenzschichtdicke δ auch mit der bereits genannten Impulsdicke ϑ oder mit der Verdrängungsdicke

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

bilden. ϑ und δ^* besitzen den Vorteil, sich wesentlich genauer aus dem Versuch ermitteln zu lassen als δ.

III. Prüfung am Versuch.

Um nun zu entscheiden, ob die Beziehung (2) der Wirklichkeit entspricht, wurde für die Versuchsreihen von Gruschwitz und Schmidbauer in allen Meßquerschnitten der Verzögerungsstrecke für $\frac{y}{\delta} = 0{,}1;\ 0{,}15;\ 0{,}2;\ \frac{y}{\vartheta} = 1;\ 1{,}2;\ 1{,}4$ und $\frac{y}{\delta^*} = 1$ aus (2) U_2 berechnet, welche Geschwindigkeit mit der Potentialgeschwindigkeit an der Ablösestelle übereinstimmen müßte.

Die Quadrate der erhaltenen Geschwindigkeiten U_2 sind in Bild 1 bis 11 in die zugehörigen Meßquerschnitte eingetragen, wo die Bezeichnung der Meßreihen die gleiche wie in den Originalarbeiten ist. Sämtliche Geschwindigkeiten sind dort mit der Potentialgeschwindigkeit U_{11} des am weitesten stromaufwärts in der turbulenten Verzögerungsstrecke liegenden Meßquerschnitts dimensionslos gemacht; es sind Geschwindigkeitsquadrate aufgetragen, um eine bessere Vergleichsmöglichkeit für die herrschenden Verzögerungen zu schaffen. Die erhaltenen $\left(\frac{U_2}{U_{11}}\right)^2$-Werte sind als Punkte eingetragen, die lediglich bei $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$ durch die gestrichelte Kurve verbunden sind, da die Bilder zeigen, daß für $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$ die beste Übereinstimmung mit dem Wert der Potentialgeschwindigkeit an der Ablösestelle herrscht. Außerdem ist der Verlauf von $\left(\frac{U_1}{U_{11}}\right)^2$ angegeben, um ein Bild der herrschenden Verzögerung zu geben, ferner der Formparameter η. Die U_{11}-Werte sind für sämtliche Meßreihen in der Zahlentafel angeführt.

Bei der Beurteilung des Ergebnisses ist zwischen stärkerer und schwächerer Verzögerung zu unterscheiden. Erstere trifft bei Gruschwitz, letztere bei Schmidbauer zu, denn wegen ihrer stabilisierenden Wirkung auf die Turbulenz lassen erhaben gekrümmte Wände nur kleinere Druckanstiege ohne Ablösung zu. Die Zahlentafel gibt einen Anhaltspunkt über die herrschenden Verzögerungen durch die Werte $U_{11}^2 - U_{22}^2/\Delta x$. Δx bedeutet die Länge der turbulenten Verzögerungsstrecke, gemessen vom ersten bis zum letzten Meßquerschnitt vor der Rückströmung, U_{22} bedeutet die Potentialgeschwindigkeit in diesem Querschnitt.

Zahlentafel.

Meßreihe	U_{11} m/s	Δx m	$\frac{U_{11}^2 - U_{22}^2}{\Delta x}$ m/s²	$\left(\frac{u_1}{U_1}\right)_{\eta=0{,}6}$	$\left(\frac{u_1}{U_1}\right)_{\eta=0{,}7}$	$\left(\frac{u_1}{U_1}\right)_{\eta=0{,}8}$
5	62	0,2	10600	0,75	0,65	0,52
15°	50	0,12	9800	0,65	0,60	0,52
12°	47	0,19	5700	0,67	0,56	0,46
6°	40	0,156	4500	0,64	0,56	0,44
2	32	0,10	4000	0,70	0,58	0,48
3	24	0,20	1700	0,70	0,61	0,46
H	30	0,64	940	—	—	—
d	30	0,76	730	0,67	0,59	0,46
b	29	0,76	490	0,65	0,56	—
F	24	0,68	490	0,67	0,56	—
B	20	0,64	300	0,66	—	—

$\frac{u_1}{U_1}$ bezieht sich auf $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$.

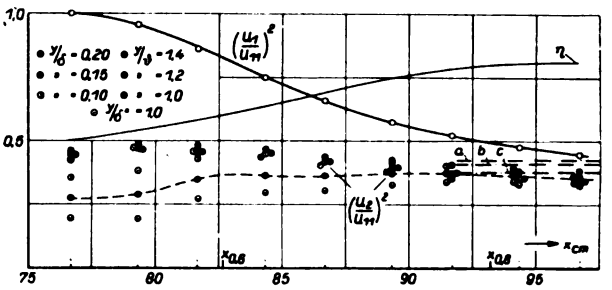


Bild 1. Meßreihe 5.

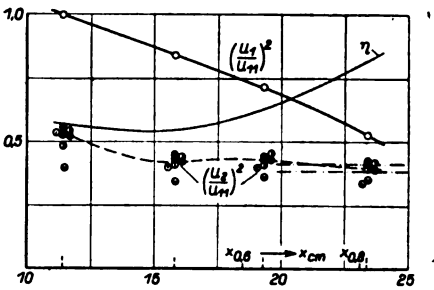


Bild 2. Tragflügel 15° Anstellwinkel.

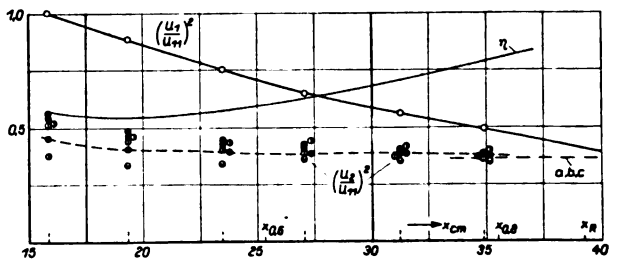


Bild 3. Tragflügel 12° Anstellwinkel.

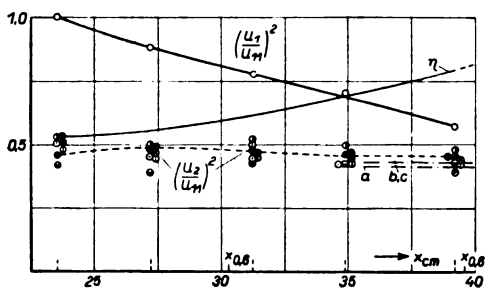


Bild 4. Tragflügel 6° Anstellwinkel.

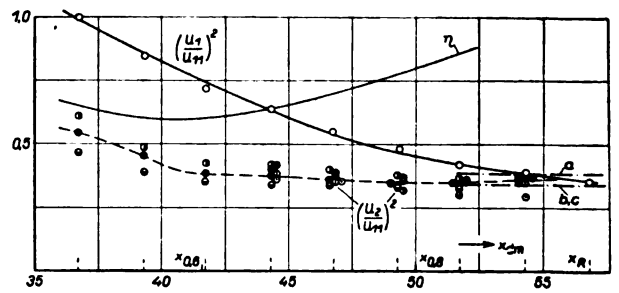


Bild 5. Meßreihe 2.

Digitized by Google

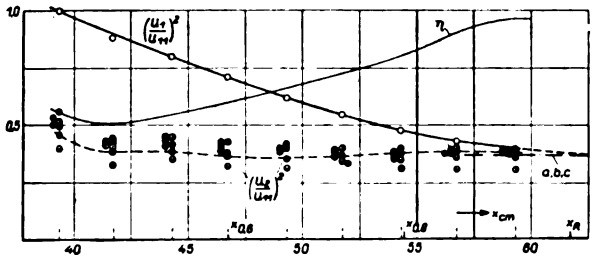


Bild 6. Meßreihe 3.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß nur bei einigen der wiedergegebenen Versuchsreihen auch tatsächlich die Ablösung eintrat. Es sind dies die an der ebenen Wand aufgenommenen Meßreihen 2, 3 und die Tragflügelmessungen bei 15° und 12° Anstellwinkel. Die Querschnitte, in welchen Rückströmung gemessen wurde, sind mit x_R bezeichnet. Bei der Tragflügelmessung mit 15° Anstellwinkel fehlt diese Bezeichnung, da die Rückströmung außerhalb der Meßstrecke liegt. Betrachtet man zunächst diese Meßreihen, so ist festzustellen, daß die erhaltenen U_2-Werte um so besser mit der Potentialgeschwindigkeit im Querschnitt x_R übereinstimmen, je näher man sich an der Ablösestelle befindet, und zwar zeigt sich, daß bei $y/\delta = 0{,}15$ schon von dem Formparameterwert $\eta = 0{,}6$ ab die U_2-Werte nur wenig von der Potentialgeschwindigkeit an der Ablösestelle abweichen. Zur besseren Verdeutlichung sind die Meßquerschnitte, in welchen der Formparameter die Werte 0,6 und 0,8 erreicht, mit $x_{0,6}$ und $x_{0,8}$ bezeichnet.

Bei der ebenfalls an gerader Wand aufgenommenen Meßreihe 5, die übrigens die größte Verzögerung aufweist und bei der Tragflügelmessung mit 6° Anstellwinkel, verläuft die für $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$ eingezeichnete Kurve wiederum praktisch horizontal und schneidet die $\frac{U_1^2}{U_{11}^2}$-Kurve nicht, was in Übereinstimmung damit steht, daß die Ablösung nicht im Meßbereich auftritt. Auch hier ist also die Beurteilung der Ablösegefahr mit der Beziehung (2) genauer als die frühere Aussage, daß bei Überschreiten des Formparameterwertes $\eta = 0{,}8$ Ablösung möglich ist. Die Meßreihe 4 von Gruschwitz wurde als einzige nicht ausgewertet, da hier an eine kurze Verzögerungsstrecke Beschleunigung anschließt.

Die übrigen Meßreihen stammen von Schmidbauer. Seine Versuchsanordnung war so getroffen, daß keine Ablösung auftrat. Wegen der schwächeren Verzögerung macht sich eine Abweichung der errechneten U_2-Werte von einem konstanten Mittelwert mehr bemerkbar als bei den eben besprochenen Meßreihen. Die stärkste Abweichung in diesem Sinne besteht bei Meßreihe H, die sich von den anderen Meßreihen durch eine besonders starke Abnahme der Verzögerung in Strömungsrichtung unterscheidet. Es ist die Meßreihe, welche den höchsten Formparameterwert $\eta = 0{,}95$ ohne Ablösung erreicht. Für derartige Verzögerungen ist also auch das hier besprochene Verfahren nicht geeignet. Bei den übrigen Meßreihen fallen die errechneten U_2-Werte am Ende der Verzögerungsstrecke ab, jedoch sind in den weiter stromaufwärts liegenden Meßquerschnitten die für $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$ errechneten U_2-Werte wenig von einander verschieden, und zwar sind sie in jedem Falle kleiner als die Potentialgeschwindigkeit gegen Ende der Meßstrecke, so daß auch hier die Beziehung (2) vom Formparameterwert $\eta = 0{,}6$ ab als ungefähr erfüllt betrachtet werden kann.

Die Linien $\frac{y}{\delta} = \text{konst.}$ haben den Nachteil, daß sie nicht genau festliegen, da sich wie gesagt die Grenzschichtdicke nur ungenau aus dem Versuch ermitteln läßt. Bild 1 bis 11 zeigen aber, daß die Beziehung (2) auf den Linien $\frac{y}{\delta} = 0{,}1$ und 0,2 nur wenig schlechter bestätigt ist als bei $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$. Demnach kann gesagt werden, daß sich (2) in einer Umgebung der Linie $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$, in die man bei ungenauer Er-

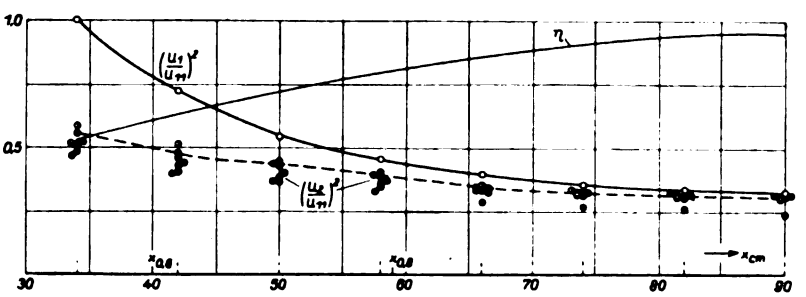


Bild 7. Meßreihe H.

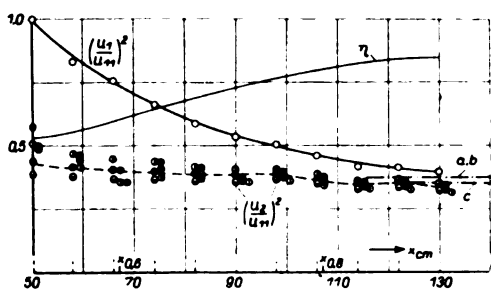


Bild 8. Meßreihe d.

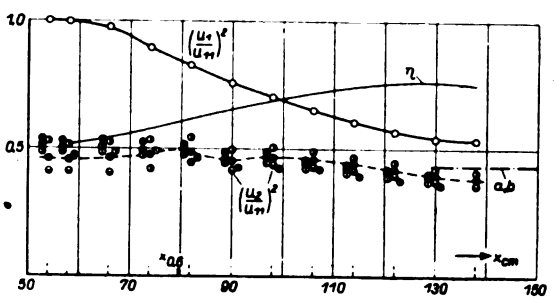


Bild 9. Meßreihe b.

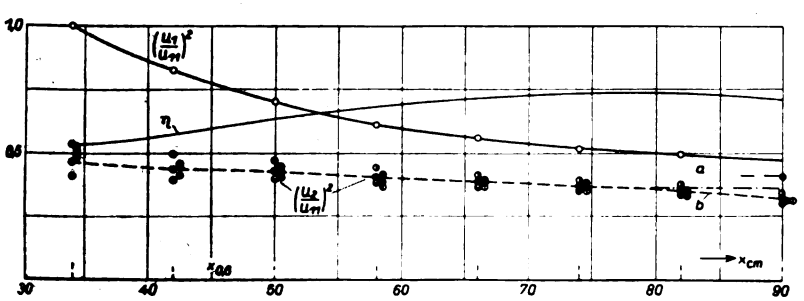


Bild 10. Meßreihe F.

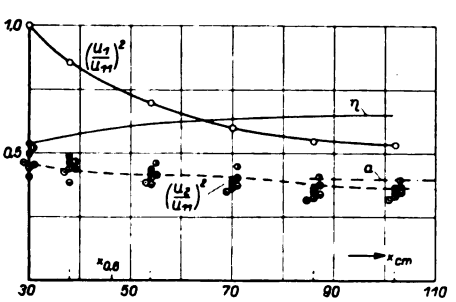


Bild 11. Meßreihe B.

Digitized by Google

mittlung von δ fällt, praktisch ebenso bestätigt wie auf der Linie selbst.

IV. Vorausbestimmung der Ablösung.

Nachdem sich die Beziehung (2) an ebenen und erhaben gekrümmten Wänden von $\eta = 0{,}6$ ab als brauchbar herausgestellt hat, wird man sie in Verbindung mit dem von Gruschwitz ausgearbeiteten Verfahren auf die Vorausbestimmung der Ablösung anwenden können, indem man mindestens bis $\eta = 0{,}6$ nach diesem Rechenverfahren arbeitet und von dort ab (2) anwendet. Dazu muß aber noch die Geschwindigkeit u_1 bzw. das Verhältnis $\frac{u_1}{U_1}$ bei gewissen η-Werten, von denen ab man mit (2) rechnen will, im Abstand $\frac{y}{\delta} = 0{,}15$ bekannt sein. Es läßt sich aus Bild 1 bis 11 ermitteln. Dabei wurden die in der Zahlentafel angegebenen $\frac{u_1}{U_1}$-Werte für $\eta = 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8$ gefunden, die allerdings mehr oder weniger voneinander abweichen. Ihr Mittelwert ist, wenn man Schmidbauers Versuche und die Tragflügelmessung bei 6° Anstellwinkel ausschaltet,

$$\text{a) bei } \eta = 0{,}6 \quad \frac{u_1}{U_1} = 0{,}69$$

$$\text{b) bei } \eta = 0{,}7 \quad \frac{u_1}{U_1} = 0{,}60$$

$$\text{c) bei } \eta = 0{,}8 \quad \frac{u_1}{U_1} = 0{,}49.$$

Es ist zu prüfen, ob diese Mittelwerte brauchbare Ergebnisse liefern. Man erhält mit ihnen U_2^2-Werte, die in den Bildern am Ende der Verzögerungsstrecke als strichpunktierte Gerade[1]) dargestellt sind. Die Geraden schneiden die $\left(\frac{U_1}{U_{11}}\right)$-Kurve, zwar teilweise außerhalb des Meßbereiches, aber stets in der näheren Umgebung des Querschnittes x_R, in dem Rückströmung gemessen wurde und damit auch in der Nähe der Ablösestelle, von deren Lage allerdings nur ausgesagt werden kann, daß sie zwischen diesem und dem nächsten stromaufwärts gelegenen Meßquerschnitt liegt. Bei den übrigen Meßreihen (ohne Ablösung) besteht der Wirklichkeit entsprechend kein Schnittpunkt der Geraden mit der $\left(\frac{U_1}{U_{11}}\right)^2$-Kurve.

Vergleicht man die mit den oben angegebenen $\frac{u_1}{U_1}$-Werten erhaltenen Geraden *a*, *b*, *c* auf ihre Brauchbarkeit, so hat man naturgemäß der Geraden (*c*) ($\eta = 0{,}8$) einen geringen Vorzug zu geben. Man wird also mit Gruschwitz je nach dem Genauigkeitsanspruch bis $\eta = 0{,}6$, $\eta = 0{,}7$ oder $\eta = 0{,}8$ und von dort ab die hier dargelegte Abschätzung anwenden und damit ohne große Rechnung einen Anhalt über die Ablösegefahr und die Lage der Ablösung erhalten.

[1]) In Bild 2 bezieht sich die obere Gerade auf *b*, *c*, die untere auf *a*.

V. Zusammenfassung.

Die verzögerte turbulente Grenzschichtströmung ist zu verwickelt, um exakte Rechnungen anstellen zu können. Es ist deshalb von Gruschwitz ein halb empirisches Berechnungsverfahren erfolgreich ausgearbeitet worden, das allerdings nicht bis zur unmittelbaren Nähe der Ablösungsstelle allgemein gültig ist und deshalb auch keine genügend genauen Aussagen über das Eintreten der Ablösung geben kann. Hierfür wurde eine ergänzende Aussage gegeben.

IV. Schrifttum.

[1] L. Prandtl, The Mechanics of Viscous Fluids. Abschnitt G. W. F. Durand, Aerodynamic Theory, Bd. III, Berlin 1935.

[2] A. Buri, Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Dissertation Zürich 1931. Nr. 652.

[3] E. Gruschwitz, Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Arch. II (1931), S. 321.

[4] H. Schmidbauer, Verhalten turbulenter Reibungsschichten an erhaben gekrümmten Wänden. Dissertation München 1934. Omnitypie-Gesellschaft Stuttgart 1934.

Digitized by Google

Zur Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses auf die Biegeeigenfrequenzen von Luftschrauben.

Von J. Meyer.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerkmechanik.

Die Angaben über die Frequenz der Biege-Oberschwingungen von Luftschrauben bei Berücksichtigung der Fliehkraft gehen in verschiedenen Veröffentlichungen auseinander. Die vorliegenden Ausführungen stellen eine Ergänzung einer Arbeit von F. Liebers [11] dar, die eine Prüfung der Zuverlässigkeit der Berechnungsverfahren bezweckte.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Grundlagen der Berechnung.
III. Aufstellung der Differentialgliederung des Seiles und ihre Lösung.
IV. Ergebnis.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Zur Verhütung von Brüchen der Luftschraubenblätter ist die Kenntnis ihrer Biegeeigenfrequenzen von Wichtigkeit. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, zunächst die Frequenz des nicht umlaufenden Propellers im Standversuch zu ermitteln. Da diese Eigenfrequenzen, wie in einer Arbeit des Verfassers [13] gezeigt wurde, durch die Kopplung mit dem Drehschwingungssystem der Kurbelwelle nicht wesentlich beeinflußt werden und daher sehr nahe bei denen liegen, die für an der Nabe eingespannte Blätter gelten, so darf der die Fliehkraft berücksichtigende Zuschlag aus den dazu gehörenden Eigenschwingungsformen ermittelt werden.

II. Grundlagen der Berechnung.

Gewöhnlich schreibt man für die Frequenz des umlaufenden Propellers

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + C\,\omega^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ω die Drehzahl, C konstanter Fliehkraftbeiwert und $\lambda_0 = \lambda_{(\omega=0)}$ die Standfrequenz bedeuten.

Für eine Eigenschwingung $y_{(x)} \sin \lambda t$ folgt allgemein aus dem Energiesatz die wahre Frequenz:

$$\lambda^2 = \frac{U_{E\,(y)}}{T_{(y)}} + \frac{U_{F\,(y)}}{T_{(y)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn $y_{(x)}$ die wahre Eigenschwingungsform ist. U_E ist dabei die potentielle Energie der elastischen Kräfte, U_F die der Fliehkräfte und $T \cdot \lambda^2$ die kinetische Energie. Liebers Gedanke war nun, den Wert des zweiten Quotienten in (2), der als Eigenfrequenz eines biegungsweichen Seiles aufgefaßt werden kann, aus der für das Seil gültigen Differentialgleichung zu ermitteln. Der so erhaltene Wert durch ω^2 dividiert trifft nämlich auch als Fliehkraftbeiwert C für den Stab mit der gleichen Massenverteilung zu, wenn seine Eigenschwingungsform der des Seiles genügend ähnlich ist, weil die Rayleighsche Methode in (2) gegenüber einer kleinen Änderung von $y_{(x)}$ unempfindlich ist. Im vorliegenden Falle, wo die durch die Fliehkraft bewirkte Steifigkeit hauptsächlich in den äußeren Teilen des Seiles liegt, kann sich daher der Unterschied der Eigenschwingungsformen $y'_{(0)} = 0$ beim Stab gegenüber $y'_{(0)}$ = konstant beim Seil nur gering auswirken und um so geringer, je mehr Knoten die Eigenschwingungsform besitzt. Man erhält also gerade für die höheren Oberschwingungen sehr genaue Werte, die sonst sehr schwierig zu berechnen wären. Rechnungen dieser Art wurden für die erste Oberschwingung von Southwell [1] und Hohenemser [5] durchgeführt.

III. Aufstellung der Differentialgleichung des Seiles und ihre Lösung.

In Bild 1 bedeute b die Nabenlänge, l die Seillänge und $\mu_{(x)}$ die Massenverteilung. Das Seil rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Differentialgleichung des Seiles lautet allgemein:

$$\mu_{(x)} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[S_{(x)} \frac{\partial y}{\partial x}\right], \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wobei $S_{(x)}$ die Spannung im Seil ist.

Mit dem Bernoullischen Ansatz $y_{(x,t)} = y_{(x)} \cdot \sin \lambda_s t$ geht die Gleichung über in

$$S_{(x)} \frac{d^2 y_{(x)}}{d x^2} + \frac{d S_{(x)}}{d x} \cdot \frac{d y_{(x)}}{d x} + \lambda_s^2 \mu_{(x)} y_{(x)} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

Die Fliehkraftspannung $S_{(x)}$ wird

$$\left.\begin{aligned} S_{(x)} &= \omega^2 \int_x^l \mu_{(x)} (b + x)\, d x;\ \frac{x}{l} = \xi;\ d x = l\, d \xi \\ S_{(\xi)} &= \omega^2 \int_\xi^1 \mu_{(\xi)} \left(\frac{b}{l} + \xi\right) d \xi \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Für die Massenverteilung machen wir den allgemeinen Ansatz

$$\mu\,(\xi) = \mu_0\,(1 - \xi)^n.$$

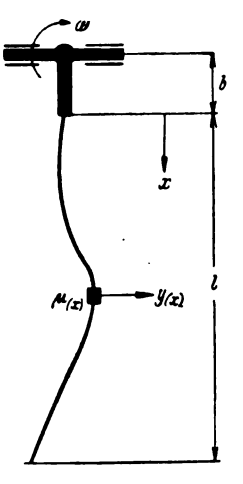


Bild 1. Rotierendes Seil mit Massenbelegung $\mu_{(x)}$ und Eigenschwingungsform $y_{(x)}$.

Digitized by Google

Mit der Substitution

$$1-\xi=z;\quad d\xi=-dz \tag{5}$$

wird

$$S_{(z)}=\omega^2\mu_0\int_0^z z^n\left(1+\frac{b}{l}-z\right)dz \quad \ldots\ (6)$$

Setzt man noch $1+\frac{b}{l}=p$, so erhält man

$$S_{(z)}=\omega^2\mu_0 z^{n+1}\left[\frac{p}{n+1}-\frac{z}{n+2}\right] \quad \ldots\ (7)$$

$$\frac{dS_{(z)}}{dz}=\omega^2\mu_0 z^n[p-z] \quad \ldots\ (8)$$

Damit wird die Differentialgleichung (4)

$$y_{(z)}''\cdot z[(n+2)p-(n+1)z]+(n+2)(n+1)y_{(z)}'[p-z]+(n+2)(n+1)\frac{\lambda^2}{\omega^2}y_{(z)}=0;\ \frac{\lambda^2}{\omega^2}=C \quad \ldots\ (9)$$

Die Lösung geschieht durch Reihenentwicklung. Dann empfiehlt sich die bessere Form

$$p(n+2)\{zy''+(n+1)y'\}-(n+1)\{z^2y''+(n+2)[zy'-Cy]\}=0 \tag{10}$$

Die Reihen lauten:

$$y_{(z)}=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots a_mz^m$$
$$y_{(z)}'=a_1+2a_2z+\ldots ma_mz^{m-1}$$
$$y_{(z)}''=2a_2+\ldots m(m-1)a_mz^{m-2}.$$

Geht man mit diesen Reihen in die Differentialgleichung (10) ein, so erhält man zur Berechnung der a_m die Formel (11)

$$a_{m+1}=-\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(n+2)(C-m)-m(m-1)}{(m+1)(n+m+1)p}a_m \tag{11}$$

wobei m von 0 bis m nacheinander zu nehmen ist. Man erhält so alle Koeffizienten der Reihe $y_{(z)}$ in a_0 ausgedrückt. Die Randbedingung zur Bestimmung der Eigenwerte C lautet:

$$y_{(z=0)}=y_{(z=1)}=0.$$

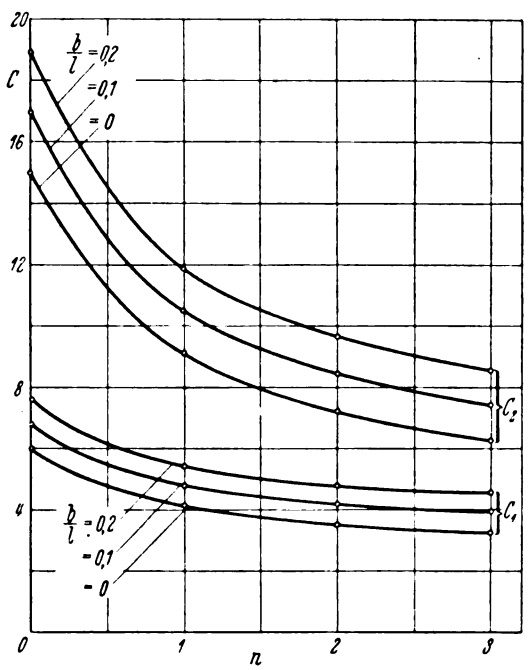


Bild 2. Abhängigkeit der Fliehkraftbeiwerte C_1 und C_2 für die 1. und 2. Oberschwingung eines Seiles bzw. näherungsweise einer Luftschraube von dem Exponenten n der Massenverteilung

$$\mu_{(z)}=\mu_0\left(1-\frac{x}{l}\right)^n.$$

IV. Ergebnisse.

Die Reihen $y_{(z=1)}$ konvergieren im allgemeinen nicht sehr gut. Die Konvergenz ist um so schlechter, je höher einmal der zu bestimmende Eigenwert C ist und zum zweiten, je höher der Exponent n der Massenverteilung ist. Im ungünstigsten Fall sind bis zu 14 Koeffizienten der Reihe $y_{(z=1)}$ auszurechnen, was mit einer Rechenmaschine geschehen muß.

Zahlentafel 1.

n		$\frac{b}{l}=0$	$\frac{b}{l}=0{,}1$	$\frac{b}{l}=0{,}2$
0	C_1	6,00	6,78	7,56
	C_2	15,00	16,90	18,90
1	C_1	4,15	4,79	5,43
	C_2	9,10	10,50	11,90
2	C_1	3,53	4,18	4,83
	C_2	7,17	8,43	9,66
3	C_1	3,26	3,92	4,58
	C_2	6,26	7,43	8,60

In Bild 2 ist der Fliehkraftbeiwert C in Abhängigkeit von n für die 1. und 2. Oberschwingung und für verschiedene Verhältnisse b/l aufgetragen. Für normale Schrauben darf $n\sim 1{,}3$ und $b/l\sim 0{,}15$ angenommen werden, womit $C_1=4{,}8$ und $C_2=10{,}3$ werden. Die Zahlentafel 1 enthält die errechneten Werte für C_1 und C_2, die den Kurven auf Bild 2 zugrunde gelegt wurden.

Wie aus den Kurven in Bild 2 zu entnehmen ist, beeinflussen die Massenverteilung und die Nabenlänge den Wert von C nicht unerheblich, so daß dadurch für die Verschiedenheit in den bisher von anderer Seite angegebenen Werten eine Erklärung gefunden wäre.

Es ist in Aussicht genommen, diese Werte durch Versuche zu prüfen.

V. Schrifttum.

[1] Southwell, Graphical method for determination of the frequencies of lateral vibrations. Phil. Mag. (41) 1921.

[2] Southwell und Gough, On the free transverse vibrations of airscrew blades. RCRep. 766, 1921—22.

[3] Liebers, Zur Theorie der Luftschraubenschwingungen. Z. techn. Phys. Bd. 10 (1929) Nr. 9.

[4] Liebers, Resonanzschwingungen von Luftschrauben. Luftf.-Forschg. Bd. 7 (1930) DVL-Jahrbuch 1930.

[5] Hohenemser, Beitrag zur Dynamik des elastischen Stabes mit Anwendung auf den Propeller. Z. Flugtechn. Bd. 23 (1932).

[6] Liebers, Versuche über Luftschraubenschwingungen. Z. Flugtechn. 23, 1932.

[7] Hansen und Mesmer, Luftschraubenschwingungen. Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933).

[8] Reißner, Formänderung, Spannung und kleine Schwingungen von Stäben mit anfänglicher Krümmung und Verwindung, die um eine Querachse rotieren. Ing.-Arch. Bd. 4 (1933).

[9] Caldwell, Aircraft-Propeller Development and Testing Summarized. J. SAE Bd. 35 (1934).

[10] Couch, A study of propeller vibration. Aviation Bd. 33 (1934).

[11] Liebers, Berechnung der drei tiefsten Biegefrequenzen der umlaufenden Schraube. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935) S. 155.

[12] Theodorsen, Propeller vibrations and the effect of the centrifugal force. NACA techn. Note (1935) Nr. 516.

[13] Meyer, Die Kopplung der Luftschrauben-Biegeschwingungen mit den Kurbelwellen-Drehschwingungen. Jahrb. 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung.

Digitized by Google

Neuere Verfahren der Kraftstoffprüfung.

Von F. Seeber.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Betriebsstofforschung.

Vorgetragen vor der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung am 17. Februar 1939 in Hamburg.

Die Bestimmung der Klopfneigung hochklopffester Flugmotorenkraftstoffe nach dem heute geübten Oktanzahlverfahren im CFR-Motor ist ungenügend und erfolgt unter falschen Voraussetzungen.

Es werden die heute angewendeten Einpunkt-Prüfverfahren kurz beleuchtet, die Bedeutung der Bestimmung des Klopfbeginnes für die Oktanzahl angeführt und Verbesserungsvorschläge für die Klopffestigkeitsprüfung im CFR-Motor gemacht. Die Schwierigkeit der Übertragung der im Klopfprüfmotor erhaltenen Ergebnisse auf den Flugmotoren-Ein- und Mehrzylinder ist jedoch damit noch nicht gelöst.

Das entwickelte DVL-Überladeprüfverfahren, das den Vorzug hat, die Klopfneigung der Kraftstoffe direkt in jedem Flugmotoren-Einzylinder zu bestimmen, ohne bauliche Veränderungen vornehmen zu müssen, wird beschrieben und die Vorteile eines Mehrpunktverfahrens erläutert. Durch die möglichst weitgehende Angleichung der Prüfbedingungen des Überladeverfahrens an die Verhältnisse des Flugbetriebes, ist eine diagrammatische Darstellung der Klopfeigenschaften möglich, die für die Weiterentwicklung von Hochleistungs-Flugmotoren und ihren Kraftstoffen von großer Bedeutung ist.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Klopffestigkeitsprüfungen im CFR-Motor.
   a) Kennzeichnung der Klopfneigung durch die Oktanzahl.
   b) Kritik der Oktanzahlbestimmung.
   c) Ausbau der OZ-Bestimmung und neue Bewertungsmaßstäbe für die Erfassung der Klopfneigung.
3. Klopffestigkeitsprüfungen im Flugmotoren-Einzylinder.
   a) Vorteile einer Überladeprüfung.
   b) Festlegung der Klopfgrenze.
   c) Wahl der Prüfbedingungen.
   d) Einfluß der Versuchsbedingungen auf die Überladbarkeit eines OZ 87-Kraftstoffes.
   e) Zulässige Überladbarkeit von Kraftstoffen gleicher Oktanzahl und ihr chemischer Aufbau.
4. Die Bedeutung des DVL-Überladeprüfverfahrens für die Praxis.
5. Schrifttum.

1. Einleitung.

Den an Flugmotoren-Kraftstoffe gestellten Forderungen großer Startleistungen und guter Vermagerbarkeit bei verhältnismäßig hohen Reiseflugleistungen ist bekanntlich durch das Klopfen der Kraftstoffe für Otto-Motoren eine Grenze gesetzt. Die Entwicklung zeigte, daß hohe Flugmotorenleistungen am günstigsten durch höhere mittlere effektive Drücke erzielt werden. Nach Ellor [1] wird der mittlere effektive Druck von der Oktanzahl eines Kraftstoffes am stärksten beeinflußt. Die Erprobung im Flugmotor zeigte jedoch, daß die Kennzeichnung der Klopfneigung allein durch die Angabe einer einzigen Zahlengröße, nämlich der Oktanzahl unter festen Prüfbedingungen, ungenügend ist und zu irrigen Schlußfolgerungen Anlaß geben kann.

Um dieser fehlerhaften Beurteilung der Klopfneigung von Hochleistungs-Flugmotorenkraftstoffen zu begegnen, mußten neue motorische Bewertungsmaßstäbe geschaffen werden. Welche Wege zur Lösung dieser Fragen beschritten wurden, darüber will ich hier kurz berichten. Zuvor sei jedoch noch bemerkt, daß ausschließlich auf die motorische Kurzprüfung in Einzylinder-Aggregaten eingegangen wird. Eine Berichterstattung über die Prüfung des Kraftstoff-Dauerverhaltens wäre heute noch verfrüht, da sich diese Prüfung erst im Entwicklungsstadium befindet.

2. Klopffestigkeitsprüfungen im CFR-Motor.

a) Kennzeichnung der Klopfneigung durch die Oktanzahl.

Die Bestimmung der relativen Klopfneigung von Flugmotoren-Kraftstoffen erfolgt bis heute fast ausschließlich im CFR-Motor bzw. in Deutschland neuerdings auch im I. G.-Prüfgerät. Bei beiden Motoren wird der Kraftstoff durch Veränderung der Verdichtung zum Klopfen gebracht. Die Stärke des Klopfens, die bei diesen Prüfungen eingehalten wird, wurde für den zu prüfenden Kraftstoff vereinbarungsgemäß auf einen bestimmten Ausschlag am Klopfmesser festgelegt.

Die Klopfeigenschaften des Versuchskraftstoffes werden bekanntlich mit denen von Gemischen aus Bezugskraftstoffen verglichen. Als Ur-Bezugskraftstoffe werden heute Iso-Oktan und *n*-Heptan verwendet. Die Klopffestigkeit von Iso-Oktan setzte man willkürlich gleich 100 und die von *n*-Heptan gleich 0.

Die Kennzeichnung der Klopfneigung der Kraftstoffe erfolgt also heute durch die Angabe der Oktanzahl, d. h. die Menge Iso-Oktan eines Iso-Oktan- und *n*-Heptan-Gemisches, das bei bestimmten Versuchsbedingungen dieselbe Klopffestigkeit besitzt, wie der zu untersuchende Kraftstoff.

Da diese Prüfung in erster Linie dazu dienen sollte, die Kraftstoffherstellung und damit die Gleichmäßigkeit der gelieferten Ware zu überwachen, glaubte man die Klopffestigkeitsprüfung der verschiedenen Kraftstoffe ohne Messungen von Druck, Temperatur und Wärmeübergang durchführen zu können.

Die bis heute praktisch angewendeten motorischen Prüfverfahren zur Bestimmung der Klopfneigung von Flugmotorenkraftstoffen [2], sind folgende:

1. CFR-Research-Verfahren (Italien),
2. CFR- bzw. I. G.-Motor-Verfahren (Deutschland),
3. gemäßigtes CFR-Motor-Verfahren (England, Frankreich),
4. CFR-Low Temperature-Verfahren (USA.),
5. CFR-L 3-Verfahren (USA.) und schließlich
6. U.S.-Army-Prüfverfahren im abgeänderten CFR-Motor (USA.).

Sämtliche Verfahren beschränken sich auf die Festlegung eines einzigen Kennwertes, der mit Ausnahme des U. S.-Army-Verfahrens bei einem verhältnismäßig starken Klopfen bestimmt wird. Die Prüfbedingungen der Verfahren unterscheiden sich untereinander nur durch verschieden hohe Temperaturen der Ansaugluft oder des Gemisches bzw. durch verschiedene Drehzahlen.

Digitized by Google

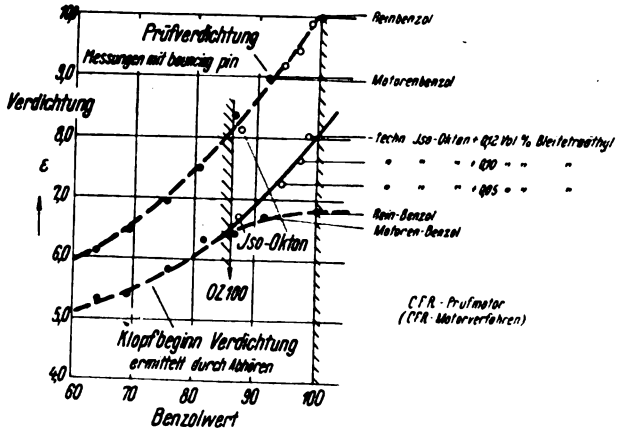


Bild 1. Zusammenhang zwischen Prüfverdichtung und Verdichtung bei Klopfbeginn für Kraftstoffe der Klasse OZ 100 und darüber.

Alle genannten Einpunkt-Verfahren, auch wenn sie die Kraftstoffe bei den jeweils verschiedenen Beanspruchungsstufen bewerten, waren allein kein brauchbares Maß, da mit Kraftstoffen gleicher Kenngröße im praktischen Flugbetrieb ein oft stark voneinander abweichendes Klopfverhalten festgestellt wurde. Dies gilt im besonderen Maße für Flugmotorenkraftstoffe der Klasse OZ 87 und darüber.

b) Kritik der Oktanzahlbestimmung.

Der Grund der fehlerhaften Bestimmung der Klopfneigung verschiedener Kraftstoffe durch diese Prüfverfahren ist fast ausschließlich in der irrigen Annahme zu suchen, daß zur Erfassung der Klopffestigkeit allein schon die Prüfung bei einer einzigen, wenn auch stets fest umschriebenen Versuchsbedingung genügte, um Rückschlüsse auf alle übrigen Kraftstoffbeanspruchungen ziehen zu können. Die im praktischen Flugbetrieb stark wechselnden Temperatur-, Druck- und Wärmeübergangsverhältnisse können auch nicht durch Änderung einer einzigen Prüfbedingung wiedergegeben werden, selbst dann nicht, wenn der gefundene Zahlenwert bei dem Kraftstoff-Luftverhältnis bestimmt wird, das der größten Klopfstärke entspricht.

So bestechend vorteilhaft zuerst auch ein Einpunkt-Verfahren hinsichtlich

der kurzen Prüfdauer,
der Billigkeit des Verfahrens und
der zur Prüfung benötigten geringen Kraftstoffmenge

als günstigste Lösung für die Kennzeichnung der Klopfneigung von Kraftstoffen erschien, so zeigten ihre Ergebnisse die Notwendigkeit einer Mehrpunktbewertung, die dann zur diagrammatischen Darstellung der Klopfneigung der Kraftstoffe führt. Nach Ansicht der DVL weist die heute geübte Oktanzahlbestimmung folgende Mängel auf:

1. Die Oktanzahlbewertung wird bei einer zu großen Klopfstärke vorgenommen. Die Bestätigung hierfür erbrachten DVL-Versuche [3], die schon in den Jahren 1934/35 durchgeführt wurden, um die Mängel der Übertragung der im CFR-Motor gefundenen Ergebnisse auf den Flugmotor zu klären. Es wurde für die verschiedenen Flugmotorenkraftstoffe unter Beibehaltung sämtlicher Prüfvorschriften des CFR-Motor-Verfahrens der Klopfbeginn, d. h. also die Verdichtung festgelegt, bei dem das erste gleichmäßige durch Abhören ermittelte Klopfen eintrat (Bild 1). Es sei hier besonders nur darauf hingewiesen, daß unvermischte Kraftstoffe mit einer Klopffestigkeit über 100 Oktaneinheiten, die einen vorwiegend aromatischen Charakter ausweisen, z. B. Motoren- oder Reinbenzol, unter den Bedingungen des CFR-Motorverfahrens (Gemischtemperatur 150° C) einen weitaus früheren Klopfbeginn besitzen als gebleite benzinartige Kraftstoffe, trotzdem die Prüfverdichtungen in allen Fällen die gleichen waren. Diese Feststellung konnte durch Überladeversuche bestätigt werden.

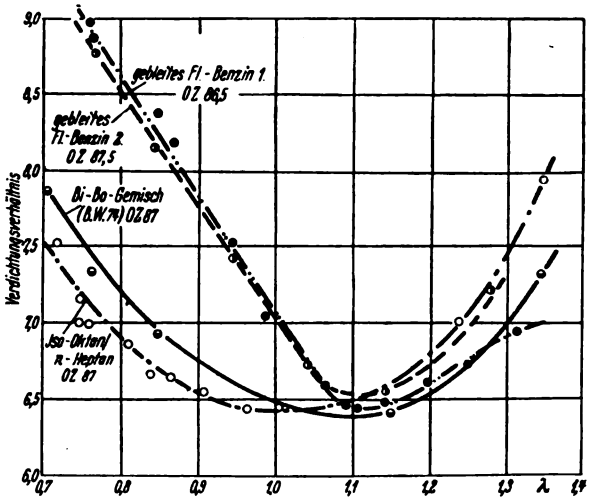


Bild 2. Bestimmung der Klopffestigkeit bei verschiedenen Luftüberschußzahlen. CFR-Motor.

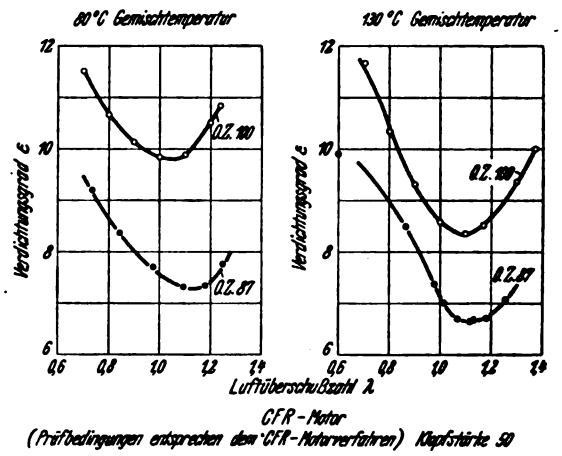


Bild 3. Bestimmung der Klopffestigkeit von OZ 87- und OZ 100-Kraftstoffen bei verschiedenen Luftüberschußzahlen.

2. Die Festlegung der Oktanzahl bei nur einer einzigen Gemischtemperatur gibt nicht die Temperaturempfindlichkeit des Kraftstoffes wieder. Diese Tatsache kommt durch die verschieden großen Unterschiede der Research- und Motor-Oktanzahlen für Kraftstoffe verschiedenen chemischen Aufbaues der Klasse OZ 87 zum Ausdruck.

Kraftstoffe vorwiegend

	olefinischer	aromatischer	naphthenischer	paraffinischer Natur
Research-OZ	98,5	93,6	88,0	88,0
Motor-OZ	87,2	86,5	85,5	86,3
Unterschied in Oktaneinheiten	11,3	7,1	2,5	1,7

3. Die Prüfung bei nur einer einzigen Gemischstärke, bedingt durch den verabredungsgemäß größten Ausschlag am Klopfmesser, ist zur Kennzeichnung eines Kraftstoffes unzureichend (Bild 2) [4]. Prüft man Kraftstoffe der Klasse OZ 87 über dem gesamten praktisch interessierenden Mischungsbereich, so ist die Klopffestigkeit gebleiter Benzine besonders bei Kraftstoffüberschuß weitaus größer als die der Ur- bzw. Unterbezugsgemische. Bild 3 zeigt die Ergebnisse der Prüfung über dem gesamten Mischungsbereich für einen OZ 87- und 100-Kraftstoff bei den Gemischtemperaturen 80 und 130° C.

Digitized by Google

4. Schließlich führt die Anwendung der bisher gebräuchlichen Ur- bzw. Unterbezugskraftstoffe (Iso-Oktan, *n*-Heptan bzw. Reinbenzol und ein sehr klopffreudiges Eichbenzin) für sehr klopffeste Kraftstoffe, infolge ihres von Bleibenzin abweichenden Temperaturverhaltens zu falschen Beurteilungen der Klopfneigung wie dies aus dem vorhergezeigten Bild ersichtlich war (s. a. Bild 2). Die Verwendung gebleiter Vergleichsbenzine dürfte diesen Nachteil beheben.

Die besprochenen Mängel, die durch DVL-Versuche belegt wurden, bestätigen, daß eine umfassende Kennzeichnung des motorischen Verhaltens von Kraftstoffen im Flugmotor mit der bisher geübten OZ-Bestimmung im CFR-Motor nicht möglich ist.

c) Ausbau der OZ-Bestimmung und neue Bewertungsmaßstäbe für die Erfassung der Klopfneigung.

Es ist wahrscheinlich, daß die motorische Prüfung der Flugmotorenkraftstoffe im CFR-Motor eine wesentlich bessere Beurteilung erfährt, wenn, wie teils schon verschiedenerseits vorgeschlagen [9, 10], die Klopfmessung der Kraftstoffe

a) bei mehreren Ansaug- bzw. Gemischtemperaturen, z. B. bei 50, 100, 150° C,
b) bei verschiedenen Mischungsverhältnissen und
c) bei Klopfbeginn oder einer jedenfalls geringeren Klopfstärke als die des CFR-Motor-Verfahrens erfolgen würde.

Diese Prüfungen könnten ohne weiteres mit der Verdichtung als Veränderliche vorgenommen werden. Es wurden jedoch auch andere Bewertungsmaßstäbe vorgeschlagen. So empfahl Boerlage die bei Klopfbeginn zulässige Überladung [5], Evans, Dodd und Garner den bei Klopfbeginn meßbaren Verbrennungshöchstdruck [6]. Welcher Weg der richtige sein wird, kann heute noch nicht gesagt werden, da die Aufgabe, in einem Klopfprüfmotor einen richtigen Bewertungsmaßstab der Klopfneigung zu finden, durch folgende Punkte erschwert wird:

1. Die Schwierigkeit, selbst in konstruktiv gleichen Versuchsmotoren für ein und denselben Kraftstoff bei gleichen Prüfbedingungen die gleiche Bewertungsgröße zu bestimmen [7].
2. Die unsichere Übertragbarkeit der Ergebnisse auf den Ein- bzw. Mehrzylinder-Flugmotor infolge der Unkenntnis der tatsächlichen Betriebsbeanspruchungen im Flugmotor.

8. Klopffestigkeitsprüfungen im Flugmotoren-Einzylinder.

a) Vorteile einer Überladeprüfung.

Die Unstimmigkeiten der Kraftstoffbeurteilung für den praktischen Flugbetrieb im CFR-Motor, veranlaßten auch die DVL, die Klopffestigkeit nach neuen Gesichtspunkten zu beurteilen. Da vorerst die Frage der Übertragbarkeit der CFR-Ergebnisse auf den Flugmotor unbeantwortet blieb, sprach die Dringlichkeit der Aufgabe, die Klopfneigung der Kraftstoffe für die Verhältnisse des Flugmotors möglichst einwandfrei festzulegen, für eine Versuchsdurchführung im Flugmotoren-Einzylinder. Der DVL schien der Vorschlag von Boerlage, den Ladedruck als Veränderliche bei Klopffestigkeitsprüfungen zu wählen, am günstigsten, denn so konnte die Klopfneigung der Kraftstoffe in jedem gewünschten Flugmotoren-Einzylinder unter ähnlichen Bedingungen des Vollmotors bestimmt werden, ohne daß bauliche Veränderungen vorgenommen werden müssen.

b) Festlegung der Klopfgrenze.

Die Entwicklung der Klopfprüfung zeigte, daß die bei der Oktanzahlbestimmung eingehaltene Klopfstärke keineswegs den Beanspruchungen des Kraftstoffes im Flugmotor entsprach. Für den Flugmotor bedeutet schon das Eintreten der ersten Klopfschläge, also der Klopfbeginn, ein Gefahrenmoment. Demzufolge wurde für das DVL-Überladeprüfverfahren als Maß der Klopfintensität der Klopfbeginn gewählt. Da der Entwicklungsstand der Indikatormeßtechnik die Festlegung des Klopfbeginnes nur unter komplizierten und zeitraubenden Bedingungen gestattet, wird bei dem Überladeprüfverfahren vorerst der Klopfbeginn der Kraftstoffe für laufende Industriemessungen durch Abhören festgelegt. Nach den Erfahrungen der DVL wird der Klopfbeginn am besten durch eine Klopfschlagzahl von 6 bis 10 scharfen Schlägen in der Minute dargestellt. Die Genauigkeit des Verfahrens ist bei dieser Prüfweise ± 15 mm QS. Bemerkt sei noch, daß die Laderleistung bei der Kraftstoffprüfung nicht berücksichtigt wurde.

c) Wahl der Prüfbedingungen.

Sollte mit dem Überladeverfahren ein wesentlicher Vorteil gegenüber der Oktanzahlbestimmung erzielt werden so mußte die Wahl der Prüfbedingungen so erfolgen, daß die Verhältnisse des Vollmotors weitgehend berücksichtigt wurden.

Man fordert heute von Hochleistungs-Flugmotorenkraftstoffen erstens eine hohe Startleistung d. h. also hohen mittleren effektiven Druck bei Volleistung. Die Überladeprüfung müßte demnach:

a) bei Startdrehzahl,
b) bei ungefähr 20proz. Kraftstoffüberschuß und
c) bei den Ladelufttemperaturen erfolgen, die sich entsprechend der Laderanordnung für die verschiedenen Baumuster einstellen.

Zweitens werden von Hochleistungs-Flugmotorenkraftstoffen gute Vermagerungseigenschaften gefordert d. h. also entsprechend hohes p_{me} im Teillastgebiet; dies würde wieder eine Prüfung

a) bei Reiseflugdrehzahl,
b) bei möglichst größtem Luftüberschuß und
c) bei den sich hierbei einstellenden Ladelufttemperaturen

bedeuten.

Die Überladeprüfung mußte also zur Festlegung der thermischen Beständigkeit der Kraftstoffe bei den verschiedenen Druckbeanspruchungen an der Klopfgrenze unter mehreren Bedingungen erfolgen. Für die Prüfung im luftgekühlten Flugmotoren-Einzylinder BMW 132 wurden die Bedingungen wie folgt festgesetzt:

1. Die Prüfdrehzahl mit 1600 U/min. Diese Begrenzung erfolgte mit Rücksicht auf das Abhörverfahren und zur Schonung des Triebwerkes, da die Prüfungen an der Klopfgrenze bei höheren Drehzahlen in OZ 87-Motoren sonst zu starken Störungen geführt hätten. Wenn auch diese Drehzahl nicht den Startbedingungen entspricht, so konnte doch durch eine große Anzahl von Versuchen nachgewiesen werden, daß die Reihenfolge der bei verschiedenen Drehzahlen erfolgten Beurteilung für verschiedene Kraftstoffe die gleiche blieb. Die niedrige Prüfdrehzahl wirkte sich also keineswegs nachteilig aus.

2. Die Gemischstärke wurde für einen Bereich von $\lambda = 0{,}7$ bis möglichst 1,3 gewählt. Damit konnten die Verhältnisse für Überfettung bis zur größtmöglichen Vermagerung erfaßt werden.

3. Die Ladelufttemperaturen wurden mit 35, 80 und 130° C festgelegt. Mit dieser Bedingung wurde die Temperaturabhängigkeit des Kraftstoffes erfaßt. Schließlich wurde

4. für die Prüfung die Bestzündung, die sich bei den Luftüberschußzahlen $\lambda = 0{,}7$; 0,9; 1,1 und 1,3 bei klopffreier Verbrennung ergab, gewählt.

Weitere Einzelheiten der Durchführung der Überladeprüfung sind aus der Veröffentlichung in Luftfahrtforschung Bd. 16 (1939) Lfg. 1 zu entnehmen [8].

d) Einfluß der Versuchsbedingungen auf die Überladbarkeit eines OZ 87-Kraftstoffes.

Die Ergebnisse des entwickelten DVL-Überladeprüfverfahrens für die Bestimmung der Klopfneigung hochklopf-

Digitized by Google

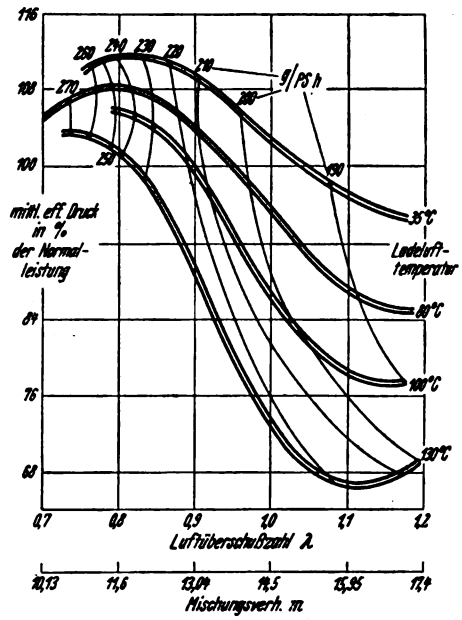


Bild 4. Prüfung eines OZ 87-Kraftstoffes nach dem DVL-Überladeprüfverfahren. (BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder).

fester Flugmotorenkraftstoffe sollen nun erläutert werden. Bild 4 zeigt die Grenzkurven der zulässigen mittleren effektiven Kolbendrücke eines handelsüblichen Fliegerbenzins, das das CFR-Motor-Verfahren mit der Oktanzahl 87 kennzeichnet für verschiedene Ladelufttemperaturen [35, 80, 100 und 130° C] über dem gesamten Luftüberschußbereich. Die Linien gleichen spezifischen Kraftstoffverbrauches sind gleichfalls eingezeichnet.

Bild 5 zeigt die Änderungen der mittleren effektiven Kolbendrücke (in % der Normalleistung) für die unter den vorhin angeführten DVL-Bedingungen aufgestellte Grenzkurve eines OZ 87-Kraftstoffes

1. bei verschiedenen Drehzahlen 1200 und 2000 U/min
2. bei verschiedenen Ladelufttemperaturen 35 und 130° C.

Aus Bild 6 ersieht man die Verschiebung der Original-Grenzkurve

1. durch Schließung der Drossel um 25%,
2. durch Änderung der Klopfschlagzahl (Null Klopfschläge),
3. durch Vorverlegung der Zündung auf 40° K. W.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß mittels des *pt*-Diagrammes und auch seiner ersten Ableitung keine Kennzeichnung des Klopfbeginnes möglich war. Messungen des absoluten Klopfbeginnes mit Hilfe der Bildung des 2. Differentialquotienten [12] bestätigen jedoch die durch Abhören ermittelte zulässige Überladbarkeit (Bild 7). Diese Messungen wurden im CFR-Motor durchgeführt. Bild 8 zeigt Meßergebnisse im BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder. Im Knickpunkt der Kennlinien von $\frac{d_2 p}{dt^2}$ für die Luftüberschußzahlen 0,75; 0,9 und 1,0 liegt der durch Abhören ermittelte Versuchspunkt. Diese Versuche wurden vom Institut für Betriebstofforschung gemeinsam mit Dr. Lichtenberger durchgeführt und sollen so ausgebaut werden, daß eine schnelle und einfache Bestimmung des Klopfbeginnes unabhängig vom Abhören möglich ist. Amerikanische Überladeversuche von Rothrock und Biermann, bei denen der Klopfbeginn auch mit einem elektrischen Verfahren ermittelt wurde, ergaben ebenfalls einen parallelen Verlauf zu den durch Abhören festgelegten Grenzkurven [11].

Wurden die bisher angeführten Versuchsergebnisse in einem 3,06-l-Motor ermittelt, so zeigt Bild 9 die Überladbarkeit eines OZ 87-Kraftstoffes unter verschiedenen Betriebsbedingungen in einem 2 l flüssigkeitsgekühlten Ein-

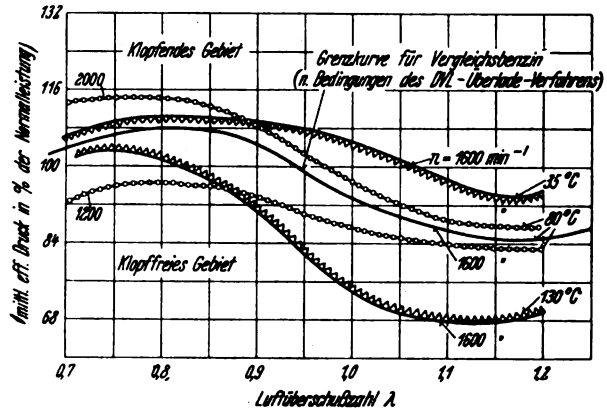


Bild 5. Beeinflussung der Klopfgrenzkurve durch Änderung der Prüfdrehzahl und der Ladelufttemperatur. (BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder).

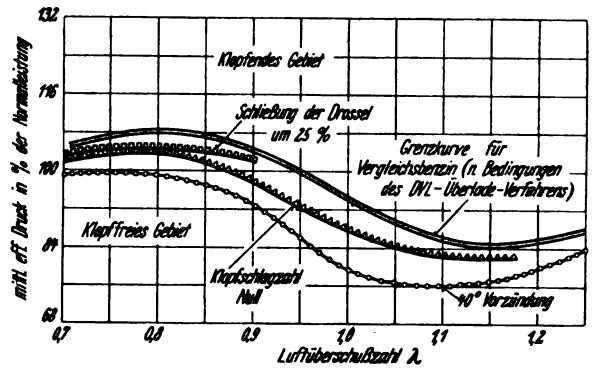
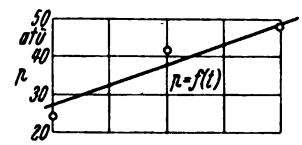


Bild 6. Beeinflussung der Klopfgrenzkurve durch Änderung der Drosselstellung, der Klopfschlagzahl und des Zündzeitpunktes. (Ladelufttemperatur 80° C.) (BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder).



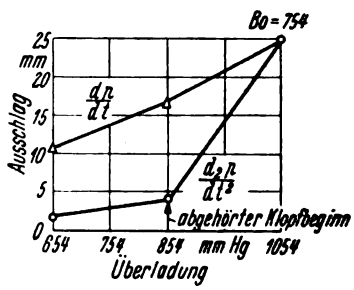


Bild 7. Messung des absoluten Klopfbeginnes mit Hilfe der Druckbeschleunigung (2. Ableitung des *pt*-Diagrammes) im CFR-Motor.

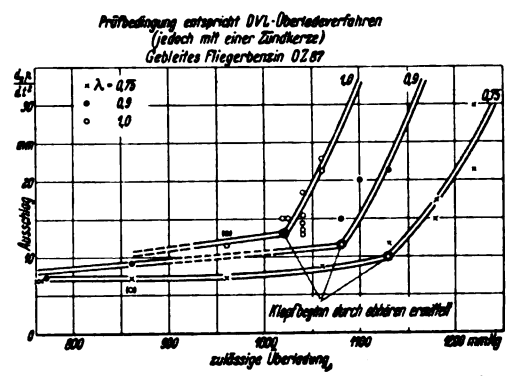


Bild 8. Messung des absoluten Klopfbeginnes im BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder.

Digitized by Google

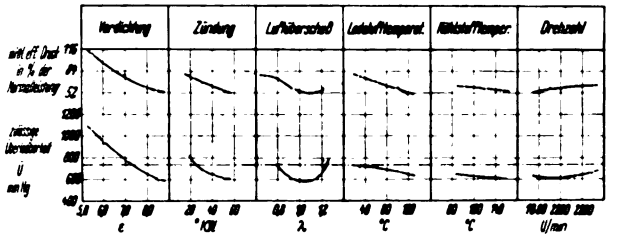


Bild 9. Überladbarkeit eines OZ 87-Kraftstoffes unter verschiedenen Betriebsbedingungen.

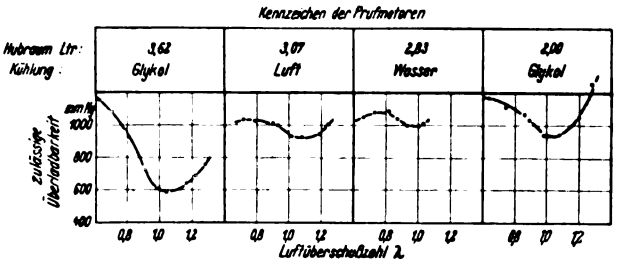


Bild 10. Überladbarkeit eines OZ 87-Kraftstoffes in verschiedenen Einzylindermotoren.

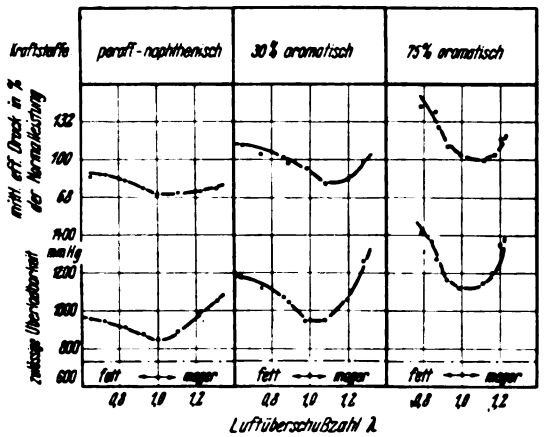


Bild 11 (links). Überladbarkeit von Kraftstoffen verschiedenen chemischen Aufbaues.

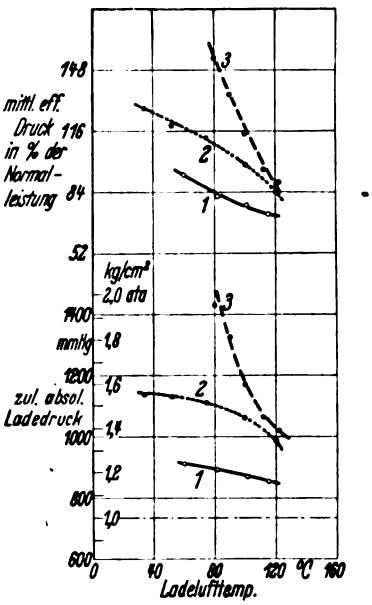


Bild 12 (rechts). Klopfgrenzkurven für verschiedene Kraftstoffe in Abhängigkeit von der Ladelufttemperatur.

Zeichenerklärung:
1. Fliegerbenzin vorw. paraff. Natur OZ 87.
2. Fliegerbenzin + ca. 30% Aromaten OZ 87.
3. Fliegerbenzin + ca. 75% Aromaten OZ 87.

Prüfmotor: 2-Liter-Motor.

zylinder-Versuchsmotor. Die Reihenfolge der Einflüsse der verschiedenen Betriebsbedingungen auf die zulässige Überladbarkeit bzw. p_{me} (in % der Normalleistung) ist dabei folgende:

1. Verdichtung,
2. Zündung,
3. Luftüberschuß,
4. Ladelufttemperatur,
5. Kühlstofftemperatur,
6. Drehzahl.

Welchen Einfluß die Größe des Hubraumes bei verschiedenartiger Kühlung auf die zulässige Überladbarkeit in Abhängigkeit der Luftüberschußzahl ausübt, ist für vier Beispiele aus Bild 10 zu entnehmen.

Auf weitere Ergebnisse der Überladeprüfung an Einzylindern verschiedener Bauart, die in der DVL von Dipl.-Ing. Berg durchgeführt wurden, einzugehen, verbietet der Raum.

e) Zulässige Überladbarkeit von Kraftstoffen gleicher Oktanzahl und ihr chemischer Aufbau.

Welche Bedeutung der chemische Aufbau der Kraftstoffe für die erzielbare zulässige Überladung besitzt, ist für die Entwicklung von hochklopffesten Flugmotorenkraftstoffen von besonderem Interesse, kann jedoch nur an einigen ausgewählten Beispielen erläutert werden. In Bild 11 ist bei gleichen Versuchsbedingungen für einen flüssigkeitsgekühlten Einzylinder-Motor die Abhängigkeit der zulässigen Überladbarkeit von drei in ihrem chemischen Aufbau grundverschiedenen Kraftstoffen der Klasse OZ 87 von dem Mischungsverhältnis dargestellt. Die hohe Überladbarkeit stark aromatischer Kraftstoffe, besonders bei starker Überfettung, ist klar erkennbar. Jedoch ist bei Vermagern mit steigendem Aromatengehalt der Kraftstoffe auch ein stärkerer Abfall der Grenzkurven im Gegensatz zu paraffinisch-naphthenischen Kraftstoffen festzustellen.

Für die gleichen Kraftstoffe ist in Bild 12 die Abhängigkeit der zulässigen Überladung von den Ladelufttemperaturen bei einem Luftüberschuß von $\lambda = 0{,}9$ dargestellt. Aus diesen Versuchen geht neben der Überlegenheit aromatischer Kraftstoffe bei niedrigen Ladelufttemperaturen auch deutlich ihre starke Temperaturabhängigkeit hervor. Kraftstoffe paraffinisch-naphthenischer Natur sind weitaus temperaturbeständiger.

Bei der Festlegung der verschiedenen Abhängigkeiten zeigen sich nun die Vorzüge eines Mehrpunktverfahrens und im besonderen die der beschriebenen DVL-Überladeprüfung, Kraftstoffe direkt im Flugmotoren-Einzylinder unter annähernd gleichen Verhältnissen des Vollmotors auf ihren mittleren effektiven Druck an der Klopfgrenze zu prüfen. Unter der Voraussetzung gegebener Verdichtung, fester Drehzahl und Bestzündung wird die Klopfneigung der Kraftstoffe, die dann am stärksten durch die Luftüberschußzahl und die Ladelufttemperaturen beeinflußt wird, vorteilhaft diagrammatisch dargestellt. Bild 13 zeigt für Kraftstoffe der Klasse OZ 87 die Grenzflächen erzielbarer mittlerer effektiver Drücke (in % der Normalleistung) bei gleicher Klopfschlagzahl in Abhängigkeit von der Luftüberschußzahl und von den Ladelufttemperaturen. Der Einfluß des verschiedenen chemischen Aufbaues der Kraftstoffe kommt klar zum Ausdruck. Bild 14 zeigt die diagrammatische Darstellung zweier OZ 100-Kraftstoffe. Die Temperaturempfindlichkeit des aromatischen Kraftstoffes ist deutlich zu erkennen. Trotz gleicher Oktanzahl des paraffinischen Kraftstoffes und seiner geringen Temperaturabhängigkeit, ist nur eine geringe Überlegenheit, und zwar ausschließlich im Luftüberschußbereich bei sehr hohen Ladelufttemperaturen vorhanden. Die Richtigkeit dieser Bewertung konnte unlängst durch Versuche in Flugmotoren bestätigt werden.

4. Die Bedeutung des DVL-Überladeprüfverfahrens für die Praxis.

Setzt man nun die Ergebnisse der Überladeprüfung bei mehreren Ladelufttemperaturen in Beziehung zu den nach verschiedenen Verfahren ermittelten Oktanzahlen, so ergeben sich die in Bild 15 und 16 dargestellten Verhältnisse. Ein ähnliches Bild ergibt sich, wenn man die Unterschiede der Research- und Motor-Oktanzahl mit den Differenzen der zulässigen Überladung bei verschiedenen Ladelufttemperaturen und einer Luftüberschußzahl von 1,05 vergleicht. Dies

Digitized by Google

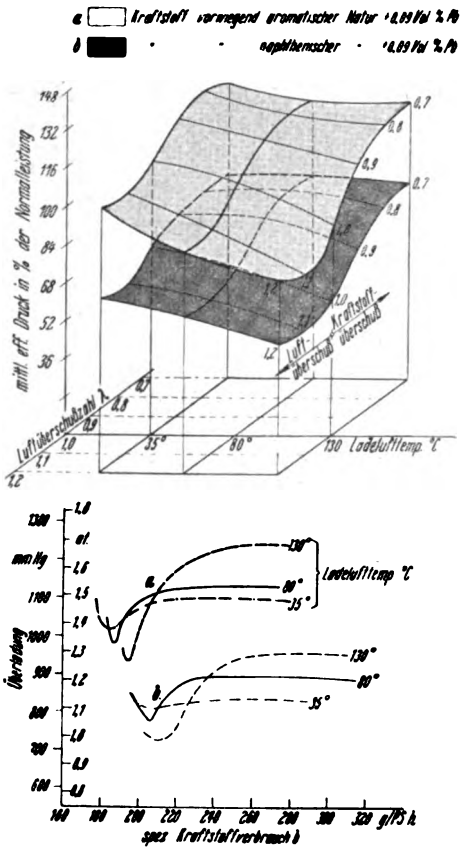


Bild 13. Erzielbare mittlere effektive Kolbendrücke an der Klopfgrenze zweier OZ 87-Kraftstoffe (nach dem DVL-Überladeprüfverfahren). Prüfmotor: BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder.

bedeutet nichts anderes, als daß die Beurteilung der Kraftstoffe im CFR-Motor nach den verschiedensten Verfahren nicht die Beanspruchung derselben im Flugmotoren-Einzylinder wiedergeben kann.

Mit dem neu entwickelten DVL-Überladeprüfverfahren ist im Gegensatz zur bisher ungenügenden motorischen Beurteilung der Hochleistungskraftstoffe eine den tatsächlichen Beanspruchungen entsprechende Bewertung möglich.

Die Vorteile dieser Prüfung sind hauptsächlich folgende:

1. Die Klopfneigung der Kraftstoffe wird direkt in Original-Flugmotorenzylindern geprüft.
2. Die Kraftstoffe werden unter weitgehendst an die Praxis angenäherten Versuchsbedingungen untersucht.
3. Die Mehrpunktbewertung eines Kraftstoffes gestattet Rückschlüsse für die Entwicklung von OZ 100-Motoren und deren Kraftstoffe.

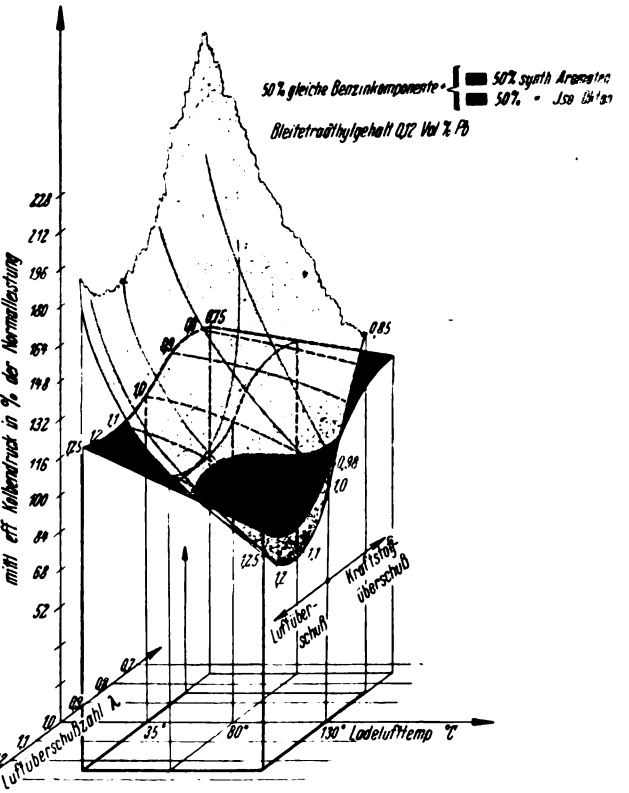


Bild 14. Erzielbare mittlere effektive Kolbendrücke an der Klopfgrenze zweier OZ 100-Kraftstoffe (nach dem DVL-Überladeprüfverfahren). Prüfmotor: BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder.

5. Schrifttum.

[1] J. E. Ellor, Einige Aufgaben bei der Aufladung von Flugmotoren. Jahrbuch 1939 der Deutschen Luftfahrtforschung, Ergänzungsband S. 200.

[2] F. Seeber, Kraftstoffe für Flugmotoren. Luftwissen Bd. 5, Nr. 9, Sept. 1938, S. 321/330.

[3] F. Seeber, Über die Beziehungen zwischen motorischem Verhalten von Kraftstoffen und den Betriebsbedingungen. Luftwissen Bd. 3 (1936), Nr. 11, S. 326/28.

[4] F. Seeber, Klopffestigkeitsprüfungen an Otto-Motoren RDT Bd. 18 (1938), Nr. 39, S. 2.

[5] C. D. Boerlage, L. A. Peletier u. J. L. Tops, The Allowable Boost Ratio; A new methode of knock rating for aviation fuels of high anti-knock value. Aircraft Engineering Bd. 7 (1935), Nr. 82.

[6] Evans, Dodd u. Garner, The nature of the Octane Scale. J. Inst. Petrol. Techn. Bd. 21 (1935), S. 1000 bis 1012.

[7] A. v. Philippovich, Der Verbrennungsvorgang im Explosionsmotor. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), Lfg. 7, S. 199/209.

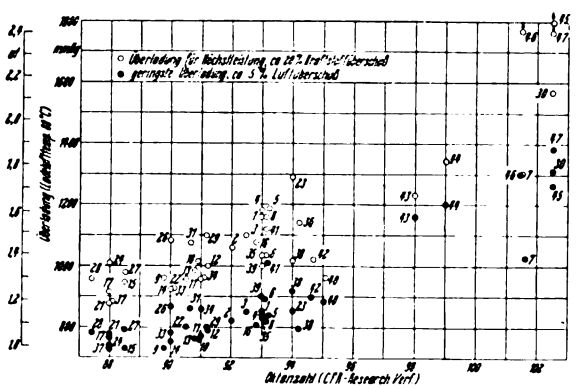


Bild 15. Beziehung zwischen CFR-Research-Oktanzahl und Überladung bei Klopfbeginn im BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder.

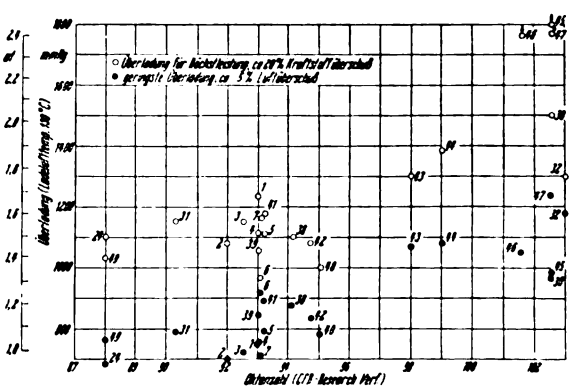


Bild 16. Beziehung zwischen CFR-Research-Oktanzahl und Überladung bei Klopfbeginn im BMW 132-Flugmotoren-Einzylinder.

Digitized by Google

[8] F. Seeber, Prüfung hochklopffester Kraftstoffe im Flugmotoren-Einzylinder. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939) Nr. 1, S. 18/20.

[9] A. v. Philippovich, s. Aussprache S. 20/21, Protokoll über die 7. Hauptsitzung des Comitees ISA 20 (Luftfahrt) Berlin, 24. bis 27. Juni 1938;

A. E. Becker, Effect of Test Conditions on Fuel Rating. SAE-J. (1938), Bd. 42, S. 62/72.

[10] E. L. Bass, Prüfung von Kraftstoffen für Hochleistungsflugmotoren. Luftfahrtschrifttum des Auslandes in Übersetzungen, Bd. 3 (1937), Nr. 1.

11] Rothrock und Biermann, Engine performance and knockrating of fuels for high output aircraft engines. Technical Note Nr. 647 (1938).

[12] F. Lichtenberger u. F. Seeber, Beitrag zur Frage der Klopfmeßverfahren. ATZ (1938), Heft 14, S. 372 bis 374.

Digitized by Google

Der Einfluß der Betriebsbedingungen auf das Kolbenringstecken bei der Betriebstoffdauerprüfung*).

Von Wolfgang Glaser.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Betriebsstofforschung.

Es wird über Dauerversuche an einem flüssigkeitsgekühlten Einzylindermotor unter hoher thermischer Belastung berichtet, durch die der Einfluß der verschiedenen Betriebsbedingungen auf die Laufzeit bis zum Kolbenringstecken untersucht wurde. Die Einflüsse werden ihrer Bedeutung nach besprochen. Weiter wird auf die Unzweckmäßigkeit des Kolbenringeinfahrens bei derartigen Versuchen hingewiesen und gezeigt, wie unklare Ergebnisse von Dauerprüfläufen berichtigt werden können.

Die Versuche lassen darauf schließen, daß die Laufzeiten von drei Grundbedingungen abhängig sind: dem Kraftstoff, dem Schmierstoff und der Temperatur in der Kolbenringpartie. Auf Grund dieser Erkenntnis werden neue Untersuchungsrichtungen vorgeschlagen, durch die unter Umständen die Frage der Rückstandsbildung und Schmierfähigkeit weiter geklärt werden könnte.

Gliederung:

I. Einleitung.
II. Versuchsmaterial.
III. Art der Versuchsdurchführung.
a) Versuchsvorbereitung.
b) Einfahren der Kolbenringe.
c) Warmfahren.
d) Versuchsdurchführung.
IV. Versuchsbedingungen.
V. Versuchsergebnisse.
a) Seitliches Spiel der Kolbenringe.
b) Kühltemperatur.
c) Verbrennungsraumtemperatur.
d) Kraftstoffverbrauch.
e) Leistung.
f) Drehzahl.
g) Öldruck.
h) Öltemperatur.
i) Verdichtung.
k) Kolbenspiel im Zylinder.
l) Zylinder-, Kolben- und Ringmaterial.
VI. Schlußfolgerungen.
VII. Zusammenfassung.
VIII. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die motorische Prüfung von Betriebstoffen auf ihre Neigung zur Rückstandsbildung und damit zum Kolbenringfestgehen wird im allgemeinen in Dauerversuchen vorgenommen, wobei entweder der Befund nach einem 50- oder 100-h-Lauf [1, 2, 3, 4][1]) oder die Laufzeit bis zum Leistungsabfall durch Festgehen der Kolbenringe [5, 6] maßgebend ist. An anderer Stelle wird einem Vorschlag von Ricardo entsprechend zur Bewertung die Temperatur bestimmt, bei der die Ringe nach 5 h festgehen (»Ringstecktemperatur«) [7].

Während die zuerst angeführte Methode mit großem Zeit- und Kostenaufwand verbunden ist und außerdem nur ein vom einzelnen Bearbeiter abhängiges Urteil ermöglicht, sind die beiden letzteren Untersuchungsverfahren bei entsprechender Wahl der Betriebsbedingungen in verhältnismäßig kurzer Zeit, ohne von einem bestimmten Bearbeiter abhängig zu sein, durchführbar.

Die Bestimmung der Ringstecktemperatur macht jedoch unter Umständen, besonders bei Betriebstoffen, über deren Verhalten überhaupt nichts bekannt ist, ein langwieriges Suchen nach der richtigen Temperatur notwendig, was je nach dem Gefühl des Bearbeiters und der geforderten Genauigkeit mit mehreren Läufen von mindestens 5 h verbunden ist. Dieses Verfahren ist daher in Deutschland bisher nicht zur Anwendung gekommen.

Die Bestimmung der Laufzeit bis zum Leistungsabfall ist deshalb bei entsprechender Wahl der Betriebsbedingungen das einfachste, kürzeste und billigste Verfahren zur Beurteilung eines Betriebstoffs auf seine Neigung zum Kolbenringstecken. Die Laufzeiten liegen bei dieser Art der Untersuchung zwischen 2 und 15 h. Dieses Verfahren ist bisher nur zur Prüfung von Schmierstoffen im BMW-132-Einzylindermotor und im Siemens-Ölprüfmotor angewendet worden. Es kann selbstverständlich in gleicher Weise bei der Prüfung von Kraftstoffen Anwendung finden.

Es hat sich jedoch gezeigt, daß eine gute Reproduzierbarkeit der Läufe nur dann gewährleistet ist, wenn die Betriebsbedingungen der Vorschrift entsprechend auf das genaueste eingehalten werden: Eine große Anzahl von an verschiedenen Stellen mit gleichen Betriebstoffen durchgeführten Läufen ergab oft Laufzeiten, die um mehr als 10 bis 15% voneinander abwichen. Diese Schwankungen können wohl zum größten Teil auf die Ungleichmäßigkeit der eingestellten Betriebsbedingungen zurückgeführt werden.

Aus diesem Grunde war es unbedingt erforderlich, den Zusammenhang zwischen der Laufzeit und den Schwankungen der Betriebsbedingungen zu klären und durch systematische Versuche den Einfluß auf die Laufzeit festzulegen.

II. Versuchsmaterial.

Die Untersuchungen wurden in einem DVL-Einzylindermotor (ältere Bauart 1934) [8] mit Zylinder und Kolben des Flugmotors BMW VI durchgeführt. Trotz der für diesen Motor außerordentlich hohen thermischen Belastung traten bei den verwendeten Zylindern keine bemerkenswerten Störungen auf. Um nicht allzu lange Laufzeiten zu erreichen, wurden Kolben mit verhältnismäßig geringem seitlichem Spiel der Kolbenringe (Wasserkühlungsspiele) verwendet. Um die Versuchsbeeinflussung durch zu großen Zylinder- und Kolbenverschleiß in möglichst engen Grenzen zu halten, wurde der Zylinder nach einer Betriebszeit von etwa 60 bis 70 h erneuert. Der Kolben mußte schon nach etwa 35 bis 45 h ausgewechselt werden, da die Ringnuten sich sehr schnell verbreiterten.

Um den Motor möglichst rasch auf die gewünschten Temperaturen zu bringen, wurde das Kühlmittel im Reservetank elektrisch (4 kW) vorgeheizt; ebenso wurde selbstverständlich das Öl entsprechend vorgewärmt. Die Versuche waren absichtlich in einem flüssigkeitsgekühlten Motor durchgeführt worden, da sich hier infolge der Gleichmäßigkeit der Kühlung die Zylinderwandtemperaturen wesentlich besser gleichhalten und reproduzieren lassen als im luftgekühlten Motor.

Für die Versuche wurde einheitlich ein Kraftstoff der Klasse OZ 87 mit sehr geringem Aromatengehalt, ein han-

*) Erweiterte Fassung des Vortrages »Die Überwachung der Betriebsbedingungen bei Schmierölprüfungen« vor der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung in Bremen, Februar 1939.

[1]) Die in Klammern angegebenen Zahlen verweisen auf das in Abschnitt VIII zusammengestellte Schrifttum.

Digitized by Google

delsübliches gutes Flugmotorenöl und als Kühlmittel Äthylenglykol verwendet.

Außer den üblichen Geräten zur Überwachung des Motors wurden folgende Instrumente benutzt: Zur Messung der Verbrennungsraum- und Auspufftemperatur dienten die üblichen DVL-Thermoelemente [9], von denen eins in eine Kerzenbohrung und ein anderes in den Auspuffstutzen eingebaut war. Die Elemente arbeiteten vollkommen störungsfrei und brauchten daher während der ganzen Versuchsreihe nicht ausgewechselt zu werden.

Da wie bekannt die Zündung einen außerordentlich großen Einfluß auf die Temperatur im Verbrennungsraum hat (6° C/Kw Vorzündung) [10], wurde auch hier wieder wie bisher ein Glimmlampen-Zündzeitpunktanzeiger verwendet.

Schließlich wurde im Rahmen der Versuche ein Ölgasmengenmeßgerät entwickelt, durch das die jeweilige vom Verbrennungsraum in das Kurbelgehäuse durchtretende Gasmenge gemessen und laufend niedergeschrieben wird. Über dieses Gerät ist bereits an anderer Stelle berichtet worden [11], so daß sich hier eine Beschreibung erübrigt. Da mit diesem Apparat die Abdichtung zwischen Kolben und Zylinder laufend gemessen werden kann, zeigt sich das endgültige Kolbenringfestgehen und der damit verbundene Leistungsabfall durch eine plötzliche Änderung im Verlauf der Gasdurchtrittskurve deutlich an. (Z. B. plötzliches starkes Ansteigen. Vgl. Bild 1.) Selbstverständlich ist mit diesem Gerät auch schon vor Eintritt des Leistungsabfalles das zeitweilige Hängen eines Ringes gut zu beobachten.

III. Art der Versuchsdurchführung.

a) Versuchsvorbereitung.

Vorbedingung für eine einwandfreie Versuchsdurchführung ist die gründliche Reinigung des Motors, insbesondere des Kolbens und Zylinders von allen Rückständen des vorhergehenden Laufes. Es ist daher auch verständlich, daß für jeden Versuch neues Öl verwendet wurde. Ebenso wurden vor jedem Lauf die Ventile eingeschliffen, um die Gefahr einer Versuchsstörung durch undichte Ventile möglichst herabzusetzen. Da — wie die später besprochenen Untersuchungen zeigen — das seitliche Spiel der Kolbenringe einen außerordentlich großen Einfluß auf das Versuchsergebnis hat, ist es sehr wichtig, daß die Ölkohle aus den Kolbenringnuten auf das sorgfältigste entfernt wird, ohne dabei Kolben und Nuten zu beschädigen. Auf die Gefahr einer »Vergiftung« durch zurückgebliebene Rückstände eines anderen Öles sei ebenfalls hingewiesen.

Für jeden Lauf wurden neue Ringe von stets gleichem Material verwendet, die sich nach Spannung und Abmaßen nur sehr wenig unterschieden.

Sodann wurden Zylinder, Kolben und Ringe entsprechend den Normvorschriften [1, 2] vermessen. Die Breite der ersten Ringnut wurde an 8 gleichmäßig über den Kolbenumfang verteilten Stellen bestimmt, um das seitliche Spiel des ersten Ringes besonders sorgfältig festlegen zu können. Die Bedeutung dieser Messung wird an anderer Stelle noch behandelt (vgl. Abschn. Va).

b) Einfahren der Kolbenringe.

Das bisher übliche Einfahren der Kolbenringe für jeden Lauf wurde nur zu Beginn der Versuchsreihe vorgenommen. Die mit dem neuen Gasmengenmeßgerät aufgenommenen Kurven zeigten nämlich, daß das Einfahren der Ringe nur dann zweckmäßig ist, wenn sie danach nicht mehr ausgebaut werden: Da sich während der Einfahrzeit bereits eine dünnere Schicht Ölkohle in den Nuten absetzt, ist eine anschließende Entfernung der Ringe zur Reinigung der Nuten erforderlich. Die durch diese Maßnahme hervorgerufene Formänderung ist zwar nicht meßbar, aber die Gasdurchtrittskurve zeigt, daß in diesem Falle die Abdichtung der Ringe wesentlich schlechter ist als bei uneingefahrenen Ringen (Bild 2). Unterschiede in der Laufzeit bis zum Kolbenringstecken haben sich nicht ergeben.

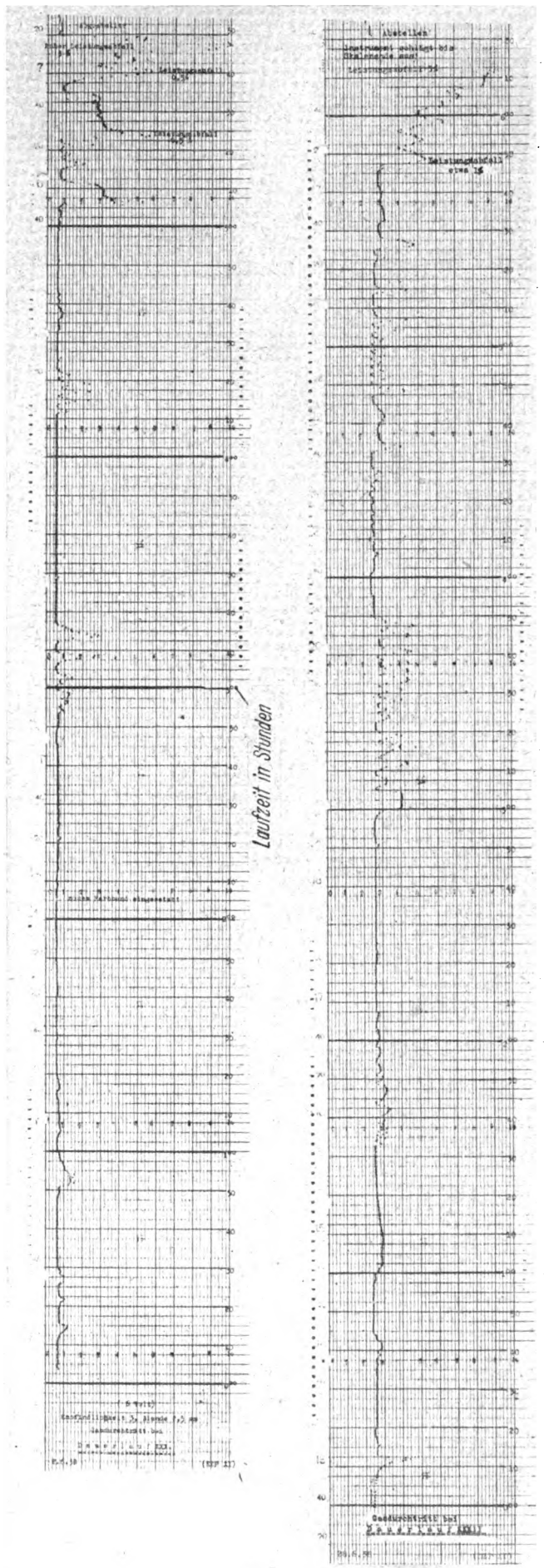


Bild 1. Gasdurchtrittskurven zweier Dauerläufe.

Digitized by Google

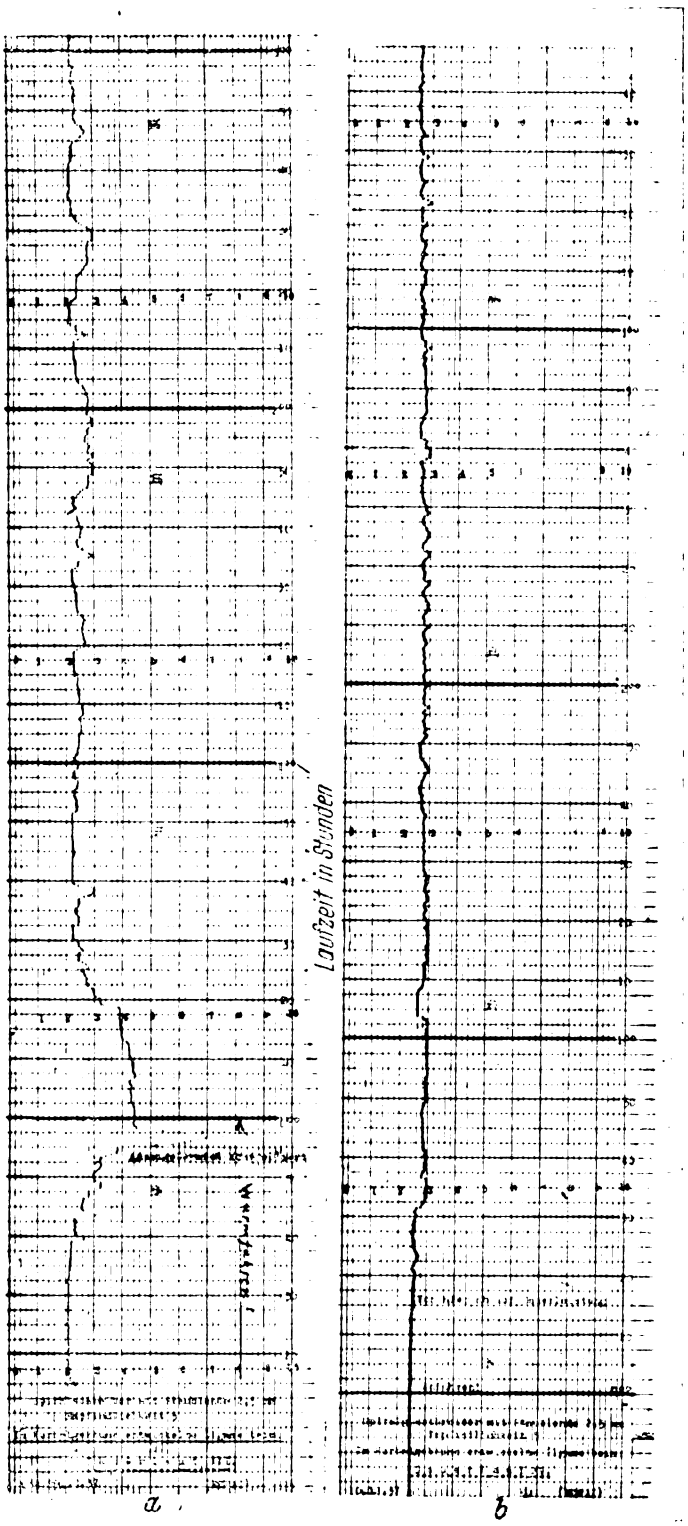


Bild 2. Gasdurchtrittskurven zu Beginn zweier Dauerläufe bei verschiedener Versuchsvorbereitung.
a Eingefahrene Ringe 1 Std. Warmfahren, *b* Uneingefahrene Ringe 15 Min. Warmfahren.

c) Warmfahren.

Mit Hilfe der verschiedenen elektrischen Heizanlagen konnte der Motor derart vorgewärmt werden (Erwärmung der Zylinderwand auf 90 bis 100° C), daß er in der verhältnismäßig kurzen Zeit von 15 min nach dem Anfahren die vorgeschriebene Betriebsleistung und -temperatur erreicht hatte. Diese kurze Warmfahrzeit wirkt sich natürlich sehr günstig auf die Reproduzierbarkeit der Versuche aus, da die Beanspruchung des Öles in der Nähe der Kolbenringe während dieser Zeit bei den einzelnen Läufen am unregelmäßigsten ist und auch am wenigsten beherrscht werden kann. Je kürzer also sie Warmfahrzeit ist, desto besser wird die Reproduzierbarkeit.

Dieses schnelle Warmfahren wurde erst im Laufe der einzelnen Untersuchungen eingeführt, nachdem zwei mit Ausnahme der Warmfahrzeit unter denselben Bedingungen durchgeführte Versuche keine Unterschiede in der Laufzeit gebracht hatten. Während die einstündige Warmfahrzeit nicht in die Laufzeit mit eingerechnet wurde, konnte bei dem schnellen Warmfahren die gesamte Zeit vom Versuchsbeginn bis zum Ringstecken als Laufzeit gewertet werden.

d) Versuchsdurchführung.

Nach dem Warmfahren wie auch während der ganzen Versuchszeit wurde bei allen Läufen[2]) die Verbrennungsraumtemperatur durch Verstellen der Zündung stets gleich groß gehalten.

Da die Öltemperatur anfangs immer etwas unter dem Durchschnitt lag, mußte die Leistung in den ersten 60 bis 90 min noch nachreguliert werden (kalte Lager, kaltes Öl ergibt höhere innere Reibung, also geringere effektive Leistung). Danach wurde die Drosselstellung unverändert gelassen, um einen Leistungsabfall möglichst gut beobachten zu können. Ebenso wurden die Verbrennungsraumtemperaturen (s. o.), der Kraftstoffverbrauch, die Kühltemperatur und das Drehmoment in den im nächsten Abschnitt angegebenen Grenzen gleichgehalten.

Das Versuchsende zeigte sich in einem plötzlichen starken Ansteigen der Gasdurchtrittskurve an, wobei gleichzeitig ein Leistungsabfall von mindestens 2% auftrat. Dieser Leistungsabfall dauert oft nur wenige Sekunden, so daß er leicht vom Beobachter übersehen werden kann. Aus diesem Grunde hat sich die selbsttätige Niederschrift des Gasdurchtritts sehr gut bewährt, so daß eine richtige Wertung des Versuchs auch ohne Beobachtung des Leistungsabfalles möglich gewesen wäre.

IV. Versuchsbedingungen.

Um für die verwendeten Betriebstoffe nicht allzu lange Laufzeiten zu erhalten, wurden folgende Versuchsbedingungen gewählt:

Leistung: $50 \begin{smallmatrix} +1{,}0 \\ -0{,}2 \end{smallmatrix}$ PS_e,

Drehzahl: $1750 \begin{smallmatrix} +15 \\ -5 \end{smallmatrix}$ U/min,

Kraftstoffverbrauch: 230 ±3 g/PS_eh bzw. 2390 ± 30 kcal/PS_eh,

Schmierstoffdruck: 6,0 ± 1 atü,

Verbrennungsraumtemperatur: 653 ± 2° C[3]),

Kühltemperatur: 180 ± 0,5° C (Austritt),

Verdichtung: $\varepsilon = 6{,}35$,

Zündung entspr. 653° C im Verbrennungsraum,

verwendete Schmierstoffmenge: 20 kg.

Seitliches Spiel der Kolbenringe:

1. Ring: siehe nächsten Abschnitt,
2. » : 0,055 bis 0,075 mm,
3. » : 0,030 » 0,050 » ,
4. » : 0,030 » 0,050 » .

Bei diesen Bedingungen stellten sich ungefähr folgende Temperaturen ein:

Öleintritt: 85 ± 5° C
Ölaustritt: 93 ± 5° C } wurden nicht nachreguliert,

Auspufftemperatur: 818 ± 6° C,

Kühltemperatur: 178 ± 0,5° C (Eintritt).

[2]) Mit Ausnahme der Läufe zur Bestimmung des Einflusses der Verbrennungsraumtemperatur (vergl. Abschn. Vc).

[3]) Das Thermoelement befand sich von der Einlaßseite aus gesehen in der rechten vorderen Zundkerzenbohrung.

Digitized by Google

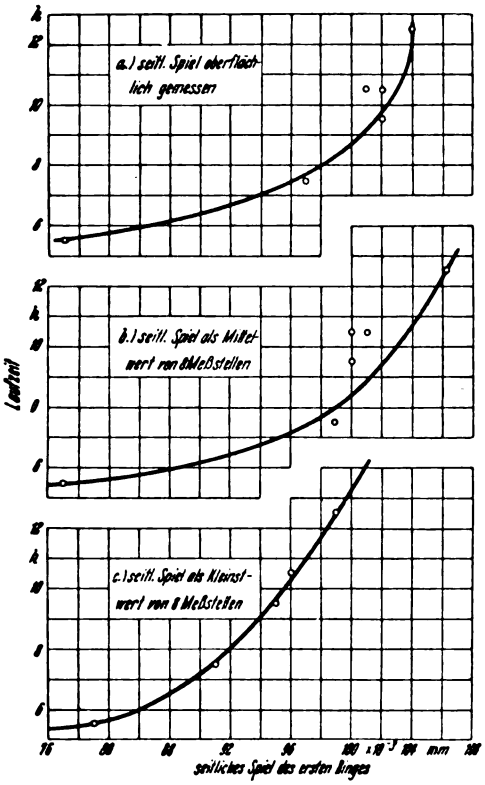


Bild 3. Abhängigkeit der Laufzeit vom seitlichen Spiel des ersten Ringes.

V. Versuchsergebnisse.

a) Seitliches Spiel der Kolbenringe.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß das seitliche Spiel der Kolbenringe — insbesondere das des ersten Ringes — großen Einfluß auf die Laufzeit bis zum Kolbenringstecken hat. In der Regel geht der erste Ring zuerst fest, wenn die Spiele der übrigen Ringe in den entsprechend vorgeschriebenen Grenzen liegen. Der zweite Ring geht meist erst dann fest, wenn der erste bereits steckt oder irgendwie seine abdichtende Wirkung verloren hat.

Wird in diesem Falle (der erste Leistungsabfall kann ohne Zuhilfenahme eines schreibenden Gerätes leicht übersehen werden) der Versuch noch weiter fortgesetzt, so ist es unter Umständen möglich, daß durch die an dem ersten Ring vorbeistreichenden Verbrennungsgase die gebildete Ölkohle zum Teil wegbrennt und dieser Ring wieder frei wird. Der Befund zeigt dann lediglich einen festen zweiten Ring. Hierbei sei auch auf die des öfteren gemachte Feststellung hingewiesen, daß bei sehr hoher thermischer Beanspruchung des Kolbens (z. B. bei der Bestimmung der Klopffestigkeit durch Überladung [12]) der zweite Ring als Folge einer Nutenverformung festging. (Der erste Steg war nach unten gebogen und hatte dadurch den zweiten Ring festgeklemmt.)

Es ist daher zunächst die Laufzeit bis zum Leistungsabfall durch Ringstecken bei verschiedenem seitlichen Spiel des ersten Ringes untersucht worden; Bild 3 zeigt das Ergebnis. Da die Ringnuten sich sehr schnell erweitern (bis zu 0.006 mm je Lauf) und andererseits eine Bestimmung des seitlichen Spiels auf Grund einer einzigen Messung der Nutenbreite ein noch wenig befriedigendes Ergebnis brachte (vgl. Bild 3a), ging man dazu über, die Vermessung der Nut an acht gleichmäßig über den Umfang verteilten Stellen vorzunehmen. Durch diese sorgfältige Vermessung konnte das kleinste Spiel sehr genau bestimmt werden, das — wie Bild 3c zeigt — die geringsten Streuungen in der Abhängigkeit der Laufzeit vom seitlichen Ringspiel ergibt.

Diese Untersuchungen sind mit einem anderen Kraftstoff unter anderen noch weiter verschärften Bedingungen wiederholt worden und haben dasselbe Ergebnis gebracht.

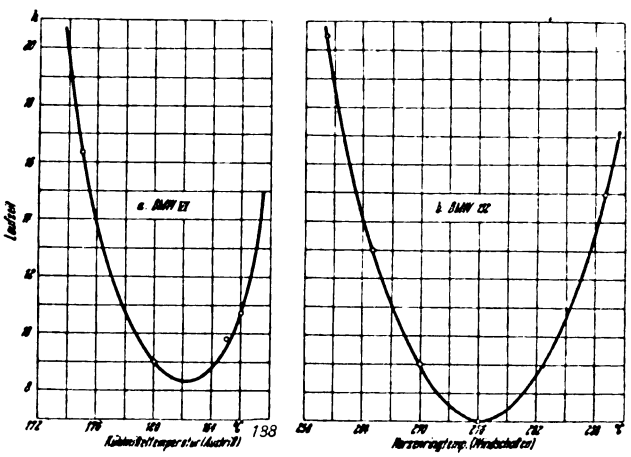


Bild 4. Abhängigkeit der Laufzeit von der Kühltemperatur.

Ebenso wird die Richtigkeit dieser Versuche durch die Feststellungen von Baß und Barton [7, 13] bestätigt, die ebenfalls einen bei kleinem Spiel flachen und bei größerem Spiel immer steiler werdenden Verlauf der Kurve festgestellt haben.

Da aus den oben erwähnten Gründen das seitliche Spiel nur sehr schwer für jeden Lauf gleich groß gehalten werden kann, wurde aus der Vermessung vor und nach jedem Lauf das kleinste seitliche Spiel des ersten Ringes ermittelt und die absolute Laufzeit diesem Spiel entsprechend bei allen nachfolgend beschriebenen Versuchen korrigiert; d. h. es wurden alle Versuchsergebnisse auf diejenige Laufzeit umgerechnet, die sich bei einem mittleren Spiel von 0,090 mm und den in Abschnitt IV angegebenen Bedingungen ergeben hätte. Um die Umrechnung zu erleichtern, ist in Bild 12a die prozentuale Abweichung der Laufzeit vom kleinsten seitlichen Spiel des ersten Ringes aufgetragen (9 h Laufzeit bei 0,090 mm Spiel = 100%).

b) Kühltemperatur.

In Bild 4a ist die Abhängigkeit der Laufzeit von der Kühltemperatur dargestellt. Bei dieser Kurve ist also — wie schon vorher erwähnt — der Einfluß des seitlichen Ringspieles berücksichtigt worden. Aus ihrem Verlauf geht hervor, daß die Laufzeit mit steigender Kühltemperatur zunächst fällt, bei etwa 182° C ein Minimum erreicht, um dann wieder zu steigen. Um die Richtigkeit dieser Kurve zu überprüfen, sind in einem anderen Flugmotoren-Einzylinder (BMW 132) ebenfalls Läufe bei verschiedenen Kühltemperaturen durchgeführt worden, die — wie Bild 4b zeigt — denselben Kurvenverlauf brachten. (Um die Kurven miteinander vergleichen zu können, sind die Maßstäbe einander angeglichen worden.)

Damit wird die bereits im Laboratorium gemachte Feststellung bestätigt, daß zu dem Höchstwert der Ölverkokung eine bestimmte Temperatur gehört [14, 15, 16]; bei höheren Temperaturen brennt die gebildete Ölköhle zum Teil wieder weg oder kommt teilweise gar nicht zur Bildung, so daß die Zeit bis zum endgültigen Festgehen eines Kolbenringes wieder länger wird.

Diese Beobachtung ist unter Umständen für die Industrie von großer Wichtigkeit. Einerseits zeigt sie, daß zur Charakterisierung eines Schmierstoffes in bezug auf seine Verkokungseigenschaften — also auch seine Neigung zum Ringstecken — nicht eine einzelne Laufzeitbestimmung genügt, sondern eine derartige Temperaturabhängigkeitskurve notwendig ist. Es wird daher vorgeschlagen, ein neues Schmierstoffdauerprüfverfahren auf dieser Erkenntnis aufzubauen. Andererseits ist aus dem Versuchsergebnis zu ersehen, daß man unter Umständen ein Kolbenringstecken vermeiden kann, wenn man die thermische Beanspruchung der Kolbenringpartie über die »Kritische Temperatur« (diejenige Temperatur, bei der das Laufzeitminimum auftritt) hinaus verlegt.

Digitized by Google

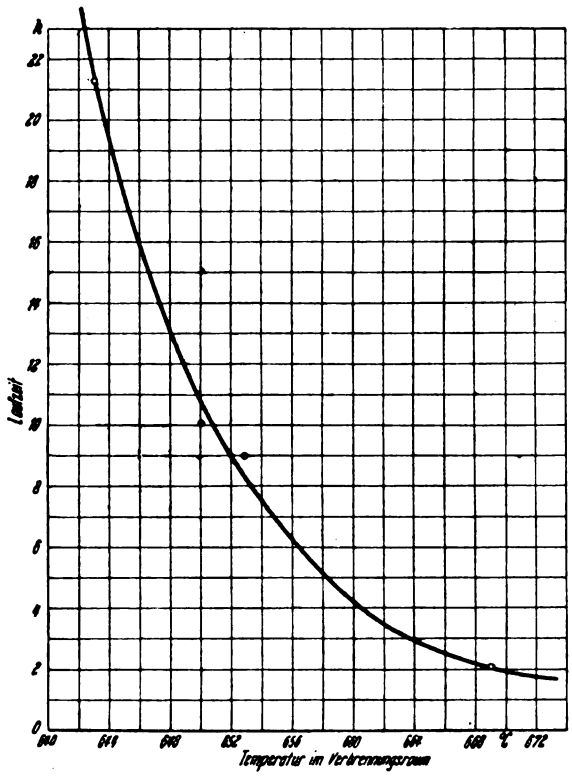


Bild 5. Abhängigkeit der Laufzeit von der mittleren Verbrennungsraumtemperatur.

Der Befund nach den Läufen, die jenseits der kritischen Temperatur durchgeführt worden waren, zeigte, daß hierbei die Schmierung des Kolbens und der Ringe scheinbar keineswegs schlechter ist als bei Versuchen kürzerer Laufzeit mit geringeren Temperaturen.

Diese Beobachtung erklärt vielleicht auch das bei Dieselmotoren zum Teil im Vergleich zum Ottomotor umgekehrte Verhalten der Schmieröle, da hier in der Kolbenringpartie gewöhnlich höhere Temperaturen auftreten als beim Zündermotor.

c) Verbrennungsraumtemperatur.

Fast der gleiche Verlauf der Kurve ergibt sich bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Laufzeit von der Verbrennungsraumtemperatur (Bild 5). Die gewünschte Temperatur wurde durch Verändern des Zündzeitpunktes eingestellt. Allerdings sind hier die Versuche nicht bei mehr als 672° C durchgeführt worden, aber die Tendenz der Kurve weist darauf hin, daß auch hier bei höheren Temperaturen wieder ein Steigen der Laufzeiten zu erwarten ist.

d) Kraftstoffverbrauch.

In Bild 6 ist die Abhängigkeit der Laufzeit vom Kraftstoffverbrauch dargestellt. Die Kurve zeigt, daß die Laufzeit im Verhältnis zu den anderen Einflüssen durch den Kraftstoffverbrauch nur sehr wenig verändert wird. Dieses Untersuchungsergebnis steht zu der bisherigen Erfahrung, daß die Laufzeit mit geringer werdendem Kraftstoffverbrauch außerordentlich sinkt, keinesfalls in Widerspruch. Die hier wiedergegebene Kurve ist bei gleichbleibenden Verbrennungsraumtemperaturen festgelegt worden, während bei der üblichen Änderung des Kraftstoffverbrauchs gleichzeitig der bedeutende Einfluß der damit verbundenen Temperaturänderung [10] zur Geltung kommt (vgl. Abschn. Vc).

Es ist verständlich, daß der Verlauf dieser Kurve sich unter Umständen mit der Art des Kraftstoffes ändert.

e) Leistung.

Ebenso hat die Leistung bei im übrigen unveränderten Bedingungen, wie Bild 7 zeigt, keinen allzu großen Einfluß. Die Laufzeit fällt mit steigender Leistung.

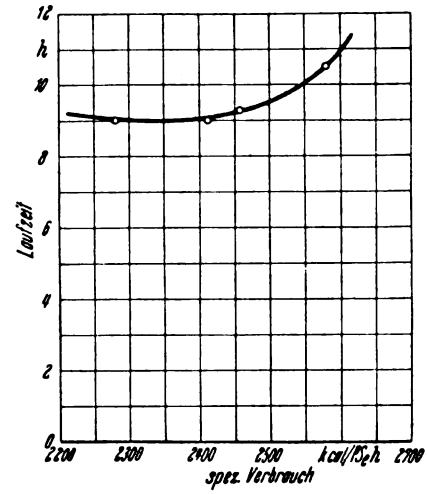


Bild 6. Abhängigkeit der Laufzeit vom spez. Kraftstoffverbrauch.

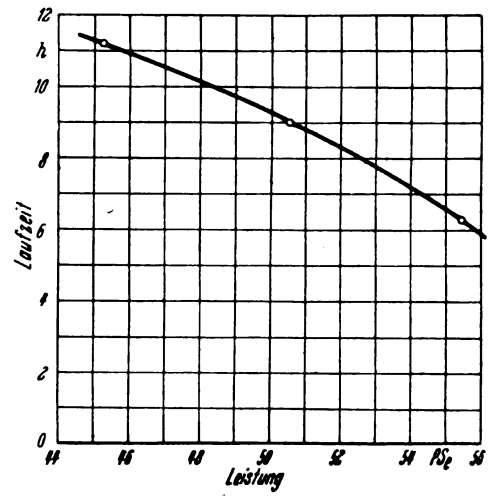


Bild 7. Abhängigkeit der Laufzeit von der Leistung.

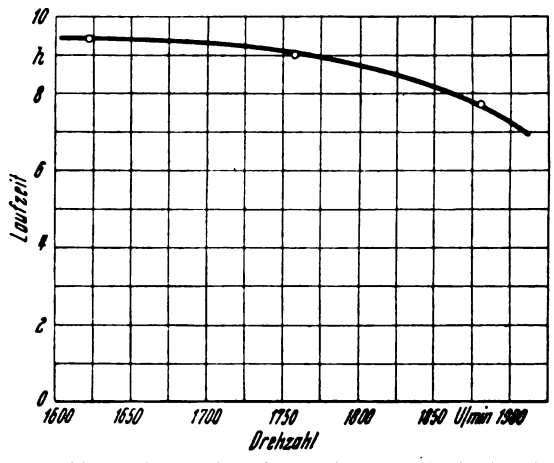


Bild 8. Abhängigkeit der Laufzeit von der Drehzahl.

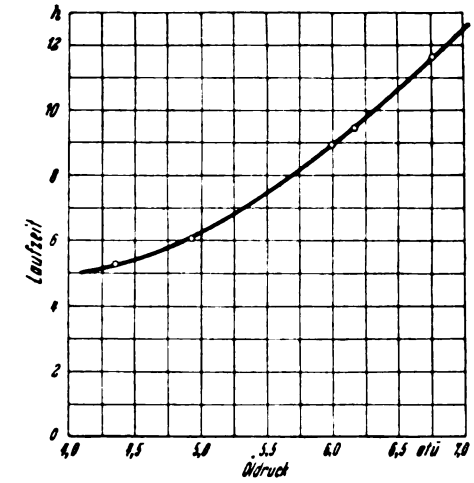
f) Drehzahl.

Aus Bild 8 ist zu ersehen, daß die Drehzahl einen noch geringeren Einfluß hat: Im normalen Drehzahlbereich ($M d_{max}$ tritt bei $n = 1750$ U/min auf) scheint sich die Laufzeit entsprechend der Drehzahl, d. h. entsprechend der Zahl der in der Zeiteinheit auftretenden Arbeitswechsel, zu verhalten. Erst im Gebiet oberhalb des besten Drehmomentes wird der Einfluß der Drehzahl allmählich immer größer.

g) Öldruck.

Es ist bekannt, daß ein großer Teil der Kolbenwärme an das Öl abgegeben wird [17]; daher ist es auch verständ-

Digitized by Google



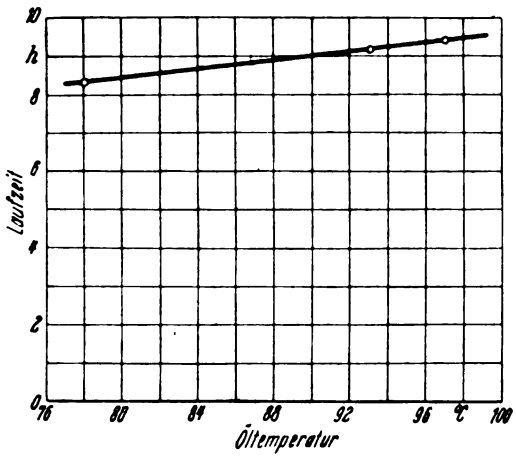


Bild 10. Abhängigkeit der Laufzeit von der Öltemperatur.

lich, daß die Temperatur der Kolbenringpartie von der an die Zylinderwand und den Kolben gespritzten Ölmenge — also indirekt vom Öldruck abhängig ist. Je größer also der Öldruck ist, um so größer wird die Kühlung des Kolbens und der Ringe, und um so größer muß dann die Laufzeit werden. — Die Bestätigung für diese Überlegung zeigt das auf Bild 9 dargestellte Versuchsergebnis.

Es ist selbstverständlich, daß diese Beobachtung nur innerhalb bestimmter Grenzen richtig ist: Bei zu geringem Öldruck tritt halbflüssige, unter Umständen sogar trockene Reibung zwischen den gleitenden Teilen im Zylinder auf, so daß durch die zusätzliche Reibungswärme die Laufzeiten außerordentlich verkürzt werden. — Bei zu hohem Öldruck gelangt ein großer Teil des Öles in den Verbrennungsraum, wo es verbrennt, also nicht mehr zur Wärmeabfuhr dienen kann. Die Verbrennungsrückstände setzen sich teils in den Nuten fest, teils werden sie von dort von dem übrigen Öl zurückgespült und führen zu einer vorzeitigen Verschlammung, so daß auch hier die Laufzeiten beträchtlich herabgesetzt werden [15, 18, 19].

h) Öltemperatur.

Bild 10 zeigt, daß die Laufzeit von der Öltemperatur (Mittelwert zwischen Eintritts- und Austrittstemperatur) linear abhängig ist. Der Einfluß ist allerdings nur gering und kann daher im allgemeinen vernachlässigt werden.

Die Tatsache, daß die Laufzeiten mit fallender Öltemperatur kürzer werden, dürfte wohl mit der verschiedenen Ölzähigkeit zusammenhängen, durch die bei gleichem Schmierstoffdruck die Menge des an Kolben und Zylinderwand gespritzten Öles beeinflußt wird. Es tritt daher trotz niedriger Öltemperaturen eine geringere Kühlung und Schmierung der Kolbenringpartie auf; allerdings wird dies wohl bei den einzelnen Motoren sehr verschieden stark in Erscheinung treten.

Bild 9 (links). Abhängigkeit der Laufzeit vom Öldruck.

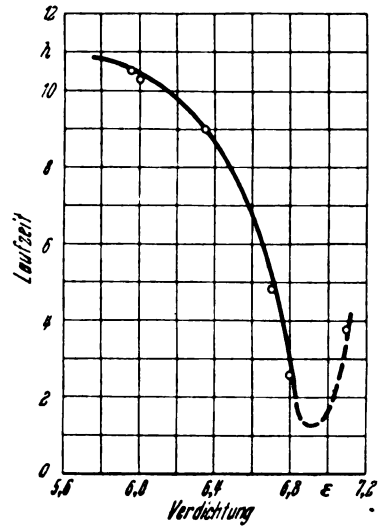


Bild 11 (rechts). Abhängigkeit der Laufzeit von der Verdichtung.

Diese Beobachtung steht jedoch rein äußerlich im Widerspruch zu der Tatsache, daß von verschiedenen Stellen sehr hohe Öltemperaturen angewendet werden, um kurze Laufzeiten zu erhalten. Hierbei wird jedoch die Öltemperatur ohne Rücksicht auf den Öldruck eingestellt. Bei Erhöhung der Öltemperatur sinkt daher der Öldruck, wodurch — wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt — die Laufzeit außerordentlich verkürzt wird, so daß die durch die Temperaturerhöhung bedingte Laufzeitverlängerung nicht zur Geltung kommt. — Eine Erhöhung der Öltemperatur wirkt sich also auf das Kolbenringstecken günstig aus, wenn der Öldruck gleichgroß gehalten wird.

i) Verdichtung.

Da bei derartigen Betriebstoffdauerversuchen unter Umständen mit Zylindern und Kolben verschiedener Baureihe, also auch verschiedener Verdichtung gefahren wird, ist es wichtig, den Einfluß der Verdichtung auf die Laufzeit zu kennen. Bild 11 zeigt, daß die Laufzeit mit steigender Verdichtung immer mehr abnimmt; bei sehr hoher Verdichtung scheint sie wieder zu steigen.

Der Verlauf dieser Kurve läßt sich auch hier wieder als Folge der in der Ringpartie auftretenden Temperaturen erklären: es ist bekannt, daß die Verbrennungsgeschwindigkeit mit steigender Verdichtung größer wird [20]. Da daher bei höherer Verdichtung ein größerer Teil der Verbrennungswärme im Zylinder verbleibt, muß also die an den Kolben abgegebene Wärme in der Zeiteinheit (trotz gleich hoher Temperaturen in der Nähe des Einlaßventils; vgl. Abschn. III d und IV) größer sein als bei niedrigerer Verdichtung. Die Tatsache, daß der bei $\varepsilon = 7{,}1$ durchgeführte Versuch eine längere Laufzeit ergeben hat als der bei der geringeren Verdichtung von $\varepsilon = 6{,}8$, läßt sich auf zweierlei Weise erklären: Die Verdichtung war bei diesen Versuchen bereits so hoch, daß vereinzelte Klopfverbrennungen auftraten, so daß die auf die Kolbenringpartie einwirkenden Temperaturen nicht mehr genügend beherrscht werden konnten, was eine starke Streuung der Versuchsergebnisse bei den hohen Verdichtungsgraden zur Folge haben muß. — Wahrscheinlicher ist jedoch, daß sich hier ebenfalls der in Abschnitt V b beschriebene Vorgang abspielt; d. h. daß die Temperatur der Kolbenringpartie oberhalb der Verdichtung $\varepsilon = 6{,}8$ einen Wert annimmt, der jenseits der »kritischen Temperatur« liegt. Demnach muß die Laufzeit bei der Verdichtung $\varepsilon = 7{,}1$ — wie der Versuch auch ergeben hat — wieder größer werden. Der mit dieser Annahme begründete Verlauf der Kurve ist in Bild 11 als gestrichelte Linie eingezeichnet.

k) Kolbenspiel im Zylinder.

Bei den hier beschriebenen Versuchen schwankte das mittlere Kolbenspiel zwischen 0,670 und 0,730 mm, wobei kein Einfluß auf die Laufzeit festgestellt werden konnte.

Digitized by Google

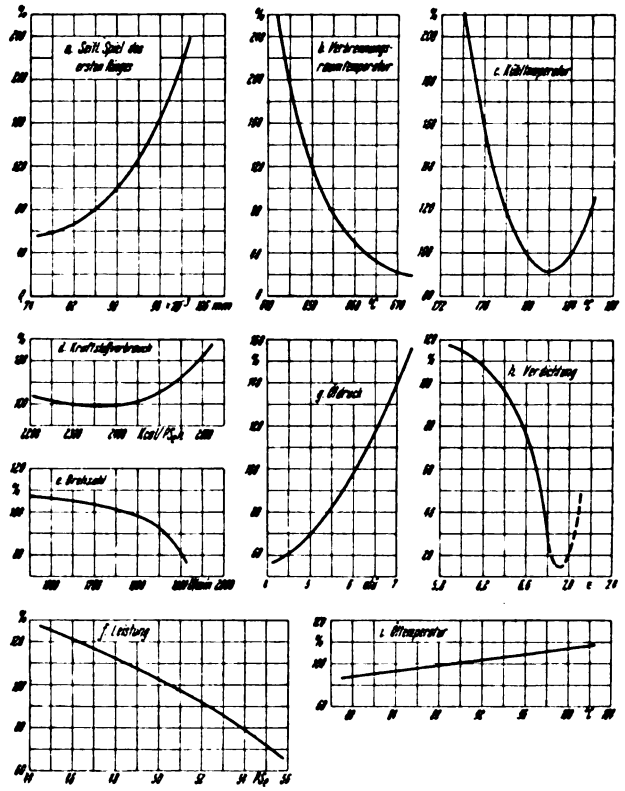


Bild 12. Prozentuale Abweichungen der Laufzeit vom Normalwert (9 Std. = 100%) in Abhängigkeit von den verschiedenen Betriebsbedingungen.

Es ist verständlich, daß das Kolbenspiel nur innerhalb bestimmter Grenzen keinen Einfluß auf die Laufzeit haben kann. Bei zu kleinem Spiel bringt die erhöhte Reibung größere thermische Beanspruchung des Öles an den Kolbengleitflächen und den Ringen mit sich, wodurch die Verkokung und damit das Ringstecken gefördert wird, wenn nicht vorher schon ein Fressen des Kolbens auftritt. Bei zu großem Spiel kann die Kolbenwärme nicht mehr in demselben Maße wie beim normalen Spiel an die Zylinderwand abgeführt werden, so daß wiederum eine thermisch höhere Beanspruchung des Schmierstoffes auf dem Kolben und den Ringnuten auftritt. Die Folge davon ist ebenfalls ein vorzeitiges Festgehen der Kolbenringe.

Während der zuerst geschilderte Fall und seine Folgen wohl selten bei einer sorgfältigen Versuchsvorbereitung vorkommt, bleibt die Frage, wann der ungünstige Einfluß durch zu großes Spiel auftritt, noch offen. Aus diesem Grunde wurde noch ein Lauf bei einem mittleren Kolbenspiel von 0,938 mm durchgeführt. Es ergab sich eine absolute Laufzeit von 6 h 30 min, die bei einem seitlichen Ringspiel von 0,090 mm 2 h 25 min[4]) betragen hätte. Bei diesem Kolbenspiel ist also schon die oben besprochene Grenze überschritten. Der Erfahrung entsprechend sei deshalb vorgeschlagen, bei ähnlichen Versuchen das Spiel von 0,750 mm = 0,0047 × Kolbendurchmesser (Mittelwert!) nicht zu überschreiten, wenn die Laufzeit durch das Kolbenspiel nicht beeinflußt werden soll.

l) Zylinder-, Kolben- und Ringmaterial.

Über den Einfluß des Zylinder-, Kolben- und Ringmaterials sind von anderer Stelle genügend Versuche gemacht worden, so daß hier nur das Ergebnis kurz behandelt wird: Frühere Untersuchungen[5]) haben ergeben, daß das Kolben- und Zylindermaterial nur dann Einfluß auf die Laufzeit hat, wenn dadurch die thermische Beanspruchung der Ringpartie geändert wird; die Laufzeiten blieben bei

[4]) Korrektur nach Bild 12a; es müßte allerdings noch untersucht werden, ob diese Korrekturkurve auch bei diesem großen Kolbenspiel richtig ist.

[5]) Versuche von H. Schökel.

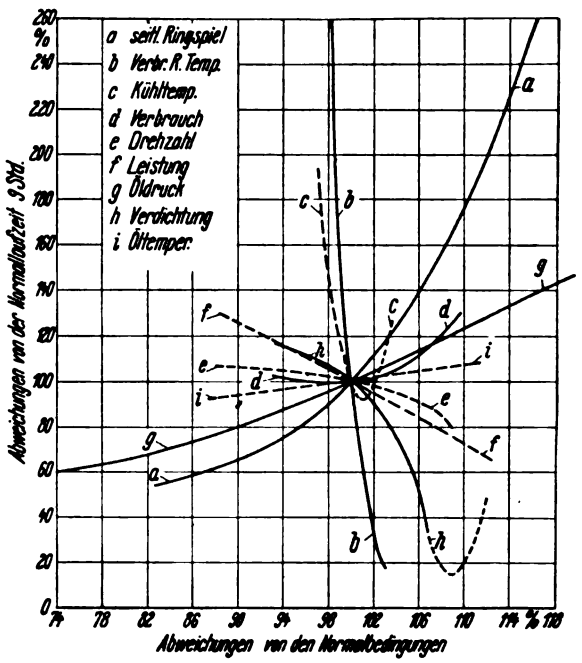


Bild 13. Laufzeit in Abhängigkeit von den verschiedenen Betriebsbedingungen (Abweichungen in % von den Normalwerten).

verschiedenen Motoren und verschiedenem Material stets gleich, wenn die Betriebsbedingungen so gewählt waren, daß die gleichen Temperaturen an den Kolbenringen auftraten. — Der Kolbenringwerkstoff dürfte wohl in erster Linie nur dann von Einfluß sein, wenn die Temperaturen in der Kolbenringpartie durch ihn verschoben werden. Dies kann selbstverständlich bei anderer Wärmeleitfähigkeit und anderer Verschleißfestigkeit (Änderung der Reibungswärme!) der Fall sein.

VI. Schlußfolgerungen.

In Bild 12a bis i ist die prozentuale Änderung der Laufzeit durch den Einfluß der einzelnen Betriebsbedingungen dargestellt. Mit Hilfe dieser Kurven lassen sich Versuchsergebnisse, bei denen die eine oder andere Bedingung von dem Normalwert abgewichen ist, korrigieren, wie es zum Beispiel bei dem seitlichen Spiel des ersten Ringes bei allen Läufen geschehen ist. — Es ist durchaus möglich, daß sich diese Kurven bei anderen Ausgangsbedingungen verschieben, aber ihr Verlauf dürfte wohl dadurch nicht geändert werden. — Der besseren Übersicht wegen ist in Bild 13 die Abhängigkeit der Laufzeit von den Betriebsbedingungen auf beiden Koordinaten in % aufgetragen. Es ist hieraus zu ersehen, in welchem Verhältnis zum Normalwert die einzelnen Betriebsbedingungen geändert werden müssen, um die auf der Ordinate aufgetragene Laufzeitverkürzung oder -verlängerung zu erreichen.

Zweck der Versuche war in erster Linie, Größe und Art des Einflusses der einzelnen Betriebsbedingungen klarzulegen, um Stellen, die sich mit Betriebstoffdauerprüfungen dieser Art befassen, ein Mittel zur besseren Beurteilung ihrer Läufe an die Hand zu geben. — Die Tatsache, daß die Versuchsergebnisse zum größten Teil nur sehr wenig streuen, wenn sie den größeren Abweichungen von den Normalbedingungen entsprechend (nach Bild 12) korrigiert worden sind, zeigt, daß derartige Berichtigungen auch bei anderen Betriebsbedingungen — soweit sie nicht zu sehr von den hier aufgestellten Werten abweichen — zu einer besseren Reproduzierbarkeit und damit zu besseren Ergebnissen führen können.

Die Versuchsergebnisse zeigen weiter, daß bei Verwendung ein und desselben Betriebstoffes scheinbar allein die in der Kolbenringpartie auftretende Temperatur Einfluß auf die Laufzeit

Digitized by Google

hat[6]). Daher genügt eine eingehende Überlegung, inwieweit eine Änderung der einen oder anderen Betriebsbedingung temperaturerhöhend oder -vermindernd wirkt, zur Beantwortung der Frage, in welcher Richtung die Laufzeit dadurch beeinflußt wird.

Die verschiedene Bauart der Motoren bringt es mit sich, daß die Temperatur in der Kolbenringpartie durch die einzelnen Betriebsbedingungen nicht immer in dem hier gezeigten Umfang beeinflußt wird. Es muß deshalb davor gewarnt werden, eine Korrektur nach den in Bild 12 oder Bild 13 dargestellten Kurven bei anderen Motoren ohne Berücksichtigung dieser Fragen vorzunehmen. — Z. B. wird am BMW 132 im Vergleich zum BMW VI wesentlich mehr Wärme über den Kolbenschaft als über die Ringpartie an die Zylinderwand abgegeben, weshalb bei diesem Motor das seitliche Ringspiel einen viel geringeren Einfluß hat.

Weiter wurde festgestellt, daß hohe Temperaturen nur bis zu einer bestimmten Grenze — der »kritischen Temperatur« verkürzend wirken und daß darüber hinaus liegende thermische Beanspruchungen die Laufzeit wieder verlängern. (Deshalb ist es bei der Vornahme irgendwelcher Korrekturen wichtig, festzustellen, ob die Betriebsbedingungen nicht so gewählt waren, daß bereits die kritische Temperatur überschritten war, da in diesem Fall die Berichtigung dann in anderer Art erfolgen müßte.) Es wurde ein neues, auf dieser Basis aufgebautes Prüfverfahren für Schmierstoffe vorgeschlagen, da die bei einer Temperatur allein bestimmte Laufzeit eines Öles zur Beurteilung desselben scheinbar nicht genügt. Vielleicht ist die Bestimmung der kritischen Temperatur und der Steilheit der Temperaturabhängigkeit eine ausreichende Methode zur Charakterisierung eines Schmierstoffes hinsichtlich seines Dauerbetriebsverhaltens. Es ist selbstverständlich, daß diese Temperaturabhängigkeit noch näher untersucht werden muß. Versuche an einem anderen Motor (BMW 132) haben jedoch die Richtigkeit der Beobachtungen schon zum Teil bestätigt (vgl. auch Abschn. Vb): Die Untersuchung anderer Öle ergab hierbei ebenfalls eine starke Temperaturabhängigkeit, die bei höheren thermischen Beanspruchungen immer flacher wurde, um nach dem Überschreiten der kritischen Temperatur wieder anzusteigen.

Diese Beobachtungen geben dazu Anlaß, auf die Richtungen hinzuweisen, in denen weitere Untersuchungen durchgeführt werden müßten, deren Ergebnisse unter Umständen neue Erkenntnisse auf dem Gebiete der Schmierstofforschung bringen könnten:

1. Neben der Temperaturabhängigkeit müßte als »kritische Temperatur« nicht die Zylinderwand-, Kühlmittel- oder Verbrennungsraumtemperatur festgestellt werden, sondern die bei der kürzesten Laufzeit in der Kolbenringpartie auftretende Temperatur, um auf diese Weise die Charakterisierung eines Schmierstoffes vom Motor unabhängig zu machen.
2. Unter der Voraussetzung, daß bei diesen Dauerversuchen die Temperatur in erster Linie eine Rolle spielt, müßte auch die durch Reibung erzeugte Wärme in der Kolbenringpartie von Einfluß sein[7]). Versuche in dieser Richtung (z. B. Läufe mit Ringen gleichen Materials, aber verschiedener Spannung oder verschieden bearbeiteter Lauffläche) könnten unter Umständen Anhaltspunkte über die Schmierfähigkeit, d. h. die abriebverhindernde Wirkung eines Schmierstoffes bringen.
3. Sollte durch derartige Versuche tatsächlich der Beweis erbracht werden, daß die Reibungswärme eine nicht unbedeutende Rolle spielt, so wäre damit auch vielleicht eine Erklärung dafür gefunden, daß bei einigen Kolbenbauarten, wie verschiedene Messungen anderer Stellen ergeben haben [17], im Verhältnis zu den anderen Ringen nur eine sehr geringe Wärmeableitung durch den ersten Kolbenring erfolgt. — Diese Erkenntnis müßte auch den Konstrukteur dazu veranlassen, beim Kolbenbau wesentlich mehr als bisher auf die Wärmeverteilung in der Kolbenringpartie zu achten.
4. Durch Vergleich zwischen den Temperaturen in der Kolbenringpartie mit denen im Verbrennungsraum oder an der Zylinderwand können unter Umständen Rückschlüsse auf die Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Öle im praktischen Betrieb gezogen werden.

[6]) Dieses Versuchsergebnis wird auch durch die Untersuchungen von C. G. A. Rosen bestätigt, der an Dieselmotoren ähnliche Feststellungen gemacht hat; die eigentliche Temperaturabhängigkeit wird jedoch nicht in dem hier gezeigten Umfang behandelt [21, 22, 23].

[7]) Nach Untersuchungen von L. Illmer [24] ist die Reibung des ersten Ringes im Verhältnis zu der gesamten Kolbenreibung außerordentlich groß.

VII. Zusammenfassung.

Die hier beschriebenen Versuche hatten die Aufgabe, den Einfluß der einzelnen Betriebsbedingungen auf die Laufzeit bis zum Kolbenringstecken bei der Betriebstoffdauerprüfung zu untersuchen. Es ergab sich, daß bei weitem den größten Einfluß das seitliche Spiel des ersten Kolbenrings, die Temperatur im Verbrennungsraum und die Kühltemperatur, also auch Zylinderwandtemperaturen, haben. Die Laufzeit wird um so kleiner, je kleiner das seitliche Ringspiel ist und je höher die Kühl- und Verbrennungsraumtemperaturen sind. Alle übrigen Bedingungen sind von geringerem Einfluß. Der Kraftstoffverbrauch wirkt sich erst dann laufzeitverlängernd aus, wenn der Verbrauch über den Normalwert hinaus steigt. Steigende Drehzahl und steigende Leistung verkürzen die Laufzeit, während erhöhter Öldruck eine beträchtliche Verlängerung mit sich bringt. Die Öltemperatur hat nur sehr geringen Einfluß (bei gleichem Öldruck!); die Laufzeit steigt linear mit der Temperatur. Wichtig ist der Einfluß der Verdichtung, die bis zu einer bestimmten Grenze eine sehr hohe Laufzeitverkürzung hervorruft.

Weiter wurde gezeigt, wie unklare Ergebnisse von Betriebstoffdauerprüfungen im Einzylindermotor berichtigt werden können. Außerdem ergab sich, daß das Einfahren der Ringe bei derartigen Versuchen unzweckmäßig ist. Die Verwendung des DVL-Ölgasmengenmeßgerätes sowie ein möglichst kurzes Warmfahren führen weiter zu einer besseren Reproduzierbarkeit der Läufe.

Die Versuchsergebnisse lassen darauf schließen, daß die Laufzeiten allein von drei Grundbedingungen abhängig sind: dem Kraftstoff, dem Schmierstoff und der in der Kolbenringpartie auftretenden Temperatur. — Auf Grund dieser Erkenntnis werden neue Untersuchungsrichtungen vorgeschlagen, durch die unter Umständen die Frage der Rückstandsbildung und Schmierfähigkeit weiter geklärt werden könnte.

VIII. Schrifttum.

[1] Prüfvorschriften für Flugmotorenkraftstoffe zur Verwendung in Otto-Motoren. Bauvorschriften für Flugmotoren, April 1938.

[2] Prüfvorschriften für Flugmotorenschmieröle zur Verwendung in Otto-Motoren. Bauvorschriften für Flugmotoren, März 1938.

[3] A. Nutt, Flugmotoren und ihre Betriebsprobleme. Vortrag anläßlich der Tagung der Lilienthalges. in Berlin am 13. 10. 36.

[4] A. L. Beall, Selections of oils for high-output aircraft engines. SAE-Journ. Bd. 40 (Febr. 1937), Nr. 2, S. 48/56.

[5] C. H. Baxley & I. P. Stewart, Methods and equipment used in the development of lubricants for high output engines. Vortrag anläßlich des Welt-Petroleum-Kongresses in Paris 1937.

[6] I. P. Stewart, Testing aviation oils. The Intava World, Bd. 1, Nr. 1, S. 18/21.

[7] E. L. Bass u. C. H. Barton, Aircraft engine lubrication. Shell Av. News (Aug. 1938) Nr. 86, S. 14/19 bzw. SAE-Journ. Bd. 44 (1939), Nr. 1, S. 8/14.

Digitized by Google

[8] G. Nuffert u. W. D. Bensinger, Einzylinder-Prüfanlage der deutschen Versuchsanstalt f. Luftfahrt, E. V., ATZ Bd. 36 (1933), Nr. 15, S. 391/392.

[9] Vgl. Werbeschrift »DVL-Thermoelement«.

[10] W. Glaser, Motorische und atmosphärische Einflüsse auf die Temperaturmessung am Einzylinder-Versuchsmotor. Jahrb. 1937 der deutschen Luftfahrtforschung S. II, 247/251.

[11] W. Glaser, Ein neues Gasmengenmeßgerät zur Beobachtung des Gasdurchtritts in das Kurbelgehäuse. ATZ Bd. 41 (1938), Nr. 23, S. 616/620.

[12] F. Seeber, Prüfung hochklopffester Kraftstoffe im Flugmotoren-Einzylinder. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939) Nr. 1, S. 1/3.

[13] E. L. Bass, Aero-engine design and lubrication. Gen. disc. on lubrication and lubricants. London, Okt. 1937, Group II, S. 17/23.

[14] A. v. Philippovich, Neuere Untersuchungsverfahren zur Bestimmung der Rückstandsbildung von Motorenölen. DVL-Jahrb. 1933, S. VI, 36/42.

[15] M. Richter, Die laboratoriumsmäßige Prüfung von Schmierölen auf ihre Neigung zum Kolbenringverkleben. Luftwissen Bd. 5 (1938), Nr. 6, S. 213/18.

[16] Vgl. Das Festsitzen der Ringe beim Motor. Lubrication Bd. 24, Nr. 6.

[17] M. Christian, Einige Entwicklungsfragen des Flugmotorenbaues. ATZ Bd. 41 (1938), Nr. 6, S. 153/160.

[18] A. v. Philippovich, Über die Beständigkeit von Flugmotorenöl und ihre Prüfung. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 4/5, S. 254.

[19] C. H. Barton, The alteration of lubricating oil during use in internal combustion engines. Proceed. of the gen. disc. on lubrication and lubricants Bd. 1, S. 407/413.

[20] K. Schnauffer, Verbrennungsgeschwindigkeiten von Benzin-Benzol-Luftgemischen in raschlaufenden Zündermotoren. Dieselmaschinen V, VDI-Verl. Berlin 1931, S. 127.

[21] C. G. A. Rosen, Engine temperature as affecting lubrication and ring-sticking. SAE-Journ. Bd. 40 (Apr. 1937), Nr. 4, S. 165/172.

[22] C. G. A. Rosen, Lubricating problems and high-speed diesel engines. ASME (1938) Febr., S. 145/151.

[23] C. G. A. Rosen, Cylinder lubrication of small-bore diesel engines. Proceed. of the gen. disc. on lubrication and lubricants Bd. 1, S. 559/567.

[24] L. Illmer, Piston-ring friction in high-speed engines. Trans. ASME Bd. 59 (1937), Nr. 1, S. FSP 59 1/6.

Digitized by Google

Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmäßigkeit*).

Von W. Oppelt VDI, Kiel-Neumühlen.

Bericht der Anschütz & Co., G. m. b. H., Kiel-Neumühlen.

Diese Arbeit bezieht sich auf einen gegenseitigen Vergleich von Druckregler, Drehzahlregler, Temperaturregler und Fahrzeugselbststeuerung. Sie trennt den »fehlerfreien« Regler von dem fehlerbehafteten »wirklichen« Regler und dehnt diese Zergliederung in möglichst streng paralleler Weise auf die betrachteten Regelsysteme aus. Eine solche Betrachtungsweise vermittelt so, besonders in ihrer Erweiterung auf die »Fehler« des wirklichen Reglers, einen weitgehenden Einblick in den Mechanismus des Regelvorganges; dazu brauchen bestimmte praktisch wichtige Fälle nur gestreift zu werden, während andere unwichtigere eine Erläuterung erfahren müssen.

Der Vergleich wird durchgeführt für Druckregler, Drehzahlregler, Temperaturregler und Fahrzeugselbststeuerung. Die Ergebnisse sind für diese vier Anordnungen auch bei gleicher Stufe der Betrachtungsweise stets voneinander verschieden, weil die »zu regelnden Systeme« Unterschiede aufweisen. Eine Unterscheidung zwischen mittel- und unmittelbarem Regler erweist sich für diese Betrachtung als unnötig.

Gliederung.

1. Das Verhalten des zu regelnden Systems.
2. Das geeignete Regelgesetz.
3. Das Zusammenwirken von Regelgesetz und zu regelndem System.
4. a) der fehlerfreie Regler.
   b) der wirkliche Regler.
      α) der träge Regler.
      β) der schwingungsfähige Regler.
      γ) der Regler mit Reibung.

Der im folgenden behandelte Vergleich verschiedener Regelaufgaben soll sich von anderen ähnlichen Arbeiten dadurch unterscheiden, daß die Behandlung der hier beschriebenen Regler von Druck, Drehzahl, Temperatur und Fahrzeugselbststeuerung in einer möglichst streng parallelen Weise erfolgt. Diese, zum Teil von den Tatsachen losgelöste Betrachtung findet ihre Berechtigung in dem weitgehenden Einblick, der daraus für den Mechanismus des Regelvorganges folgt. Sie zeigt die Unterschiede und Gemeinsamkeiten verschiedener Regelaufgaben; sie zeigt, wieweit und mit welchen Umänderungen auf einem Teilgebiet gewonnene Ergebnisse allgemeingültig und übertragbar sind. Sie gibt damit gerade auch dem in der Praxis tätigen Regelfachmann ein Hilfsmittel, um verschiedenartige Regelaufgaben schnell zu durchschauen, die richtige Wahl des anzuwendenden Regelsystems zu treffen und vorzunehmende Änderungen zu beurteilen. Die erhaltene Aufteilung enthält zwar einzelne Fälle, für die praktisch keine Verwertung zu erkennen ist oder für die die gemachten Annahmen und Annäherungen nicht streng genug sind. Auch war bei der nicht zahlenmäßigen Darstellung des Verhaltens der einzelnen Systeme oftmals eine Erläuterung von Zustandsbereichen notwendig, die bei ausgeführten Anlagen im allgemeinen außerhalb des Betriebsbereiches liegen. Dieser Weg erweist sich jedoch als zweckmäßig, da gerade an solchen Sonder- und Grenzfällen das Verhalten eines Systems besonders klar in Erscheinung tritt.

*) Dieser Vergleich ist entstanden durch eine Ausdehnung des für die Behandlung von Flugzeugkurssteuerungen vorhandenen theoretischen Rüstzeuges auf den Reglerbau überhaupt.

Zur Gewinnung der Ergebnisse ist die mathematische Darstellung nicht zu vermeiden; jedoch werden die Ergebnisse derart erläutert, daß ihr Zustandekommen physikalisch erklärbar wird. Zu diesem Zwecke wird zuerst das Verhalten des »zu regelnden Systems« dargestellt. Andererseits wird das »Regelgesetz« aufgestellt, das besagt, wie der Ausschlag des Steuergliedes von dem Zustand des zu regelnden Systems abhängt. Die Verknüpfung beider ergibt das Verhalten des »geregelten Systems«. Daraus ist die Regelaufgabe grundsätzlich zu beantworten als »Regelung mit fehlerfreiem Regler«. Eine weitere Behandlung zeigt die Einflüsse apparativer Unvollkommenheiten des »wirklichen« Reglers. Die wesentlichsten Ergebnisse werden aus einer Betrachtung des stetigen Reglers abgeleitet; eine Betrachtung der Grenzübergänge gibt Hinweise und Schlüsse für unstetige Regelanordnungen. Die Bilddarstellung erfolgt in Tafeln, die durch stets gleiche Aufteilung nach den einzelnen Regelaufgaben einen übersichtlichen und bequemen Vergleich ermöglichen.

Den schematischen Aufbau eines geregelten Systems und die gewählten Bezeichnungen zeigt Bild 1. Die Aufteilung erfolgt danach in »Regler« und »zu regelndes System«. Der Regler entnimmt mit seinem »Fühler« den Zustand des zu regelnden Systems und verstellt dessen »Steuerglied«. Der Fühler leitet seinen Befehl zu dem »Verstärker«. Im Verstärker schaltet der »Kraftschalter« eine von außen zugeführte »Hilfskraft« und betätigt damit die »Arbeitsmaschine«. Diese verstellt das Steuerglied. Bei dem »unmittelbaren« Regler genügt die Verstellkraft des Fühlers, um ohne Zuhilfenahme einer Hilfskraft das Steuerglied zu verstellen; bei dem »mittelbaren« Regler wird eine Hilfskraft benutzt.

Die Regelaufgabe läßt sich in zwei Anteile gliedern. Der eine Anteil ist das Suchen eines geeigneten Regelgesetzes. Seine Lösung verlangt Kenntnis des zu regelnden Systems. Sie ist gleichsam eine Aufgabe für den Fachmann des Regleranwendungsgebietes, z. B. des Dampfturbinenfachmannes bei der Drehzahlregelung von Dampfturbinen, des Kenners der Flugmechanik bei der Flugzeugselbststeuerung u. dgl. Der zweite Aufgabenanteil verlangt die apparative Verwirk-

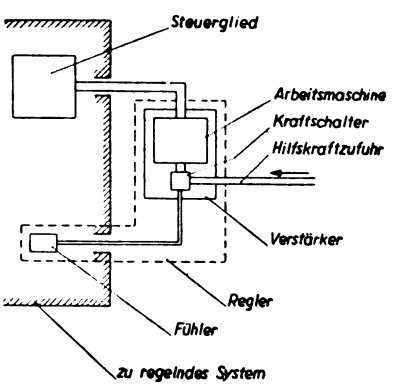


Bild 1. Schematischer Aufbau eines geregelten Systems.

Digitized by Google

lichung des so gefundenen Regelgesetzes, eine Aufgabe für den Reglerbaufachmann. Bei den bisher zu lösenden Regelaufgaben überwog die Schwierigkeit des zweiten Aufgabenanteiles den des ersteren zumeist beträchtlich, weswegen dieser oft nicht gesondert in Erscheinung trat. Bei der wachsenden Benutzung von Regelanordnungen für weitere Anwendungsgebiete tritt eine derartige Trennung jedoch immer schärfer hervor.

Die Bemühungen, eine geeignete Gesetzmäßigkeit zu finden, die der Regler befolgen soll, zerfallen einmal in das Erfassen des Verhaltens des zu regelnden Systems, dann in die eigentliche Suche nach dem passenden Regelgesetz, wozu als dritter Punkt die Betrachtung des Zusammenwirkens von zu regelndem System und Regelgesetz helfen muß. Der so gekennzeichnete Inhalt dieser Arbeit erhält in Lieferung 10 der Luftfahrtforschung 1939 seine Ergänzung, wo gezeigt wird, wie weit apparative Ausführungsformen eine weitere Zergliederung und Betrachtung der Aufgabenstellung bedingen.

1. Das Verhalten des zu regelnden Systems.

Zur Kennzeichnung des Zustandes des zu regelnden Systems sind folgende Größen notwendig:

Die Verstellung η des Steuergliedes,

die Abweichung φ des Systems vom Sollzustand und nötigenfalls zeitliche Ableitungen davon,

eine Störgröße ξ, die ein Maß für eine äußere Störung des Systemgleichgewichtes angibt.

Maßstab und Maßstabsbeizahlen dieser Größen sind später aus den Gleichungen des zu regelnden Systems abzulesen. Auf eine besondere Erläuterung der Maßstabsverhältnisse ist verzichtet.

Es gelingt im allgemeinen nicht, das Verhalten des zu regelnden Systems vollkommen exakt darzustellen. Man begnügt sich daher mit solchen Annäherungen, die das kennzeichnende Verhalten des zu regelnden Systems erfassen und für den Bereich kleiner Schwingungen mit genügender Genauigkeit gelten. Aus den vielseitigen Anwendungsgebieten von Regelanordnungen schälen sich im wesentlichen vier verschiedenartige zu regelnde Systeme heraus, deren Verhalten durch vier Differentialgleichungen zu beschreiben ist, die im folgenden eine Erläuterung erfahren und nachstehende grundsätzliche Form aufweisen:

$$\text{const}\,\varphi^{\cdot} + \varphi = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{const}\,\varphi^{\cdot} \quad = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\text{const}\,\varphi^{\cdot\cdot} + \text{const}\,\varphi^{\cdot} + \varphi = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\text{const}\,\varphi^{\cdot\cdot} + \text{const}\,\varphi^{\cdot} \quad = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Von diesen vier Systemen kommt hauptsächlich System (1) beim Druckregler, System (2) beim Drehzahlregler, System (3) beim Temperaturregler und System (4) bei der Fahrzeugselbststeuerung vor. Daran seien diese vier Systeme jetzt erläutert und der Einfachheit halber zukünftig auch danach genannt.

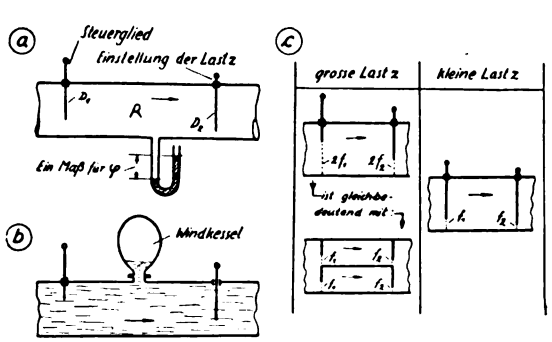


Bild 2. Zur Erläuterung des Druckregelvorganges.

a) Druckregler.

Zur Veranschaulichung werde der typische Fall einer Druckregelung in Bild 2a dargestellt. Über eine Drosselstelle D_1, die das Steuerglied darstellt, strömt das Druckmittel in den Raum R, in dem der Druck geregelt werden soll. Aus dem Raum R strömt das Druckmittel über die feste, einstellbare Drosselstelle D_2 ab.

Im Gleichgewichtszustand hat das System unter Voraussetzung sonst konstanter Einflüsse das Bestreben, zu jeder Stellung des Steuergliedes D_1 einen bestimmten Druck einzustellen. Das System verfügt also gleichsam über eine eigene Rückstellfähigkeit, verschiedentlich als »Selbstregelung« bezeichnet (Vgl. z. B. Th. Stein, Selbstregelung . . ., Z. VDI 72 (1928) S. 165). Der Mechanismus dieses Vorganges geht über die durchlaufende Menge des Druckmittels. Es entsteht an beiden Drosselstellen ein Druckabfall entsprechend dieser Menge.

Eine Änderung der Drosselstelle D_1 ändert dort den Druckabfall; bei der gleichen durchfließendenMenge ist daher jetzt kein Gleichgewicht mehr möglich. Eine Änderung der Menge bedeutet aber notwendig eine Änderung des Druckes an der festen Drossel D_2 und damit des zu regelnden Druckes. Die analytische Rechnung[1]) zeigt, daß der sich einstellende stationäre Druck φ der Verstellung η proportional ist.

$$\varphi = \sim \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Ist das System dagegen nicht im Gleichgewicht, dann wird der augenblickliche Mengenunterschied der an beiden Drosselstellen D_1 und D_2 durchströmenden Mengen von der Speicherwirkung des dazwischen liegenden Raumes ausgeglichen. Diese Speicherfähigkeit kann beispielsweise in der Natur des Raumes liegen (wenn an diesen Raum Windkessel od. dgl. angeschlossen sind, Bild 2b), dieselbe kann auch im wesentlichen in der Natur des Druckmittels liegen (z. B. in der Zusammendrückbarkeit bei Gasen). Diese Speicherfähigkeit bedeutet ein langsames Angleichen an den Gleichgewichtszustand. Die Schnelligkeit, mit der das System dem Gleichgewichtszustand zustrebt, ist der Abweichung von diesem proportional, was durch eine Erweiterung der Gleichung (1a) auf folgende Form darzustellen ist[1]):

$$T_{a1}\,\varphi^{\cdot} + \varphi = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

Dabei bedeutet T_{a1} eine Konstante, die ein Maß für diese Schnelligkeit darstellt. Diese Konstante T_{a1} erweist sich als von der »Belastung z« des Systems abhängig. Im druckzuregelnden System ist notwendigerweise eine Koppelung von Druck und Menge vorhanden. Zur eindeutigen Kennzeichnung des Zustandes wären Druck und Menge anzugeben. Da jedoch das Mengenverhalten vom Druckverhalten eindeutig abhängt, solange keine Änderungen an der Mengeneinstellung des zu regelnden Systems vorgenommen werden, genügt die Angabe der Druckabweichung φ und einer Größe z. Die Größe z gibt dabei an, welche Stellung die Mengeneinstellung (beispielsweise durch die Drossel D_2) einnimmt. Sie wird als »Belastung z« bezeichnet; große Last z bedeutet eine solche Einstellung (große Öffnung der Drossel D_2) am zu regelnden System, zu der eine große durchfließende Menge gehört. Mit größerer Last z wird die anteilige Größe des Speichervolumens kleiner. Dies wird erklärlich, wenn die großen Drosselöffnungen bei großer Last z in mehrere kleine mit zugehörigen Speichervolumina aufgeteilt und mit den Verhältnissen bei kleiner Last z verglichen werden, Bild 2c. Andererseits ist der Einfluß des Steuergliedes D_1 auf den Druck ebenfalls von der Menge, d. h. von der Last z abhängig. Bei großer durchströmender Menge ist auch der Druckabfall an der Drosselstelle D_1 entsprechend größer. Sowohl das wirksame Speichervolumen als auch der Einfluß η des Steuergliedes zeigen sich als der Last z umgekehrt proportional, was zu folgender Gleichung führt[1]):

$$\frac{T_a}{z}\,\varphi^{\cdot} + \varphi = \frac{\eta}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1c)$$

[1]) Vgl. z. B. G. Wünsch, Regler für Druck und Menge, München und Berlin 1930.

Digitized by Google

Durch Umformung ergibt sich daraus Gleichung (1d), worin T_a eine Systemkonstante darstellt

$$T_a \varphi^* + z\varphi = \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1d)$$

Äußere »Störungen«, z. B. Änderungen im Vordruck vor der Drossel D_1 oder im Druck hinter der Drossel D_2 verschieben die Gleichgewichtslage und sind durch Einführung einer Störgröße ξ zu erfassen.

Es ergibt sich damit Gleichung (1), die das Verhalten des druckzuregelnden Systems darstellt:

$$T_a \varphi^* + z\varphi = \eta + \xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dabei bedeutet T_a eine Systemkonstante, die ein Maß für die Zeit ist, in der nach einer Störung sich der Gleichgewichtszustand einstellt. Die Zeit T_a wird deshalb üblicherweise als »Anlaufzeit T_a« bezeichnet. Die »Last z« ist ein Maß für die Mengeneinstellung.

b) Drehzahlregler (für Antriebsmaschinen).

Es sind zwei Gruppen von Antriebsmaschinen zu unterscheiden. Einmal solche, bei denen das Antriebsmoment im wesentlichen nur von der Stellung des Steuergliedes abhängt. Dann solche, bei denen das Antriebsmoment auch noch von der Drehzahl selbst abhängt.

Antriebsmaschinen der ersten Art folgen somit dem Gesetz[2]):

$$M_d \sim \eta.$$

Das Drehmoment wird zu einem Anteil von der angetriebenen Maschine aufgenommen, der übrigbleibende Teil wird aus der kinetischen Energie der bewegten Massen aufgebracht, oder von ihr aufgenommen. Der letztere Anteil dient also zu einer Änderung φ^* der Drehzahl. Somit gilt:

$$M_d = \underbrace{M_{d_{abg.}}}_{-\xi} + \underbrace{M_{d_{\varphi^*}}}_{T_a \varphi^*} = \eta \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

$$-\xi + T_a \varphi^* = \eta \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Damit ist das Verhalten des drehzahlgeregelten Systems dargestellt. Die Größe T_a ist wieder eine »Anlaufzeit«; sie gibt ein Maß für die Schnelligkeit von Drehzahländerungen bei Verstellung des Steuergliedes.

Ein typischer Vertreter der ersten Art von Antriebsmaschinen ist die Dampfmaschine, ein Vertreter der zweiten Art ist der Gleichstromnebenschlußmotor.

Sein Drehmoment ist, da sein Feld konstant gehalten wird, nur abhängig vom Ankerstrom i. Der Ankerstrom i hängt nach dem Ohmschen Gesetz von der antreibenden Spannung und dem Ankerwiderstand R ab. Als antreibende Spannung zieht sich von der Klemmenspannung E im wesentlichen nur die Dynamowirkung des im Feld umlaufenden Ankers ab. Da das Feld konstant ist, wird diese Dynamowirkung der Drehzahl φ des Motors proportional:

$$i = \frac{E - \text{const}\,\varphi}{R} \sim M_d.$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (2a) ergibt sich damit:

$$M_d = M_{d_{abg.}} + M_{d_{\varphi^*}} = -\xi + T_a \varphi^* = \frac{E}{R} - \text{const}\,\frac{\varphi}{R}$$

oder, da die Klemmenspannung E hier das Steuerglied darstellt:

$$R\,T_a \varphi^* + \text{const} \cdot \varphi = \eta + R\,\xi$$

bzw. mit anderen Maßstabseinheiten.

$$T_{a_e} \varphi^* + \varphi = \eta_e + \xi_e \quad \ldots\ldots \quad (2b)$$

Diese Gleichung (2b), die das Verhalten der Antriebsmaschine zweiter Art darstellt, entspricht also der Gleichung (1) des druckzuregelnden Systems für konstante Last z. Der Drehzahlregler für Antriebsmaschinen der zweiten Art wird deshalb im folgenden nicht gesondert behandelt; sein Verhalten tritt hier unter dem Begriff »Druckregler« auf.

[2]) Vgl. z. B. E. Lehr, Schwingungstechnik II. Berlin 1934, S. 319.

c) Temperaturregler.

Das Verhalten des temperaturzuregelnden Systems ist, solange ein Eingriff durch das Steuerglied nicht erfolgt, durch eine der Gleichung (1) des druckzuregelnden Systems ähnliche Beziehung darzustellen[3]):

$$T_a \varphi^* + \varphi = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Auch hier bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus durch die Abhängigkeit der strömenden Wärmemengen von der Temperaturdifferenz, was das Auftreten des Gliedes φ erklärt. Auch hier sind Energiespeicher vorhanden (die Wärmespeicherfähigkeit der Wandungen usw.), was ein stetiges Anlaufen an den Gleichgewichtszustand bedingt und das Auftreten des Gliedes $T_a \varphi^*$ erklärt. Der Anlaufvorgang ist hier lastunabhängig, da immer die gleiche spezifische Speichermenge zur Verfügung steht.

Innerhalb des Gliedes C der Gleichung (3a) spielt sich der Kampf zwischen zugeführter und im Vorgang benötigter Wärmemenge ab; der bleibende Rest C ändert den Temperaturzustand φ des Systems solange, bis (über die nach außen abfließende Wärmemenge, die dem Temperaturzustand φ proportional ist) Gleichgewicht besteht. Das Glied C kann daher in zwei Teile gespalten werden, wovon der eine, ξ, der ausgenutzten Wärmemenge entspricht und der andere, $\bar{\eta}$, ein Maß für die zugeführte Wärmemenge darstellt:

$$T_a \varphi^* + \varphi = \bar{\eta} + \xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3b)$$

In diesem Falle kann nun das Glied $\bar{\eta}$ für die zugeführte Wärmemenge nicht direkt mit der Stellung η des Steuergliedes in Beziehung gesetzt werden. Es bestehen nämlich über die Speicherfähigkeit der dazwischen liegenden thermischen Massen zwischen beiden zeitliche Unterschiede, die durch eine weitere Gleichung (3c) erfaßt werden[3]):

$$T_v \bar{\eta}^* + \bar{\eta} = \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3c)$$

Diese Gleichung bedeutet, daß im stationären Zustand ($\bar{\eta}^* = 0$) jeder Stellung η des Steuergliedes eine bestimmte Energiezufuhr $\bar{\eta}$ entspricht. Solange dieser Zustand aber noch nicht erreicht ist, wird ein Teil der freigegebenen Energiemenge dazu benutzt, um die Speichermassen im Energieflußwege auf den neuen Zustand zu bringen ($T_v \bar{\eta}^*$). Die Zeitkonstante T_v wird als »Verzögerungszeit T_v« bezeichnet.

Zusammenfassung der Gleichungen (3b) und (3c) liefert das Verhalten des temperaturgeregelten Systems, Gleichung (3).

$$T_v T_a \varphi^{**} + (T_v + T_a)\varphi^* + \varphi = \eta + \xi + T_v \xi^* \quad \ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung (3) zeigt, daß sich eine Störung des Gleichgewichtszustandes verschieden auswirkt, je nachdem, ob die Störung von der Verbraucherseite (ξ) oder von der Energiezufuhrseite (η) kommt. Nach einer plötzlichen Änderung der Stellung η des Steuergliedes nähert sich der Zustand φ des zu regelnden Systems nach einer harmonischen gedämpften Schwingung der neuen Gleichgewichtslage. Bei den gemachten Annahmen ist die Dämpfung dieses Vorganges stets überaperiodisch[4]). Bei einer Störung von der Verbraucherseite her (beispielsweise durch Herausnehmen des Gutes aus einem Ofen) läuft das System dagegen nicht nach einer überaperiodischen Schwingung, sondern nach einer einfachen aperiodischen Abklingbewegung (Differentialgleichung erster Ordnung (3b)) in die neue Gleichgewichtslage[5]), da die schwingungsfähig machende Verzögerung im Energiezufuhrwege hierbei nicht zur Auswirkung kommt.

[3]) Vgl. z. B. M. Lang, Theorie des Heizungsreglers. Gesundh.-Ing. 56 (1933), S. 529.

[4]) Der Beweis ergibt sich aus folgendem: Die Dämpfung des Schwingungsvorganges nach Gleichung (3) beträgt:

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{T_v + T_a}{\sqrt{T_v T_a}},$$

woraus: $4\,D^2 = \frac{T_v}{T_a} + \frac{T_a}{T_v} + 2$, was stets größer als vier ist und womit D immer größer als eins, also immer überaperiodisch ist.

[5]) Das Erkennen dieses Vorganges gelingt nach Gleichung (3b) leichter, als nach der Gleichung (3), wegen der bei der sprunghaften Änderungen von ξ dort auftretenden Unstetigkeitsstelle für ξ^*.

Digitized by Google

d) Die Fahrzeugselbststeuerung.

Bei den bisher betrachteten Systemen spielte außer der Regelgröße selbst im wesentlichen nur ihre erste zeitliche Ableitung eine Rolle. Nur beim Temperaturregler kam die zweite Ableitung dazu; sie trat jedoch gegenüber der ersten doch noch so in den Hintergrund, daß sie nicht genügte, um das System aus dem überaperiodischen Zustand herauszubringen. Bei der Fahrzeugselbststeuerung überwiegt dagegen der Einfluß der zweiten Ableitung als Ausdruck für die kinetische Energie, die durch das Trägheitsmoment des Fahrzeugs aufgespeichert werden kann.

Den Trägheitskräften wirken die durch eine Verstellung des Steuergliedes (hier des Ruders) ausgeübten Momente entgegen, sowie Momente, die der Drehgeschwindigkeit des Fahrzeugs entsprechen. Letztere werden hervorgerufen durch die »Dämpfung«, die das Fahrzeug in seinem umgebenden Medium erfährt. Es ergibt sich daraus folgende Gleichung[6]):

Trägheitsmom. × Winkelbeschl. = einwirkendes Moment (4a)

$$J \cdot \varphi'' = \text{const}\,\varphi' + \text{const} \cdot \eta$$

Nach Umformungen wird

$$\varphi'' + M\varphi' = N\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4b)$$

Dabei stellt die Größe N eine Konstante für die Ruderwirksamkeit dar; in ihr ist die Fahrtgeschwindigkeit des Fahrzeuges, die Größe der Ruderfläche, der Abstand des Ruders vom Fahrzeugschwerpunkt, der Kehrwert des Fahrzeugträgheitsmomentes und eine die Form des Ruders berücksichtigende Beizahl enthalten. Die Größe M gibt ein Maß für die Dämpfungsfähigkeit des Fahrzeugs; in ihr geht der Kehrwert des Fahrzeugträgheitsmomentes, die Fahrtgeschwindigkeit und eine die Form des Fahrzeugs berücksichtigende Beizahl ein. Äußere Einflüsse, die den Gleichgewichtszustand stören, werden wieder durch eine Störgröße ξ erfaßt:

$$\varphi'' + M\varphi' = N\eta + \xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

In dieser Form kennzeichnet Gleichung (4) das Verhalten eines Fahrzeuges. Sie gilt so für die Selbststeuerung von Schiffen, Luftschiffen und die Seitenrudersteuerung von Flugzeugen. Denn für diese Fälle bedeutet der in Gleichung (4) erfaßte Kräftekreislauf den wesentlichsten des Problems.

Um die kennzeichnenden Unterschiede dieser vier zu regelnden Systeme darzustellen, ist in Tafel I ihr Verhalten nach einer plötzlichen Verstellung des Steuergliedes von η_a auf η_b gezeigt.

Das druckzuregelnde System befinde sich bei der Stellung η_a des Steuergliedes auf seinem Gleichgewichtszustand $\varphi_a = \frac{\eta_a}{z}$. Bei Verstellung auf η_b läuft der Zustand φ des Systems nach eine e-Funktion nach dem neuen Gleichgewichtszustand $\varphi_b = \frac{\eta_b}{z}$. Die Zeitkonstante dieser e-Funktion ist bei großer Last z klein; das System erreicht bei großer Last z also schneller seinen neuen Zustand als bei kleiner. Außerdem ist bei kleiner Last z die Änderung $\varphi_b - \varphi_a$ des Gleichgewichtszustandes trotz gleicher Verstellung des Steuergliedes größer als bei großer Last. Bei der Last null ist der neue Gleichgewichtszustand unendlich weit weggerückt; die e-Funktion ist in eine Gerade ausgeartet.

Das drehzahlzuregelnde System befindet sich während der Stellung η_a des Steuergliedes in einer konstanten Änderung $\varphi_a' = \frac{\eta_a}{T_a}$ seines Zustandes. Bei Übergang auf die Stellung η_b geht es plötzlich auf die neue Änderungsgeschwindigkeit $\varphi_b' = \frac{\eta_b}{T_a}$ über. Das drehzahlzuregelnde System verhält sich also wie das druckzuregelnde bei der Last null; alle Vorgänge des Drehzahlreglers ergeben sich dann aus den entsprechenden des Druckreglers durch den Grenzübergang $z \to 0$.

Das temperaturgeregelte System befindet sich während der Stellung η_a des Steuergliedes in einer Stellung $\varphi_a = \eta_a$ und geht nach Verstellung auf η_b nach einer überaperiodischen Schwingung in die neue Lage φ_b.

Das zu regelnde System der Fahrzeugselbststeuerung vollführe während der Stellung η_a des Steuerorgans eine konstante Änderung $\varphi_a' = \frac{N\eta_a}{M}$ seines Zustandes. Nach Verstellung auf η_b geht es auf die neue Änderungsgeschwindigkeit $\varphi_b' = \frac{N\eta_b}{M}$ nach einer Übergangskurve.

2. Das geeignete Regelgesetz.

Das Regelgesetz kennzeichnet das Verhalten des Reglers. Es gibt an, welchen Zusammenhang der Regler zwischen den Zustandsgrößen des zu regelnden Systems und der Stellung des Steuergliedes herstellt. Für die hier betrachteten Aufgaben haben sich erfahrungsgemäß einige Regelgesetze herausgebildet. Es sind dies die folgenden:

$$-\eta = a\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$-\eta = c\int \varphi\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Regelgesetze gehen von zwei Ausgangspunkten aus. Einmal, $-\eta = a\varphi$, wird die Stellung η des Steuergliedes der Abweichung φ vom Sollzustand des zu regelnden Systems verhältnisgleich gemacht. Zu jeder Abweichung φ gehört also eine bestimmte Stellung η des Steuergliedes, die diese Abweichung beseitigen will. Im zweiten Falle, $-\eta = c\int \varphi\, dt$, gehört zu jeder Abweichung vom Sollzustand eine bestimmte Änderungsgeschwindigkeit η' des Steuergliedausschlags, denn das Gesetz $-\eta = c\int \varphi\, dt$ bedeutet ja $-\eta' = c\varphi$. Hier befindet sich das Steuerglied stets in Bewegung, solange nicht der Sollzustand erreicht ist. Schließlich werden Verbindungen beider Gesetzmäßigkeiten angewandt, $-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt$. Manchmal wird auch die erste (und zweite) zeitliche Ableitung der Zustandsgröße φ in den Regelvorgang hineingegeben, um bestimmte Wirkungen zu erzielen

$$-\eta = a\varphi + b\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8a)$$

$$-\eta = a\varphi + b\varphi' + c\int \varphi\, dt \quad \ldots\ldots \quad (8b)$$

Das Minuszeichen vor der Größe η bedeutet, daß die Verstellung η des Steuergliedes der Abweichung φ des Zustandes entgegengesetzt ist, diese Abweichung also beseitigen will.

Regler nach dem Steuergesetz (5), $-\eta = a\varphi$, seien als »Regler mit Stellungszuordnung« bezeichnet, weil jeder Abweichung φ eine Stellung η des Steuergliedes zugehört. Regler nach dem Steuergesetz (7), $-\eta = c\int \varphi\, dt$, seien »Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung« genannt, weil jeder Abweichung φ eine Laufgeschwindigkeit η' des Steuergliedes entspricht.

Regler, die beide Anteile enthalten, $-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt$, gehören keiner Gruppe zu. Sie werden üblicherweise (da ihr Laufgeschwindigkeitsanteil $c\int \varphi\, dt$ meist klein ist) als abgeänderte Regler mit Stellungszuordnung ausgeführt, indem die Nullage der Stellungszuordnung durch den Anteil $c\int \varphi\, dt$ verschoben wird; sie werden manchmal jedoch auch aus Laufgeschwindigkeitsreglern aufgebaut, indem diesen außer der Abweichung φ noch die zeitliche Ableitung φ' eingegeben wird:

$$\eta' = a\varphi' + c\varphi, \text{ d. h. } \eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt + \text{const}.$$

Mit der Einwirkung des Reglers auf das zu regelnde System werden zwei Ziele verfolgt. Einmal soll ein bestimmter Zustand des zu regelnden Systems aufrechterhalten werden,

[6]) Vgl. z. B. W. Oppelt, Die Flugzeugkurssteuerung im Geradeausflug. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 270.

Digitized by Google

die »Regelung« im eigentlichen Sinne. Dann sollen über den Regler bestimmte gewollte Änderungen des Zustandes ausgeführt werden, wobei der Regler Abweichungen vom Plane dieser Änderungen beseitigt, eine als »Steuerung« bezeichnete Aufgabe. Falls ein zeitlich festliegender Änderungsplan vorliegt, wird von »Fahrplanregelung« gesprochen.

Die Gleichungen (5), (6), (7) enthalten nur die zu einer Regelung notwendigen Zusammenhänge. Zur Steuerung irgendeines Vorganges wird der Ausschlag η des Steuergliedes noch von einer weiteren Größe ζ abhängig gemacht, die wunschgemäß einstellbar ist; es wird einfach die Nullage des Fühlers um den entsprechenden Betrag verschoben.

Damit gehen die Gleichungen (5), (6), (7) über in:

$$-\eta = a(\varphi + \zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5a)$$

$$-\eta = a(\varphi + \zeta) + c\int(\varphi + \zeta)\,dt \quad \ldots \quad (6a)$$

$$-\eta = c\int(\varphi + \zeta)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

Die in den Gleichungen (5) bis (8) auftretenden Konstanten a, b und c geben an, wie stark der Ausschlag η des Steuergliedes von den einzelnen Einflüssen abhängt. Die Art dieser Einflüsse kann erst an dem Zusammenwirken von Regler und zu regelndem System erkannt werden; doch erfolge hier schon eine Namengebung dieser Konstanten. Die Größe a sei als »Rückstelleinfluß a« bezeichnet, weil eine der Abweichung φ verhältnisgleiche Verstellung des Steuergliedes ein Rückstellmoment auf das Regelsystem ausübt. Die Größe b sei »Dämpfungseinfluß b« genannt, weil ein der Änderungsgeschwindigkeit φ' des Zustandes entsprechender Ausschlag des Steuergliedes eine dämpfende Einwirkung auf den Regelverlauf hat. Die Größe c sei als »Verschiebeeinfluß c« eingeführt, weil ihre Einwirkung gleichsam in einer Verschiebung der Nullage des Steuergliedes beruht.

Die Konstanten a, b und c können nicht beliebig gewählt werden. Grenzbedingungen dafür ergeben sich einmal aus dem Regelvorgang mit fehlerfreiem Regler. Weitere Einschränkungen ergeben sich durch die Fehler des wirklichen Reglers.

Sowohl Fühler als auch Steuerglied sind nicht fähig, beliebig große Bewegungen auszuführen. Ihr Bereich muß so gewählt werden, daß sich normale Regelvorgänge innerhalb abspielen. Ihre Grenzen sind deshalb für diese Betrachtung belanglos[7]).

8. Das Zusammenwirken von Regelgesetz und zu regelndem System.

Die Betrachtung dieses Zusammenwirkens ist in zwei große Gruppen aufzuteilen. Einmal sei der Regler als fehlerfrei angenommen, er erfülle sein Regelgesetz (Gleichungen (5) bis (8)) genau. Dieser Fall stellt den bestmöglichen Zustand dar, der bei dem gewählten Regelgesetz auftreten kann; aus ihm sind auch alle Anforderungen zu entnehmen, die das geregelte System bei dem benutzten Regelgesetz und der gewählten Größe der Konstanten a, b und c günstigenfalls und grundsätzlich erfüllen kann.

Sodann sei der Regelvorgang unter Betrachtung der »Fehler« des wirklichen Reglers betrachtet. Unter Fehler seien dabei alle Abweichungen von dem gewollten Regelgesetz verstanden. Es wird gezeigt, daß sich diese Fehler in gewisse kennzeichnende Gruppen einteilen lassen. Aus den Betrachtungen des Einflusses dieser Fehler ergeben sich Richtlinien über die apparative Ausgestaltung und Dimensionierung des Reglers.

Die mathematische Behandlung dieser Aufgabe erfolgt dadurch, daß die Gleichungen (1) bis (4) des zu regelnden Systems mit den Gleichungen (5) bis (8) des Regelgesetzes in Beziehung gebracht werden und daraus die Gleichungen des geregelten Systems erhalten werden[8]). Die Lösung dieser Gleichungen führt zu an- oder abklingenden Schwingungen und aperiodischen Bewegungen. Die aperiodischen Bewegungen, die bei gleichzeitigem Auftreten von Schwingungen deren Mittellage darstellen, verlaufen stets abklingend. Dies zeigt sich mathematisch darin, daß die Koeffizienten der Differentialgleichungen sämtlich positiv sind; es zeigt sich physikalisch darin, daß bei längeren Abweichungen φ aus der Sollage das Steuerglied schließlich immer in rückholendem Sinne ausgelenkt wird. Führt eine Lösung auf Schwingungen, dann wird eine gleichzeitig vorhandene aperiodische Bewegung in den folgenden Erläuterungen oft zurückgestellt, weil der Schwingungsanteil zumeist eine Dämpfungsgrenze überschreiten kann und damit zu unbrauchbaren Regelvorgängen führt, während die aperiodische Bewegung immer abklingend verläuft.

Als Kenngrößen einer Schwingung wird ihre Dämpfung D und ihre Kreisfrequenz ω_e angegeben; die Gewinnung dieser Werte aus der zugehörigen Differentialgleichung sei als bekannt vorausgesetzt[9]). Sind überdies bei bestimmter Einstellung des Reglers anschwellende Schwingungen möglich, dann ist die Beziehung für die Dämpfungsgrenze angegeben. Für die Dämpfungsgrenze treten dann gerade ungedämpfte Dauerschwingungen auf; mit dem Ansatz $\varphi = \sin \omega t$ läßt sich die Differentialgleichung des Vorganges in zwei Glieder mit sin und cos aufteilen. Diese Glieder müssen je für sich null sein, da die Gleichung zu jedem Zeitpunkt gelten muß. Daraus ergeben sich zwei Gleichungen, aus denen die Beziehung für die Dämpfungsgrenze zu erhalten ist. Dieser Rechnungsgang ist in den einfacheren Fällen im allgemeinen unterdrückt. Die Angabe der Dämpfungsgrenze zeigt den Bereich, in dem abklingende Schwingungen auftreten. Für die Beurteilung der praktischen Brauchbarkeit einer Regeleinstellung genügt die Kenntnis der Dämpfungsgrenze im allgemeinen noch nicht, dazu wäre die Kenntnis der Dämpfung D und der Eigenfrequenz ω_e notwendig. Aus dem Verlauf der Dämpfungsgrenze können jedoch bereits wesentliche Schlüsse über die Richtung, in der die Regeleinflüsse geändert werden müssen, um zu günstigen Verhältnissen zu kommen, gezogen werden.

Zur Erläuterung der Vorgänge erweist es sich oft als zweckmäßig, entweder eine äußere störende Kraft anzunehmen, die das geregelte System irgendwie in Dauerschwingungen versetzt, oder die Konstanten a, b und c so zu wählen, daß es sich selber darin erhält und dabei die Phasenlage des Steuergliedes zu betrachten. Es können für diesen Fall die Erkenntnisse der Schwingungslehre besonders bequem angewandt werden.

Auf eine besondere Behandlung von Einschwingvorgängen ist verzichtet. Für den kennzeichnenden Fall einer sprunghaften Änderung des Zustandes (z. B. eine Störung ξ oder eine Steuerung ζ) genügt die Angabe der Zeitkonstante K (bei Vorgängen, die durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben werden), oder die Angabe von Dämpfung D und Eigenfrequenz ω_e (bei Vorgängen, die durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung dargestellt werden). Bei Vorgängen, die einer Differentialgleichung 3. Ordnung folgen, zeigen sich dann Einschwingvorgänge, bei denen die Schwingung sich um eine abklingende e-Funktion ausbildet. Diese e-Funktion

[7]) Üblicherweise wird die Einwirkung eines Reglers oft unter Bezug auf diese Grenzen oder unter Bezug auf die Belastungsgrenzen des zu regelnden Systems angegeben, was beispielsweise zum Begriff des sog. »Ungleichförmigkeitsgrades« führt.

[8]) Es sei daran erinnert, daß bei positiven Beizahlen die linearhomogene Differentialgleichung erster Ordnung aperiodisch abklingende, die zweiter Ordnung gedämpft schwingende, und die dritter Ordnung bei bestimmten Beizahlverhältnissen anschwellend schwingende Bewegungsformen darstellt.

[9]) Vgl. hierzu z. B. E. Lehr, Schwingungstechnik I. Berlin 1930. Als Dämpfungsmaß D ist das dort von Lehr angegebene benutzt, das neben bequemer analytischer Rechnung den Vorzug hat, auch den überaperiodischen Fall mit endlichen Zahlen zu erfassen: $D = 0$ keine Dämpfung, $D = 1$ aperiodische Dämpfung.

Digitized by Google

ist gegenüber dem neuen Gleichgewichtszustand so gelagert, daß die ohne sie vorhandenen Abweichungen dadurch anfangs noch vergrößert werden. Ihre physikalische Ursache hat dieses Verhalten in dem Auftreten einer nacheilenden Phasenverschiebung am Steuerglied, beispielsweise (wie später erläutert) durch den Anteil $c\int\varphi\,dt$ des Regelgesetzes oder die »Trägheit ϑ« des Reglers, wodurch der Zustand über den neuen Gleichgewichtszustand hinausgetrieben wird. Liegt keine sprunghafte Änderung des Sollzustandes, sondern eine beliebige zeitliche Störfunktion vor, dann ist jeweils an sich schon eine gesonderte Betrachtung des Einschwingverhaltens notwendig.

Die schaubildliche Darstellung erfolgt hinsichtlich des wesentlichsten Regeleinflusses, des Rückstelleinflusses a. Bei aperiodischen Bewegungen ist deren Zeitkonstante K, bei gedämpften Schwingungen deren Dämpfung D abhängig vom Rückstelleinfluß a dargestellt. Zeigt der Regelverlauf eine Dämpfungsgrenze, nach deren Überschreiten aufklingende Schwingungen des Zustandes φ auftreten, dann ist diese Dämpfungsgrenze dargestellt und dabei der Rückstelleinfluß a als abhängige Größe aufgetragen; er muß jetzt ja in Abhängigkeit von anderen Größen so gewählt werden, daß der Regelverlauf innerhalb der Dämpfungsgrenze bleibt. Der gedämpfte Bereich ist durch Schraffur hervorgehoben. Bei dem Regelgesetz $-\eta = c\int\varphi\,dt$ ist statt dem Rückstelleinfluß a der Verschiebeeinfluß c dargestellt. Während der Behandlung der Einzelfälle ist die in zusammenstellenden Tafeln erfolgende schaubildliche Darstellung zu beachten; auf einen jeweils besonderen Hinweis im Text ist verzichtet.

a) Fehlerfreier Regler.

Das Zusammenwirken von Regelgesetz und zu regelndem System werde für die einzelnen Regelsysteme nacheinander behandelt und dann Vergleiche zwischen den einzelnen Ergebnissen gezogen.

α) Druckregler.

Die Verbindung der hier zusammengehörenden Gleichungsgruppen ergibt folgende Aufstellung:

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a(\varphi+\zeta)$	$T_a\varphi^{\cdot}+(z+a)\varphi=\xi-a\zeta$	(9)
$-\eta = a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$T_a\varphi^{\cdot\cdot}+(z+a)\varphi^{\cdot}+c\varphi=\xi^{\cdot}-c\zeta-a\zeta^{\cdot}$. .	(10)
$-\eta = c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$T_a\varphi^{\cdot\cdot}+z\varphi^{\cdot}+c\varphi=\xi^{\cdot}-c\zeta$	(11)

In den Gleichungen (9) bis (11) des geregelten Systems tritt überall der Faktor z auf, was bedeutet, daß alle Regelvorgänge beim Druckregler bei verschiedener Last z verschieden verlaufen.

Bei Anwendung eines Reglers mit Stellungszuordnung, $-\eta = a(\varphi+\zeta)$, ergibt sich für den Regelvorgang eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Sie besagt, daß nach einer plötzlichen Änderung des Gleichgewichtes (beispielsweise durch Übergang auf einen neuen Sollzustand mittels Änderung der Steuergröße ζ, oder durch eine bleibende äußere Störung ξ) der neue Zustand nach einer e-Funktion erreicht wird. Die Zeitkonstante K dieser e-Funktion ergibt sich aus Gleichung (9) zu[10]):

$$K=\frac{T_a}{z+a}.$$

Der neue Gleichgewichtszustand wird also schneller erreicht bei kleinen Anlaufzeiten T_a (weil dann kleine Speichervolumina aufzufüllen sind), großer Last z (weil dann die anteiligen Speichervolumina klein sind, Bild 2c) und großem Rückstelleinfluß a des Reglers (weil dann der Regler schon bei kleinen Abweichungen eine große Wirkung ausübt). Auch bei verschwindender Last, $z=0$, bleibt eine endliche Zeitkonstante des Vorgangs (weil Speichervolumen und Rückstelleinwirkung des Reglers bestehen bleiben).

Bei Anwendung eines Reglers mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, $-\eta = c\int(\varphi+\zeta)\,dt$, ergibt sich für den Regelvorgang eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie sagt aus, daß sich der Regelvorgang nach einer Störung seines Zustandes in gedämpften Schwingungen abspielt. Eine Schwingung kann sich jetzt deshalb ausbilden, weil nach einer gewesenen Abweichung φ eine Verstellung $c\int\varphi\,dt$ des Steuergliedes noch vorhanden ist, die das System über seine Nullage nach der anderen Seite hinaustreibt. Dämpfung und Frequenz dieses Schwingungsvorganges ergeben sich aus Gleichung (11) zu[11]):

$$D=\frac{1}{2}\frac{z}{\sqrt{cT_a}}$$

$$\omega_e=\sqrt{\frac{c}{T_a}-\frac{z^2}{4T_a^2}}.$$

Die Dämpfung D des Vorganges ist also um so besser, je kleiner die Anlaufzeit T_a ist (weil bei den dann rascher verlaufenden Vorgängen die Stellung η des Steuergliedes sich noch nicht zu so großen Werten verschoben hat, wie bei langsam verlaufenden Bewegungen), je größer die Last z ist (weil dann das anteilige Speichervolumen klein ist), und je geringer der Verschiebeeinfluß c des Reglers gewählt ist (weil dann nur geringe Verschiebungen des Steuerorgans auftreten). Die Eigenfrequenz ω_e wächst mit wachsendem Verschiebeeinfluß c (weil dieser ja die eigentliche Ursache der Schwingungsfähigkeit ist), sinkender Anlaufzeit T_a und wachsender Last z (weil mit beiden die anteiligen Speichervolumina geringer werden). Die Eigenfrequenz ω_e wird null, wenn die Dämpfung D den Wert eins überschreitet (also in das überaperiodische Gebiet eindringt), was grundsätzlich bei jeder Schwingung der Fall sein muß. Bei verschwindender Last, $z=0$, wird jetzt auch die Dämpfung zu null (weil dann nur noch die Speicherwirkung des zu regelnden Systems und nicht mehr seine eigene Rückstellfähigkeit vorhanden ist).

Die Anwendung des Regelgesetzes $-\eta = a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ liefert schließlich ebenfalls ein gedämpftes

---

[10]) Lösungsansatz: $\varphi=\varphi_0 e^{-\frac{1}{K}t}$ ergibt in Gleichung (9) eingesetzt:

$$-T_a\varphi_0\frac{1}{K}e^{-\frac{1}{K}t}+(z+a)\varphi_0 e^{-\frac{1}{K}t}=\xi-a\zeta=\text{const}$$

und $$-T_a\frac{1}{K}+z+a=\frac{\text{const}}{\varphi_0 e^{-\frac{1}{K}t}},\quad\text{womit } K=\frac{T_a}{z+a}.$$

[11]) Gleichung (11) $T_a\varphi^{\cdot\cdot}+z\varphi^{\cdot}+c\varphi=\xi^{\cdot}-c\zeta$ entspricht umgeformt

$$\varphi^{\cdot\cdot}+\frac{z}{T_a}\varphi^{\cdot}+\frac{c}{T_a}\varphi=\frac{\xi^{\cdot}-c\zeta}{T_a}$$

der Grundgleichung

$$\varphi^{\cdot\cdot}+2D\omega_e\varphi^{\cdot}+\omega_e^2\varphi=\text{const}$$

einer gedämpften Schwingung. Aus diesem Vergleich ergibt sich

$$2D\omega_e=\frac{z}{T_a}$$

und

$$\omega_e^2=\frac{c}{T_a}.$$

Da weiterhin zwischen der ungedämpft gedachten Frequenz ω_0 und der tatsächlichen Frequenz ω_e der Zusammenhang

$$\omega_e^2=\omega_0^2(1-D^2)$$

besteht, ergeben sich die im Text angegebenen Werte.

Digitized by Google

Einschwingen in den Sollzustand, Gleichung (10), mit den Kenngrößen:

$$D=\frac{1}{2}\frac{z+a}{\sqrt{c\,T_a}}$$

$$\omega_e=\sqrt{\frac{c}{T_a}-\frac{(z+a)^2}{4\,T_a^2}}.$$

Das Verhalten des Regelvorganges nähert sich damit wieder den Verhältnissen bei Stellungszuordnung. Auch bei verschwindender Last, $z=0$, ist jetzt noch endliche Dämpfung vorhanden (wegen des bleibenden Rückstelleinflusses des Reglers), mit wachsendem Rückstelleinfluß a wächst die Dämpfung (Annäherung an den aperiodischen Fall der Stellungszuordnung). Die Dämpfung D ist groß bei großer Last z, sie wird kleiner mit wachsendem Verschiebeeinfluß c. Die Dämpfung kann überaperiodisch werden, wenn nämlich der Wert

$$c=\frac{(z+a)^2}{4\,T_a}$$

unterschritten wird.

Eine bleibende Störung des Gleichgewichtszustandes (beispielsweise durch Änderung des Vordruckes) bedeutet eine Änderung der Störgröße ξ um $\Delta\xi$. Dann bildet sich bei Stellungszuordnung der neue Gleichgewichtszustand nur unter einer Abweichung $\Delta\varphi$ vom Sollzustand aus:

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta\xi}{z+a}.$$

Denn nur bei dieser bleibenden Abweichung kann eine bleibende Verstellung des Steuerorgans erfolgen, die nötig ist, um die bleibende Störung des Gleichgewichtes auszugleichen. Es ist offensichtlich, daß diese Abweichung $\Delta\varphi$ um so kleiner ausfällt, je stärker die Einwirkung des Reglers (sein Rückstelleinfluß) ist. Sie ist auch kleiner bei großer Last z, weil dann die Einwirkung des Steuergliedes auf das zu regelnde System größer ist (vgl. S. 6). Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung oder dem Regelgesetz $-\eta=a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ tritt eine bleibende Abweichung $\Delta\varphi$ nicht auf. Das Steuerglied wird hier ja solange verstellt, bis wieder der Sollzustand erreicht ist, weil das Steuerglied nur bei Sollzustand zur Ruhe kommt. Eine vorübergehende Abweichung tritt auch hier auf. Mathematisch zeigt sich dieses Verhalten darin, daß in den Gleichungen (10) und (11) nicht mehr die Störgröße selbst, sondern ihre Ableitung $\xi^\cdot$ auftritt.

Eine Steuerung des Regelvorganges, also eine gewollte Änderung des Sollzustandes, erfolgt durch Änderung der Steuergröße ζ. Wird diese um den Betrag $\Delta\zeta$ geändert, dann ändert sich der Sollzustand bei Stellungszuordnung um den Betrag:

$$\Delta\varphi=\frac{a}{z+a}\Delta\zeta.$$

Diese Änderung erfolgt nicht proportional, sie ist bei großer Last z kleiner, trotz gleicher Änderung $\Delta\zeta$ der Steuergröße. Bei großer Last z genügt diese kleinere Änderung $\Delta\varphi$ schon, um wieder Gleichgewicht herzustellen, wegen der bei großer Last größeren eigenen Rückstellfähigkeit des zu regelnden Systems. Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung entspricht die Änderung $\Delta\varphi$ des Sollzustandes genau der Verstellung $\Delta\zeta$ der Steuergröße; nur wenn der neue Zustand genau dem vorgeschriebenen entspricht, hört hier ja das Steuerglied auf zu laufen. Bei dem Regelgesetz $-\eta=a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ tritt dasselbe ein; die sofort eintretende Verstellung des Steuergliedes um den Weg $a\zeta$ (hervorgerufen durch den Stellungszuordnungsanteil im Regelgesetz) verhilft hier zu einem raschen Erreichen des neuen Zustandes. Nach einer plötzlichen Änderung des Sollzustandes durch Steuerung wird der neue Zustand nach dem Einschwingverhalten des Reglers erreicht; da auf dasselbe bereits hingewiesen ist, erübrigt sich eine Betrachtung des dynamischen Verhaltens bei Steuerung.

β) Drehzahlregler.

Verbindung von Regelgesetz und zu regelndem System ergibt hier folgende Gleichungen:

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta=a(\varphi+\zeta)$	$T_a\varphi^\cdot+a\varphi=\xi-a\zeta$	(12)
$-\eta=a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$T_a\varphi^{\cdot\cdot}+a\varphi^\cdot+c\varphi=\xi^\cdot-c\zeta-a\zeta^\cdot$	(13)
$-\eta=c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$T_a\varphi^{\cdot\cdot}+c\varphi=\xi^\cdot-c\zeta$	(14)

Die Gleichungen des Drehzahlreglers (12) bis (14) gehen aus den Gleichungen des Druckreglers (9) bis (11) bei verschwindender Last z hervor; der Drehzahlregler verhält sich wie ein Druckregler bei der Last null.

Der Regler mit Stellungszuordnung, $-\eta=a(\varphi+\zeta)$, zeigt wieder nach einer Störung ein aperiodisches Einlaufen in den Sollzustand nach einer e-Funktion. Deren Zeitkonstante K ergibt sich aus Gleichung (12) zu:

$$K=\frac{T_a}{a}.$$

Diese Zeitkonstante wird bei verschwindendem Rückstelleinfluß des Reglers unendlich groß (denn das drehzahlzuregelnde System hat keine eigene Rückstellfähigkeit, wie das druckzuregelnde System).

Der Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, $-\eta=c\int(\varphi+\zeta)\,dt$, zeigt ungedämpfte Schwingungen; das zu regelnde System besitzt keinen eigenen Rückstelleinfluß, die Einwirkung des Reglers ist infolge ihrer nacheilenden Phasenlage entdämpfend. Diese Regelanordnung ist daher praktisch nicht brauchbar.

Die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingungen ergibt sich aus Gleichung (14) zu:

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{T_a}}.$$

Sie nimmt, hervorgerufen durch den Regler, mit wachsendem Einfluß desselben und mit sinkender Anlaufzeit T_a (wegen der dann geringeren Speicherwirkung) zu.

Der Regler mit dem Regelgesetz $-\eta=a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ liefert wieder ein gedämpftes Einschwingen in den Sollzustand, Gleichung (13), mit den Kenngrößen:

$$D=\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{c\,T_a}}$$

$$\omega_e=\sqrt{\frac{c}{T_a}-\frac{a^2}{4\,T_a^2}}.$$

Auch hier nähert sich das Verhalten dem der Stellungszuordnung. Die Dämpfung wächst mit wachsendem Rückstelleinfluß a, sinkendem Verschiebeeinfluß c und sinkender Anlaufzeit T_a; die Frequenz wächst mit wachsendem Verschiebeeinfluß c, sinkendem Rückstelleinfluß a und sinkender Anlaufzeit T_a aus den gleichen Gründen wie beim Druckregler.

Eine bleibende Störung des Gleichgewichtszustandes (beispielsweise durch Änderung des von der angetriebenen Maschine aufgenommenen Drehmomentes) bedeutet bei Stellungszuordnung, daß der neue Gleichgewichtszustand nur unter einer Abweichung $\Delta\varphi$ vom Sollzustand eintreten kann:

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta\xi}{a}.$$

Auch hier fällt diese Abweichung um so geringer aus, je stärker der Rückstelleinfluß a des Reglers ist. Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung oder dem Regelgesetz $-\eta=a(\varphi+\zeta)+c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ tritt keine bleibende Abweichung

Digitized by Google

auf, weil das Steuerglied nur bei dem Sollzustand in Ruhe verharrt.

Eine Steuerung des Regelvorganges, die durch Änderung der Steuergröße ζ erfolgt, ändert den Sollzustand bei Stellungszuordnung um den Betrag:

$$\Delta\varphi = \Delta\zeta.$$

Jetzt erfolgt diese Änderung verhältnisgleich, weil das drehzahlzuregelnde System über keine eigene Rückstellfähigkeit verfügt. Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung und dem Steuergesetz $-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ tritt das gleiche auf; vgl. die entsprechende Behandlung beim Druckregler.

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a(\varphi+\zeta)$	$T_v T_a \varphi'' + (T_v+T_a)\varphi' + (1+a)\varphi = \xi + T_v\xi' - a\zeta$	(15)
$-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$T_v T_a \varphi''' + (T_v+T_a)\varphi'' + (1+a)\varphi' + c\varphi = \xi' + T_v\xi'' - a\zeta - c\zeta - a\zeta'$	(16)
$-\eta = c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$T_v T_a \varphi''' + (T_v+T_a)\varphi'' + \varphi' + c\varphi = \xi' + T_v\xi'' - c\zeta$	(17)

Die Benutzung eines Reglers mit Stellungszuordnung, $\eta = a(\varphi+\zeta)$, macht das an sich überaperiodisch schwingungsfähige System zu einem periodisch schwingen könnenden, Gleichung (15). Die Kenngrößen dieser Schwingung ergeben sich daraus zu[12]):

$$D = \frac{T_a+T_v}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{T_v T_a(1+a)}}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1+a}{T_v T_a} - \frac{(T_v+T_a)^2}{4\,T_v^2\,T_a^2}}.$$

Die Schwingungsfähigkeit des Systems bildet sich folgendermaßen aus: Beim Durchschwingen durch den Sollzustand φ stellt der Regler die für den Sollzustand φ als Gleichgewichtszustand gerade richtige Stellung des Steuergliedes η ein. Kurz zuvor war jedoch eine Abweichung und damit auch eine andere Stellung des Steuergliedes vorhanden. Diese andere Stellung hatte zu dem damaligen Zeitpunkt eine Einschaltung einer Energiezufuhr bewirkt, die nicht dem Gleichgewichtszustand entsprach. Diese Energie kommt aber infolge der auf dem Energieflußwege noch vorhandenen Speichermassen (Gleichung (3b)) verspätet zur Auswirkung und treibt das System damit wieder über den Sollzustand hinaus. Ein wachsender Rückstelleinfluß a verstärkt dieses Verhalten, was sich in anwachsender Eigenfrequenz ω_e und absinkender Dämpfung D bemerkbar macht. Die Dämpfung bleibt jedoch immer positiv. Ist eine der Zeitkonstanten klein, dann ist die Dämpfung groß (das System nähert sich dem aperiodischen Druckregler); ist eine der Zeitkonstanten groß, dann ist die Dämpfung ebenfalls groß (der die Dämpfung schwächende verzögernde Einfluß der anderen Zeitkonstanten ist ja gering); sind beide Zeitkonstanten von der gleichen Größenordnung, dann ist die Dämpfung gering, sie hat ein Minimum für

$$T_a = T_v \text{ von } D = 1/\sqrt{1+a}.$$

Bei dem Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, $-\eta = c\int(\varphi+\zeta)\,dt$, ist das System dagegen auch fähig, anschwellende Schwingungen auszuführen, Gleichung (17). Dies hängt mit der Tatsache zusammen, daß einem schwingungsfähigen System durch eine dem Ausschlag um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase nacheilende anregende Kraft Energie zugeführt wird. Das zu regelnde System ist hier (überaperiodisch) schwingungsfähig, Gleichung (3), die um $\frac{\pi}{2}$ nacheilende anregende Kraft wird durch die Einwirkung des Steuergliedes gegeben, das bei dem Regelgesetz $-\eta = c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ dem Zustand φ des Systems um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase nacheilt. Es gibt daher eine Grenze für die Größe des Verschiebeeinflusses c, bei deren Überschreiten das geregelte System anschwellende Schwingungen ausführt. Diese Grenze ergibt sich aus Gleichung (17) zu[13]):

$$c = \frac{1}{T_v} + \frac{1}{T_a}.$$

Die an dieser Grenze vorhandene Schwingungsfrequenz ω wird[13]):

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{T_a+T_v}} = \frac{1}{\sqrt{T_v T_a}}.$$

Daraus ist zu erkennen, daß der Verschiebeeinfluß c mit wachsender Anlaufzeit T_a sowohl, als auch mit wachsender Verzögerungszeit T_v absinkt. Denn das Anwachsen dieser beiden Zeitkonstanten bedeutet ein Anwachsen der Speichermassen, damit eine Erniedrigung der Frequenz ω und somit eine Vergrößerung des entdämpfenden Gliedes $c\int\varphi\,dt$ je Halbschwingung. Aber auch bei unendlich großen Zeitkonstanten braucht der Verschiebeeinfluß den Wert $\frac{1}{T_a}$ bzw. $\frac{1}{T_v}$ nicht zu unterschreiten, um Dämpfung zu gewährleisten, weil die eigene Rückstellfähigkeit des zu regelnden Systems einen gedämpften Zustand unterstützt.

Die Benutzung des Regelgesetzes $-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ schafft auch hier die günstigsten Verhältnisse. Die Möglichkeit anschwellender Schwingungen bleibt natürlich bestehen, doch liegt die Dämpfungsgrenze jetzt bei:

$$c = \left(\frac{1}{T_a}+\frac{1}{T_v}\right)(1+a)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1+a}{T_v T_a}} = \sqrt{\frac{c}{T_a+T_v}}.$$

Die Dämpfungsgrenze wird durch Einwirkung des Rückstelleinflusses hinausgeschoben (weil jetzt größere Frequenzen und damit eine anteilig geringere Einwirkung des Gliedes $c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ stattfinden).

Eine bleibende Störung des Gleichgewichtszustandes (beispielsweise durch eine geöffnete Ofentür) bedeutet bei Stellungszuordnung einen neuen Gleichgewichtszustand, der von dem Sollzustand abweicht. Diese Abweichung ist:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\xi}{1+a},$$

γ) Temperaturregler.

Die Aufstellung der hier einander entsprechenden Gleichungen führt zu folgender Gruppe:

[12]) Wie in Anmerkung (11) ergibt hier der Vergleich zwischen Gleichung (15) und der Grundgleichung der gedämpften Schwingung:

$$2D\omega_e = \frac{T_v+T_a}{T_v T_a}$$

und

$$\omega_e^2 = \frac{1+a}{T_v T_a}.$$

[13]) Mit dem Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$ einer ungedämpften Schwingung ergibt sich aus Gleichung (17):

$$-\omega^3 T_v T_a \varphi_0 \cos\omega t - (T_v+T_a)\omega^2\varphi_0 \sin\omega t + \omega\varphi_0\cos\omega t + c\varphi_0\sin\omega t = \xi' + T_v\xi'' - c\zeta,$$

woraus umgeformt

$$(-\omega^3 T_v T_a + \omega)\cos\omega t + (-(T_v+T_a)\omega^2 + c)\sin\omega t = \frac{\xi' + T_v\xi'' - c\zeta}{\varphi_0}.$$

Diese Gleichung muß zu jedem Zeitpunkt t gelten, was nur der Fall sein kann, wenn beide Klammern je für sich null werden.

Damit wird:

$$-\omega^3 T_v T_a + \omega = 0$$

$$-\omega^2(T_v+T_a) + c = 0$$

und daraus

$$\omega^2 = \frac{1}{T_a T_v} = \frac{c}{T_v+T_a}$$

und

$$c = \frac{T_v+T_a}{T_v T_a} = \frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_v}.$$

Digitized by Google

denn nur bei einer solchen Abweichung $\Delta\varphi$ kann die für den neuen Gleichgewichtszustand nötige Verstellung des Steuergliedes erfolgen. Diese Abweichung ist auch hier um so geringer, je stärker die Einwirkung des Reglers (sein Rückstelleinfluß a) ist. Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung oder dem Regelgesetz $-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ tritt, wie bei dem Druck- und Drehzahlregler, nur eine vorübergehende Abweichung auf.

Eine Steuerung des Regelvorganges, die durch Änderung der Steuergröße ζ erfolgt, ändert bei Stellungszuordnung den Gleichgewichtszustand um:

$$\Delta\varphi = \frac{a}{1+a}\Delta\zeta.$$

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a(\varphi+\zeta)$	$\varphi'' + M\varphi + aN\varphi = \xi - aN\zeta$	(18)
$-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$\varphi''' + M\varphi'' + aN\varphi' + cN\varphi = \xi' - cN\zeta - aN\zeta'$	(19)
$-\eta = a\int(\varphi+\zeta)\,dt$	$\varphi''' + M\varphi'' + cN\varphi = \xi' - cN\zeta$	(20)

Der Regler mit Stellungszuordnung, $-\eta = a(\varphi+\zeta)$, macht das Fahrzeug zu einem schwingungsfähigen System. Es bildet sich ein mechanischer Schwingungskreis zwischen dem Trägheitsmoment des Fahrzeuges und der rückstellenden Einwirkung des Reglers aus. Die Dämpfung erfolgt als Dämpfung des Fahrzeugs in seinem umgebenden Mittel; sie ist stets positiv. Die Kenngrößen der Eigenschwingung des Systems ergeben sich aus Gleichung (18) zu:

$$D = \frac{1}{2}\frac{M}{\sqrt{aN}}$$

$$\omega_e = \sqrt{aN - \frac{1}{4}M^2}.$$

Die Eigenfrequenz nimmt mit wachsendem Rückstelleinfluß a und wachsender Ruderwirksamkeit N zu, die Dämpfung ab, wie bei jedem Schwingungskreis.

Die Benutzung eines Reglers mit Laufgeschwindigkeitszuordnung verbietet sich hier; das System führt damit nur anschwellende Schwingungen aus. Eine Behandlung von Gleichung (20) läßt dies erkennen.

Mit dem Lösungsansatz

$$\varphi = e^{Kt}\sin\omega_e t$$

ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}&(K^3 + MK^2 - 3\omega_e^2 K - M\omega_e^2 + cN)\,e^{Kt}\sin\omega_e t\\ &+ (3\omega_e K^2 + 2M\omega_e K - \omega_e^3)\,e^{Kt}\cos\omega_e t\\ &= \xi' - cN\zeta = \text{const.}\end{aligned}$$

Da diese Gleichung zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein muß, müssen die Faktoren vor den Gliedern mit sin und cos je für sich null sein, was folgende beiden Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}K^3 + MK^2 - 3\omega_e^2 K - M\omega_e^2 + cN &= 0\\ 3\omega_e K^2 + 2M\omega_e K - \omega_e^3 &= 0.\end{aligned}$$

Wie bei einer abklingenden Schwingung gilt auch bei der aufklingenden Schwingung der Zusammenhang[9]):

$$D = \frac{K}{\omega_e}\frac{1}{\sqrt{1 + K^2/\omega_e^2}},$$

womit sich nach wenigen Umformungen die Beziehung zwischen Aufklingfaktor ($-D$) und Verschiebeeinfluß c des Reglers ergibt zu:

$$\frac{cN}{4M^3} = \frac{16}{\left(\frac{1}{D^2} - 4\right)^3} + \frac{8}{\left(\frac{1}{D^2} - 4\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{D^2} - 4\right)}.$$

Diese Gleichung bedeutet, daß mit wachsendem Verschiebeeinfluß c das Anschwellen immer stärker wird und daß es stärker wird mit kleinerer Dämpfungsfähigkeit M des Fahrzeugs. Das Anschwellen geht jedoch über den Faktor $D = -0{,}5$ nicht hinaus, der bei dämpfungslosem Fahrzeug erreicht wird.

Diese Änderung erfolgt nicht verhältnisgleich, weil das zu regelnde System eine eigene Rückstellfähigkeit besitzt, die zusätzlich bei der Steuerung überwunden werden muß. Beim Laufgeschwindigkeitsregler oder dem Regelgesetz $-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ ist die Änderung $\Delta\varphi$ des Sollzustandes der Änderung der Steuergröße verhältnisgleich, weil die eigene Rückstellfähigkeit des zu regelnden Systems durch die Auswirkung des Verschiebeeinflusses c ausgeglichen wird.

δ) Fahrzeugselbststeuerung.

Für die Fahrzeugselbststeuerung ergeben sich folgende Gleichungen:

Auch bei dem Regelgesetz $-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ ist die Möglichkeit anschwellender Schwingungen bei großer Aufschaltung des Verschiebeeinflusses c gegeben. Die Dämpfungsgrenze ergibt sich aus Gleichung (19) zu[14]):

$$c = aM$$
$$\omega = \sqrt{aN}.$$

Der Verschiebeeinfluß c darf um so größer sein, je größer der Rückstelleinfluß a ist (weil bei der dann vorhandenen höheren Eigenfrequenz kleinere entdämpfende Verschiebungsbeträge $c\int\varphi\,dt$ auftreten).

Einem äußeren bleibenden störenden Moment $\Delta\xi$ (beispielsweise durch Ausfallen einer seitlichen Maschinenanlage bei einem Schiff) kann bei Stellungszuordnung nur Gleichgewicht gehalten werden unter einer Abweichung $\Delta\varphi$ vom Sollzustand

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\xi}{a}.$$

Diese Abweichung ist naturgemäß um so geringer, je mehr der Regler einwirkt (je größer sein Rückstelleinfluß a ist). Bei dem Regelgesetz $-\eta = a(\varphi+\zeta) + c\int(\varphi+\zeta)\,dt$ wird eine solche Abweichung im Laufe der Zeit als Auswirkung des Verschiebeeinflusses c beseitigt.

Eine Steuerung des Regelvorganges über das Steuerglied ζ ruft eine dem verhältnisgleiche Änderung $\Delta\varphi$ des Sollzustandes bei Stellungszuordnung hervor:

$$\Delta\varphi = \Delta\zeta.$$

Das zu regelnde System verfügt hier ja, wie der Drehzahlregler, über keine eigene Rückstellfähigkeit, es hat keinen bevorzugten Zustand φ. Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung wäre das gleiche der Fall.

Die Aufgabe der Fahrzeugselbststeuerung hat noch eine Eigenart: der Einfluß des Steuergliedes, hier des Ruders, ist nicht konstant, sondern vom Staudruck abhängig. Damit werden Eigenfrequenz, Dämpfung und Dämpfungsgrenze von der Fahrtgeschwindigkeit, und bei Flugzeugen noch von der Flughöhe, abhängig[6]). Die Eigenfrequenz wird mit wachsender Fahrt größer, die Dämpfung geringer, die Dämpfungsgrenze rückt zu größeren Werten des Verschiebeeinflusses c. Bei der Flugzeugkurssteuerung ist die hier berechnete Dämpfungsgrenze nicht die maßgebende. Über die seitliche Bewegung des Flugzeugschwerpunktes können sich bei vorhandenem Verschiebeeinfluß Schwerpunktbahnschwingungen ausbilden, deren Dämpfungsgrenze schon

[14]) Gleichung (19) genau so behandelt wie Gleichung (17) in Anmerkung (13) liefert:

$$-\omega^3 + \omega aN = 0$$
$$-\omega^2 M + cN = 0,$$

daraus

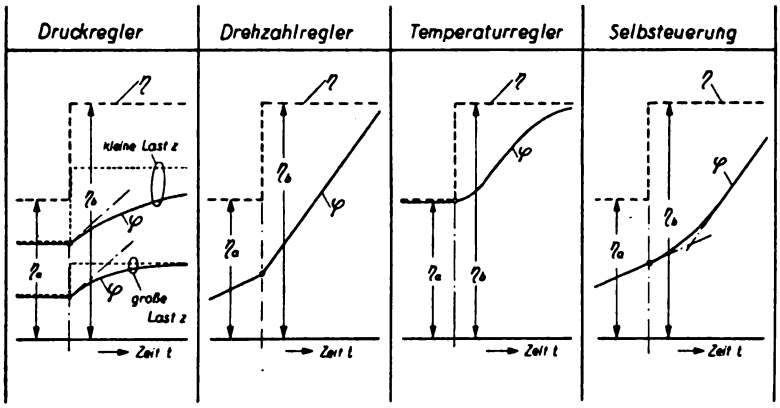
$$\omega^2 = aN = \frac{cN}{M}$$

und

$$c = aM.$$

Digitized by Google

Tafel I. Das zu regelnde System nach plötzlicher Verstellung des Steuergliedes von η_a auf η_b.



φ = Abweichung vom Sollzustand,
η = Ausschlag des Steuergliedes.

früher erreicht wird, als die Grenze der hier betrachteten Drehschwingungen um den Flugzeugschwerpunkt.

Ein Vergleich der bei den einzelnen zu regelnden Systemen erhaltenen Ergebnisse ergibt ein Anwachsen der Schwierigkeit der Regelaufgabe vom Druckregler über Drehzahl- und Temperaturregler zur Fahrzeugselbststeuerung. Die Ergebnisse sind in Tafel II zusammengestellt; die Art des Verlaufs des Regelvorganges ist dort durch die Art der Umrahmung der einzelnen Schaubilder gekennzeichnet.

Beim Regler mit Stellungszuordnung zeigen Druck- und Drehzahlregler aperiodische Vorgänge, Temperaturregler und Selbststeuerung gedämpfte Schwingungen. Beim Regelgesetz $-\eta = a(\varphi + \zeta) + c\int(\varphi + \zeta)\,dt$ verlaufen schon die Vorgänge bei Druck- und Drehzahlregler nach gedämpften Schwingungen; Temperaturregler und Selbststeuerung zeigen die Möglichkeit anschwellender Schwingungen. Der Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung zeigt schließlich nur noch als Druckregler gedämpfte Schwingungen, der Drehzahlregler vollführt hier bereits ungedämpfte Schwingungen, der Temperaturregler zeigt die Möglichkeit anschwellender Schwingungen und die Selbststeuerung führt immer anschwellende Schwingungen aus. Hieraus ergibt sich die Berechtigung der Aufzählung der Regelanordnungen und Regelgesetze in der gewählten Reihenfolge.

Drehzahlregler und Selbststeuerung treten als Systeme ohne eigene Rückstellfähigkeit, also ohne bevorzugten Zustand φ, hervor. Bei der Steuerung auf einen anderen Zustand folgen sie willig und kommen auch bei dem Regler mit Stellungszuordnung auf dem beabsichtigten neuen Zustand zur Ruhe. Druckregler und Temperaturregler verfügen über eigene Rückstellfähigkeit; nach einer Steuerung kommen sie bei Stellungszuordnung nicht auf dem gewollten neuen Zustande zur Ruhe. Sie benötigen eine Abweichung $\Delta\varphi$, um ihre auf dem neuen Zustand andere innere Rückstellkraft auszugleichen. Nur bei Einwirkung eines Verschiebeeinflusses c, der einen solchen Ausgleich nach einer gewissen Zeit selbsttätig hervorruft, suchen sie die gewollte Lage auf. Die eigene Rückstellfähigkeit von druck- und temperaturzuregelndem System kommt auch in den Schaubildern der Tafel II zum Vorschein; Druck- und Temperaturregler zeigen dort auch bei verschwindendem Rückstelleinfluß a des Reglers noch endliche Werte von Zeitkonstanten K, Dämpfung D oder Dämpfungsgrenze, während beim Drehzahlregler und der Selbststeuerung die entsprechenden Werte null bzw. unendlich sind.

Aus der Zusammenstellung, Tafel II, geht auch hervor, daß der Regler mit dem Regelgesetz $-\eta = a(\varphi + \zeta) + c\int(\varphi + \zeta)\,dt$ am günstigsten abschneidet. Denn es ist eine möglichst harte Aufschaltung des Reglers auf das zu regelnde System erwünscht, um möglichst kleine Abweichungen vom Sollzustand zu erhalten. Dies ist beim Laufgeschwindigkeitsregler nicht möglich wegen seiner Dämpfungsgrenze; hier zeigt überhaupt nur der Druckregler immer gedämpftes Verhalten und auch da wird die Dämpfung mit wachsender Einwirkung des Reglers immer geringer. Beim Regelgesetz $-\eta = a(\varphi + \zeta) + c\int(\varphi + \zeta)\,dt$ kann dagegen durch genügend großen Rückstelleinfluß a immer Dämpfung erhalten werden, der Verschiebeeinfluß braucht jetzt nicht mehr so groß gewählt zu werden, wie beim Laufgeschwindigkeitsregler, da er jetzt nicht mehr der einzige und eigentliche Regeleinfluß ist, sondern nur noch den Zweck hat, bleibende Abweichungen zu beseitigen. Über die bei Stellungszuordnung, $-\eta = a(\varphi + \zeta)$, auftretenden Dämpfungswerte kann allerdings dabei nicht hinausgelangt werden.

Um trotzdem noch größere Dämpfungswerte zu erreichen, was für bestimmte Regelaufgaben erwünscht ist, wird in den Regelvorgang ein Einfluß entsprechend der zeitlichen Ableitung φ^* des Zustandes gegeben. Der Regler widersetzt sich damit schon bereits einer Änderungsgeschwindigkeit des Zustandes. Diese Änderungsgeschwindigkeit φ^* kann direkt gemessen werden (z. B. als Drehgeschwindigkeit des Fahrzeugs mittels gefesselten Kreiseln bei der Selbststeuerung, als Drehbeschleunigung der Welle durch den Beharrungsregler beim Drehzahlregler) oder durch apparative Differentiation aus dem gemessenen Zustand abgeleitet werden (z. B. durch Verfahren, die die Differenz zwischen dem Zustand φ und einem träge nachfolgenden Vergleichszustand messen). Für den Fall der Verbindung dieses »Dämpfungseinflusses b« mit einem Stellungsregler ergibt sich das Regelgesetz:

$$-\eta = a(\varphi + \zeta) + b\,\varphi^*, \quad \ldots\ldots \quad (8a)$$

und dafür seien die abgeänderten Beziehungen im folgenden dargestellt.

Druckregler:

$$(T_a + b)\,\varphi^* + (z + a)\,\varphi = \xi - a\,\zeta$$
$$K = \frac{T_a + b}{z + a}.$$

Drehzahlregler:

$$(T_a + b)\,\varphi^* + a\,\varphi = \xi - a\,\zeta$$
$$K = \frac{T_a + b}{a}.$$

Temperaturregler:

$$T_v\,T_a\,\varphi^{**} + (T_v + T_a + b)\,\varphi^* + (1 + a)\,\varphi = \xi + T_v\,\xi^* - a\,\zeta$$
$$D = \frac{T_v + T_a + b}{2}\,\frac{1}{\sqrt{T_v\,T_a\,(1 + a)}}$$
$$\omega_e = \sqrt{\frac{1 + a}{T_v\,T_a} - \frac{(T_v + T_a + b)^2}{4\,T_v^2\,T_a^2}}.$$

Fahrzeugselbststeuerung:

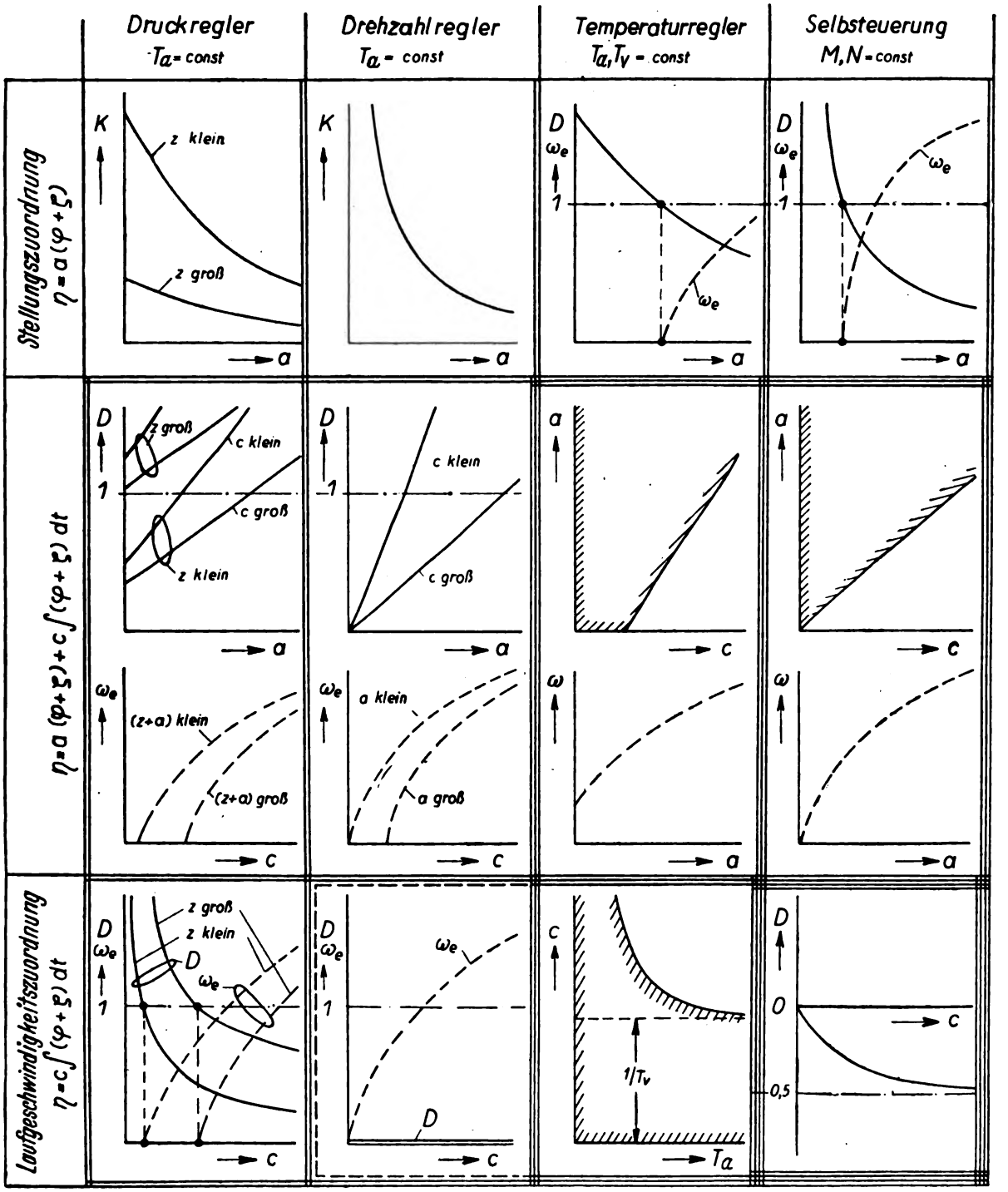
$$\varphi^{**} + (M + b\,N)\,\varphi^* + a\,N\,\varphi = \xi - a\,N\,\zeta$$
$$D = \frac{M + b\,N}{2\sqrt{a\,N}}$$
$$\omega_e = \sqrt{a\,N - \frac{(M + b\,N)^2}{4}}.$$

Es zeigt sich in allen Fällen eine Vergrößerung der Dämpfung D bzw. der Zeitkonstante durch den Dämpfungseinfluß b des Reglers.

Um das Verhalten der einzelnen Regelsysteme anschaulich klarzumachen, bedient man sich vorteilhafterweise mechanischer Ersatzbilder der Regelvorgänge. Die

Digitized by Google

Tafel II. Der fehlerfreie Regler.



Konstanten des zu regelnden Systems:

T_a = Anlaufzeit,
T_v = Verzögerungszeit,
M = Dämpfungsfähigkeit,
N = Ruderwirksamkeit,
z = »Belastung« beim druckzuregelnden System.

Konstanten des Reglers:

a = Rückstelleinfluß,
c = Verschiebeeinfluß.

Konstanten des geregelten Systems:

K = Zeitkonstante abklingender Vorgänge,
D = Dämpfung, ω_e = Eigenfrequenz } schwingungsfähiger Vorgänge.

Zustandsgrößen:

φ = Abweichung vom Sollzustand,
η = Ausschlag des Steuergliedes,
ζ = Steuergröße.

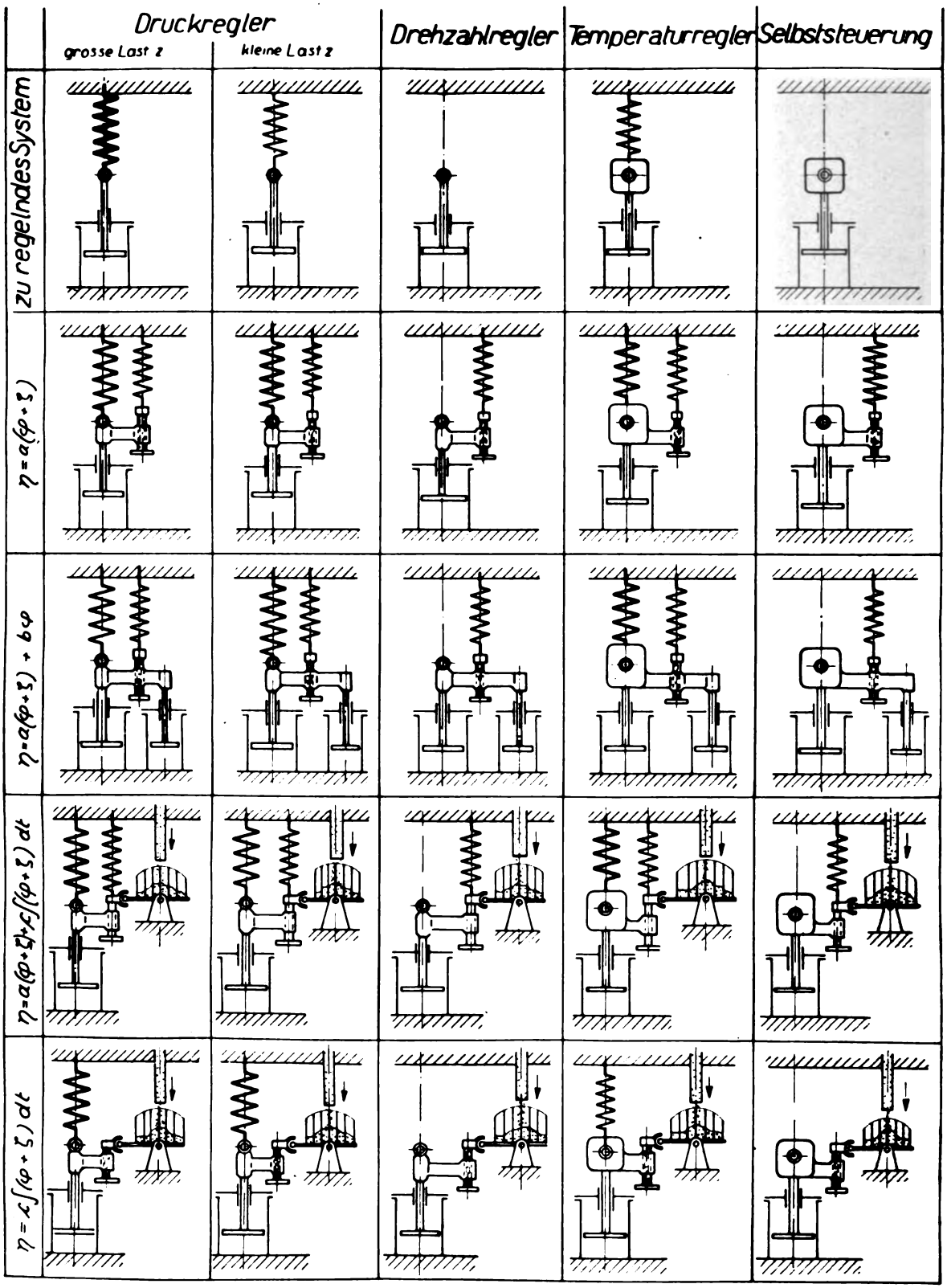
Schraffierter Bereich = Bereich, in dem Dämpfung vorhanden ist.

Die Umrahmung der einzelnen Schaubilder soll den Verlauf des Regelvorganges veranschaulichen. Es bedeutet:

——— = aperiodische Vorgänge,
═══ = gedämpft periodische Vorgänge,
═══ = ungedämpft periodische Vorgänge,
═══ = periodische Vorgänge mit Anschwellmöglichkeit,
═══ = anschwellend periodische Vorgänge.

Digitized by Google

Tafel III. Mechanische Ersatzbilder zur Erläuterung von Regelvorgängen.



bei der Beschreibung der Regelvorgänge auftretenden linearhomogenen Differentialgleichungen erster, zweiter und dritter Ordnung treten ja in gleicher Weise bei einfachen mechanischen Schwingungsgebilden auf. Diese Gebilde zeigen daher das gleiche Verhalten, wie die Regelsysteme, sind aber einfacher zu durchschauen, Tafel III.

Der Zustand φ eines Regelsystems werde durch die Lage eines (in Tafel III hervorgehobenen) linear beweglichen Bezugspunktes dargestellt; die in Tafel III gezeichneten Systeme seien, soweit nicht gesondert betont, reibungs-, masse- und gewichtslos. Die Analogie ist für die Fahrzeugselbststeuerung am leichtesten zu durchschauen; der an sich schon mechanische Schwingungskreis wird einfach übertragen. Das Trägheitsmoment des Fahrzeugs wird durch eine linear bewegliche Masse dargestellt, die Dämpfung des Fahrzeuges durch einen Bremszylinder. Dieses System zeigt, wie das Fahrzeug, keine eigene Rückstellfähigkeit. Dagegen zeigt das temperaturzuregelnde System eine solche

Digitized by Google

und ein schwingungsfähiges Verhalten (Gleichung (3)), was im Ersatzbild durch einen mechanischen Schwingungskreis mit Masse, Feder und Dämpfung zum Ausdruck kommt. Das drehzahlzuregelnde System, das nur einer Änderung seines Zustandes Kräfte entgegensetzt, erscheint als einfacher Bremszylinder. Das druckzuregelnde System dagegen, das noch über eigene Rückstellkräfte verfügt, zeigt dazu noch eine Rückstellfeder. Da die eigenen Rückstellkräfte dieses Systems mit größer werdender Last z größer werden, ist auch diese Feder bei größerer Last härter zu wählen. Nach einer Störung des Gleichgewichtszustandes, beispielsweise durch einen Anstoß der Ersatzsysteme von Hand, verhalten sich diese offensichtlich wie in Tafel I beschrieben.

Der Einbau eines Reglers mit Stellungszuordnung gibt auf das zu regelnde System Einwirkungen proportional der Abweichung φ vom Sollzustand. Derartige Einflüsse können aber in den Ersatzbildern durch Anordnung einer Feder, die im Sollzustand gerade ungespannt ist, ausgeübt werden. Damit zeigt sich sofort, wie das selbstgesteuerte Fahrzeug jetzt schwingungsfähig geworden ist, wie die Eigenfrequenz des Temperaturreglers jetzt gestiegen und seine Dämpfung abgenommen hat. Es zeigt sich, wie das drehzahlgeregelte System über den Regler eine Rückstellfähigkeit zur Sollage erhält, wie bei dem druckgeregelten System die eigene Rückstellfähigkeit durch den Regler vergrößert wird, und ähnliches. Es zeigt sich auch anschaulich, daß eine bleibende äußere Störung nur unter Abweichung vom Sollzustande ausgeglichen werden kann, weil nur dann eine entsprechende Federkraft auftritt. Die dämpfende Einwirkung eines zusätzlichen Dämpfungseinflusses b auf den Regelvorgang zeigt sich im Ersatzbild durch einen weiteren Bremszylinder. Die Einwirkung eines Verschiebeeinflusses c ist in den Ersatzbildern dargestellt durch eine Einrichtung, die ein strömendes Mittel integriert. Aus einer Röhre strömt beispielsweise Sand auf eine Waage, die bei Abweichung vom Sollzustand unsymmetrisch beaufschlagt wird (das Mittel unterliege hier natürlich der Schwerkraft). Die Einwirkung einer konstanten störenden Kraft auf den Bezugspunkt bringt diesen zuerst aus seiner Sollage; dabei sammelt aber die Waage solange unsymmetrisches Gut an, bis dadurch wieder der Gleichgewichtszustand erreicht ist. Das Ersatzsystem verhält sich also genau so, wie das wirkliche geregelte System. Auch die Notwendigkeit zur Darstellung des Verschiebeeinflusses eine Hilfskraft zu Hilfe nehmen zu müssen, entspricht den tatsächlichen Verhältnissen; ohne Energiezufuhr kann sich ja eine entdämpfende Wirkung nicht ausbilden. Auch die Verhältnisse bei Steuerung werden von den Ersatzbildern richtig und anschaulich erfaßt. Bei Stellungszuordnung erfolgt die Steuerung durch Verschieben des Anlenkpunktes der den Reglerrückstelleinfluß darstellenden Feder; einer solchen Verstellung wirkt (bei Druck- und Temperaturregler) die nicht mitverstellte, die eigene Systemrückstellfähigkeit darstellende, Feder entgegen. Dies entfällt bei Drehzahlregler und Selbststeuerung; es entfällt auch bei vorhandenem Verschiebeeinfluß, weil dann bei Steuerung auch eine Steuerung desselben (durch Verstellen der Lage der Integrationsvorrichtung) vorgenommen wird.

b) Wirklicher Regler.

Der wirkliche Regler ist gegenüber dem fehlerfreien Regler noch mit Fehlern behaftet. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, daß der wirkliche Regler das Regelgesetz nicht genau erfüllt, sondern Abweichungen davon zeigt, die teils systematisch in seinem Aufbau, teils durch die Herstellgenauigkeit bedingt sind. Diese Abweichungen werden im folgenden sämtlich als Fehler bezeichnet. Sie lassen sich in folgende kennzeichnende Gruppen einteilen:

Der träge Regler. Sein Steuerglied nimmt nicht die fehlerfreie Stellung η ein, sondern eine Stellung η_f[15]), die mit der Sollstellung η durch folgende Gleichung verknüpft ist:

$$\vartheta\,\dot{\eta}_f + \eta_f = \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Der Regler läuft verzögert (»träge«) auf seine Sollstellung η, die Nachlaufgeschwindigkeit ist abhängig von der Differenz zwischen Ist- und Sollstellung des Steuergliedes, der dafür maßgebende Faktor ϑ sei als »Trägheit ϑ« des Reglers bezeichnet. Nach absichtlichem Herausbringen des Steuergliedes aus seiner Sollstellung bei abgeschaltetem zu regelndem System (was bei dem fehlerfreien Regler unmöglich war) läuft das Steuerglied nach einer e-Funktion zur Sollstellung. Ein solches Verhalten ist beispielsweise systematisch bedingt beim Verstärker mit Stellungszuordnung durch Rückführung; es tritt ebenso auf beim Verstärker mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, der mit Massen behaftet ist.

Der schwingungsfähige Regler folgt der Gleichung:

$$\eta_f'' + 2\,D_K\,\omega_K\,\eta_f' + \omega_K^2\,\eta_f = \omega_K^2\,\eta \quad \ldots \quad (22)$$

Wird dieser Regler nicht auf das zu regelnde System geschaltet, sondern ganz abgesondert für sich betrachtet, dann läuft nach einem Herausbringen des Steuergliedes aus seiner Sollstellung dasselbe nach einer gedämpften Schwingung in diese hinein. Die Kenngrößen dieser Schwingung sind ω_K und D_K. Gleichung (20) stellt nur die bekannte Form der Schwingungsgleichung dar; der Faktor ω_K vor η muß vorhanden sein, damit bei eingeschwungenem Zustand $\eta_f = \eta$ wird. Ein solches Verhalten zeigen beispielsweise fast alle Fühler von Drehzahlreglern in ausgeprägtem Maße[16]) und Fühler von Druckreglern in weniger ausgeprägtem Sinne. Diesem Gesetz (22) folgen viele Übertragungsglieder in mittelbaren Regelanlagen und besonders Verstärker, die mit elastischen Hilfskräften (z. B. Druckluft) arbeiten.

Der Regler mit Reibung bedarf erst eines gewissen Mindestanstoßes, bevor er anspricht. Sein Verhalten ist nicht ohne weiteres in eine brauchbare mathematische Beziehung zu bringen; für die gerade bei Reglersystemen auftretenden Verhältnisse erfolgt später eine besondere Formulierung. Auf die Auswirkung einer Verstellung der Einflüsse a, b und c des Reglers auf den Regelvorgang macht sich der Reibungsbetrag, der fühlerseitig von dem Verstellpunkt dieser Einflüsse liegt, anders bemerkbar, als der Reibungsbetrag, der auf der Seite des Steuergliedes liegt. Die Betrachtung der Reibungsverhältnisse sei deshalb in diese beiden Anteile getrennt, die einfach als »Reibung im Fühlsystem« und »Reibung im Steuerglied« bezeichnet seien. Ihr Unterschied besteht darin, daß der Einfluß der Reibung des Fühlsystems auf das Steuerglied bei Änderung der Einstellung des Reglers sich mitändert, die Reibung im Steuerglied jedoch konstant bleibt. Da reibungslose Lagerstellen nicht hergestellt werden können, verfügt jedes Regelsystem über ein bestimmtes Maß an Reibung.

Die Auswirkung dieser Fehler auf die einzelnen Regelsysteme sei im folgenden betrachtet. Dabei seien nachstehende Einschränkungen gemacht: Es trete keine äußere Störung ξ des Gleichgewichtes ein, es sei keine Steuerung ζ des Vorganges verlangt. Eine Betrachtung dieser Verhältnisse war bei dem fehlerfreien Regler durchgeführt, woraus ihre wesentlichsten Einwirkungen zu erkennen sind. Diese werden durch die Fehler des wirklichen Reglers nicht, oder nur geringfügig, abgeändert. Weiterhin sei angenommen, daß jeweils nur ein Fehlertypus vorliegt, wodurch gerade seine Auswirkung unbeeinflußt hervortritt. Im übrigen überlagern sich die kennzeichnenden Auswirkungen der einzelnen Fehlergruppen ziemlich ungestört.

Der Laufgeschwindigkeitsregler ist als Drehzahlregler und Fahrzeugselbststeuerung, wo sich schon beim fehlerfreien Regler seine Unbrauchbarkeit gezeigt hatte, nicht mehr erläutert. Die Zusammenstellung der Ergebnisse erfolgt weiterhin in Tafeln, gemeinsam für die zu regelnden Systeme. Eine Erläuterung der Ergebnisse erfolgt jetzt weniger nach dem Einfluß der Konstanten T_a, T_v, M, N, z

[15]) In den Gleichungen (1) bis (4) des zu regelnden Systems ist dann natürlich η durch η_f ersetzt zu denken.

[16]) Für den Fall des schwingungsfähigen Drehzahlreglers ist die klassische Reglertheorie entwickelt worden.

Digitized by Google

des zu regelnden Systems, deren Einfluß auf den Regelvorgang im wesentlichen bei dem fehlerfreien Regler zutage trat, als vielmehr hinsichtlich der Abänderung dieses Verhaltens durch die Fehler des wirklichen Reglers. Zur Bezeichnung des Regelgesetzes ist jeweils das fehlerfreie Regelgesetz benutzt; es ist (beispielsweise bei der Betrachtung der Tafeln IV bis VII) darauf zu achten, daß das fehlerfreie Regelgesetz jetzt natürlich infolge der Fehler des wirklichen Reglers (Gl. (21), (22), (39)) nicht mehr die tatsächliche, sondern nur die gewollte Beziehung zwischen Zustandsgrößen und Ruderstellung darstellt.

α) Der träge Regler.

Der träge Regler zeigt ein Nachhinken des Steuergliedes gegenüber seiner Sollstellung. Er entdämpft damit schwingungsfähige Systeme, er macht aperiodische Systeme schwingungsfähig (weil beim Nulldurchgang des Systems jetzt das Steuerglied infolge der Trägheit ϑ noch einen Ausschlag hat, der das System auf die andere Seite über die Nullage hinaustreibt). Während eines Schwingungsvorganges zeigt der träge Regler eine nacheilende Phasenverschiebung α und eine Verkleinerung der Amplitude für die Bewegung des Steuergliedes. Aus Gleichung (21) des trägen Reglers ergibt sich mit dem Ansatz

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t$$
$$\eta_f = \eta_{f_0} \sin (\omega t - \alpha)$$

die Phasenverschiebung α zu

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\vartheta\, \omega}$$

und die Verkleinerung der Steuergliedamplitude zu:

$$\eta_{f_0} = \eta_0 \cos \alpha.$$

Daraus ist zu ersehen, daß mit wachsender Frequenz ω und wachsender Trägkeit ϑ der Phasenwinkel immer größer wird und schließlich den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreicht. Gleichzeitig wird dabei die Amplitude η_f immer kleiner; sie wird null, wenn der Phasenwinkel den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat.

Das Verhalten des trägen Reglers ist in Tafel IV zusammengestellt, die Behandlung der einzelnen Fälle erfolgt der Reihe nach.

Druckregler. Die Verbindung der hier zusammengehörenden Gleichungen (1) und (21) mit den Regelgesetzen (5) bis (7) liefert die Gleichungsgruppe:

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a\,\varphi$	$\vartheta\, T_a \varphi'' + (\vartheta z + T_a)\varphi' + (z + a)\varphi = 0$	(23)
$-\eta = a\,\varphi + c \int \varphi\, dt$	$\vartheta\, T_a \varphi''' + (\vartheta z + T_a)\varphi'' + (z + a)\varphi' + c\,\varphi = 0$	(24)
$-\eta = c \int \varphi\, dt$	$\vartheta\, T_a \varphi''' + (\vartheta z + T_a)\varphi'' + z\,\varphi' + c\,\varphi = 0$	(25)

Mit einem Regler mit Stellungszuordnung, $-\eta = a\,\varphi$, ist das druckgeregelte System jetzt schwingungsfähig, Gleichung (23). Die Kenngrößen dieser Schwingung ergeben sich daraus zu[17]):

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{z\,\vartheta + T_a}{\sqrt{(z + a)\,\vartheta\, T_a}}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{z + a}{\vartheta\, T_a} - \frac{(z\,\vartheta + T_a)^2}{4\,\vartheta^2\, T_a^2}}.$$

Die Dämpfung nimmt bei wachsender Trägheit ϑ zuerst ab (wegen des entdämpfenden Einflusses der nacheilenden Phase des »trägen« Steuergliedes), dann aber wieder zu (weil bei weiter wachsender Trägheit ϑ die Amplitude der Bewegung des Steuergliedes immer geringer wird und dadurch der entdämpfende Einfluß trotz großer Phasenverschiebung wieder kleiner wird). Bei großer Last ist die Dämpfung groß, weil dann die eigene (nicht phasenverschobene) Rückstellfähigkeit des Systems groß ist.

Bei dem Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, $-\eta = c \int \varphi\, dt$, zeigt das früher schwingungsfähige System jetzt Anschwellungsmöglichkeit. Die Dämpfungsgrenze ergibt sich aus Gleichung (25) zu[18]):

$$c = \frac{z}{\vartheta} + \frac{z^2}{T_a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{z}{\vartheta\, T_a}} = \sqrt{\frac{c}{\vartheta\, z + T_a}}.$$

Mit wachsender Trägheit ϑ des Reglers muß seine Einwirkung (c) auf das zu regelnde System immer geringer gemacht werden, um anschwellende Schwingungen zu vermeiden. Trotzdem kann auch bei unendlich großer Trägheit ein endlicher Betrag z^2/T_a des Verschiebeeinflusses c belassen werden, da bei sehr großer Trägheit zwar die Phasenverschiebung nahe an $\pi/2$ liegt, aber der Ausschlag des Steuergliedes sehr gering geworden ist. Auch hier liegt bei großer Last diese Grenze bei größeren Regeleinflüssen; bei verschwindender Last z ist überhaupt keine Dämpfung mehr möglich.

Bei dem Regelgesetz $-\eta = a\,\varphi + c \int \varphi\, dt$ tritt eine Mischung obiger Erscheinungen auf. Das geregelte System kann anschwellende Schwingungen ausführen; die Dämpfungsgrenze liegt nach Gleichung (24) bei:

$$\vartheta = \frac{(z + a)\,T_a}{c\,T_a - z^2 - a\,z}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{z + a}{\vartheta\, T_a}} = \sqrt{\frac{c}{\vartheta\, z + T_a}}.$$

Bei wachsender Trägheit ϑ muß entweder wieder der Verschiebeeinfluß c verringert oder der Rückstelleinfluß a vergrößert werden (weil seine Einwirkung das Verhalten des Systems dem reinen Stellungsregler, $\eta = a\,\varphi$, annähert, bei dem hier immer Dämpfung vorhanden ist). Da das druckzuregelnde System über eigene Rückstellfähigkeit verfügt, kann auch bei verschwindendem Rückstelleinfluß a eine gewisse Trägheit ϑ zugelassen werden; nur wenn die eigene Rückstellfähigkeit durch Verschwinden der Last z zu null wird, muß ein bestimmter Rückstelleinfluß a des Reglers vorhanden sein. Falls die Last z den Wert

$$z = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + c\,T_a}$$

überschreitet, was gleichbedeutend ist mit einem Rückstelleinfluß a, der größer ist, wie

$$a = \frac{c\,T_a}{z} - z$$

[17]) Umformung von Gleichung (23) gibt:

$$\varphi'' + \frac{\vartheta z + T_a}{\vartheta\, T_a}\varphi' + \frac{z + a}{\vartheta\, T_a}\varphi = 0,$$

woraus abgelesen werden kann:

$$2\,D\,\omega_0 = \frac{\vartheta z + T_a}{\vartheta\, T_a}$$

und

$$\omega_0^2 = \frac{z + a}{\vartheta\, T_a}.$$

[18]) Aus Gleichung (25) ergibt sich der Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Die beiden Gleichungen

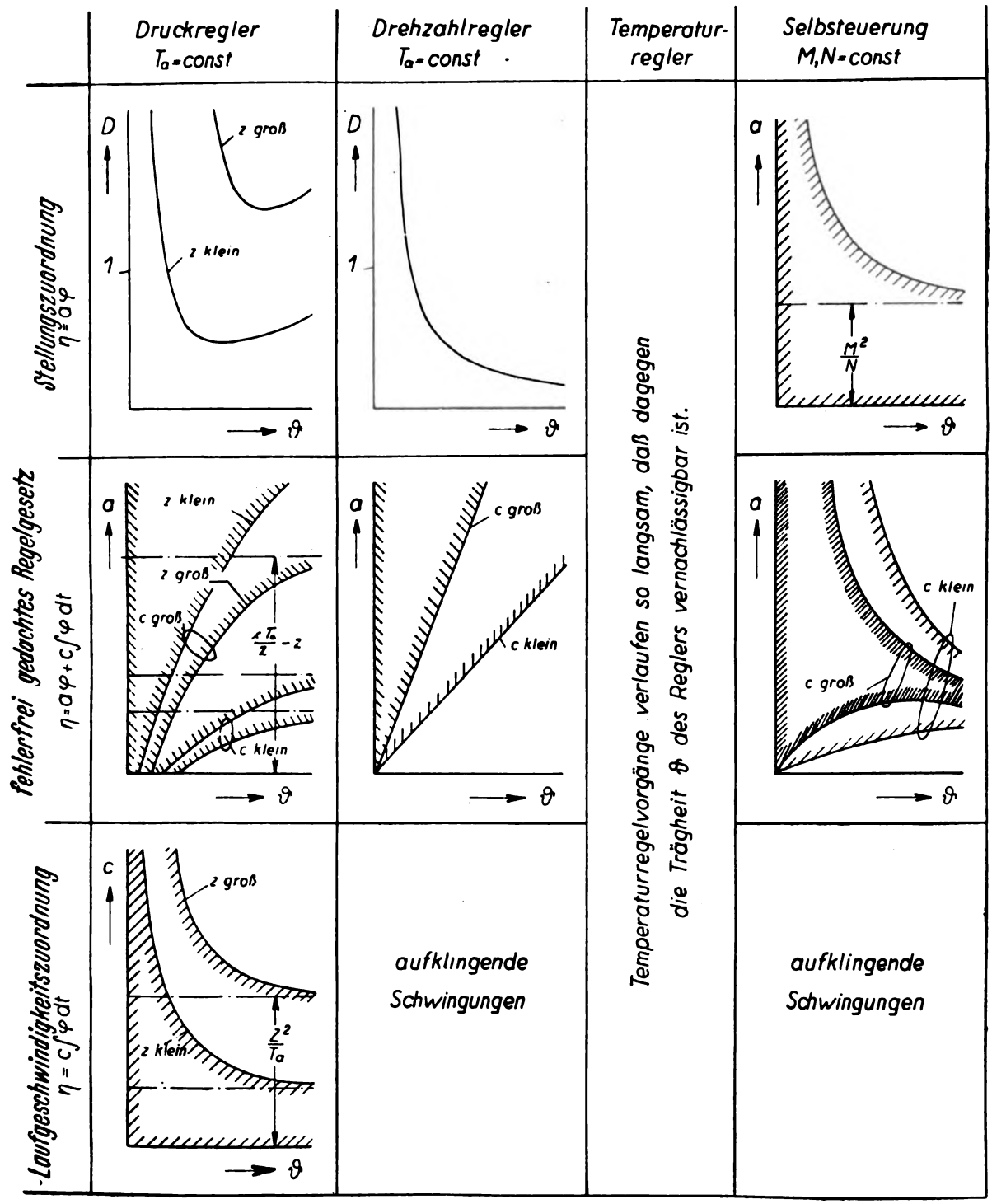
$$-\omega^3 \vartheta\, T_a + \omega z = 0$$
$$-\omega^3 (\vartheta z + T_a) + c = 0,$$

woraus die im Text angegebenen Werte hervorgehen.

Digitized by Google

Tafel IV. Der träge Regler.

$\vartheta \eta_f^{\cdot} + \eta_f = \eta.$



Konstanten des zu regelnden Systems:

T_a = Anlaufzeit,
T_v = Verzögerungszeit,
M = Dämpfungsfähigkeit,
N = Ruderwirksamkeit,
z = »Belastung« beim druckzuregelnden System.

Konstanten des Reglers:

a = Rückstelleinfluß,
c = Verschiebeeinfluß,
ϑ = Trägheit.

Konstanten des geregelten Systems:

D = Dämpfung
ω_e = Eigenfrequenz
} schwingungsfähiger Vorgänge.

Zustandsgrößen:

φ = Abweichung vom Sollzustand,
η_f = Ausschlag des Steuergliedes.

Schraffierter Bereich = Bereich, in dem Dämpfung vorhanden ist.

Digitized by Google

ist immer, auch bei unendlich großer Trägheit ϑ Dämpfung vorhanden. Der entdämpfende Einfluß der Trägheit ϑ, der mit wachsender Trägheit ϑ ja wieder geringer wird, genügt dann gegenüber der (nicht phasenverschobenen) eigenen Rückstellkraft des zu regelnden Systems nicht mehr, um anschwellende Schwingungen hervorzurufen.

Drehzahlregler. Es ergibt sich hier folgende Gleichungsgruppe:

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a\varphi$	$\vartheta T_a \varphi'' + T_a \varphi' + a\varphi = 0$	(26)
$-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt$	$\vartheta T_a \varphi''' + T_a \varphi'' + a\varphi' + c\varphi = 0$	(27)
$-\eta = c\int \varphi\, dt$	$\vartheta T_a \varphi''' + T_a \varphi'' + c\varphi = 0$	(28)

Der träge Regler mit Stellungszuordnung macht das vorher aperiodische System durch seine Trägheit schwingungsfähig, Gleichung (26). Es ergeben sich die Kenngrößen

$$D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_a}{a\vartheta}}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{a}{\vartheta T_a} - \frac{1}{4\vartheta^2}}.$$

Mit wachsender Trägheit wird die Dämpfung des Regelvorganges immer kleiner und wächst nicht wieder an, wie beim Druckregler. Es fehlt jetzt die eigene Rückstellfähigkeit des zu regelnden Systems; der Rückstelleinfluß a des Reglers kann diese hier nicht ersetzen, da ja er gerade phasenverschoben und somit entdämpfend auftritt. Größerer Rückstelleinfluß a verringert daher sogar die Dämpfung. Mit wachsender Anlaufzeit T_a wird, wie beim Druckregler, die Dämpfung größer, weil bei großen Anlaufzeiten T_a sich die Regelvorgänge langsamer abspielen und dabei die Auswirkung der Trägheit geringer ist.

Der träge Laufgeschwindigkeitsregler verleitet das zuvor schon ungedämpft schwingende System durch seine Phasenverschiebung des Steuergliedes immer zu anschwellenden Schwingungen, Gleichung (28); vgl. die Behandlung der Gleichung (20).

Mit dem Regelgesetz $-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt$ ist das vorher schwingungsfähige System zu anschwellenden Schwingungen fähig geworden. Die Dämpfungsgrenze ergibt sich aus Gleichung (27) zu:

$$a = c\vartheta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{T_a}} = \sqrt{\frac{a}{\vartheta T_a}}.$$

Wie beim Druckregler muß mit wachsender Trägheit ϑ der Verschiebeeinfluß c verringert oder der Rückstelleinfluß a vergrößert werden. Diese Dämpfungsgrenze wird hier von dem zu regelnden System unabhängig (die Größe T_a tritt nicht auf). Dies rührt daher, daß bei kleinen Anlaufzeiten T_a große Frequenzen ω des Regelverlaufs und damit große entdämpfende Phasenwinkel am Steuerglied infolge der Trägheit ϑ auftreten; bei großen Anlaufzeiten T_a treten kleine Frequenzen ω aber trotzdem große entdämpfende Phasenwinkel infolge der jetzt großen Auswirkung des Verschiebeeinflusses c auf.

Temperaturregler. Für den Temperaturregler erübrigt sich hier eine Betrachtung. Seine Vorgänge spielen sich in Zeiträumen ab, für die selbst bei ungeschickter Auslegung des Reglers Zeitverzögerungen infolge Trägheit ϑ des Reglers keine Rolle spielen.

Fahrzeugselbststeuerung. Hier ist folgende Gleichungsgruppe aufzustellen:

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a\varphi$	$\vartheta\varphi''' + (\vartheta M + 1)\varphi'' + M\varphi' + aN\varphi = 0$	(29)
$-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt$	$\vartheta\varphi^{(IV)} + (\vartheta M + 1)\varphi''' + M\varphi'' + aN\varphi' + cN\varphi = 0$	(30)
$-\eta = c\int \varphi\, dt$	$\vartheta\varphi^{(IV)} + (\vartheta M + 1)\varphi''' + M\varphi'' + cN\varphi = 0$	(31)

Der träge Regler mit Stellungszuordnung gibt dem vorher schon schwingungsfähigen System die Möglichkeit anschwellender Schwingungen, Gleichung (29), mit folgender Dämpfungsgrenze[19]):

$$a = \frac{M^2}{N} + \frac{M}{\vartheta N}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{aN}{\vartheta M + 1}} = \sqrt{\frac{M}{\vartheta}}.$$

Mit wachsender Trägheit ϑ des Reglers muß seine Einwirkung (a) infolge der entdämpfenden Wirkung immer weiter herabgesetzt werden, um anschwellende Schwingungen zu vermeiden. Jedoch braucht auch bei größten Trägheiten der Wert $a = \frac{M^2}{N}$ nicht unterschritten zu werden, da infolge der bei großen Trägheiten merklichen Verkleinerung der Steuergliedamplitude der Einfluß des Reglers an sich absinkt. Bei großer Dämpfungsfähigkeit M des Fahrzeugs (oder bei großem Dämpfungseinfluß b des Reglers) kann der Rückstelleinfluß wieder größer gewählt werden.

Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung, wo sich vorher schon anschwellende Schwingungen zeigten, sind diese jetzt natürlich in verstärktem Maße vorhanden.

Mit dem Regelgesetz $-\eta = a\varphi + c\int \varphi\, dt$ bleibt die Möglichkeit anschwellender Schwingungen. Die Dämpfungsgrenze ergibt sich aus Gleichung (30) zu:

$$a = \left(M + \frac{1}{\vartheta}\right)\left[\frac{M}{2N} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{M}{N}\right)^2 - \frac{c\vartheta}{N}}\right].$$

Das bedeutet einen bestimmten Bereich für den Rückstelleinfluß a, dessen Über- oder Unterschreitung den Regelablauf ins anschwellende Gebiet führt. Der Rückstelleinfluß a darf eine bestimmte Grenze nicht überschreiten, weil sonst seine am Steuerglied entdämpfend phasenverschobene Auswirkung das System zu anschwellenden Schwingungen bringt. Eine andere Grenze darf aber nicht unterschritten werden, weil bei zu kleinem Rückstelleinfluß a die entdämpfende Auswirkung des Verschiebeeinflusses c überwiegt. Sowohl mit größer werdendem Verschiebeeinfluß c als auch mit größer werdender Trägheit ϑ wird daher der brauchbare Bereich für den Rückstelleinfluß a immer geringer.

Die in Tafel IV erfolgte Zusammenstellung des Verhaltens des trägen Reglers zeigt wieder die Berechtigung der schon vorher gewählten Reihenfolge; vom Druckregler zum Fahrzeugselbststeuer und vom Stellungs- zum Laufgeschwindig-

[19]) Mit dem Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ folgen aus Gleichung (29) die beiden Gleichungen:

$$-\omega^3 \vartheta + \omega M = 0$$

$$-\omega^2(\vartheta M + 1) + aN = 0,$$

woraus die im Text angegebenen Beziehungen hervorgehen.

Digitized by Google

keitsregler nimmt der Regelvorgang einen immer ungünstigeren Verlauf.

β) Der schwingungsfähige Regler.

Die Eigenschwingungen des Reglers nehmen das geregelte System mit. Dieses wirkt rückwärts über den Fühler wieder auf den Regler ein, wodurch Frequenz und Dämpfung des geregelten Systemes gegenüber den Werten des Reglers allein abgeändert werden. Da die zu regelnden Systeme sämtlich eine gewisse Zeit brauchen, bis sich ein Anstoß voll ausgewirkt hat (Gleichungen (1) bis (4) und Tafel I), ist die Dämpfung beim geregelten System verschlechtert oder sogar aufgehoben. War das geregelte System bei fehlerfreiem Regler bereits schwingungsfähig, dann bleibt diese Schwingungsform erhalten; ihr überlagert sich eine zweite aus der Reglereigenschwingung herrührende Schwingungsform. Bei sehr großen Eigendämpfungen D_R des Reglers ist sein Schwingungsverhalten fast völlig unterdrückt, er geht dann in den »trägen« Regler über. Für die Dämpfung D_R ergibt sich zumeist ein bestimmter Bereich, der weder unter- noch überschritten werden darf. Beim Unterschreiten ist der Energieentzug durch die zu kleine Dämpfung D_R zu gering, beim Überschreiten ist die Entdämpfung durch die große Phasenverschiebung zu groß. Da die Phasenverschiebung mit wachsendem Verschiebeeinfluß c anwächst, schrumpft der Bereich damit zusammen; ab einem bestimmten Verschiebeeinfluß ist der gedämpfte Bereich überhaupt verschwunden, es gibt dann nur noch anschwellende Bewegungen. Der Grenzübergang zu unendlich großer Reglereigenfrequenz ω_R führt zum fehlerfreien Regler, da bei unendlich hoher Eigenfrequenz ω_R eine »getreue« Abbildung der Befehle erfolgt. In den Schaubildern der Tafel V ist der Regeleinfluß (a bzw. c) abhängig von der Dämpfung D_R des Reglers für verschiedene Eigenfrequenzen ω_R dargestellt; es ergibt sich in allen Fällen die Möglichkeit anschwellender Schwingungen, diese Schaubilder stellen also immer eine Dämpfungsgrenze dar.

Druckregler. Die Beziehungen des schwingungsfähigen Reglers für das druckzuregelnde System ergeben sich mit Gleichung (1) und (22) zu:

Regelgesetz	Geregeltes System	
$-\eta = a\,\varphi$	$T_a\,\varphi''' + (z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a)\,\varphi'' + (2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a)\,\varphi' + \omega_R^2\,(z + a)\,\varphi = 0$	(32)
$-\eta = a\,\varphi + c\int \varphi\,dt$	$T_a\,\varphi^{(IV)} + (z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a)\,\varphi''' + (2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a)\,\varphi'' + \omega_R^2\,(z + a)\,\varphi' + \omega_R^2\,c\,\varphi = 0$	(33)
$-\eta = c\int \varphi\,dt$	$T_a\,\varphi^{(IV)} + (z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a)\,\varphi''' + (2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a)\,\varphi'' + \omega_R^2\,z\,\varphi' + \omega_R^2\,c\,\varphi = 0$	(34)

Die Dämpfungsgrenze für den Regler mit Stellungszuordnung ergibt sich aus Gleichung (32) zu[20]):

$$a = 2\,D_R\left(\frac{z^2}{T_a\,\omega_R} + 2\,D_R\,z + T_a\,\omega_R\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_R^2\,(z + a)}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}} = \sqrt{\omega_R^2 + \frac{2\,D_R\,\omega_R\,z}{T_a}}.$$

Es zeigt sich daraus, daß mit wachsender Reglerdämpfung D_R auch die Einwirkung des Reglers auf das zu regelnde System (sein Rückstelleinfluß a) vergrößert werden kann (weil bei großer Dämpfung D_R dem hin und her schwingenden Regler viel Energie entzogen wird). Desgleichen kann der Rückstelleinfluß a groß gewählt werden bei großer Eigenfrequenz ω_R des schwingungsfähigen Reglers (weil dann der Regler seinen Befehlen rasch und willig folgt). Das gleiche ist hier jedoch auch bei sehr niederen Eigenfrequenzen ω_R möglich; jetzt schwingt der Regler so langsam, daß das zu regelnde System Zeit hat, seinen Schwingungen ziemlich getreu zu folgen und dieselben dadurch nicht merklich entdämpft. Wegen des dabei auftretenden außerordentlich langsamen Ansprechens des Reglers ist letztere Einstellung praktisch natürlich unbrauchbar. Bei kleinerer Last z muß der Rückstelleinfluß a kleiner gewählt werden (weil das System infolge der jetzt geringeren Rückstellkraft der fehlerhaften des Reglers mehr gehorcht). Den gleichen Einfluß wie die Eigenfrequenz ω_R zeigt die Anlaufzeit T_a; auch die Begründung ist die gleiche.

Bei dem Laufgeschwindigkeitsregler ergibt sich aus Gleichung (34) die Dämpfungsgrenze zu[21]):

$$c = \frac{\omega_R^2\,z}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}\left[\frac{2\,D_R\,z}{\omega_R} + T_a - \frac{T_a\,z}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}\right]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_R^2\,z}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a}{2\,T_a} \pm \sqrt{\frac{(2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a)^2}{4\,T_a^2} - \frac{c\,\omega_R^2}{T_a}}}.$$

Es zeigt sich daraus, daß mit wachsender Dämpfung der mögliche Verschiebeeinfluß c zuerst zunimmt (wegen des damit zunehmenden Energieentzugs), dann aber wieder auf den Betrag z^2/T_a des trägen Reglers abnimmt (weil schließlich die entdämpfende Wirkung der immer größer werdenden nacheilenden Phasenverschiebung des Steuergliedes den Energieentzug überwiegt). Bei bestimmtem Verschiebeeinfluß c ergibt sich somit, falls überhaupt Dämpfung möglich ist, ein bestimmter Bereich für die Dämpfung D_R des Reglers, der nicht verlassen werden darf. Dieser Bereich wird mit wachsender Reglereigenfrequenz ω_R immer größer; ebenso liegt er bei großer Last günstiger. Er hängt damit zusammen, daß sich jetzt auch zwei Eigenschwingungsformen zeigen, die aus Reglereigenschwingung und Systemeigenschwingung hervorgegangen sind.

Mit dem Regelgesetz $-\eta = a\,\varphi + c\int \varphi\,dt$ ergibt sich

---

[20]) Gleichung (32) gibt mit dem Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ die beiden Gleichungen

$$-\omega^3\,T_a + \omega\,(2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a) = 0$$
$$-\omega^3\,(z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a) + \omega_R^2\,(z + a) = 0,$$

daraus

$$\omega^2 = \frac{2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a}{T_a} = \frac{z + a}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}\,\omega_R^2.$$

Eine weitere Umformung ergibt:

$$z + a = \frac{2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a}{T_a\,\omega_R^2}\,(z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a)$$

und

$$z + a = \left(2\,\frac{D_R\,z}{T_a\,\omega_R} + 1\right)(z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a),$$

woraus

$$z + a = 2\,\frac{D_R\,z^2}{T_a\,\omega_R} + z + 4\,D_R^2\,z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a$$

und endlich der im Text angegebene Wert folgt.

[21]) Aus Gleichung (34) ergeben sich die folgenden beiden Beziehungen unter Annahme einer ungedämpften Schwingung als Lösungsansatz:

$$\omega^4\,T_a - \omega^2\,(2\,D_R\,\omega_R\,z + \omega_R^2\,T_a) + \omega_R^2\,c = 0$$
$$-\omega^3\,(z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a) + \omega\,\omega_R^2\,z = 0.$$

Aus der ersteren ergibt sich c zu:

$$c = -\omega^4\,\frac{T_a}{\omega_R^2} + \omega^2\left(\frac{2\,D_R\,z}{\omega_R} + T_a\right),$$

aus der zweiten Beziehung ergibt sich ω^2 zu:

$$\omega^2 = \frac{\omega_R^2\,z}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}.$$

Einsetzen dieses Wertes für ω^2 liefert

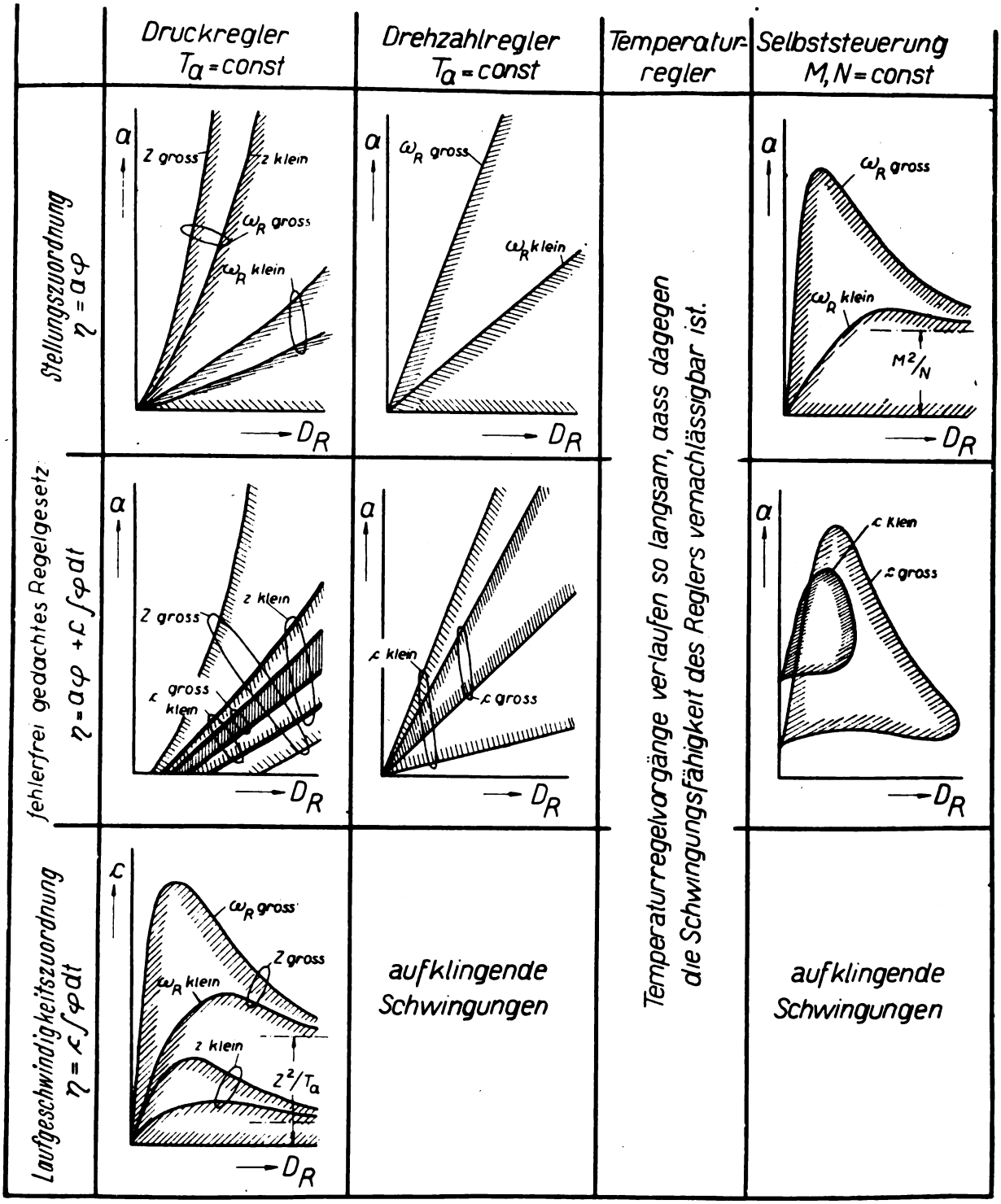
$$c = \frac{\omega_R^2\,z}{z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a}\left(\frac{2\,D_R\,z}{\omega_R} + T_a\right) - \frac{T_a}{\omega_R^2}\cdot\frac{\omega_R^4\,z^2}{(z + 2\,D_R\,\omega_R\,T_a)^2}$$

woraus nach Kürzungen der im Text angegebene Wert folgt.

Digitized by Google

Tafel V. Der schwingungsfähige Regler.

$$\eta_f'' + 2 D_R \omega_R \eta_f' + \omega_R^2 \eta_f = \eta.$$



Konstanten des zu regelnden Systems:

T_a = Anlaufzeit,
T_v = Verzögerungszeit,
M = Dämpfungsfähigkeit,
N = Ruderwirksamkeit,
z = »Belastung« beim druckzuregelnden System.

Konstanten des Reglers:

a = Rückstelleinfluß,
c = Verschiebeeinfluß,
D_R = Dämpfung, ω_R = Eigenfrequenz } des Reglers.

Konstanten des geregelten System:

D = Dämpfung, ω_e = Eigenfrequenz } schwingungsfähiger Vorgänge.

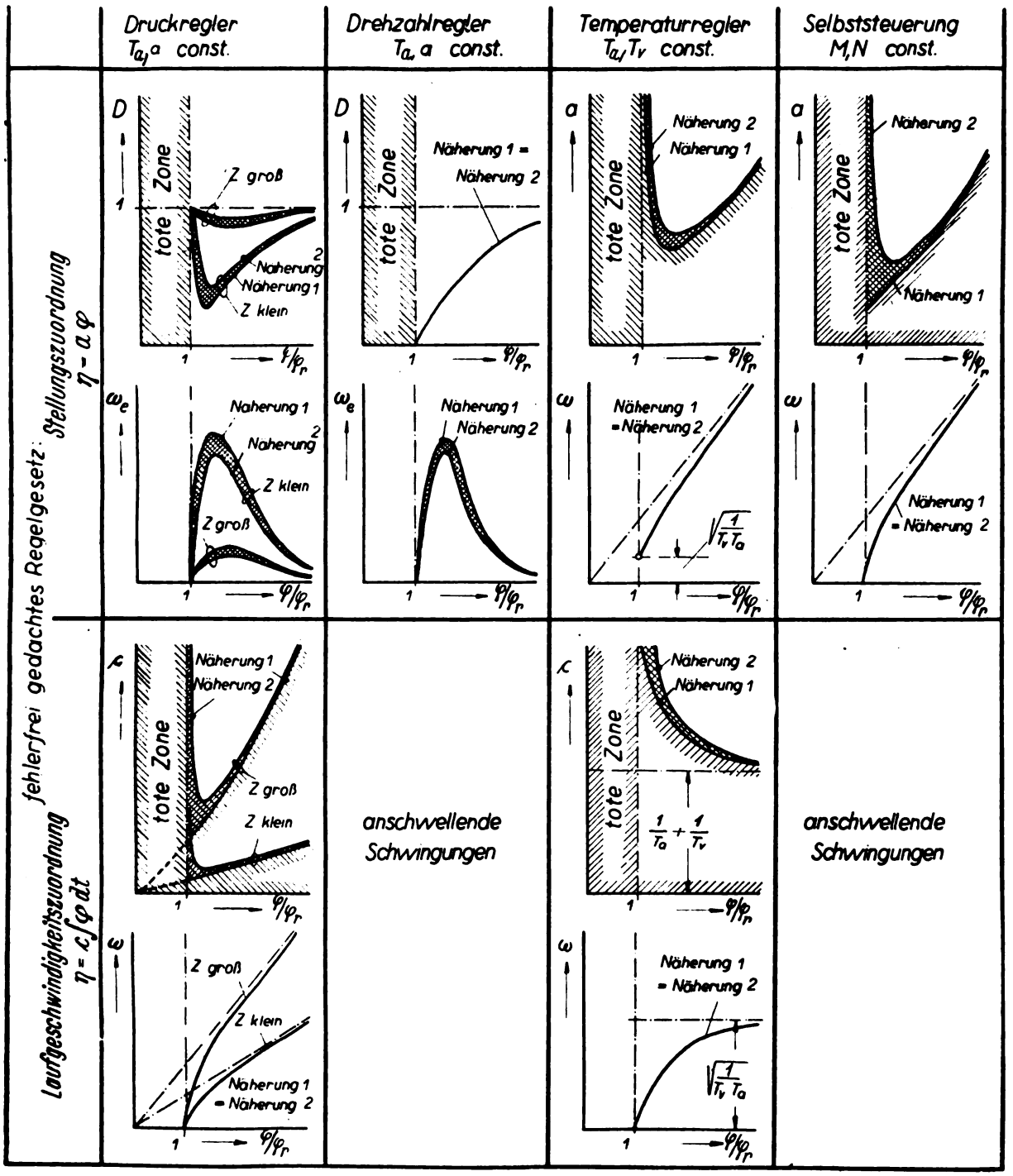
Zustandsgrößen:

φ = Abweichung vom Sollzustand,
η_f = Ausschlag des Steuergliedes.

Schraffierter Bereich = Bereich, in dem Dämpfung vorhanden ist.

Digitized by Google

Tafel VI. Der Regler mit Reibung im Fühlsystem.



Konstanten des zu regelnden Systems:

T_a = Anlaufzeit,
T_v = Verzögerungszeit,
M = Dämpfungsfähigkeit,
N = Ruderwirksamkeit,
z = »Belastung« beim druckzuregelnden System.

Konstanten des Reglers:

a = Rückstelleinfluß,
c = Verschiebeeinfluß.

Konstanten des geregelten Systems:

D = Dämpfung
ω_e = Eigenfrequenz
} schwingungsfähiger Vorgänge.

Zustandsgrößen:

φ = Abweichung vom Sollzustand,
$\pm \varphi_r$ = Reibungszone,
η_f = Ausschlag des Steuergliedes.

Schraffierter Bereich = Bereich, in dem Dämpfung vorhanden ist.

Kreuzweise schraffierter Bereich = Bereich zwischen den beiden Näherungen.

Digitized by Google

eine Dämpfungsgrenze bei[22]):

$$a = \frac{(z+2D_R\omega_R T_a)(\omega_R^2 T_a + 2D_R\omega_R z)}{2\omega_R^2 T_a} - z \pm \sqrt{\frac{(z+2D_R\omega_R T_a)^2(\omega_R^2 T_a+2D_R\omega_R z)^2}{4\omega_R^4 T_a^2} - \frac{c(z+2D_R\omega_R T_a)^2}{\omega_R^2 T_a}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_R^2(z+a)}{z+2D_R\omega_R T_a}} = \sqrt{\frac{\omega_R^2 T_a + 2D_R\omega_R z}{2T_a} \pm \sqrt{\frac{(\omega_R^2 T_a+2D_R\omega_R z)^2}{4T_a^2} - \frac{c}{T_a}\omega_R^2}}.$$

Daraus ergibt sich für den möglichen Rückstelleinfluß a des Reglers ein begrenzter Bereich. Dies rührt daher, daß das geregelte System auch jetzt zwei Schwingungsformen zeigt; die eine war schon bei fehlerfreiem Regler aufgetreten, die andere ist aus der Eigenschwingung des Reglers hervorgegangen. Wird der Rückstelleinfluß a zu groß gewählt, dann gerät die Reglereigenschwingungsform ins Aufklingen (weil die Frequenz des Regelvorganges und damit die Phasenverschiebung des Steuergliedes zunimmt). Wird er zu klein gewählt, dann gerät die Systemschwingung ins Aufklingen (weil der entdämpfende Verschiebeeinfluß zu stark zur Wirkung kommt). Dieser zulässige Bereich des Rückstelleinflusses a wird breiter, wenn der Verschiebeeinfluß abnimmt (schließlich geht er in den Bereich der reinen Stellungszuordnung über); er wird jedoch auch breiter mit wachsender Eigenfrequenz ω_R des Reglers. Er rückt zu größeren Werten mit wachsender Dämpfung D_R des Reglers; denn damit steigen beide Grenzen (die eine, Systemschwingung, wegen der wachsenden Phasenverschiebung; die andere, raschere, Reglerschwingung wegen des bei ihr schneller wachsenden Energieentzugs). Der Bereich schrumpft zu null zusammen, wenn

$$c > \frac{(\omega_R^2 T_a + 2D_R\omega_R z)^2}{4T_a\omega_R^2}.$$

Drehzahlregler. Die hierher gehörende Gleichungsgruppe ist:

Regelgesetz	Geregeltes System
$-\eta = a\varphi$	$T_a\varphi''' + 2T_a D_R\omega_R\varphi'' + T_a\omega_R^2\varphi' + a\omega_R^2\varphi = 0$ . . (35)
$-\eta = a\varphi + c\int\varphi\,dt$	$T_a\varphi^{(IV)} + 2T_a D_R\omega_R\varphi''' + T_a\omega_R^2\varphi'' + a\omega_R^2\varphi' + c\omega_R^2\varphi = 0$ (36)
$-\eta = c\int\varphi\,dt$	(sinnlos, da Drehzahlregler damit stets aufklingend).

Der Drehzahlregler zeigt, wie grundsätzlich immer, das Verhalten des Druckreglers bei der Last null. Der Stellungsregler zeigt eine Dämpfungsgrenze bei

$$a = 2D_R\omega_R T_a$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a\omega_R}{2D_R T_a}} = \omega_R.$$

Mit wachsender Frequenz ω_R und wachsender Dämpfung D_R nimmt der zulässige Rückstelleinfluß a zu. Es muß jetzt bei kleiner Frequenz ω_R sehr klein gehalten werden; die einzige Rückstellkraft kommt hier vom Regler und ist bei niederen Frequenzen ω_R stark phasenverschoben.

Das Regelgesetz $-\eta = a\varphi + c\int\varphi\,dt$ zeigt, wie beim Druckregler und aus denselben Gründen, einen Bereich für den Rückstelleinfluß a[23]):

$$a = D_R\omega_R\left(T_a \pm \sqrt{T_a^2 - \frac{4cT_a}{\omega_R^2}}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a\omega_R}{2D_R T_a}} = \sqrt{\frac{\omega_R^2}{2} \pm \omega_R\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c}{T_a}}}.$$

Der Bereich spitzt sich hier jedoch nach dem Nullpunkt zu, da das nicht selbst rückstellfähige drehzahlzuregelnde System ohne Rückstelleinfluß a des Reglers nicht arbeiten kann. Aus demselben Grunde entfällt eine Betrachtung des Laufgeschwindigkeitsreglers. Der gedämpfte Bereich schrumpft zu null zusammen, wenn

$$c > \frac{\omega_R^2 T_a}{4}.$$

Temperaturregler. Für das temperaturzuregelnde System erübrigt sich eine Betrachtung mit schwingungsfähigem Regler. Gegenüber den Zeiträumen, in denen sich hier die Regelvorgänge abspielen, sind alle Eigenfrequenzen des Reglers so rasch, daß sie vernachlässigbar sind.

Fahrzeugselbststeuerung. Hierfür ergibt sich die Gleichungsgruppe:

Regelgesetz	Geregeltes System
$-\eta = a\varphi$	$\varphi^{(VI)} + (M+2D_R\omega_R)\varphi''' + (2D_R\omega_R M + \omega_R^2)\varphi'' + \omega_R^2 M\varphi' + \omega_R^2 a N\varphi = 0$ (37)
$-\eta = a\varphi + c\int\varphi\,dt$	$\varphi^{(V)} + (M+2D_R\omega_R)\varphi^{(IV)} + (2D_R\omega_R M + \omega_R^2)\varphi''' + \omega_R^2 M\varphi'' + \omega_R^2 a N\varphi' + \omega_R^2 cN = 0$ (38)
$-\eta = c\int\varphi\,dt$	(sinnlos, da Selbststeuerung hier stets aufklingend).

[22]) Der Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$ führt bei Gleichung (33) zu

$$\omega^4 T_a - \omega^3(\omega_R^2 T_a + 2D_R\omega_R z) + \omega_R^2 c = 0$$
$$-\omega^3(z+2D_R\omega_R T_a) + \omega\omega_R^2(z+a) = 0$$

und daraus zu

$$a = \omega^2\frac{z+2D_R\omega_R T_a}{\omega_R^2} - z.$$

Für die Frequenz ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{\omega_R^2 T_a + 2D_R\omega_R z}{2T_a} \pm \sqrt{\frac{(\omega_R^2 T_a+2D_R\omega_R z)^2}{4T_a^2} - \frac{c\omega_R^2}{T_a}},$$

womit

$$a = \frac{(\omega_R^2 T_a+2D_R\omega_R z)(z+2D_R\omega_R T_a)}{2T_a\omega_R^2} - z$$
$$\pm\sqrt{\left[\frac{(\omega_R^2 T_a+2D_R\omega_R z)(z+2D_R\omega_R T_a)}{2T_a\omega_R^2}\right]^2 - \frac{c(z+2D_R\omega_R T_a)^2}{T_a\omega_R^2}}.$$

[23]) Die Beziehungen des Drehzahlreglers können, wie immer, aus den Beziehungen des Druckreglers durch Nullsetzen der Last z erhalten werden.

Der Regler mit Stellungszuordnung zeigt eine Dämpfungsgrenze bei[24]):

$$aN = \frac{1}{4}(2D_R M + \omega_R)^2 - \left(\frac{\omega_R M}{M+2D_R\omega_R} - \frac{2D_R M+\omega_R}{2}\right)^2$$

[24]) Aus Gleichung (37) ergibt sich mit dem Lösungsansatz $\varphi = \varphi^* \sin\omega t$:

$$\omega^6 - \omega^3(2D_R\omega_R M + \omega_R^2) + \omega_R^3 aN = 0$$
$$-\omega^3(M+2D_R\omega_R) + \omega\omega_R^2 M = 0,$$

woraus

$$aN = \frac{-\omega^6}{\omega_R^3} + \omega^2\left(\frac{2D_R M}{\omega_R} + 1\right)$$

und

$$\omega^2 = \frac{\omega_R^2 M}{M+2D_R\omega_R}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$aN = -\frac{\omega_R^3 M^3}{(M+2D_R\omega_R)^3} + \frac{2D_R\omega_R M^2 + \omega_R^2 M}{M+2D_R\omega_R}.$$

Digitized by Google

$$\omega = \sqrt{\frac{M\,\omega_R^2}{M + 2\,D_R\,\omega_R}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,D_R\,\omega_R\,M + \omega_R^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(2\,D_R\,\omega_R\,M + \omega_R^2)^2 - a\,N\,\omega_R^2}\,.$$

Es zeigt sich daraus, daß der Rückstelleinfluß a des Reglers um so größer gewählt werden kann, je größer dessen Eigenfrequenz ω_R ist. Die Dämpfung D_R des Reglers darf einen bestimmten Bereich nicht verlassen. Wird dieser Bereich unterschritten, dann genügt der Energieentzug nicht mehr, um die rasche Eigenschwingungsform (Reglereigenschwingung) abzudämpfen. Wird dieser Bereich überschritten, dann wird die langsame Systemschwingungsform durch die große Phasennacheilung des Steuergliedes zu anschwellenden Schwingungen veranlaßt. Bei unendlich großer Dämpfung D_R geht der Vorgang in den Vorgang des trägen Reglers über; es zeigt sich dann eine Dämpfungsgrenze bei

$$a < \frac{M^2}{N}\,.$$

Mit dem Regelgesetz $-\eta = a\,\varphi + c\int \varphi\,dt$ liegt die Dämpfungsgrenze bei[25]):

$$a\,N = \frac{1}{4}(2\,D_R\,M + \omega_R)^2 - \left[\frac{1}{2}\,\frac{\omega_R\,M}{M + 2\,D_R\,\omega_R} - \frac{2\,D_R\,M + \omega_R}{2}\right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_R\,M}{M + 2\,D_R\,\omega_R}\right)^2 - \frac{c\,N}{M + 2\,D_R\,\omega_R}}\right]^2.$$

Sie ähnelt in ihrem Verhalten dem Stellungsregler. Jetzt ist jedoch der zulässige Bereich für den Rückstelleinfluß auch für kleine Werte beschnitten. Der Rückstelleinfluß darf, wie schon beim fehlerfreien Regler, ein gewisses Maß nicht unterschreiten, um den entdämpfenden Verschiebeeinfluß c nicht zu sehr hervortreten zu lassen. Der Bereich, in dem der Rückstelleinfluß a bleiben muß, wird mit wachsendem Verschiebeeinfluß c immer kleiner.

γ) Der Regler mit Reibung.

Die Aufteilung des Verhaltens des Reglers mit Reibung erfolgt in die beiden Fälle, Reibung im Fühlsystem und Reibung im Steuerglied. Die analytische Rechnung erfolgt nur für den ersten Fall; durch eine einfache Umrechnung lassen sich deren Ergebnisse auf die Verhältnisse bei Reibung im Steuerglied übertragen. Reibung im Regler bedeutet, daß sein Steuerglied nicht eine genau festgelegte Stellung einnimmt, sondern innerhalb eines bestimmten Bereiches um die Sollstellung schwanken kann. Bei sich ändernder Sollstellung hinkt dabei das Steuerglied um diesen Bereich nach, so daß von dem Regler mit Reibung ähnliche Auswirkungen, wie von dem (ebenfalls nachhinkenden) trägen Regler zu erwarten sind. In der Tat zeigt die folgende Rechnung, daß durch die Reglerreibung Schwingungen des fehlerfrei geregelten Systems entdämpft, und aperiodische Bewegungen schwingungsfähig gemacht werden. Da der Nachhinkebetrag durch Reibung gleichbleibend ist, ist sein Einfluß bei großen Abweichungen gering und wird erst bei geringen Abweichungen merkbar; bei immer weiter wachsenden Auslenkungen φ vom Sollzustand geht das System in den fehlerfreien Regler über. Das bedeutet, daß (beispielsweise nach einer Störung) der Ausschwingungsvorgang anfangs wie beim fehlerfreien Regler verläuft und erst bei kleinen Ausschlägen davon Abweichungen zeigt; diese können dann allerdings so bedeutend sein, daß sich das geregelte System überhaupt nicht mehr beruhigt, sondern in Dauerschwingungen verbleibt.

[25]) Aus Gleichung (36) ergeben sich:

$$\omega^5 - (\omega_R^2 + 2\,D_R\,\omega_R\,M)\,\omega^3 + a\,N\,\omega_R^2\,\omega = 0$$

$$\omega^4\,(M + 2\,D_R\,\omega_R) - \omega_R^2\,M\,\omega^2 + \omega_R^2\,c\,N = 0,$$

woraus

$$\omega^2 = \frac{2\,D_R\,\omega_R\,M + \omega_R^2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(2\,D_R\,\omega_R\,M + \omega_R^2)^2 - a\,N\,\omega_R^2}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_R^2\,M}{M + 2\,D_R\,\omega_R} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_R^2\,M}{M + 2\,D_R\,\omega_R}\right)^2 - \frac{c\,N\,\omega_R^2}{M + 2\,D_R\,\omega_R}}\,.$$

Gleichsetzen dieser beiden Werte für ω^2 und Quadrieren liefert:

$$\frac{1}{4}(2\,D_R\,\omega_R\,M + \omega_R^2)^2 - a\,N\,\omega_R^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\,\frac{\omega_R^2\,M}{M + 2\,D_R\,\omega_R} - \frac{2\,D_R\,\omega_R\,M + \omega_R^2}{2}\right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_R^2\,M}{M + 2\,D_R\,\omega_R}\right)^2 - \frac{c\,N\,\omega_R^2}{M + 2\,D_R\,\omega_R}}\right]^2.$$

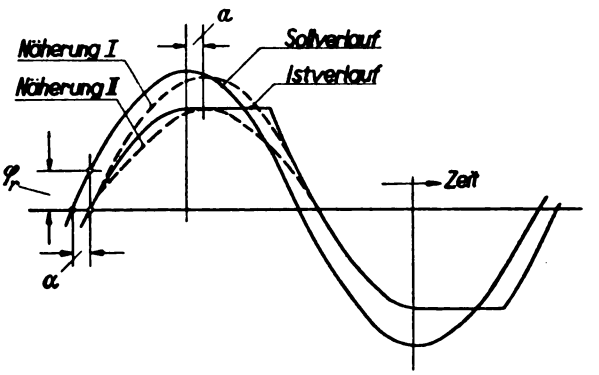


Bild 3. Zur Erläuterung der Verhältnisse bei dem Regler mit Reibung.

Für Schwingungen können die Verhältnisse bei Reibung bequem angenähert erfaßt werden. Der durch Reibungseinflüsse abgeänderte Verlauf eines vom Fühler kommenden Befehls φ kann durch zwei in Amplitude und Phase gegenüber der Sollkurve geänderte Sinuskurven φ_f ersetzt werden, Bild 3. Davon stellt die eine, Näherung 1, jedenfalls einen zu großen, die andere, Näherung 2, jedenfalls einen zu kleinen Betrag dar. Die tatsächlich bei Reibung auftretenden Verhältnisse werden dann zwischen beiden Näherungen liegen und sind so eingegrenzt.

Unter der hier stets gemachten Voraussetzung des Auftretens einer periodischen Lösung können die beiden Näherungskurven als Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$d\,\dot{\varphi}_f + \varphi_f = e\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

aufgefaßt werden, wobei die Größen d und e einem besonderen Zusammenhang genügen müssen. Für harmonische Bewegungen

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega\,t$$

$$\varphi_f = \varphi_{f_0} \sin(\omega\,t - \alpha)$$

ergibt sich für die beiden Näherungen folgende Rechnung:

Näherung 1. Mit dem Lösungsansatz wird:

$$d\,\omega\,\varphi_{f_0} \cos(\omega\,t - \alpha) + \varphi_{f_0} \sin(\omega\,t - \alpha) = e\,\varphi_0 \sin \omega\,t$$

und daraus:

$$\sin \alpha = \frac{d\,\omega\,\varphi_{f_0}}{e\,\varphi_0}$$

$$\cos \alpha = \varphi_{f_0}/e\,\varphi_0.$$

Andererseits ist aus der Kurvengestalt, Bild 3, zu entnehmen:

$$\sin \alpha = \frac{\varphi_r}{\varphi_0}\,;\quad \text{daraus}\quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_r}{\varphi_0}\right)^2},$$

womit sich für d der Wert:

$$d = \left(\frac{\varphi_r}{\varphi_0}\right) \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_r}{\varphi_0}\right)^2}}$$

ergibt. Dabei stellt die Größe φ_r den Betrag der Zustandsabweichung dar, der nötig ist, um den reibungsbehafteten Regler zum Ansprechen zu bringen; er sei als Maß für die Größe der Reibung hier eingeführt. Weiter sei bei der Näherung 1 die Näherungskurve φ_f so gelegt, daß sie in ihrer Größtamplitude die Sollkurve φ schneidet; damit zeigt sie jedenfalls größere Ausschläge, als die durch Reibung verzerrte Kurve. Es ergibt sich so:

$$\varphi_{f_0} = e\,\varphi_0 \cos \alpha = \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

und daraus

$$e = 1.$$

Digitized by Google

Für periodische Lösungen des Regelvorgangs ist für Näherung 1 das Verhalten bei Reibung damit anzunähern durch die Differentialgleichung (wobei der Einfachheit halber im folgenden statt φ_r/φ_0 einfach φ_r/φ gesetzt ist und unter φ nicht eine zeitliche Funktion, sondern ein Maß für die Abweichung vom Sollzustand zu verstehen ist).

$$\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{1}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\,\varphi_f^{\cdot}+\varphi_f=\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Näherung 2. Hier ergibt sich mit dem Lösungsansatz wieder die Gleichung

$$d\,\omega\,\varphi_{f_0}\cos(\omega t-\alpha)+\varphi_{f_0}\sin(\omega t-\alpha)=e\,\varphi_0\sin\omega t.$$

Da die Phasenverschiebung α aus der Kurvengestalt, Bild 3, wieder bei

$$\sin\alpha=\frac{\varphi_r}{\varphi_0}$$

liegt, ergibt sich auch hier, wie bei Näherung 1, für den Wert d

$$d=\frac{\varphi_r}{\varphi_0}\,\frac{1}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi_0}\right)^2}}\,.$$

Nun ist aber der Größtausschlag φ_{f_0} zu $\varphi_0-\varphi_r$ gewählt, womit wird

$$\varphi_{f_0}=e\,\varphi_0\cos\alpha=\varphi_0-\varphi_r$$

und daraus

$$e=\left(1-\frac{\varphi_r}{\varphi_0}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(\varphi_r/\varphi_0)^2}}\,.$$

Damit ist für periodische Lösungen des Regelvorganges mit Näherung 2 das Verhalten des Reglers bei Reibung anzunähern durch die Differentialgleichung

$$\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{1}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\,\varphi_f^{\cdot}+\varphi_f=\left(1-\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\,\varphi \quad (41)$$

Die Endergebnisse der analytischen Rechnung bei reibungsbehaftetem Regler sind für die einzelnen zu regelnden Systeme in den Tafeln VI und VII zusammengestellt. Dort ist die Dämpfung bei gedämpften Vorgängen und die Dämpfungsgrenze anschwellfähiger Vorgänge aufgetragen in Abhängigkeit von dem Verhältnis φ/φ_r der augenblicklichen Abweichung φ des Zustandes zur Reibungszone $\pm\varphi_r$. Der Raum zwischen den beiden Kurven der Näherungen 1 und 2, innerhalb dessen der wirkliche Kurvenverlauf erfolgt, ist durch kreuzweise Schraffur hervorgehoben. Die Betrachtungen sind nur für Stellungs- und Laufgeschwindigkeitsregler durchgeführt; auf eine Untersuchung des Regelgesetzes $-\eta=a\,\varphi+c\int\varphi\,dt$, das im Verhalten zwischen beiden liegt, ist verzichtet.

Ergibt sich bei der Behandlung hier eine Dämpfungsgrenze, dann zeigen dafür Näherung 1 und 2 die gleiche Frequenzkurve. Das rührt daher, daß die Phasenverschiebung α für beide Näherungen dieselbe ist und das zur Dauerschwingung gehörende Vektorbild sich nur bei einer Phasenverschiebung jeweils schließt. Bei dem Anschauen der Frequenzkurve $\omega=f\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)$ ist weiterhin noch zu beachten, daß die Frequenz ω für die Dämpfungsgrenze gilt. Diese Frequenzkurve kann also nur durchlaufen werden bei Änderung von $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ unter gleichzeitiger Änderung von a, c, T_a usw.

Druckregler. Für den Druckregler mit Stellungszuordnung ergibt sich aus den Gleichungen:

$$T_a\,\varphi^{\cdot}+z\,\varphi=\eta_f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$-\eta_f=a\,\varphi_f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$d\,\varphi_f^{\cdot}+\varphi_f=e\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Die Gleichung des reibgebremsten druckgeregelten Systems zu:

Näherung 1:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{T_a}{\sqrt{1-(\varphi_r/\varphi)^2}}\,\varphi^{\cdot\cdot}+\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{z}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\varphi_r/\varphi)^2}}+T_a\right)\varphi^{\cdot}+(z+a)\,\varphi=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42a)$$

Näherung 2:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{T_a}{\sqrt{1-(\varphi_r/\varphi)^2}}\,\varphi^{\cdot\cdot}+\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{z}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\varphi_r/\varphi)^2}}+T_a\right)\varphi^{\cdot}+\left(z+\frac{a\left(1-\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)}{\sqrt{1-(\varphi_r/\varphi)^2}}\right)\varphi=0 \quad (42b)$$

Gleichung (42) sagt aus, daß das geregelte System schwingungsfähig ist, womit die Anwendung des Näherungsverfahrens gerechtfertigt ist. Die Kenngrößen dieser Eigenschwingung ergeben sich zu[26]):

Näherung 1:

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2=\left[\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\pm\sqrt{\frac{D^2}{1-D^2}-\frac{z}{z+a}\cdot\frac{1}{(1-D^2)}}\right]^2+1$$

$$\omega_e=\frac{z+a}{T_a}\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}\cdot(1-D^2).$$

Die Auswertung obiger Formeln zeigt, Tafel VI, daß mit kleiner werdenden Ausschlägen $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ auch die Dämpfung D immer mehr abnimmt (weil bei kleiner werdenden Ausschlägen φ/φ_r die entdämpfende Phasenverschiebung α zunimmt). Bei größeren Abweichungen vom Sollzustand verläuft der Vorgang aperiodisch (weil der Einfluß der Phasenverschiebung α durch Reibung bei großen Abweichungen gering ist; $\sin\alpha=\frac{\varphi_r}{\varphi}$). Bei sehr kleinen Abweichungen $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ vom Sollzustand ist die Dämpfung D wieder größer (weil

[26]) Es ergibt sich aus Gleichung (42a) für Näherung 1:

$$\omega_0^2=\frac{z+a}{\frac{\varphi_r}{\varphi}T_a}\,\omega_e\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}$$

$$D=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}z}{\omega_e\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_a\right)\frac{\omega_e}{\omega_0}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}{\frac{\varphi_r}{\varphi}T_a},$$

daraus ergibt sich für die Frequenz mit der bekannten Beziehung*):

$$\frac{\omega_e}{\omega_0}=\sqrt{1-D^2}$$

$$\omega_e=\frac{z+a}{T_a}\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}\cdot(1-D^2).$$

Andererseits ergibt die Einführung der gleichen Beziehungen und dieser Formel für ω_e in die Gleichung für D:

$$D=\frac{1}{2}\,\frac{z}{T_a}\sqrt{1-D^2}\,\frac{T_a}{z+a}\,\frac{1}{1-D^2}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}}+\frac{\sqrt{1-D^2}}{2}\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}.$$

Nach geringen Umformungen wird:

$$\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)(1-D^2)-\sqrt{\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)(1-D^2)}\cdot 2D+\frac{z}{z+a}=0,$$

woraus

$$\sqrt{\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)(1-D^2)}=D\pm\sqrt{D^2-\frac{z}{z+a}}.$$

Nach Division mit $\sqrt{1-D^2}$ und Ordnen folgt der im Text angegebene Wert für $\frac{\varphi}{\varphi_r}$.

Für Näherung 2 ergibt der gleiche Rechnungsgang für die Frequenz ω_e:

$$\omega_e=\frac{1-D^2}{T_a}\left[z\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}+a\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}-1\right)\right].$$

Die Rechnung für die Dämpfung D führt auf eine Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)(1-D^2)-\sqrt{\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)(1-D^2)}\cdot 2D+\frac{z}{z+a\,\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)-1}{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}}}=0,$$

aus der entnommen werden kann, daß die Werte der Dämpfung D jetzt größer sind als in Näherung 1, sonst aber den gleichen Verlauf zeigen.

Digitized by Google

bei kleinen Ausschlägen die Amplitude des Steuergliedes zwar stark verzerrt, aber auch stark geschwächt ist und das eigenes Rückstellvermögen besitzende zu regelnde System nicht mehr zum Überschwingen bringen kann); schließlich endet der Vorgang in einer toten Zone $\varphi = \pm \varphi_r$. Mit wachsender Last z wird, wegen des dabei anwachsenden eigenen Rückstellvermögens, die Dämpfung D größer; sie wird ebenfalls größer mit sinkendem Rückstelleinfluß a, der hier infolge seiner durch Reibung verursachten Verzerrung ja gerade das System schwingungsfähig macht.

Beim Laufgeschwindigkeitsregler wird aus den Gleichungen

$$T_a \dot{\varphi} + z\varphi = \eta_f \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$-\eta_f = c \int \varphi_f \, dt \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$d\dot{\varphi}_f + \varphi_f = e\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

die Beziehung des geregelten Systems zu:

Näherung 1:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{T_a}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \dddot{\varphi} + \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi} z}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_a \right) \ddot{\varphi} + z\dot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (43a)$$

Näherung 2:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{T_a}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \dddot{\varphi} + \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi} z}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_a \right) \ddot{\varphi} + z\dot{\varphi} + \frac{c\left(1-\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \varphi = 0 \quad (43b)$$

Diese Beziehungen sagen aus, daß das als fehlerfrei geregeltes System bereits schwingungsfähige System jetzt durch die weitere Entdämpfung die Möglichkeit anschwellender Schwingungen zeigt. Die Dämpfungsgrenze ergibt sich aus Gleichung (43) zu[27]):

[27]) Es ergibt sich aus Gleichung (43) mit dem Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$.

Näherung 1:

$$-\omega^3 \frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{T_a}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + \omega z = 0$$

$$-\omega^2 \left(\frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{z}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_a \right) + c = 0,$$

woraus

$$\omega = \frac{z}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}$$

eingesetzt

$$c = \frac{z}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1} \frac{\frac{\varphi_r}{\varphi} z}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + \frac{T_a z^2}{T_a^2} \left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1 \right).$$

Näherung 2:

$$-\omega^3 \frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{T_a}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + \omega z = 0$$

$$-\omega^2 \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi} z}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_a \right) + c \frac{1-\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} = 0,$$

woraus

$$\omega = \frac{z}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}$$

eingesetzt

$$c = \frac{z}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1} \frac{\frac{\varphi_r}{\varphi} z}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}{1-\frac{\varphi_r}{\varphi}} + \frac{T_a z^2}{T_a^2} \left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1 \right) \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}{1-\frac{\varphi_r}{\varphi}}.$$

Nach Kürzung folgen in beiden Fällen die im Text angegebenen Werte.

Näherung 1:

$$c = \frac{z^2}{T_a} \left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2$$

$$\omega = \frac{z}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}$$

Näherung 2:

$$c = \frac{z^2}{T_a} \left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 \frac{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}}{\frac{\varphi}{\varphi_r} - 1}$$

$$\omega = \frac{z}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}.$$

Die Auswertung dieser Beziehungen, Tafel VI, zeigt, daß jedenfalls immer Dämpfung besteht, wenn

$$c < \frac{z^2}{T_a}$$

gewählt ist. Bei wesentlich größeren Werten von c herrscht zwar bei großen Abweichungen φ Dämpfung (weil dann der anteilige Einfluß des Reibungsbetrags φ_r nur gering ist); der Ausschwingvorgang endet jedoch nicht in der toten Zone, sondern bleibt vorher als Dauerschwingung bestehen (weil bei den jetzt kleinen Ausschlägen φ der phasenverschiebende Einfluß der Reibung anteilig so stark zur Wirkung kommt, daß er genügt, um das System in Dauerschwingungen zu erhalten). Diese Gefahr einer Dauerschwingung wird mit kleiner werdender Last z naturgemäß größer (weil die eigene Rückstellfähigkeit des Systems mit kleiner werdender Last abnimmt).

Drehzahlregler. Hier ergeben sich die Gleichungen des geregelten Systems zu:

Näherung 1:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{T_a}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \ddot{\varphi} + T_a \dot{\varphi} + a\varphi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (44a)$$

Näherung 2:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi} \frac{T_a}{\omega \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \ddot{\varphi} + T_a \dot{\varphi} + a \frac{1-\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} \varphi = 0 \quad (44b)$$

Es zeigt sich auch hier, daß das geregelte System schwingungsfähig wird, womit die Anwendung des Näherungsverfahrens gerechtfertigt ist. Die Kenngrößen der Schwingung ergeben sich zu:

Näherung 1:

$$D = \sqrt{\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 + 3}}$$

$$\omega_e = \frac{a}{T_a} \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1} \cdot (1 - D^2)$$

Näherung 2:

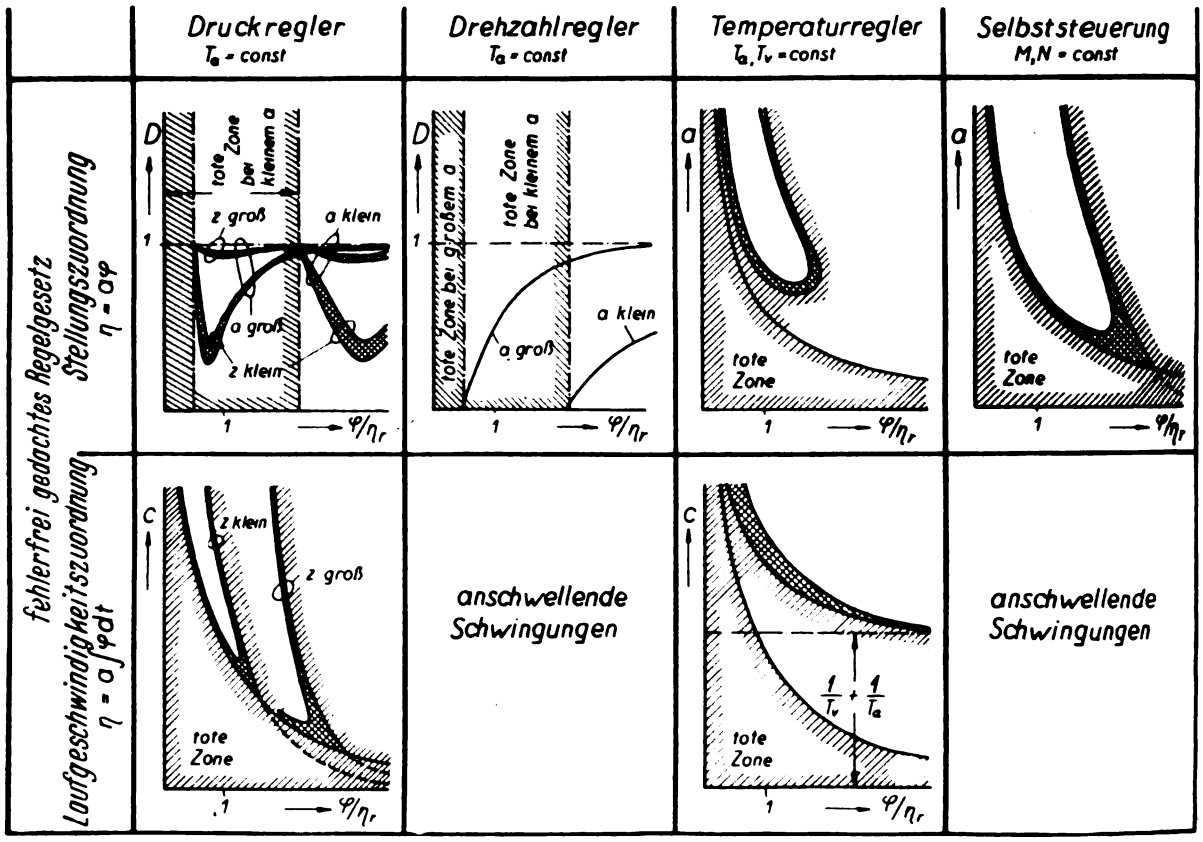
$$D = \sqrt{\frac{(\varphi/\varphi_r)^2 - 1}{(\varphi/\varphi_r)^2 + 3}}$$

$$\omega_e = \frac{a}{T_a} \left(\frac{\varphi}{\varphi_r} - 1\right) \cdot (1 - D^2).$$

Jetzt ist bei kleinen Auslenkungen $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ keine große Dämpfung D mehr vorhanden wie beim Druckregler (weil der eigene Rückstelleinfluß des zu regelnden Systems hier fehlt, der bei dem Druckregler an dieser Stelle ein nochmaliges Anwachsen der Dämpfung bewirkt hatte). Bei großen Abweichungen $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ ist der Einfluß des Reibungs-

Digitized by Google

Tafel VII. Der Regler mit Reibung im Steuerglied.



Konstanten des zu regelnden Systems:

T_a = Anlaufzeit,
T_v = Verzögerungszeit,
M = Dämpfungsfähigkeit,
N = Ruderwirksamkeit,
z = »Belastung« beim druckzuregelnden System.

Konstanten des Reglers:

a = Rückstelleinfluß,
c = Verschiebeeinfluß.

Konstanten des geregelten Systems:

D = Dämpfung, ω_e = Eigenfrequenz } schwingungsfähiger Vorgänge.

Zustandsgrößen:

φ = Abweichung vom Sollzustand,
η_f = Ausschlag des Steuergliedes,
$\pm\eta_r$ = Reibungszone.

Kreuzweise schraffierter Bereich = Bereich zwischen den beiden Näherungen.

betrages φ_r anteilig so gering, daß der Regelvorgang aperiodisch erfolgt. Die Dämpfung (für die sich aus beiden Näherungen hier die gleiche Beziehung ergibt) wird mit kleiner werdenden Auslenkungen $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ laufend geringer, da der gesamte Rückstelleinfluß des geregelten Systems von dem immer verzerrten Rückstelleinfluß des Reglers herrührt. Anschwellende Schwingungen sind jedoch nicht möglich.

Eine Betrachtung des Laufgeschwindigkeitsreglers ist sinnlos, da dieser schon als fehlerfreier Regler hier unbrauchbar ist.

Temperaturregler. Aus den Gleichungen (3), (5) und (39) ergeben sich für den Regler mit Stellungszuordnung hier die beiden Beziehungen:

Näherung 1:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi}\frac{T_v T_a}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi''' + \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}(T_v+T_a)}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_v T_a\right)\varphi'' + \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_v + T_a\right)\varphi' + (1+a)\,\varphi = 0 \quad (45a)$$

Näherung 2:

$$\frac{\varphi_r}{\varphi}\frac{T_v T_a}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi''' + \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}(T_v+T_a)}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_v T_a\right)\varphi'' + \left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}} + T_v + T_a\right)\varphi' + \left(1 + a\frac{1-\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\right)\varphi = 0 \quad (45b)$$

Beide Beziehungen zeigen, daß das mit fehlerfreiem Regler schwingungsfähige System jetzt durch das reibungsbedingte Nachhinken des Steuergliedes die Möglichkeit anschwellender Schwingungen zeigt. Die dazugehörende Dämpfungsgrenze ergibt sich aus Gleichung (45) zu[28]):

[28]) Die Rechnung verläuft in der gleichen Weise wie beim Druckregler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, Anmerkung 27.

Digitized by Google

Näherung 1:

$$a=\frac{T_v+T_a}{\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}\left[\frac{1}{2}\,\frac{T_v+T_a}{T_v T_a}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,\frac{T_v+T_a}{T_v T_a}\right)^2+\frac{1}{\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)T_v T_a}}\right].$$

Näherung 2:

$$a=\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2}{\frac{\varphi}{\varphi_r}-1}(T_v+T_a)\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}\left[\frac{1}{2}\,\frac{T_v+T_a}{T_v T_a}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,\frac{T_v+T_a}{T_v T_a}\right)^2+\frac{1}{\left(\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1\right)T_v T_a}}\right].$$

Die Auswertung dieser Formeln zeigt, Tafel VI, daß der Rückstelleinfluß a einen bestimmten Wert nicht überschreiten darf, wenn der Ausschwingvorgang in der toten Zone enden soll. Überschreitet der Rückstelleinfluß a diesen Grenzwert, dann endet ein Ausschwingvorgang in einer Dauerschwingung bei $\varphi > \varphi_r$. Zwar kann sich bei der eigenen Rückstellfähigkeit des zu regelnden Systems etwas außerhalb $\varphi = \varphi_r$ noch eine gedämpfte Zone ausbilden, die jedoch bei einem Ausschwingen von größeren Zustandsänderungen her nicht erreicht werden kann, weil ein Bereich anschwellender Schwingungen dazwischen liegt. Es ist jedenfalls immer Dämpfung, solange gilt

$$a < \frac{(T_v+T_a)^2}{T_v T_a}.$$

Für den Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung ergeben sich die Beziehungen:

Näherung 1:

$$\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}\,T_v T_a}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi^{(IV)}+\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}(T_v+T_a)}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_v T_a\right)\varphi'''+\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_v+T_a\right)\varphi''+\varphi'+c\,\varphi=0 \quad (46a)$$

Näherung 2:

$$\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}\,T_v T_a}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi^{(IV)}+\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}(T_v+T_a)}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_v T_a\right)\varphi'''+\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_v+T_a\right)\varphi''+\varphi'+c\,\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)-1}{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}}\varphi=0 \quad \ldots \quad (46b)$$

Es zeigt sich wieder, daß der Regelverlauf eine Dämpfungsgrenze zeigt, die bei den Werten[29])

[29]) Mit dem Lösungsansatz $\varphi=\varphi_a \sin \omega t$ ergibt sich aus Gleichung (46):

Näherung 1:

$$\omega^4\frac{\varphi_r}{\varphi}\frac{T_v T_a}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}-\omega^2\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\frac{1}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_v+T_a\right)+c=0$$

$$-\omega^2\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\frac{T_v+T_a}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+T_v T_a\right)+\omega=0,$$

woraus:

$$c=\omega^2(T_v+T_a)+\frac{\omega\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}-\omega^3\frac{T_v T_a}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\frac{\varphi_r}{\varphi}$$

und

Näherung 1:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}}(\omega-\omega^3 T_v T_a)+\omega^2(T_v+T_a)$$

$$\omega=-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{T_v+T_a}{T_v T_a\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2\frac{(T_v+T_a)^2}{T_v^2 T_a^2\left(1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2\right)}+\frac{1}{T_v T_a}}.$$

Näherung 2:

$$c=\frac{1}{\frac{\varphi}{\varphi_r}-1}(\omega-\omega^3 T_v T_a)+\frac{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}}{\frac{\varphi}{\varphi_r}-1}\omega^2(T_v+T_a)$$

ω wie bei Näherung 1

verläuft. Ein Auswerten dieser Beziehungen, Tafel VI, zeigt für große Abweichungen φ vom Sollzustand dieselben Grenzbedingungen wie der fehlerfreie Regler. Bei Annäherung an den Sollzustand während des Ausschwingevorganges kann hier jedoch der Verschiebeeinfluß c des Reglers größer gewählt werden wie beim fehlerfreien Regler. Die Phasenverschiebung des Steuergliedes gegenüber dem Faktor des Zustandes beträgt nämlich schon beim fehlerfreien Laufgeschwindigkeitsregler $\frac{\pi}{2}$. Sie wird jetzt noch größer; das bedeutet aber, daß ihr entdämpfender Anteil wieder geringer wird.

Fahrzeugselbststeuerung. Für den hier allein in Frage kommenden Stellungsregler ergibt sich hier die Gleichung (47):

Näherung 1:

$$\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi'''+\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}M}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+1\right)\varphi''+M\varphi'+aN\varphi=0 \quad (47a)$$

Näherung 2:

$$\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\varphi\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi'''+\left(\frac{\frac{\varphi_r}{\varphi}M}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}+1\right)\varphi''+M\varphi'+aN\frac{1-\frac{\varphi_r}{\varphi}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\varphi=0 \quad (47b)$$

Es zeigt sich daraus, daß infolge der durch die Reibung verursachten Phasenverschiebung des Steuergliedes die Möglichkeit anschwellender Schwingungen besteht. Die zugehörige Dämpfungsgrenze liegt bei[30]):

$$\omega=-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi_r}{\varphi}\,\frac{T_v+T_a}{T_v T_a}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2}}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2\frac{(T_v+T_a)^2}{T_v^2 T_a^2\left(1-\left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)^2\right)}+\frac{1}{T_v T_a}}.$$

Die numerische Rechnung erfolgt zweckmäßig durch Ausrechnen von ω und Einsetzen in die Beziehung für c. Die Werte für Näherung 2 ergeben sich aus Näherung 1, wenn statt c der Wert

$$c\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}-1\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2-1}$$

gesetzt wird.

[30]) Der Rechnungsgang ist identisch mit dem des Druckreglers mit Laufgeschwindigkeitszuordnung, Anmerkung 27.

Digitized by Google

Näherung 1:

$$a = \frac{M^2}{N}\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2$$

$$\omega = M\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}$$

Näherung 2:

$$a = \frac{M^2}{N}\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 \frac{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}}{\frac{\varphi}{\varphi_r} - 1}$$

$$\omega = M\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_r}\right)^2 - 1}.$$

Es ist jedenfalls immer Dämpfung vorhanden, solange

$$a < \frac{M^2}{N}$$

ist. Bei größeren Werten bildet sich ein Bereich aus, in dem anschwellende Schwingungen auftreten, und der den Ausschwingvorgang (beispielsweise nach einer Störung) verhindert in die tote Zone einzulaufen. Der Ausschwingvorgang endet in einer Dauerschwingung, die um so größere Ausschläge hat, je größer der Rückstelleinfluß a gewählt ist (weil mit größer werdendem Rückstelleinfluß a und damit größer werdender Frequenz die natürliche Dämpfung des Systems abnimmt).

Der Regler mit Reibung im Steuerglied. Befindet sich die reibungsbehaftete Stelle auf Seiten des Steuergliedes, dann ändert eine Änderung der Einstellung (a, b, c) des Reglers auch den anteiligen Einfluß dieser Reibung. Bei einer Verkleinerung des Reglereinflusses wächst der anteilige Reibungsbetrag stark an (denn bei kleinem Regeleinfluß treten kleine Bewegungen des Steuergliedes auf, die durch die Reibung im Steuerglied mehr verzerrt werden als die größeren Bewegungen bei größerem Regeleinfluß). Es ist daher zu erwarten, daß die bei Reibung im Fühlsystem erhaltenen Ergebnisse jetzt insofern abgeändert werden, als diese bei kleinen Regeleinflüssen zu größeren Abweichungen φ verschoben sind. Der anteilige Reibungsbetrag ist umgekehrt proportional dem Einfluß a bzw. c des Reglers, so daß die früheren Ergebnisse gelten, wenn statt $\frac{\varphi}{\varphi_r}$ der Wert $\frac{\varphi}{\eta_r/a}$ bzw. $\frac{\varphi}{\eta_r/c}$ gesetzt wird. Dabei bedeutet η_r das Maß, um das der Kraftschalter verstellt werden muß, damit am Steuerglied Bewegung auftritt. Die mit diesen neuen Werten erhaltenen Ergebnisse sind in Tafel VII dargestellt. Es zeigt sich in der Tat eine Verschiebung der Dämpfungsgrenzen zu größeren Abweichungen bei Verkleinerung des Regeleinflusses; die tote Zone, innerhalb der der Regelvorgang zum Stillstand kommt, ist jetzt durch eine Hyperbel $\frac{\varphi}{\eta_r} = \frac{1}{a}$ abgegrenzt (bei kleinen Regeleinflüssen a bzw. c muß ja schon eine große Abweichung vorhanden sein, um die Reibung im Steuerglied zu überwinden).

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung · Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. · Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute · Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig · Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften · Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt · Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher

BAND XVII

1940

Herausgegeben von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALTS-ÜBERSICHT

Verfasserverzeichnis.

	Lfg.	Seite
Athen, H.: Der Bombenwurf aus dem Sturzflug und dem Steigflug	7	216
Behrbohm, H.: Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten	6	167
Betz, A.: Henrich Focke	10	297
Biermann, W.: Die rechnerische Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen von Flügeln mit Hilfe eines besonderen Ersatzsystems	10	314
Bollenrath, F.: Einflüsse auf die Zeit- und Dauerfestigkeit der Werkstoffe	10	320
Cassens, J.: Knickbiegeversuche	10	306
Dahmen, Chr.: Eine einfache Methode zur Untersuchung allgemeinerer Längsbewegungen eines Flugzeuges	8	221
Dessecker, W.: s. Biermann, W.		
Flügge-Lotz, J.: Strömungsaufnahmen eines durch einen Tragflügel gestörten Schraubenstrahles	6	161
Grambow, J. B.: Die Lambertsche Karte als Luftnavigationskarte	9	281
Hoff, W.: Das Zusammenwirken von Flugmotor und Luftschraube	10	299
Holle, W.: Zur Schallstärke des von schnell bewegten Profilen erzeugten Schalles	2	56
Hottenrott, E.: Zur Dauerfestigkeit von Duralblech-Nietungen	8	247
Ide, H.: Flugmotorengetriebe und ihre Berechnung	5	130
Jaeckel, K.: Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen	2	47
— Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen (Ergänzung)	3	81
Kolscher, M.: Unstetige Strömungen mit endlichem Totwasser	5	154
v. Koppenfels, W.: Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung	7	189
Küßner, H. G.: Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder	11/12	337
— Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegungen der Flüssigkeit	11/12	355
— Allgemeine Tragflächentheorie	11/12	370
Kuhle, E.: Rechnerische Bestimmung des Neutralpunktes von Flügeln	9	257
Laimla, E.: Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet	10	329
Lense, J.: Bemerkungen zur Lehre von den Kartenentwürfen	8	251
Lichte, A.: Probleme der Entwicklung der direkten Kraftstoffeinspritzung. Zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Otto Mader am 17. September	10	291
Lösch, F.: Beiträge zur Theorie der ebenen Potentialströmungen um Leitwerksprofile	1	1
— Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels	1	22
Lübcke, E.: s. Holle, W.		
Lutz, O.: Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren. 3. Teilbericht: Die Anregungsbedingungen beim Ansaugvorgang von Viertaktmotoren	4	123
— Die graphische Ermittlung von Ausströmvorgängen	10	332
Menzel-Rogner, H.: Das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung eines Leitwerksprofils endlicher Dicke verschwindenden Spalts	1	11
Meyer, J.: Zur Frage der bei Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebenden Drehsteifigkeit	2	54
Müller, J.: Über die Ursache der Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen	4	97
Muttray, H.: Ein Beitrag zur Frage der Messung des Flugstaudruckes	3	65
Neubert, M.: Rechteckige Blechhaut unter gleichmäßig verteiltem Flüssigkeitsdruck	7	207
Nübling, O.: Die Zahnradbeanspruchung und ihre Berechnungsweise bei Flugmotorengetrieben. Vergleich der Getriebe von Motoren mit verschiedenen Drehrichtungen	5	145
Oppelt, W.: Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben unter Berücksichtigung der apparativen Verwirklichung des Regelgesetzes	2	59
Piening, W.: Der Wirkungsgrad von Verbrennungsturbinen mit Gleichdruckverbrennung	9	267
Radomski, B.: Bemerkungen zur Ermittlung der Schubflußverteilung in Hohlquerschnitten	3	70
Ramsayer, K.: Die Änderung der Elemente magnetischer Störgebiete mit der Höhe und ihr Einfluß auf die Flugnavigation	6	174
Rautenberg, H. J.: Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze	4	106
— Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze (Ergänzung)	6	173
Reinhardt, A.: Zur Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik	6	172
Schade, Th.: Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. I. Analytischer Teil	11/12	387
Schlaefke, K.: Zur harmonischen Analyse von Nockenkurven	3	87

Digitized by Google

	Lfg.	Seite
Schmid, E.: Das beschleunigungsunabhängige Pendel von einem Freiheitsgrad auf einer Kleinkreisbahn	1	32
Schmidt, Fr. R.: Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren (Berichtigung)	2	55
Schmieden, C.: Über Tragflügelströmungen mit Wirbelablösung	2	37
Schultz-Grunow, F.: Untersuchungen über die Wirkungsweise des Gleichrichters	3	82
— Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten	8	239
Schwarz, L.: s. Küßner, H. G.		
— Berechnung der Funktionen U_1 (s) und U_2 (s) für größere Werte von s.	11/12	362
— Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung	11/12	379
Sissingh, G.: Beitrag zur Aerodynamik der Drehflügelflugzeuge	7	196
Söhngen, H.: Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt	1	17
Söhngen, H.: Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (Ebenes Problem)	11/12	401
Solf, K.: s. Flügge-Lotz, J.		
Sommer, A.: s. Neubert, M.		
Stieß, W.: Nullschub-Anzeigegerät und Ruderblockierung, zwei neue Hilfsmittel für Flugmessungen	8	236
Teichmann, A.: Gedankengänge zur Flatterberechnung (Berichtigung)	6	173
Weidemann, H.: Zur Trägheit von Staudruckanlagen	7	211
Weinberger, W.: Auftrieb und Moment von Leitwerksprofilen endlicher Dicke verschwindenden Spalts	1	3
Weinhold, J.: Über Kippversuche mit einem Holm-Rippenrost	3	76
Weymann, G.: Über Maßnahmen zur Verminderung des Luftschraubenschalls	3	89
Wieghardt, K.: s. Schultz-Grunow, F.		
v. Wolff, R.: Über die Bestimmung der Torsionseigenfrequenz eingespannter Träger, insbesondere von Flugzeugtragflügeln o. ä.	7	204

Sachverzeichnis.

	Lfg.	Seite
Henrich Focke, A. Betz	10	297

Aerodynamik und Flugmechanik.

	Lfg.	Seite
Beiträge zur Theorie der ebenen Potentialströmungen um Leitwerksprofile, Lösch, F.	1	1
Auftrieb und Moment von Leitwerksprofilen endlicher Dicke verschwindenden Spalts, Weinberger, W.	1	3
Das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung eines Leitwerksprofils endlicher Dicke verschwindenden Spalts, Menzel-Rogner, H.	1	11
Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt, Söhngen, H.	1	17
Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels, Lösch, F.	1	22
Über Tragflügelströmungen mit Wirbelablösung, Schmieden, C.	2	37
Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen, Jaeckel, K.	2	47
Zur Schallstärke des von schnell bewegten Profilen erzeugten Schalles, Holle, W./Lübcke E.	2	56
Ein Beitrag zur Frage der Messung des Flugstaudruckes, Muttray, H.	3	65
Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen, Ergänzung, Jaeckel, K.	3	81
Untersuchungen über die Wirkungsweise des Gleichrichters, Schultz-Grunow, F./Wieghardt, K.	3	82
Über Maßnahmen zur Verminderung des Luftschraubenschalls, Weymann, G.	3	89
Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze, Rautenberg, H. J.	4	106
Unstetige Strömungen mit endlichem Totwasser, Kolscher, M.	5	154
Strömungsaufnahmen eines durch einen Tragflügel gestörten Schraubenstrahles, Flügge-Lotz, J./Solf, K.	6	161
Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten, Behrbohm, H.	6	167
Zur Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik, Reinhardt, A.	6	172
Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze, Ergänzung, Rautenberg, H. J.	6	173
Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung, v. Koppenfels, W.	7	189
Beitrag zur Aerodynamik der Drehflügelflugzeuge, Sissingh, G.	7	196
Zur Trägheit von Staudruckanlagen, Weidemann, H.	7	211
Eine einfache Methode zur Untersuchung allgemeinerer Längsbewegungen eines Flugzeuges, Dahmen, Chr.	8	221
Nullschub-Anzeigegerät und Ruderblockierung, zwei neue Hilfsmittel für Flugmessungen, Stieß, W.	8	236
Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten, Schultz-Grunow, F.	8	239
Rechnerische Bestimmung des Neutralpunktes von Flügeln, Kuhle, E.	9	257
Das Zusammenwirken von Flugmotor und Luftschraube, Hoff, W.	10	299
Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet, Lamla, E.	10	329
Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder, Küßner, H. G./Schwarz, L.	11/12	337
Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegungen der Flüssigkeit, Küßner, H. G.	11/12	355
Berechnung der Funktionen U_1 (s) und U_2 (s) für größere Werte von s, Schwarz, L.	11/12	362
Allgemeine Tragflächentheorie, Küßner, H. G.	11/12	370
Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung, Schwarz, L.	11/12	379
Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. I. Analytischer Teil, Schade, Th.	11/12	387
Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (Ebenes Problem), Söhngen, H.	11/12	401

Digitized by Google

	Lfg.	Seite
Festigkeit.		
Bemerkungen zur Ermittlung der Schubflußverteilung in Hohlquerschnitten, Radomski, B.	3	70
Über Kippversuche mit einem Holm-Rippenrost, Weinhold, J.	3	76
Gedankengänge zur Flatterberechnung, Berichtigung, Teichmann, A.	6	173
Über die Bestimmung der Torsionseigenfrequenz eingespannter Träger, insbesondere von Flugzeugtragflügeln o. ä., v. Wolff, R.	7	204
Rechteckige Blechhaut unter gleichmäßig verteiltem Flüssigkeitsdruck, Neubert, M./Sommer, A.	7	207
Zur Dauerfestigkeit von Duralblech-Nietungen, Hottenrott, E.	8	247
Knickbiegeversuche, Cassens, J.	10	306
Die rechnerische Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen von Flügeln mit Hilfe eines besonderen Ersatzsystems, Biermann, W./Dessecker, W.	10	314
Werkstoffe.		
Über die Ursache der Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen, Müller, J.	3	65
Einflüsse auf die Zeit- und Dauerfestigkeit der Werkstoffe, Bollenrath, F.	10	320
Triebwerk und Brennstoffe.		
Zur Frage der bei Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebenden Drehsteifigkeit, Meyer, J.	2	54
Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren, Berichtigung, Schmidt, Fr. R.	2	55
Zur harmonischen Analyse von Nockenkurven, Schlaefke, K.	3	87
Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren. 3. Teilbericht: Die Anregungsbedingungen beim Ansaugvorgang von Viertaktmotoren, Lutz, O.	4	123
Flugmotorengetriebe und ihre Berechnung, Ide, H.	5	130
Die Zahnradbeanspruchung und ihre Berechnungsweise bei Flugmotorengetrieben. Vergleich der Getriebe von Motoren mit verschiedenen Drehrichtungen, Nübling, O.	5	145
Der Wirkungsgrad von Verbrennungsturbinen mit Gleichdruckverbrennung, Piening, W.	9	267
Probleme der Entwicklung der direkten Kraftstoffeinspritzung. Zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Otto Mader am 17. September, Lichte, A.	10	291
Das Zusammenwirken von Flugmotor und Luftschraube, Hoff, W.	10	299
Die graphische Ermittlung von Ausströmvorgängen, Lutz, O.	10	332
Ausrüstung.		
Das beschleunigungsunabhängige Pendel von einem Freiheitsgrad auf einer Kleinkreisbahn, Schmid, E.	1	32
Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben unter Berücksichtigung der apparativen Verwirklichung des Regelgesetzes, Oppelt, W.	2	59
Die Änderung der Elemente magnetischer Störgebiete mit der Höhe und ihr Einfluß auf die Flugnavigation, Ramsayer, K.	6	174
Der Bombenwurf aus dem Sturzflug und dem Steigflug, Athen, H.	7	216
Bemerkungen zur Lehre von den Kartenentwürfen, Lense, J.	8	251
Die Lambertsche Karte als Luftnavigationskarte, Grambow, J. B.	9	281

Digitized by Google

Digitized by Google

E Eng

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 1 enthält Arbeiten von: F. Lösch S. 1—2, W. Weinberger S. 3—11, H. Menzel-Rogner S. 11—17, H. Söhngen S. 17—22, F. Lösch S. 22—31, E. Schmid S. 32—36

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 1 SEITE 1 BIS 36 | MÜNCHEN, 20. 1. 1940

Diese Lieferung enthält den Bandtitel und das Inhaltsverzeichnis von Band 16 (Lieferung 1 bis 8/9)

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Beiträge zur Theorie der ebenen Potentialströmungen um Leitwerksprofile. Von F. Lösch . . . . . Seite 1

Auftrieb und Moment von Leitwerksprofilen endlicher Dicke verschwindenden Spalts. Von W. Weinberger . . . . . Seite 3

Das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung eines Leitwerksprofils endlicher Dicke verschwindenden Spalts. Von H. Menzel-Rogner . . . . . Seite 11

Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt. Von H. Söhngen . Seite 17

Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels. Von F. Lösch Seite 22

Das beschleunigungsunabhängige Pendel von einem Freiheitsgrad auf einer Kleinkreisbahn. Von E. Schmid . . . . . Seite 32

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. Januar 1940 Lfg. 1

Beiträge zur Theorie der ebenen Potentialströmungen um Leitwerksprofile.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Direktion Flugwerk.

Vorbemerkungen.

Von F. Lösch.

In dem vorliegenden Aufsatz wird über einige Untersuchungen zur Theorie der ebenen Potentialströmungen um Leitwerksprofile berichtet. Die Vorbemerkungen sollen über das Ziel dieser Arbeiten orientieren. Überdies werden die zur Verwendung kommenden Bezeichnungen zusammengestellt und soweit nötig erläutert.

Gliederung.

1. Übersicht über die in dem Bericht zusammengefaßten Arbeiten.
2. Zusammenstellung der benutzten Bezeichnungen.

1. Übersicht über die in dem Bericht zusammengefaßten Arbeiten.

Der vorliegende Bericht faßt die folgenden vier Arbeiten, die sich sämtlich mit ebenen Potentialströmungen um Leitwerksprofile befassen, zusammen:

1. Teil: W. Weinberger, Auftrieb und Moment von Leitwerksprofilen endlicher Dicke verschwindenden Spalts. S. 3.
2. Teil: H. Menzel-Rogner, Das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung eines Leitwerksprofils endlicher Dicke verschwindenden Spalts. S. 11.
3. Teil: H. Söhngen, Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt. S. 17.
4. Teil: F. Lösch, Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels. S. 22.

Die beiden ersten Teile behandeln Potentialströmungen um Klappenflügel. Bekanntlich läßt sich die ebene Potentialströmung um ein Leitwerksprofil verschwindender Dicke ohne Spalt nach der auf W. Birnbaum[1]) zurückgehenden Methode der Wirbelbelegung des Skeletts behandeln. Die sich danach für die aerodynamischen Kenngrößen der Profile ergebenden Werte, die in erster Linie von H. Glauert[2]) berechnet wurden, zeigen jedoch keine befriedigende Übereinstimmung mit Meßergebnissen, die an Klappenflügeln mit praktisch fehlendem Spalteinfluß gewonnen wurden. Man kann hoffen, daß die Übereinstimmung besser wird, wenn man bei der Berechnung der Potentialströmung die maximale Dicke und evtl. noch weiter die Dickenverteilung des Profils berücksichtigt. Um einen Anhaltspunkt dafür zu erhalten, wie weit diese Hoffnung berechtigt ist, wird man zweckmäßig den Einfluß der Dicke und Dickenverteilung auf die aerodynamischen Kenngrößen an solchen Profilen untersuchen, die sich in einfacher Weise konform auf den Kreis abbilden lassen, so daß der Rechenaufwand nicht zu groß wird. Über drei Untersuchungen dieser Art wird im 1. Teil berichtet[3]):

Um den Einfluß der Dicke bei fehlendem Ruderausschlag zu beurteilen, hat zunächst W. Weinberger ein in Flosse und Ruder aufgeteiltes, symmetrisches Joukowsky-Profil (vgl. 1. Teil, Bild 1) betrachtet. Der Einfluß der Dickenverteilung bei fehlendem Ruderausschlag wurde sodann von H. A. Ristau an einem symmetrischen Kármán-Trefftz-Profil (vgl. 1. Teil, Bild 7) untersucht. Schließlich hat F. Marguerre den Einfluß der Dicke bei vorhandenem Ruderausschlag an einem Profil untersucht, das nach einem Vorschlag von E. Trefftz † durch passende Deformation eines Joukowsky-Profils (vgl. 1. Teil, Bild 11) erhalten wird und annähernd mit einem in Flosse und Ruder aufgeteilten Joukowsky-Profil mit mechanisch ausgeschlagenem Ruder übereinstimmt. Alle Untersuchungen sind durchgeführt unter der Annahme, daß der Spalt des Leitwerks so schmal ist, daß er die Strömung um das Profil nicht beeinflußt. Zur Abschätzung des Beitrags der im Spalt wirkenden Druckkräfte zur Ruderkraft ist angenommen, daß der Spalt von zwei konzentrischen Kreisbögen um den Ruderdrehpunkt begrenzt wird und daß im Spalt linearer Druckabfall stattfindet. Die von der Luft auf das Ruder ausgeübte Reibungskraft und deren Moment wurden als sehr klein vernachlässigt.

Der 2. Teil befaßt sich mit dem Geschwindigkeitsfeld der ebenen Potentialströmung um einen Klappenflügel, wobei der Spalt wieder so schmal angenommen ist, daß er die Strömung nicht beeinflußt. Nach der eingangs genannten Birnbaumschen Methode ist die Berechnung dieses Strömungsfelds in bequemer Weise möglich, wenn das Profil unendlich dünn angenommen wird. Für dicke Profile läßt sich das Strömungsfeld noch dann verhältnismäßig einfach ermitteln, wenn die konforme Abbildung des Profils auf den Kreis einfach ist. Will man daher einen Anhaltspunkt für den Einfluß der Profildicke auf das Geschwindigkeitsfeld der Potentialströmung in der Umgebung eines Profils erhalten, so wird man zweckmäßig wieder den im 1. Teil befolgten Weg einschlagen und diesen Dickeneinfluß an einem Profil untersuchen, das sich in einfacher Weise konform auf den Kreis abbilden läßt. Die Untersuchung wird an dem-

[1]) W. Birnbaum, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 290.

[2]) H. Glauert, A theory of thin airofoils. ARC-Rep. and Mem. Nr. 910 (1924).

[3]) Diese Untersuchungen wurden ebenso wie die des 2. und 4. Teils von A. Kupper † veranlaßt.

Digitized by Google

selben Profil durchgeführt, das im 1. Teil zur Beurteilung des Dickeneinflusses bei vorhandenem Ruderausschlag herangezogen wurde.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat F. Keune[4]) ein Näherungsverfahren für die Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes der ebenen Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile angegeben. Da die im 2. Teil des vorliegenden Aufsatzes berechneten Geschwindigkeiten für das zugrunde gelegte Profil nach der exakten Methode der konformen Abbildung gewonnen sind, ermöglichen sie eine Beurteilung der Güte des Keuneschen Verfahrens bei der Anwendung auf geknickte Profile. Der Vergleich wurde für einige Stellen des Strömungsfeldes durchgeführt, wobei sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse beider Verfahren zeigte.

Die beiden noch folgenden Teile beziehen sich auf Doppelflügel. Die bisher vorliegenden Untersuchungen über die ebene Potentialströmung um ein beliebiges Doppelflügelsystem aus dünnen Profilen erfüllen, soweit sie nicht langwierige Rechnungen erfordern, die Umströmungsbedingung nur in einigen Punkten des Systems. In Ergänzung zu diesen Untersuchungen wird im 3. Teil für einen symmetrischen Doppelflügel verschwindender Dicke (vgl. 3. Teil, Bild 1, wobei $a < b < -c$ vorausgesetzt ist) unter Beschränkung auf eine lineare Theorie in dem Ruderwinkel β ein Verfahren angegeben, das einerseits die Umströmungsbedingung in allen Punkten des Leitwerks erfüllt und andererseits mit einem erträglichen Rechenaufwand arbeitet. Eine Einschränkung hinsichtlich der Spaltbreite wird nicht gemacht, es wird nur verlangt, daß die Flosse den Spalt nicht überdeckt. Die Grundlage des Verfahrens bildet die schon mehrfach genannte Birnbaumsche Theorie der tragenden Wirbelfläche.

Ausgehend von der Tatsache, daß für den unsymmetrischen Doppelflügel aus endlich dicken Profilen theoretische Ergebnisse bisher fehlen, ist das Ziel des 4. Teils, die ebene Potentialströmung um einen speziellen Doppelflügel dieser Art zu berechnen. Die dafür zur Verfügung stehende Methode ist die konforme Abbildung des Strömungsgebiets auf das Außengebiet zweier Kreise. Für die Wahl der Profile wird daher neben technischen Belangen der Gesichtspunkt maßgebend sein, diese Abbildung mit möglichst guter Annäherung bei möglichst geringem Aufwand durchzuführen. Die danach naheliegende Wahl von Joukowsky-Profilen läßt jedoch zufolge der starken Verjüngung dieser Profile gegen ihre Hinterkante befürchten, daß der dabei in Erscheinung tretende Spalteinfluß sehr schlecht die Spaltvorgänge bei tatsächlich konstruierten Doppelflügeln wiedergibt. Um Profile zu haben, bei denen diese Befürchtung nicht besteht und die trotzdem vom Standpunkt der konformen Abbildung ebenso einfach sind wie Joukowsky-Profile, wurden durch Abrundung der Hinterkante modifizierte Joukowsky-Profile, auf die zuerst A. Betz[5]) aufmerksam gemacht hat, verwendet. Auch für diese Wahl der Profile ist der Rechenaufwand sehr erheblich. Das angewandte Verfahren ist daher keineswegs als ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von Doppelflügeln zu empfehlen. Seine Anwendung in dem vorliegenden Fall rechtfertigt sich dadurch, daß überhaupt einmal zuverlässige Ergebnisse für einen unsymmetrischen Doppelflügel gewonnen werden sollten, die dann überdies als Grundlage für einen Vergleich mit den Ergebnissen evtl. zu entwickelnder gröberer Näherungsverfahren dienen können.

2. Zusammenstellung der benutzten Bezeichnungen.

$z = x + iy$ Punkt der Profilebene,
$z_N = x_N + iy_N$ Leitwerksnase,
$z_D = x_D + iy_D$ Ruderdrehachse,
l_F Flossentiefe,
l_R Rudertiefe,
$l_L = l_F + l_R$ Leitwerkstiefe,
d maximale Dicke des Leitwerks,
d_R Dicke des Leitwerks an der Ruderdrehachse,
ε Dickenparameter des Leitwerks,
δ Hinterkantenwinkel des Leitwerks,
α Anstellwinkel (= Winkel zwischen Anströmrichtung und Skelett der Flosse, positiv bei Anströmung von unten),
β Ruderwinkel (= Winkel zwischen Flossen- und Ruderskelett, positiv bei Ruderausschlag nach unten),
V Anströmgeschwindigkeit,
$\mathfrak{v}_z$ Vektor der Strömungsgeschwindigkeit in der z-Ebene (Profilebene),
v Betrag der Strömungsgeschwindigkeit,
ϑ Richtungswinkel der Strömungsgeschwindigkeit (Der Richtungswinkel wird gegen die positive reelle Achse, positiv im mathematisch positiven Sinn gemessen),
ϱ Luftdichte,
p_z Druck an der Stelle z,
p_∞ Druck im Unendlichen,
$q = \frac{\varrho}{2} V^2$ Staudruck,
$c_p(z)$ Beiwert des Drucks $p_z = p_\infty + q\, c_p(z)$,
$C_p(z)$ Beiwert der Druckdifferenz $p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}} = q C_p(z)$ an gegenüberliegenden Stellen $\bar{z}$ und z der Unter- und Oberseite des Profils,
c_a Beiwert des Gesamtauftriebs $A = q\, l_L\, c_a$,
c_m Beiwert des Gesamtmoments $M = q\, l_L^2\, c_m$ (Bezugspunkt ist die Leitwerksnase z_N. Der positive Momentendrehsinn stimmt mit dem positiven Drehsinn von Anstell- und Ruderwinkel überein),
$\mathfrak{R}_R$ Resultierende der am Ruder angreifenden Luftkräfte,
$\mathfrak{R}_S$ Beitrag der im Spalt wirkenden Druckkräfte zu $\mathfrak{R}_R$,
c_{n_R} Beiwert der Rudernormalkraft $N_R = q\, l_R\, c_{n_R}$,
c_R Beiwert des Rudermoments $M_R = q\, l_L^2\, c_R$ (Bezugspunkt ist in Teil 1 und 4 die Ruderdrehachse, in Teil 3 die Rudernase)[6]),
Γ_F Zirkulation um die Flosse,
Γ_R Zirkulation um das Ruder,
γ_F Dichte der Wirbelbelegung der Flosse,
γ_R Dichte der Wirbelbelegung des Ruders.

Für die Darstellung des Zusammenhangs der Auftriebs- und Momentenbeiwerte mit Anstell- und Ruderwinkel (Teil 1, 3 und 4) werden als unabhängige Veränderliche c_a und β gewählt. Für kleine c_a und β (was in den behandelten Fällen der Beschränkung auf kleine α und β gleichkommt) gelten dann die linearisierten Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= [\alpha] + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right] \beta, \\ c_m &= [c_m] + \left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right] \beta, \\ c_{n_R} &= [c_{n_R}] + \left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial \beta}\right] \beta, \\ c_R &= [c_R] + \left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial c_R}{\partial \beta}\right] \beta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

wobei die eingeklammerten Größen jeweils für $c_a = \beta = 0$ zu nehmen sind. Dabei sind im Falle symmetrischer Leitwerke (Teil 1 und 3) $[\alpha] = [c_m] = [c_{n_R}] = [c_R] = 0$.

In Teil 2 werden, entsprechend dem dort verfolgten Ziel, als unabhängige Veränderliche α und β gewählt. Betrag v und Richtungswinkel ϑ der Geschwindigkeit stellen sich dann im Sinne einer linearen Theorie in α und β in der Form:

$$\left.\begin{aligned} v &= [v] + \left[\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right] \alpha + \left[\frac{\partial v}{\partial \beta}\right] \beta, \\ \vartheta &= [\vartheta] + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right] \alpha + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right] \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

dar, wo die eingeklammerten Größen in diesem Falle für $\alpha = \beta = 0$ zu nehmen sind.

[4]) Vgl. 2. Teil, S. 15, [5]).
[5]) A. Betz, Eine Verallgemeinerung der Schukowskyschen Flügelabbildung, Z. Flugtechn. Bd. 15 (1924) S. 100.
[6]) Der Beiwert c_R wird hier (nach dem Vorgang von A. Kupper) auf l_L^2 und nicht, wie meist üblich, auf l_R^2 bezogen, damit Leitwerken von gleichem Umriß, bei gleichem Staudruck, mit ein- und demselben Rudermoment bei nur verschiedener Aufteilung des Leitwerksgrundrisses in Flosse und Ruder auch ein und derselbe Beiwert c_R entspricht.

Digitized by Google

1. Teil.

Auftrieb und Moment von Leitwerksprofilen endlicher Dicke verschwindenden Spalts.

Von W. Weinberger.

Die ebene Potentialströmung um Leitwerksprofile verschwindender Dicke ohne Spalt ist hauptsächlich von H. Glauert nach der Methode der wirbelbelegten Strecke berechnet worden. Die sich dabei für die aerodynamischen Kenngrößen der Profile ergebenden Werte zeigen keine befriedigende Übereinstimmung mit Meßergebnissen, die an Klappenflügeln mit praktisch fehlendem Spalteinfluß gewonnen wurden. Im Rahmen der Potentialtheorie kann eine Verbesserung der Ergebnisse von der Berücksichtigung der Dicke bzw. Dickenverteilung der Profile erhofft werden. Um einen Anhaltspunkt dafür zu erhalten, wie weit die Ergebnisse der Theorie durch die Berücksichtigung von Dicke und Dickenverteilung tatsächlich beeinflußt werden, wurden in der DVL drei Untersuchungen durchgeführt, über die im folgenden berichtet wird.

Gliederung.

I. Einfluß der Dicke bei fehlendem Ruderausschlag.
1. Beschreibung des Profils.
2. Kräfte und Momente.
3. Druckverteilung.
II. Einfluß der Dickenverteilung bei fehlendem Ruderausschlag.
1. Beschreibung des Profils.
2. Kräfte und Momente.
3. Druckverteilung.
III. Einfluß der Dicke bei vorhandenem Ruderausschlag.
1. Beschreibung des Profils.
2. Kräfte und Momente.
3. Druckverteilung.
IV. Zusammenfassung.

I. Einfluß der Dicke bei fehlendem Ruderausschlag.

1. Beschreibung des Profils.

Die Untersuchung des Dickeneinflusses bei fehlendem Ruderausschlag wird an einem symmetrischen Joukowsky-Profil durchgeführt, das durch die Teilpunkte $z_R = x_R + i y_R$ und $\bar{z}_R = x_R - i y_R$ in Flosse und Ruder aufgeteilt ist (Bild 1). Das Profil ergibt sich vermöge

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

als Bild eines Kreises

$$\zeta + \varepsilon = (1+\varepsilon)\, e^{i\omega} \quad (-\pi < \omega \leqq \pi) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Vorgabe des Dickenverhältnisses d/l_L ist ε und damit das Profil eindeutig bestimmt. Zahlentafel 1 zeigt die Abhängigkeit des Dickenparameters ε, Zahlentafel 2 die Abhängigkeit der relativen Lage l_d/l_L der maximalen Dicke des Profils vom Dickenverhältnis d/l_L. Die Profiltiefe berechnet sich aus dem Dickenparameter ε zu

$$l_L = 4\,\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+2\varepsilon}.$$

2. Kräfte und Momente.

Wir gehen aus von der ebenen Potentialströmung um den Bildkreis (2) des Profils, die zu der Anströmgeschwindigkeit V und der Anströmrichtung α (vgl. Bild 1) gehört und den Punkt $\zeta = 1$ als hinteren Staupunkt besitzt. Der zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_\zeta$ dieser Strömung bez. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\bar{\mathfrak{v}}_\zeta$ ist

Zahlentafel 1. Abhängigkeit des Dickenparameters ε vom Dickenverhältnis d/l_L.

d/l_L	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
ε	0	0,0401	0,0836	0,1311	0,1833	0,3053

Zahlentafel 2. Abhängigkeit der relativen Lage l_d/l_L der maximalen Dicke vom Dickenverhältnis.

d/l_L	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
l_d/l_L	0,25	0,2506	0,2512	0,2550	0,2590	0,702

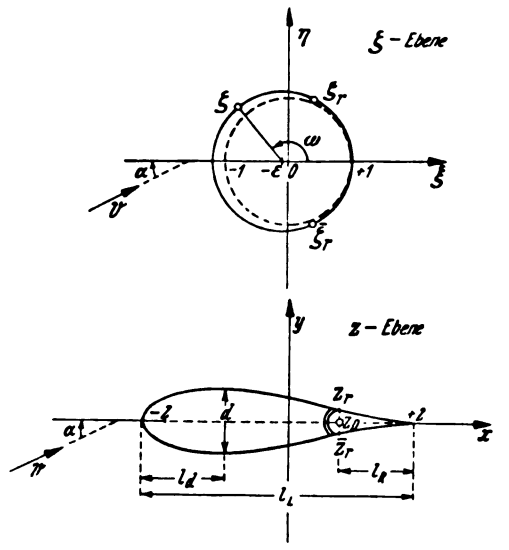


Bild 1. In Flosse und Ruder aufgeteiltes, symmetrisches Joukowsky-Profil.

$$\bar{\mathfrak{v}}_\zeta = V\,\frac{\zeta-1}{(\zeta+\varepsilon)^2}\left\{e^{-i\alpha}(\zeta+\varepsilon) + e^{i\alpha}(1+\varepsilon)\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Überträgt man diese Strömung vermöge (1) in die Profilebene, so erhält man die zu der Anströmgeschwindigkeit V und der Anströmrichtung α (vgl. Bild 1) gehörige Potentialströmung um das Profil, welche glatten Abfluß an der Profilhinterkante aufweist. Der zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_z$ dieser Strömung bez. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\bar{\mathfrak{v}}_z$ ergibt sich in bekannter Weise zu

$$\bar{\mathfrak{v}}_z = \bar{\mathfrak{v}}_\zeta \frac{d\zeta}{dz} = V\left(\frac{\zeta}{\zeta+\varepsilon}\right)^2 \frac{e^{-i\alpha}(\zeta+\varepsilon) + e^{i\alpha}(1+\varepsilon)}{\zeta+1}. \quad (4)$$

Hieraus berechnet sich der Druck p_z an der Stelle z nach der Bernoullischen Gleichung

$$p_z = p_\infty + q - \frac{\varrho}{2}\,|\mathfrak{v}_z|^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wo p_∞ den Druck in unendlich großer Entfernung vom Profil und $q = \frac{\varrho}{2} V^2$ den Staudruck bedeutet. Die aerodynamischen Kenngrößen des Leitwerks[1]) ergeben sich nun in der folgenden Weise:

a) $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right]$: Aus der bekannten Formel

$$A = 8\pi q (1+\varepsilon)\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

für den Auftrieb des Joukowsky-Profils folgt unmittelbar

$$\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Danach erhält man, wie Bild 2 zeigt, gegenüber dem Fall des unendlich dünnen Profils bei Berücksichtigung der Dicke eine Verkleinerung von $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right]$ und damit eine Vergrößerung des Auftriebs.

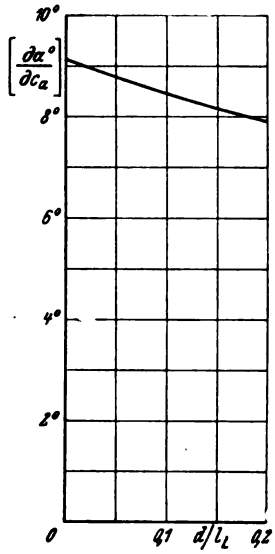
b) $\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$: Das Gesamtmoment, bezogen auf die Leitwerksnase z_N, berechnet sich aus

$$M = -\frac{\varrho}{2}\,\Re \oint \bar{\mathfrak{v}}_z^2\,(z - z_N)\,dz \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

durch Anwendung des Residuensatzes. Man erhält danach für den Koeffizienten $\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$ den Wert

[1]) S. Vorbemerkung S. 2, (1).

Digitized by Google



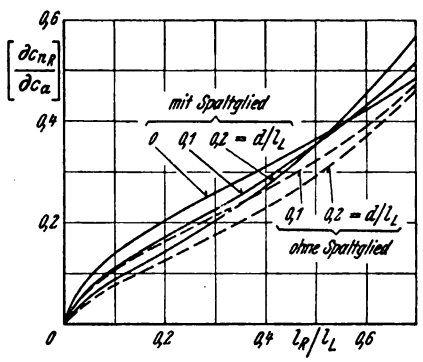


Bild 3. $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Dickenverhältnis d/l_L.

Bild 2 (links). $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Dickenverhältnis d/l_L.

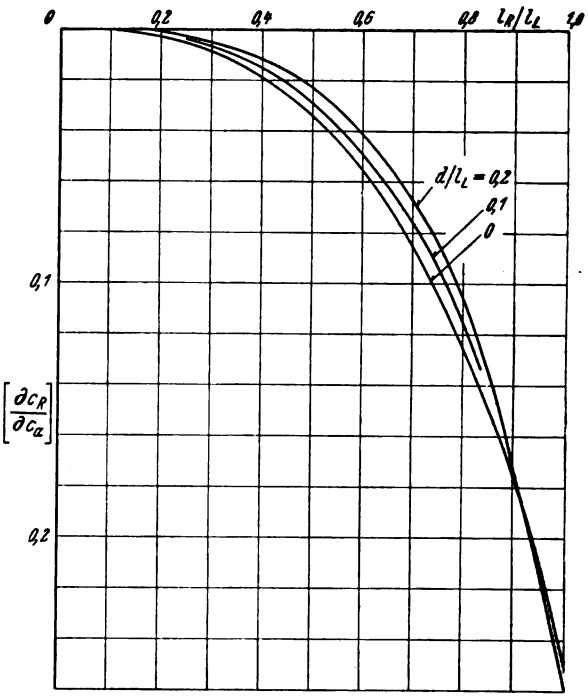


Bild 4. $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Dickenverhältnis d/l_L.

Zahlentafel 8. $\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Dickenverhältnis d/l_L.

d/l_L	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
$\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$	—0,25	—0,2507	—0,2529	—0,2563	—0,2611	—0,2742

$$\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] = -\frac{1}{4}\left\{1+\varepsilon^2\frac{2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3}\right\}.$$

Bezeichnet e den Abstand des auf der x-Achse gelegenen Angriffspunkts des Gesamtauftriebs von der Leitwerksnase, so ist

$$\frac{e}{l_L} = -\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Wie Zahlentafel 3 zeigt, liefert die Rechnung für wachsendes Dickenverhältnis eine unbedeutende Zunahme von $\frac{e}{l_L}$ von dem für verschwindendes Dickenverhältnis geltenden Wert $\frac{1}{4}$ aus, während Versuchsergebnisse den Angriffspunkt meist vor $\frac{1}{4}$ der Flügeltiefe angeben.

c) $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right]$: Der zum Vektor $\mathfrak{R}_R$ der Ruderkraft bez. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\overline{\mathfrak{R}}_R$ wird nach (5) unter Verwendung der ersten Blasiusschen Formel

$$\overline{\mathfrak{R}}_R = i\frac{\varrho}{2}\int_{\overline{z}_R}^{z_R}\overline{v}_z^2\,dz - d_R(p_\infty+q)+\overline{\mathfrak{R}}_S \quad \ldots \quad (8)$$

wo das Integral über die freie Kontur des Ruders zu erstrecken ist. $\overline{\mathfrak{R}}_S$ bedeutet den Beitrag der im halbkreisförmig angenommenen Spalt wirkenden Druckkräfte, $d_R = 2y_R$ die Profildicke an der Ruderdrehachse. Bei Annahme eines der Bogenlänge proportionalen Druckausgleichs im Spalt ergibt sich

$$\overline{\mathfrak{R}}_S = d_R p_\infty + d_R q\frac{c_p(z_R)+c_p(\overline{z}_R)}{2}+\frac{1}{\pi}i\,d_R\,q\,C_p(z_R), \quad (8')$$

wo $c_p(z)$ den Beiwert des Drucks, $C_p(z)$ den Beiwert der Druckdifferenz für die Stelle z bedeutet (vgl. I, 3).

Geht man mit (4) in (8) ein, so erhält man für den Koeffizienten $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right]$ den Wert

$$\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{l_L}{l_R}\left(\sum_{\mu=1}^{3}A_\mu\sin\mu\,\omega_R + A_4\,\omega_R + A_5\,\psi_R\right) + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{d_R}{l_R}\left[\frac{\partial C_p(z_R)}{\partial c_a}\right] \quad (8'')$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -2\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}+\varepsilon^2,\ A_2 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+\varepsilon^2,\ A_3 = -\frac{\varepsilon^2}{3},\\ A_4 &= 2\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^3}-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}-2\varepsilon^2,\ A_5 = -\frac{8\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3},\\ \cos\omega_R &= \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\left\{1+3\varepsilon+2\varepsilon^2-\varepsilon\,l_R\right.\\ &\quad\left.-\sqrt{(1+2\varepsilon)+\varepsilon^2(1-l_R)^2}\right\},\ \operatorname{tg}\psi_R = \frac{(1+\varepsilon)\sin\omega_R}{(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)\cos\omega_R}. \end{aligned}\right\} \quad (8''')$$

Der Wert von $\left[\frac{\partial C_p(z_R)}{\partial c_a}\right]$ ist (10'') zu entnehmen. Wie Bild 3 zeigt, ergibt sich für die Rudernormalkraft bei praktisch vorkommenden Rudertiefen durch die Berücksichtigung der Dicke eine merkbare Verkleinerung.

d) $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$: Das Moment der am Ruder angreifenden Luftkraft, bezogen auf den Ruderdrehpunkt $z_D = x_R$ ist nach der zweiten Blasiusschen Formel

$$M_R = -\frac{\varrho}{2}\,\Re\int_{\overline{z}_R}^{z_R}\overline{v}_z^2\,(z-z_D)\,dz, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

wo das Integral über die freie Kontur des Ruders zu erstrecken ist. Geht man mit (4) in (9) ein, so erhält man für $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ den Wert

$$\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right] = -\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{1+2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^2}\left\{\sum_{\mu=1}^{3}B_\mu\sin\mu\omega_R + B_4\omega_R + B_5\psi_R + 4\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+2\varepsilon}\frac{l_R}{l_L}\left(\sum_{\mu=1}^{3}A_\mu\sin\mu\,\omega_R + A_4\,\omega_R + A_5\,\psi_R\right)\right\}. \quad (9')$$

wo A_μ, ω_R, ψ_R dieselbe Bedeutung haben wie in (8''') und

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 8\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}-\varepsilon(1+\varepsilon)^2,\ B_2 = -\frac{(1+\varepsilon)^3}{1-\varepsilon}+\varepsilon^2\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon},\\ B_3 &= \frac{\varepsilon}{3}(1+\varepsilon)^2,\ B_4 = -4\frac{(1+\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^2}+2\varepsilon^4\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\\ &\quad -2\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}-2\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2,\ B_5 = 32\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3} \end{aligned}\right\} \quad (9'')$$

ist.

Der Koeffizient $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ ist, neben dem erst im III. Abschnitt betrachteten Koeffizienten $\left[\frac{\partial c_R}{\partial \beta}\right]$, die am meisten

Digitized by Google

interessierende aerodynamische Leitwerksgröße. Während die vorliegenden Ergebnisse von Windkanalmessungen den von Glauert für das unendlich dünne Profil berechneten Wert von $\left[\frac{\partial c_R}{\partial \beta}\right]$ öfters erreichen, fallen sämtliche Meßergebnisse von $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ dem Betrag nach um 20 bis 70% kleiner aus als der von Glauert für das unendlich dünne Profil angegebene Wert. Als bemerkenswertestes Ergebnis der in diesem Abschnitt durchgeführten Betrachtungen ergibt sich nun, daß die Rechnung für wachsendes Dickenverhältnis eine Verminderung des Betrags von $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ liefert. Für $d/l_L = 0{,}1$ und $l_R/l_L = 0{,}2$ bzw. 0,4 beträgt die Abnahme, wie Bild 4 zeigt, bereits 23% bzw. 18%.

3. Druckverteilung.

Der Druckbeiwert

$$c_p = \frac{p_z - p_\infty}{q} = 1 - \frac{|v_z|^2}{V^2}$$

an der Stelle z des Profils ergibt sich nach (4) und (5) zu

$$c_p = 1 - f \cdot \left\{1 + \cos(\omega + 2\alpha)\right\}$$

mit

$$f = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \cdot \frac{\left\{1 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)(1-\cos\omega)\right\}^2}{(1+\cos\omega) + \varepsilon^2(1-\cos\omega)}.$$

Dabei ist $\zeta = -\varepsilon + (1+\varepsilon)e^{i\omega}$ der dem Punkt z entsprechende Bildpunkt auf dem Kreis (2), so daß zwischen $z = x + iy$ und ω die Beziehung besteht

$$\cos\omega = \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\left\{1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \varepsilon x - \sqrt{(1+2\varepsilon) + \varepsilon^2(1-x)^2}\right\}.$$

Für den Beiwert der Druckdifferenz an zwei entsprechenden Stellen $\bar{z}$ und z der Unter- und Oberseite des Profils folgt daraus

$$C_p = \frac{p_u - p_o}{q} = c_{p_u} - c_{p_o},$$

wobei u auf die Profilunterseite, o auf die Profiloberseite hinweist.

Entwickelt man auch die Druckbeiwerte nach Potenzen von c_a

$$c_p = [c_p] + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right] c_a + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 c_p}{\partial c_a^2}\right] c_a^2 + \dots \quad (10)$$

und

$$C_p = [C_p] + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial C_p}{\partial c_a}\right] c_a + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 C_p}{\partial c_a^2}\right] c_a^2 + \dots \quad (10')$$

so erhält man aus dem vorstehenden für die Koeffizienten die Werte

$$\left.\begin{array}{ll} [c_p] = 1 - f(1+\cos\omega), & [C_p] = 0 \\ \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon} f \sin\omega, & \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial C_p}{\partial c_a}\right] = 2\left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right]_u \\ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 c_p}{\partial c_a^2}\right] = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^2 f\cos\omega, & \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 C_p}{\partial c_a^2}\right] = 0 \end{array}\right\} \quad (10'')$$

Bild 5 zeigt den danach berechneten Koeffizienten $\left[\frac{\partial C_p}{\partial c_a}\right]$ des Glieds 1. Ordnung in der Entwicklung des Beiwerts der Druckdifferenz, aufgetragen über dem auf der Skelettlinie gemessenen, dimensionslosen Abstand $\frac{x^*}{l_L} = \frac{l_L - 2 + x}{l_L}$ der Profilstellen $z = x + iy$ von der Profilnase. Für die

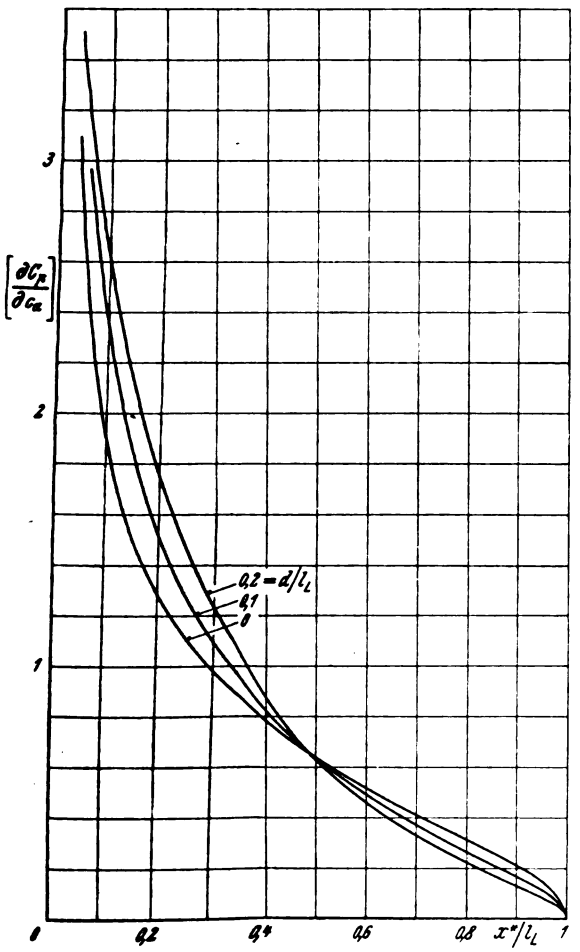


Bild 5 (links). $\left[\frac{\partial C_p}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Dickenverhältnis d/l_L, aufgetragen über dem auf der Skelettlinie gemessenen Abstand x^* der Profilpunkte z von der Leitwerksnase.

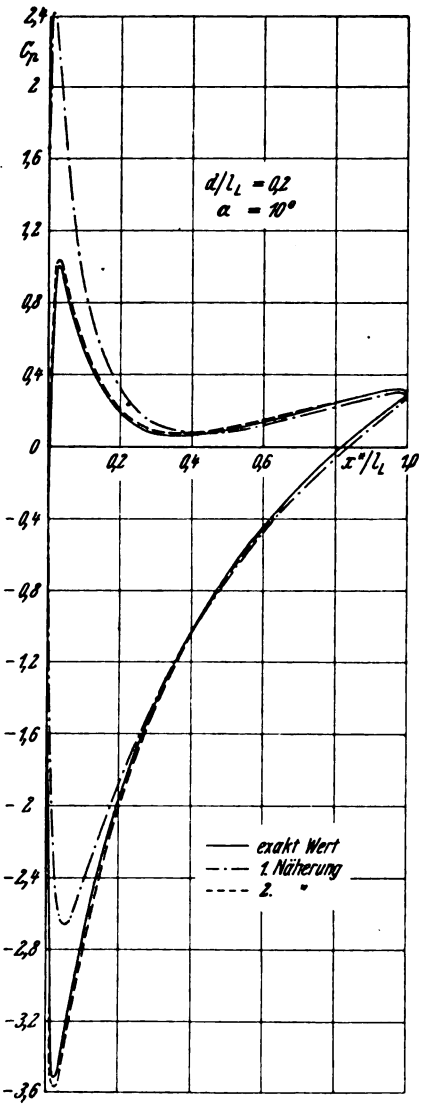


Bild 6 (rechts). Vergleich des Druckbeiwerts c_p mit dem linearen und quadratischen Teil der Entwicklung

$$c_p = [c_p] + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right] c_a + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 c_p}{\partial c_a^2}\right] c_a^2 + \dots$$

für $\alpha = 10°$, $\frac{d}{l_L} = 0{,}2$.

Digitized by Google

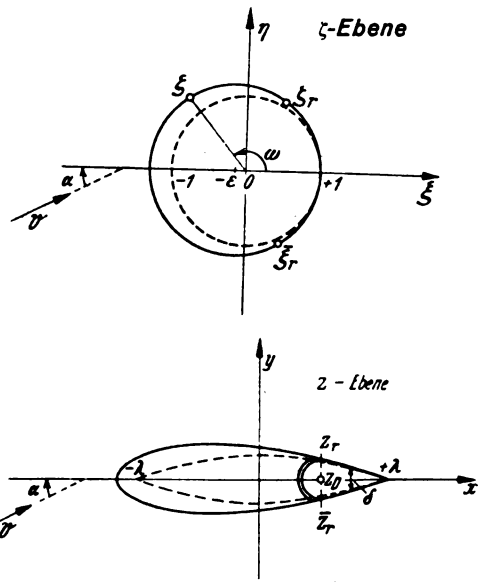


Bild 7. In Flosse und Ruder aufgeteiltes, symmetrisches Kármán-Trefftz-Profil.

Beschreibung des Druckbeiwerts c_p selbst reicht der lineare Teil der Entwicklung (10)

$$c_p = [c_p] + \left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right] c_a$$

in der Nähe der Leitwerksnase und des vorderen Staupunkts nicht aus, wie Bild 6 für den Spezialfall $\frac{d}{l_L} = 0{,}2$, $\alpha = 10^0$ zeigt. Dagegen erhält man nach Hinzunahme des Glieds 2. Ordnung bereits über die ganze Leitwerkstiefe eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakt berechneten Druckverteilung. Daß trotzdem für die Berechnung der übrigen Leitwerksgrößen der lineare Ansatz ausreicht, liegt daran, daß für die Druckdifferenz zwischen entsprechenden Punkten der Ober- und Unterseite des Profils $\left[\frac{\partial^2 C_p}{\partial c_a^2}\right] = 0$ gilt.

II. Einfluß der Dickenverteilung bei fehlendem Ruderausschlag [2]).

1. Beschreibung des Profils.

Der Einfluß der Dickenverteilung bei fehlendem Ruderausschlag wird an einem, durch die Teilpunkte $z_R = x_R + iy_R$ und $\bar{z}_R = x_R - iy_R$ in Flosse und Ruder aufgeteilten, symmetrischen Kármán-Trefftz-Profil untersucht, dessen Dickenverhältnis festgehalten wird, während dem Hinterkantenwinkel verschiedene Werte beigelegt werden. Das Profil (vgl. Bild 7) wird durch die Transformation

$$\frac{z-\lambda}{z+\lambda} = \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

aus dem Kreis

$$\zeta + \varepsilon = (1+\varepsilon)\, e^{i\omega} \qquad (-\pi < \omega < \pi) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

der ζ-Ebene erhalten. Dabei sind λ und ε, also das Profil, durch Vorgabe des Dickenverhältnisses d/l_L und des Hinterkantenwinkels δ eindeutig bestimmt, insbesondere ist

$$\lambda = 2 - \frac{\delta}{\pi}.$$

Für verschwindenden Hinterkantenwinkel δ geht das Profil in das in Abschnitt I behandelte Joukowsky-Profil über. Bei wachsendem δ wandert für festes Dickenverhältnis der Ort l_d/l_L der maximalen Dicke von der beim Joukowsky-Profil angegebenen Stelle (vgl. I, Zahlentafel 2) gegen die Profilmitte, die bei

$$\delta^0 = 4 \cdot \frac{180^0}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{l_L} \approx 229^0 \cdot \frac{d}{l_L}$$

mit $\varepsilon = 0$ erreicht wird. Die zu dem Hinterkantenwinkel δ gehörige Profiltiefe ist

$$l_L = 2\lambda \frac{(1+\varepsilon)^{\lambda}}{(1+\varepsilon)^{\lambda} - \varepsilon^{\lambda}}.$$

Die folgenden Rechnungen sind für das feste Dickenverhältnis $d/l_L = 0{,}1$ und die Hinterkantenwinkel $\delta^0 = 0^0$, 3^0, 6^0 und 9^0 durchgeführt. Die zugehörigen Werte von ε sind

δ^0	0^0	3^0	6^0	9^0
ε	0,0836	0,0764	0,0667	0,0526

2. Kräfte und Momente.

Für den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_\zeta$ der Potentialströmung um den Bildkreis (12) des Profils mit der Anströmgeschwindigkeit V, der Anströmrichtung α und dem hinteren Staupunkt $\zeta = 1$ (vgl. Bild 7) gilt wie in I die Beziehung (3). Es erweist sich weiterhin als zweckmäßig, $\mathfrak{v}_\zeta$ aus den beiden Grundströmungen $\mathfrak{v}_{\zeta,0}$ und $\mathfrak{v}_{\zeta,90}$ aufzubauen, die den Anströmrichtungen $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 90^0$ entsprechen. Man erhält dann für den Geschwindigkeitsvektor in einem Punkte $\zeta = -\varepsilon + (1+\varepsilon)\, e^{i\omega}$ des Kreises (12)

$$\mathfrak{v}_\zeta = \mathfrak{v}_{\zeta,0} \cos\alpha + \mathfrak{v}_{\zeta,90} \sin\alpha$$

mit

$$\mathfrak{v}_{\zeta,0} = 2 \sin\omega\, e^{-i\omega} V, \qquad \mathfrak{v}_{\zeta,90} = 2(1-\cos\omega)\, e^{-i\omega} V.$$

Für die Strömung um das Profil (Anströmgeschwindigkeit V, Anströmrichtung α, glatter Abfluß an der Hinterkante) ergibt sich hieraus als Betrag der Geschwindigkeit in dem der Stelle $\zeta = -\varepsilon + (1+\varepsilon)\, e^{i\omega}$ des Kreises (12) entsprechenden Punkt z des Profils

$$v_z = \left|\mathfrak{v}_\zeta \frac{d\zeta}{dz}\right| = V \left| c_0 \cos\alpha + c_{90} \sin\alpha \right| \quad \ldots \quad (13)$$

mit

$$c_0 = 2 \sin\omega \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \qquad c_{90} = 4 \sin^2\frac{\omega}{2} \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \quad \ldots \quad (13')$$

wobei nach (11)

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\zeta^2 - 1}{z^2 - \lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'')$$

ist. Der Druck p_z an der Stelle z des Profils wird damit nach der Bernoullischen Gleichung (5)

$$p_z = p_\infty + q - q\,(c_0 \cos\alpha + c_{90} \sin\alpha)^2 \quad \ldots \quad (14)$$

Und hieraus ergeben sich die aerodynamischen Kenngrößen des Leitwerks in der folgenden Weise:

a) $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right]$: Für den Auftrieb des Profils gilt wieder Formel (6), woraus unmittelbar

$$\left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right] = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^{\lambda-1}}{(1+\varepsilon)^{\lambda} - \varepsilon^{\lambda}}$$

folgt. Der Wert dieses Koeffizienten ist für die hier betrachteten Hinterkantenwinkel praktisch konstant (Schwankung $< 1^0/_{00}$).

b) $\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$: Das Gesamtmoment bezogen auf die Leitwerksnase z_N ergibt sich wieder aus (7) durch Anwendung des Residuensatzes. Man findet so für $\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$ die folgenden Werte

δ^0	0^0	3^0	6^0	9^0
$\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right]$	—0,253	—0,256	—0,259	—0,262

Die Rechnung liefert danach für den Angriffspunkt des Gesamtauftriebs (vgl. 7') für wachsendes δ eine geringe, zu δ proportionale Verschiebung von der Leitwerksnase weg.

c) $\left[\frac{\partial c_{m_R}}{\partial c_a}\right]$: Die auf das Ruder wirkende Luftkraft bestimmt sich wieder aus (8), doch ist in diesem Falle die geschlossene Auswertung des Integrals nicht möglich. Man

[2]) Die Untersuchung, über die in diesem Abschnitt berichtet wird, wurde von H. A. Ristau durchgeführt.

Digitized by Google

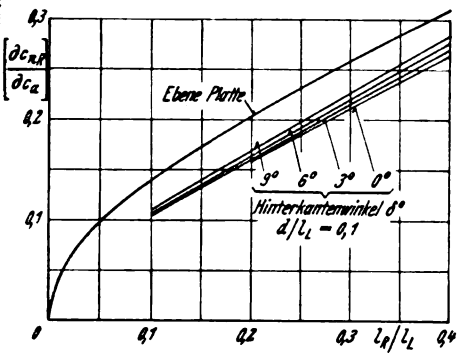


Bild 8. $\left[\frac{\partial c_{m_R}}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Hinterkantenwinkel δ für das Dickenverhältnis $d/l_L = 0{,}1$.

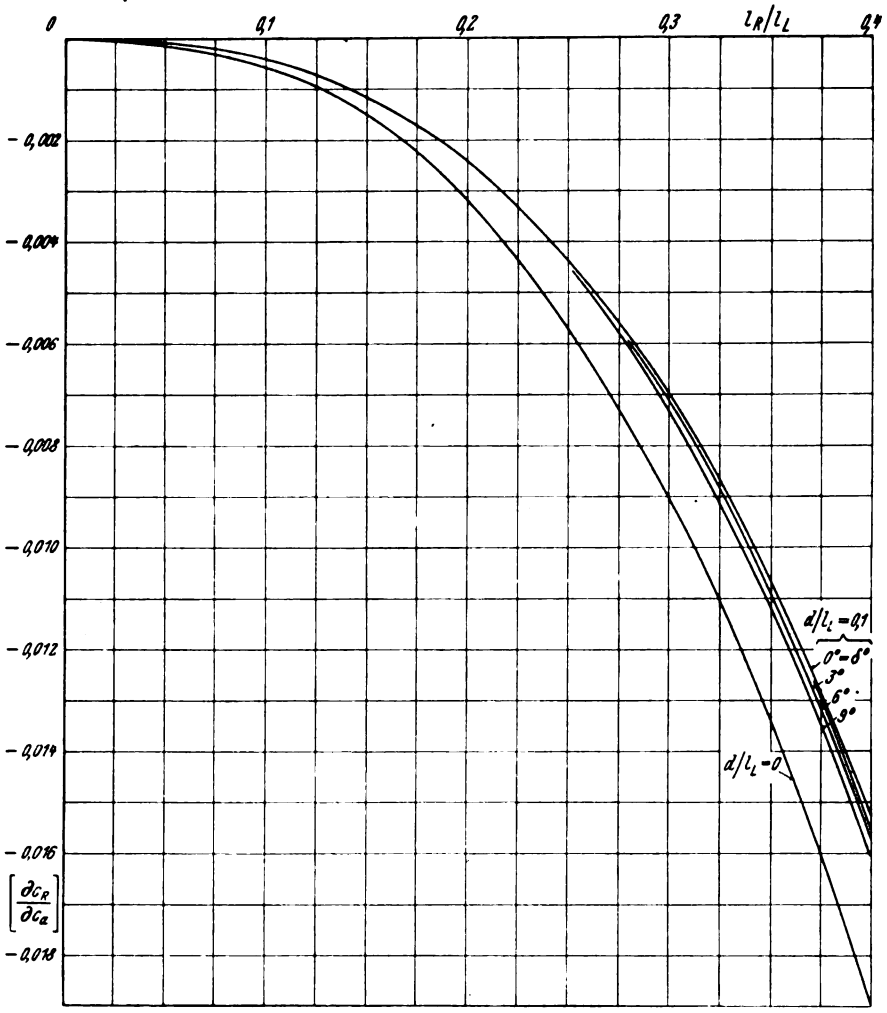


Bild 9. $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Hinterkantenwinkel δ für das Dickenverhältnis $d/l_L = 0{,}1$.

berechnet daher zweckmäßig unmittelbar den von der freien Ruderkontur herrührenden Anteil der Rudernormalkraft numerisch gemäß

$$\frac{\varrho}{2}\int_{z_R}^{z_K} v_z^2\,|dz| = \frac{\varrho}{2}\,V^2\cdot 2\sin 2\alpha\int_{x_R}^{\lambda}|c_0\,c_{90}|\,dx,$$

wobei die Integrale längs der freien Ruderkontur bzw. längs der x-Achse zu erstrecken sind (vgl. Bild 7). Unter der Annahme eines linearen Druckabfalls im Spalt (vgl. I, (8′)) erhält man so

$$\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{l_L}{l_R}\,\frac{1}{1+\varepsilon}\int_{x_R}^{\lambda}|c_0\,c_{90}|\,dx + \frac{1}{\pi}\,\frac{d_R}{l_R}\left[\frac{\partial C_p(z_R)}{\partial c_a}\right],$$

wobei $\left[\frac{\partial C_p(z_R)}{\partial c_a}\right]$ den aus 3. ersichtlichen Wert hat. Den geringen Einfluß des Hinterkantenwinkels auf die Rudernormalkraft zeigt Bild 8. (Dabei ist das Spaltglied nicht berücksichtigt. Seine Berücksichtigung bewirkt eine geringe Verschiebung der zu $d/l_L = 0{,}1$ gehörigen Kurven nach oben (vgl. Bild 3), jedoch keine merkliche Änderung ihrer gegenseitigen Lage.)

d) $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$: Das Moment der am Ruder angreifenden Luftkraft bezogen auf den Ruderdrehpunkt $z_D = x_R$, berechnet sich wieder aus (9). Da eine geschlossene Auswertung des Integrals nicht möglich ist, rechnet man zweckmäßig numerisch gemäß

$$M_R = \frac{1}{2}\int_{z_R}^{z_K} p_z\,d(a^2) = -\frac{\varrho}{2}\,V^2\cdot 2\sin 2\alpha\int_{z_R}^{\lambda}|c_0\,c_{90}|\,d(a^2)$$

mit

$$a = |z - z_D|,$$

wobei die Integrale über die freie Ruderkontur zu erstrecken sind. Für den Koeffizienten $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ erhält man damit

$$\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right] = -\frac{1}{4\pi(1+\varepsilon)\,l_L}\int_{z_R}^{\lambda}|c_0\,c_{90}|\,d(a^2).$$

Den danach vorhandenen, äußerst geringen Einfluß des Hinterkantenwinkels auf das Rudermoment zeigt Bild 9.

3. Druckverteilung.

Für den Druckbeiwert an der Stelle z des Profils erhält man nach (14)

$$c_p = 1 - (c_0\cos\alpha + c_{90}\sin\alpha)^2.$$

Die interessierenden Koeffizienten (vgl. I, 3) werden damit

$$[c_p] = 1 - c_0^2, \qquad [C_p] = 0,$$

$$\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right] = -\frac{l_L}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon}\,c_0\,c_{90}, \qquad \left[\frac{\partial C_p}{\partial c_a}\right] = 2\left[\frac{\partial c_p}{\partial c_a}\right]_u,$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 c_p}{\partial c_a^2}\right] = \left(\frac{l_L}{8\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\,(c_0^2 - c_{90}^2), \qquad \left[\frac{\partial^2 C_p}{\partial c_a^2}\right] = 0.$$

III. Einfluß der Dicke bei vorhandenem Ruderausschlag[3]).

1. Beschreibung des Profils.

Um einen Anhaltspunkt für den Einfluß der Dicke bei einem Leitwerksprofil mit Ruderausschlag zu bekommen, wird die Strömung um ein Profil behandelt, das sich nur wenig von einem in Flosse und Ruder aufgeteilten Joukowsky-Profil mit mechanisch ausgeschlagenem Ruder unterscheidet. Dieses Profil wird nach einem Vorschlag von E. Trefftz in der folgenden Weise konstruiert:

[3]) Die Untersuchung, über die in diesem Abschnitt berichtet wird, wurde von F. Marguerre durchgeführt.

Digitized by Google

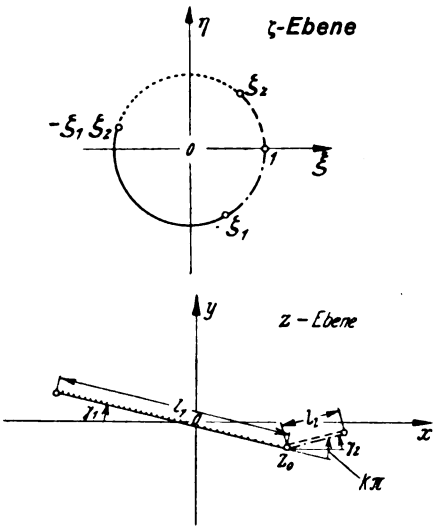


Bild 10. Konforme Abbildung des Einheitskreises auf eine geknickte Strecke.

a) Die Funktion

$$\left.\begin{aligned} z &= \zeta^{-1}(\zeta-\zeta_1)^{1+k}(\zeta-\zeta_2)^{1-k}+\zeta_1(1+k)+\zeta_2(1-k)\\ \zeta_1 &= e^{i\varphi_1}\ (-\pi<\varphi_1\leq 0),\quad \zeta_2 = e^{i\varphi_2}\ (0\leq\varphi_2\leq\pi),\\ &\qquad -1\leq k\leq 1 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

in der k mit ζ_1, ζ_2 durch die Beziehung

$$1+k(\zeta_1-\zeta_2)-\zeta_1\zeta_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15')$$

gekoppelt ist, ist im Außengebiet des Einheitskreises

$$\zeta = e^{i\varphi} \qquad (-\pi<\varphi\leq\pi)$$

eindeutig und analytisch, falls arc $(\zeta-\zeta_1)$ und arc $(\zeta-\zeta_2)$ in dem genannten Gebiet stetig und so festgelegt werden, daß

$$\text{arc}\,(\zeta-\zeta_1)-\text{arc}\,(\zeta-\zeta_2)\to 0 \quad \text{für} \quad \zeta|\to\infty$$

gilt. Sie bildet das Äußere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform auf das Äußere einer geknickten Strecke der z-Ebene ab, wobei (vgl. für die Bezeichnungen Bild 10)

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \zeta_1(1+k)+\zeta_2(1-k),\\ \gamma_1 &= \varphi_1\frac{1+k}{2}+\varphi_2\frac{1-k}{2},\\ \gamma_2 &= k\pi+\varphi_1\frac{1+k}{2}+\varphi_2\frac{1-k}{2},\quad \gamma_2-\gamma_1=k\pi\\ l_1 &= e^{-i\gamma_1}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^k(1+\zeta_1)^{1-k}(1+\zeta_2)^{1+k}\\ &= 4\left|\cos\frac{\varphi_1}{2}\right|^{1-k}\left|\cos\frac{\varphi_2}{2}\right|^{1+k}\\ l_2 &= e^{-i(\gamma_1+k\pi)}(1-\zeta_1)^{1+k}(1-\zeta_2)^{1-k}\\ &= 4\left|\sin\frac{\varphi_1}{2}\right|^{1+k}\left|\sin\frac{\varphi_2}{2}\right|^{1-k} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

gilt.

Für $k=0$ sind ζ_1, ζ_2 zufolge (15′) so zu wählen, daß $\zeta_1\zeta_2=1$, d. h. $\zeta_2=\bar{\zeta}_1$ ist. Die Transformation (15) geht in diesem Falle über in

$$z=\zeta+\frac{1}{\zeta}$$

und bildet das Äußere des Einheitskreises der ζ-Ebene auf das Äußere der Strecke $-2<x\leq+2$ der reellen Achse der z-Ebene ab. Dabei wird diese Strecke durch den gemeinsamen Bildpunkt z_0 von ζ_1 und ζ_2 in zwei Teilstrecken zerlegt, deren Längen l_1 und l_2 nach (16) in dem Verhältnis

$$\sigma=\frac{l_2}{l_1}=\text{tg}^2\frac{\varphi_0}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

stehen, wobei

$$\varphi_0=\varphi_{2\,k=0}=-\varphi_{1\,k=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17')$$

gesetzt ist. Erfährt k von $k=0$ ausgehend eine stetige Änderung, so ändern sich vermöge (15′) auch ζ_1 und ζ_2. Stellt man die Forderung, daß dabei $\sigma=\frac{l_2}{l_1}$ konstant bleiben soll, so ist die Änderung von ζ_1 und ζ_2 eindeutig festgelegt. Man erhält dann als Bild des Einheitskreises eine geknickte Strecke (Bild 10), deren beide Teilstrecken den Winkel $k\pi$ einschließen, während ihre Längen in dem Verhältnis σ zueinander stehen. Was die Längen l_1, l_2 der Teilstrecken selbst betrifft, so bleiben sie zwar nicht konstant, doch gilt

$$\frac{dl_1}{dk}_{k=0}=\frac{dl_2}{dk}_{k=0}=0,$$

so daß für kleine $|k|$ in 1. Näherung

$$l_1=l_{1\,k=0}=4\cos^2\frac{\varphi_0}{2},\qquad l_2=l_{2\,k=0}=4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

gesetzt werden kann.

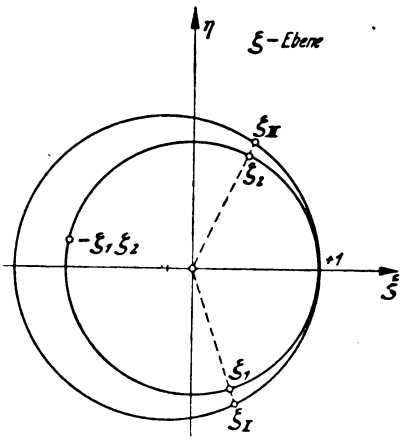
b) Das eingangs genannte Profil ergibt sich nun durch Anwendung der Transformation (15) auf einen Kreis

$$\zeta+\varepsilon=(1+\varepsilon)e^{i\omega} \qquad (-\pi<\omega\leq\pi) \quad . \quad . \quad (18)$$

Für $k=0$ erhält man das in Abschnitt I behandelte Joukowsky-Profil, dessen Skelettlinie jedoch durch z_0 in zwei Teile zerlegt ist. Die Längen l_1^* und l_2 der Abschnitte des Skeletts zwischen Profilnase und z_0 bzw. z_0 und Profilhinterkante sind

$$l_1^*=4\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+2\varepsilon}-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right),\quad l_2=4\sin^2\frac{\varphi_0}{2} \quad . \quad . \quad (19)$$

Erfährt k unter Festhaltung von $\sigma=\frac{l_2}{l_1}$, ausgehend von $k=0$, eine stetige Änderung, so erhält man als Bild des Kreises (18) ein Profil der aus Bild 11 ersichtlichen Art. Sein Skelett ist die unter a) beschriebene, im Punkte z_0 geknickte Strecke. Die Abschnitte auf der Skelettlinie zwischen Profilnase und z_0 bzw. z_0 und Profilhinterkante haben Längen, die für kleine $|k|$ in 1. Ordnung mit den durch (19) gegebenen Größen l_1^* und l_2 des Joukowsky-Profils übereinstimmen. Ebenso stimmt die Dicke des Profils für kleine $|k|$ in 1. Ordnung mit der des Joukowsky-Profils überein.



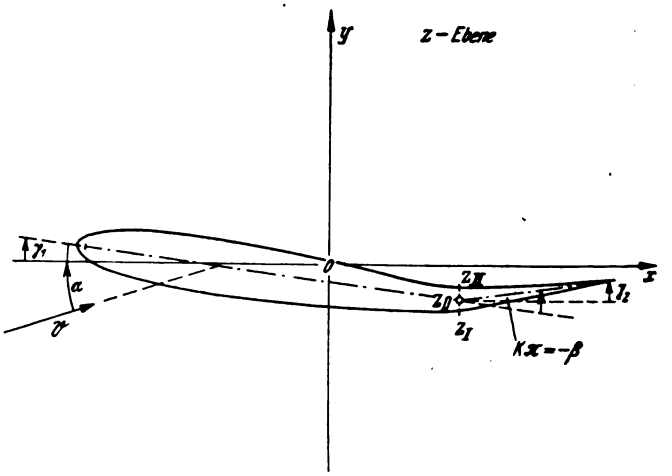


Bild 11. Näherungsprofil für ein in Flosse und Ruder aufgeteiltes Joukowsky-Profil mit ausgeschlagenem Ruder.

Digitized by Google

Das vorliegende Profil wird im folgenden als Ersatz für ein in Flosse und Ruder aufgeteiltes Joukowsky-Profil mit mechanisch ausgeschlagenem Ruder aufgefaßt. Dabei wird als Dicke des Leitwerks diejenige des zu $k = 0$ gehörigen Joukowsky-Profils angenommen. Als Flossen- bzw. Rudertiefe werden die durch (19) gegebenen Größen l_1^* und l_2 angenommen. Entsprechend wird der Knickpunkt z_0 des Skeletts als Ruderdrehpunkt z_D und der Knickwinkel $\beta = -k\pi$ als Ruderwinkel aufgefaßt[4]). Schließlich ist noch die Aufteilung der Kontur in Flossen- und Ruderkontur vorzunehmen. Es liegt nahe, diese Trennung durch die Winkelhalbierende zur Skelettlinie im Ruderdrehpunkt vorzunehmen. Da jedoch die spätere Berechnung der auf das Ruder wirkenden Luftkräfte auf Integrationen führt, die zweckmäßig in der ζ-Ebene durchgeführt werden, empfiehlt es sich, die Ruderbegrenzung so zu wählen, daß sich das Bild der Ruderkontur in der ζ-Ebene geometrisch einfach festlegen läßt. Dazu ziehe man in der ζ-Ebene die beiden Strahlen von $\zeta = 0$ nach ζ_1 und ζ_2 und bestimme ihre Schnittpunkte ζ_I und ζ_{II} mit dem Kreis (18). Die Bildpunkte z_I und z_{II} von ζ_I und ζ_{II} auf der Profilkontur sollen dann als die Begrenzungspunkte der Ruderkontur gewählt werden. Für kleine Dicken- und Tiefenverhältnisse erhält man auf diesem Wege praktisch (d. h. mit einem Unterschied von einem Bruchteil eines Prozentes der Gesamttiefe) die gleiche Rudergrenze, wie wenn man das Ruder durch die Winkelhalbierende zur Skelettlinie im Ruderdrehpunkt abtrennt.

2. Kräfte und Momente.

Wir betrachten bei beliebigem Ruderausschlag β (unter Festhaltung von ε und σ) die Strömung um das Profil, deren Anströmgeschwindigkeit V, deren Anströmrichtung gegen die Flosse α, gegen die x-Achse also $\psi = \alpha + \gamma_1$ ist (vgl. Bild 11, γ_1 ist dort negativ), und die an der Profilhinterkante glatt abfließt. Der zum Geschwindigkeitsvektor $\bar{v}_\zeta$ der Strömung um den Bildkreis (Anströmgeschwindigkeit V, Anströmrichtung ψ, hinterer Staupunkt $\zeta = 1$) bez. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\bar{v}_\zeta$ ist

$$\bar{v}_\zeta = V \frac{\zeta - 1}{(\zeta + \varepsilon)^2} \left\{ e^{-i\psi} (\zeta + \varepsilon) + e^{i\psi} (1 + \varepsilon) \right\}.$$

Für den zum Geschwindigkeitsvektor v_z der Strömung in der Profilebene bez. der reellen Achse spiegelbildlichen Vektor $\bar{v}_z$ ergibt sich demnach

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_z &= \bar{v}_\zeta \frac{d\zeta}{dz} \\ &= V \left(\frac{\zeta}{\zeta + \varepsilon} \right)^2 \left(\frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - \zeta_1} \right)^k \frac{e^{-i\psi} (\zeta + \varepsilon) + e^{i\psi} (1 + \varepsilon)}{\zeta + \zeta_1 \zeta_2} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

und hieraus berechnet sich der Druck p_z nach der Bernoullischen Gleichung

$$p_z = p_\infty + q - \frac{\varrho}{2} |v_z|^2.$$

Mit Rücksicht auf die in Abschnitt I für das Joukowsky-Profil durchgeführte Untersuchung, interessiert hier nur die Abhängigkeit der aerodynamischen Kenngrößen des Leitwerks vom Ruderwinkel β. Die entsprechenden Koeffizienten ergeben sich in der folgenden Weise:

a) $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right]$: Der Gesamtauftrieb A für den Anstellwinkel α wird (vgl. (6))

$$A = 8\pi q (1 + \varepsilon) \sin(\alpha + \gamma_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Hieraus erhält man durch Differentiation bei festgehaltenem c_a

$$\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right] = -\left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta}\right] = -\frac{1}{\pi} (\varphi_0 + \sin \varphi_0), \quad . \quad . \quad (13')$$

wo φ_0 die in (17') angegebene Bedeutung hat. Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Profildicke und stimmt insbesondere mit dem von Glauert für das unendlich dünne Profil angegebenen überein. Es ist jedoch zu beachten, daß sich bei dem hier betrachteten Profil das Rudertiefenverhältnis mit der Profildicke ändert; während (13') beim unendlich dünnen Profil ($\varepsilon = 0$) zu dem Rudertiefenverhältnis

$$\frac{l_R}{l_L} = \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

gehört, gehört es bei dem Profil mit dem Dickenparameter ε zu

$$\frac{l_R}{l_L} = \frac{l_2}{l_1^* + l_2} = \frac{1 + 2\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}.$$

Bei festem Rudertiefenverhältnis erfährt daher $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right]$ mit wachsender Profildicke dem Betrag nach eine Vergrößerung (Bild 12), die jedoch bei den gebräuchlichen Werten von l_R/l_L und einem Dickenverhältnis von höchstens 10% noch nicht 1% beträgt.

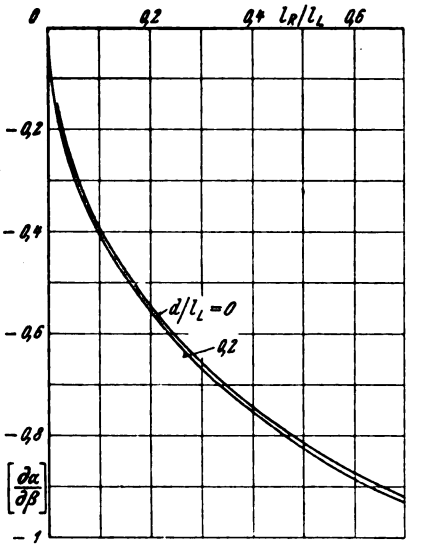


Bild 12. $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Dickenverhältnis d/l_L.

b) $\left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right]$: Das Gesamtmoment, bezogen auf die Leitwerksnase z_N, erhält man wieder aus (7) durch Anwendung des Residuensatzes. Man findet danach

$$\left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right] = -\frac{1}{2} \frac{(1 + 2\varepsilon)^2}{(1 + \varepsilon)^4} \sin \varphi_0 (1 + \cos \varphi_0)$$

und bekommt damit für die Änderung von $\left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right]$ mit der Dicke die aus Bild 13 zu ersehenden Werte. Für den Ruder-

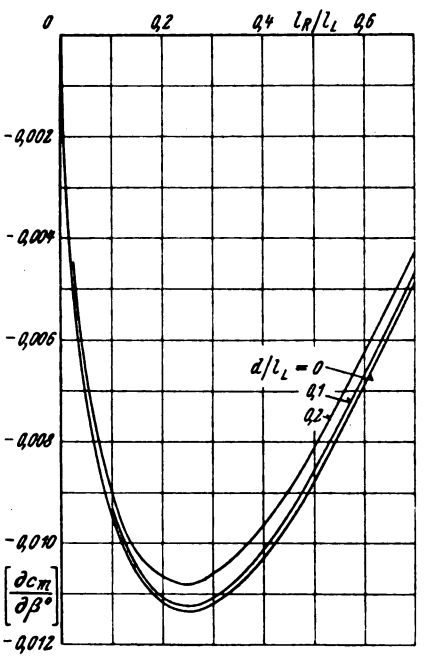


Bild 13. $\left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Dickenverhältnis d/l_L.

[4]) Man hat $\beta = -k\pi$ zu setzen, weil der Ruderwinkel β im Uhrzeigersinn positiv zu zählen ist.

Digitized by Google

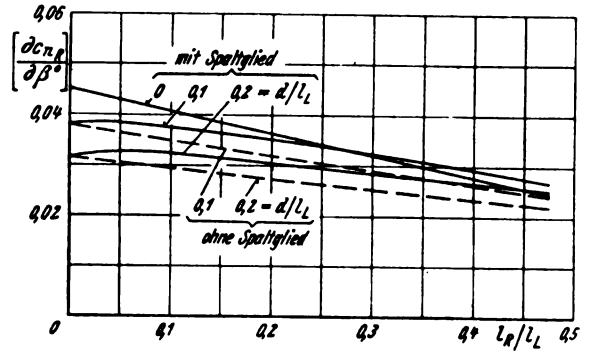


Bild 14. $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Dickenverhältnis d/l_L.

tiefenbereich $0{,}2 \leqq l_R/l_L \leqq 0{,}4$ und das Dickenverhältnis $d/l_L = 0{,}1$ ist der Betrag von $\left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right]$ um etwa 1% kleiner als der für das unendlich dünne Profil geltende Wert.

c) $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial \beta}\right]$: Der zum Vektor $\mathfrak{K}_R$ der am Ruder angreifenden Luftkraft bez. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\overline{\mathfrak{K}}_R$ ist

$$\overline{\mathfrak{K}}_R = i\frac{\varrho}{2}\int_{z_I}^{z_{II}} \overline{v}_z^2\, dz - i\,(p_\infty + q)\,(\overline{z}_{II} - \overline{z}_I) + \overline{\mathfrak{K}}_S,$$

wo das Integral über die freie Ruderkontur zu erstrecken ist. $\overline{\mathfrak{K}}_S$ bedeutet den Beitrag der im Spalt wirkenden Kräfte. Seine Größe wird wie im 1. Teil unter der Annahme eines linearen Druckabfalls im Spalt berechnet. Der Spalt selbst wird dabei für beliebiges β als Halbkreis über der Strecke angenommen, welche durch Drehung der für $\beta = 0$ genommenen Strecke $z_I \ldots z_{II}$ um den Winkel $\beta/2$ hervorgeht und welche sehr angenähert mit der zu β gehörigen Strecke $z_I \ldots z_{II}$ übereinstimmt. Als Drucke in den Endpunkten des Spalts werden die in z_I und z_{II} herrschenden Drucke genommen.

Für die Rudernormalkraft erhält man damit den Beiwert

$$c_{n_R} = \frac{-1}{q\,l_R}\,\Im\left\{\overline{\mathfrak{K}}_R\, e^{i\gamma_2}\right\}$$

und hat hieraus $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial \beta}\right]$ zu berechnen. Die Hauptarbeit verursacht das in $\mathfrak{K}_R$ auftretende Integral. Es wird zunächst nach β differenziert und kann dann für $\beta = 0$ in einen elementar auswertbaren und einen vernachlässigbar kleinen Rest gespalten werden. Auf die Wiedergabe der so gewonnenen analytischen Ausdrücke für $\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial \beta}\right]$ wird verzichtet, die numerischen Ergebnisse zeigt Bild 14. Daraus ist ersichtlich, daß der Dickeneinfluß besonders bei kleinen Rudertiefen ziemlich beträchtlich ist; für verschwindende Rudertiefe gilt

$$\lim_{l_R/l_L \to 0}\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial \beta}\right] = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}.$$

d) $\left[\frac{\partial c_R}{\partial \beta}\right]$: Das auf den Ruderdrehpunkt z_D bezogene Moment berechnet sich aus

$$M_R = -\frac{\varrho}{2}\,\Re\int_{z_I}^{z_{II}} \overline{v}_z^2\,(z - z_D)\,dz + \frac{1}{2}\,q\,(|z_{II} - z_D|^2 - |z_I - z_D|^2),$$

wobei das Integral über die freie Ruderkontur zu erstrecken ist. Wie bei c) differenziert man auch hier zunächst nach β und kann dann für $\beta = 0$ das Integral geschlossen auswerten. Die numerischen Ergebnisse zeigt Bild 15. Im praktisch vorkommenden Ruderbereich nehmen die Beträge von $\left[\frac{dc_R}{d\beta}\right]$ mit wachsendem Dickenverhältnis ab und

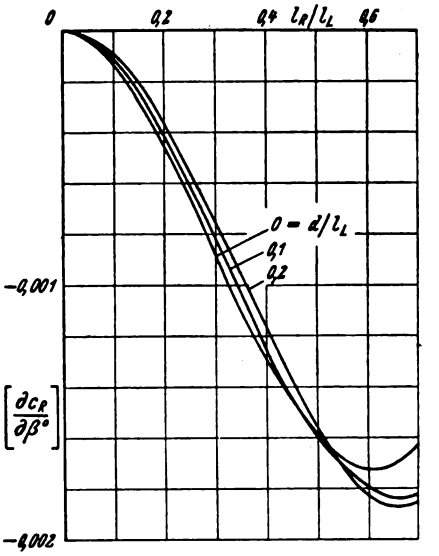


Bild 15. $\left[\frac{\partial c_R}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L und Dickenverhältnis d/l_L.

zwar beträgt die Abnahme gegenüber den von Glauert für das Profil verschwindender Dicke berechneten Werten z. B. für $d/l_L = 0{,}1$, $l_R/l_L = 0{,}2$ etwa 6%, für $d/l_L = 0{,}1$, $l_R/l_L = 0{,}4$ etwa 2%. Gegenüber den Streuungen der Meßergebnisse für diese, neben $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ wichtigste aerodynamische Kenngröße des Profils, die 25 bis 50% betragen, fällt diese Abnahme jedoch nicht ins Gewicht.

3. Druckverteilung.

Schließlich ist noch der von β abhängige Koeffizient der Druckverteilung anzugeben. Aus (20) ergibt sich der Druckbeiwert zu

$$c_p = 1 - \left|\left(\frac{\zeta}{\zeta+\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\zeta-\zeta_2}{\zeta-\zeta_1}\right)^k \frac{e^{-i\alpha}(\zeta+\varepsilon) + e^{i\alpha}(1+\varepsilon)}{\zeta+\zeta_1\zeta_2}\right|^2.$$

Bei der Berechnung von $\left[\frac{\partial c_p}{\partial \beta}\right]$ ist zu berücksichtigen, daß das Profil bei veränderlichem β deformiert wird. Es muß daher zugelassen werden, daß der Aufpunkt, an dem $\left[\frac{\partial c_p}{\partial \beta}\right]$ berechnet werden soll, relativ zur Skelettlinie in gewisser Weise wandert und es ist notwendig, hinsichtlich dieser Wanderung eine sinnvolle Annahme zu treffen. Entsprechend der Tatsache, daß sich die Leitwerkstiefe bei veränderlichem β in linearer Näherung nicht ändert, ist eine den wirklichen Verhältnissen am ehesten entsprechende und sinnvolle Forderung die, es soll der Fußpunkt des vom Aufpunkt auf die Skelettlinie gefällten Lots in linearer Näherung festen Abstand vom Ruderdrehpunkt haben. Da jedoch die numerische Auswertung der sich danach ergebenden Formeln sehr umständlich ist, empfiehlt es sich, eine etwas andere, der funktionentheoretischen Behandlung des Problems besser angepaßte Annahme zu treffen. Wir fassen für beliebiges β einen Aufpunkt z_A und den ihm vermöge (15) entsprechenden Bildpunkt ζ_A ins Auge. ζ_A verbinden wir mit $\zeta = 0$ und nennen den Schnittpunkt der Verbindungslinie mit dem Einheitskreis der ζ-Ebene $\tilde{\zeta}_A$. Und nun stellen wir die Forderung, das auf der Skelettlinie des Profils liegende Bild $\tilde{z}_A$ von $\tilde{\zeta}_A$ soll in linearer Näherung festen Abstand vom Ruderdrehpunkt haben. Praktisch ist diese Forderung mit der erstgenannten gleichwertig, wie die zahlenmäßige Nachprüfung an Beispielen ergab. Die danach berechneten Werte des Koeffizienten $\left[\frac{\partial C_p}{\partial \beta^0}\right]$ zeigt Bild 16.

Digitized by Google

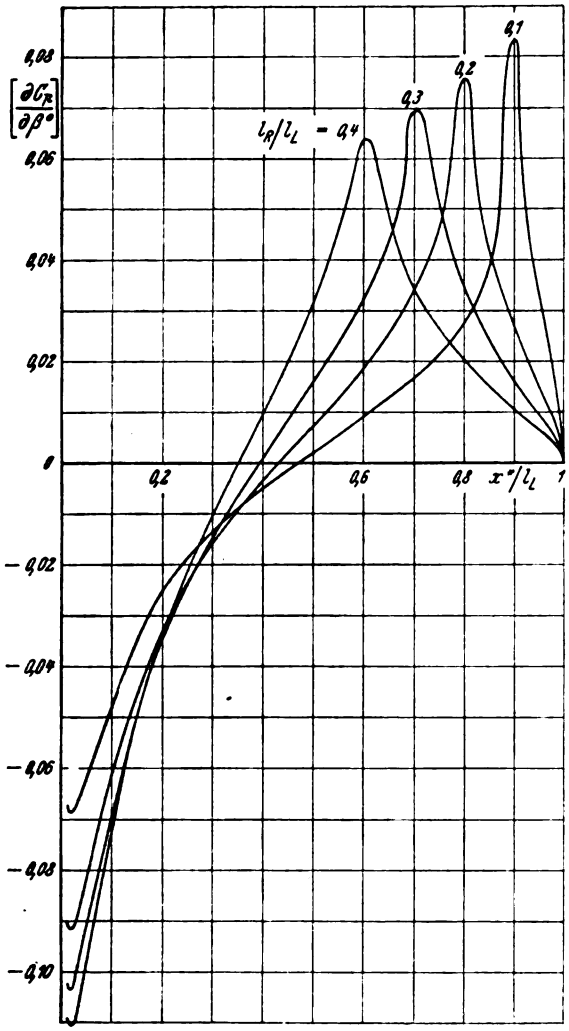


Bild 16. $\left[\frac{\partial c_p}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit vom Rudertiefenverhältnis l_R/l_L für das Dickenverhältnis $d/l_L = 0{,}1$, aufgetragen über dem auf der Skelettlinie gemessenen Abstand x^* der Profilpunkte z von der Leitwerksnase.

Zusammenfassung.

Es wird der Einfluß der maximalen Dicke und der Dickenverteilung eines Leitwerksprofils auf die nach der Theorie der ebenen Potentialströmungen berechneten Werte von Auftrieb, Moment, Rudernormalkraft und Rudermoment unter Beschränkung auf eine bez. des Anstell- und Ruderwinkels lineare Theorie an Profilen untersucht, die sich in einfacher Weise konform auf den Kreis abbilden lassen. Dabei erweist sich nur der Einfluß der maximalen Dicke auf den Koeffizienten $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ des Rudermoments als bemerkenswert. Sein Betrag erfährt bei Berücksichtigung einer Profildicke von $d/l_L = 0{,}1$ im Rudertiefenbereich $0{,}2 \leq l_R/l_L \leq 0{,}4$ gegenüber den von Glauert für das Profil verschwindender Dicke angegebenen Werten eine Verkleinerung um $\sim 20\%$. Da die aus Kanalwägungen gewonnenen Werte von $\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$ um 20 bis 70% kleiner sind als die Glauertschen Werte, werden in diesem Fall die Versuchsergebnisse durch die Theorie bei Berücksichtigung der Profildicke besser beschrieben als dies bei Beschränkung auf unendlich dünne Profile der Fall ist. Bei allen übrigen Leitwerkskoeffizienten werden die Versuchsergebnisse durch die Theorie bei Berücksichtigung der Profildicke praktisch nicht besser beschrieben als bei Zugrundelegung unendlich dünner Profile. Der Einfluß der Dickenverteilung erwies sich in keinem Fall als erheblich.

2. Teil.

Das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung eines Leitwerksprofils endlicher Dicke verschwindenden Spalts.

Von Hildegund Menzel-Rogner.

Die ebene Potentialströmung um einen unendlich dünnen Klappenflügel läßt sich in einfacher Weise nach der Birnbaumschen Methode der wirbelbelegten Strecke berechnen. Um einen Anhaltspunkt über den Einfluß der Profildicke auf das Strömungsfeld zu bekommen, wird im folgenden das Geschwindigkeitsfeld der Potentialströmung in der Umgebung eines Profils endlicher Dicke untersucht, das angenähert mit einem in Flosse und Ruder aufgeteilten Joukowsky-Profil mit mechanisch ausgeschlagenem Ruder übereinstimmt.

Gliederung.

1. Beschreibung des Profils.
2. Herleitung der Formeln für das Geschwindigkeitsfeld.
3. Numerische Ergebnisse.
4. Vergleich mit dem Verfahren von Keune zur Berechnung der Potentialströmung um allgemeine Tragflügelprofile.
5. Zusammenfassung.

1. Beschreibung des Profils.

Das den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegte Profil stimmt mit dem im III. Abschnitt des 1. Teils dieses Aufsatzes verwendeten Profil, das sich angenähert als ein in Flosse und Ruder aufgeteiltes, symmetrisches Joukowsky-Profil mit mechanisch ausgeschlagenem Ruder auffassen läßt, überein. Es ist dort ausführlich beschrieben, so daß hier nur noch einige Bemerkungen anzuschließen sind, die im Hinblick auf die gegenwärtigen Betrachtungen notwendig sind[1]).

In Teil 1, Abschnitt III 1 wird das Profil aus dem Kreis

$$\zeta + \varepsilon = (1+\varepsilon)\, e^{i\omega} \qquad (-\pi < \omega \leq +\pi) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

durch die Transformation

$$z = \zeta^{-1}(\zeta - \zeta_1)^{1+k}(\zeta - \zeta_2)^{1-k} + \zeta_1(1+k) + \zeta_2(1-k) \quad (2)$$

erzeugt. Diese Transformation ist so gebildet, daß sie für $k = 0$ genau in die Joukowsky-Transformation übergeht. Für die Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes hat sie jedoch das Unangenehme, daß das so erzeugte Profil bei einer Änderung des Ruderwinkels $\beta = -k\pi$ seine Lage im Koordinatensystem ändert. Es empfiehlt sich daher für das Folgende, der Transformation (2) noch eine von k abhängige Bewegung so zu überlagern, daß die Flosse im Koordinatensystem festliegt. Dazu soll das Profil zunächst so verschoben werden, daß der Ruderdrehpunkt in den Nullpunkt zu liegen kommt und dann soll es um den Nullpunkt durch den Winkel $-\gamma_1$ gedreht werden, so daß das Skelett der Flosse in die negative x-Achse zu liegen kommt. Die Transformation (2) geht damit über in

[1]) Es werden durchweg dieselben Bezeichnungen verwendet wie in Teil 1, Abschnitt III.

Digitized by Google

$$z = e^{-i\gamma_1}\zeta^{-1}(\zeta-\zeta_1)^{1+k}(\zeta-\zeta_2)^{1-k} \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Schließlich soll nun noch das Profil längs der x-Achse so verschoben werden, daß seine Nase mit dem Nullpunkt der z-Ebene zusammenfällt. Da die Flossentiefe für kleine Ruderwinkel β, d. h. für kleine k in 1. Ordnung unverändert gleich l_1^* ist, erreichen wir das Gewünschte für kleine β in 1. Näherung, indem wir noch von (2') zu der Transformation

$$z - l_1^* = e^{-i\gamma_1}\zeta^{-1}(\zeta-\zeta_1)^{1+k}(\zeta-\zeta_2)^{1-k} \quad . \quad . \quad (3)$$

übergehen. Diese Transformation ist den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt. Es ist zu beachten, daß sie für $k = 0$ nicht mehr genau in die Joukowsky-Transformation übergeht, sondern in

$$z - l_1^* = \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\varphi_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

der Joukowsky-Transformation ist also noch eine Translation in Richtung der reellen Achse überlagert.

Hervorgehoben sei noch (vgl. Teil 1, Abschnitt III 1), daß das Profil vollständig bestimmt ist, wenn der Dickenparameter ε und das Verhältnis $\sigma = l_2/l_1$ der zu Ruder und Flosse gehörigen Abschnitte des Skeletts festliegen. Wir denken uns weiterhin stets ein zu bestimmten ε und σ gehöriges Profil gewählt und ε und σ während der ganzen Betrachtung festgehalten.

2. Herleitung der Formeln für das Geschwindigkeitsfeld.

Wir wollen bei beliebigem Ruderwinkel β das Geschwindigkeitsfeld der Potentialströmung um das Profil erhalten, die zu der Anströmgeschwindigkeit V und der Anströmrichtung α gegen die Flosse gehört und an der Profilhinterkante glatt abfließt. Dazu gehen wir aus von der Strömung um den Kreis (1), die die Anströmgeschwindigkeit V, die Anströmrichtung $\psi = \alpha + \gamma_1$ gegen die ξ-Achse aufweist und den Punkt $\zeta = 1$ als hinteren Staupunkt besitzt. Der zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_\zeta$ dieser Strömung bzgl. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\bar{\mathfrak{v}}_\zeta$ ist

$$\bar{\mathfrak{v}}_\zeta = V\frac{\zeta-1}{(\zeta+\varepsilon)^3}\left\{e^{-i\psi}(\zeta+\varepsilon) + e^{i\psi}(1+\varepsilon)\right\}.$$

Der zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_z$ der Strömung um das Profil bzgl. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\bar{\mathfrak{v}}_z$ wird danach unter Berücksichtigung von (3)

$$\bar{\mathfrak{v}}_z = \bar{\mathfrak{v}}_\zeta\frac{d\zeta}{dz}$$

$$= Ve^{i\gamma_1}\left(\frac{\zeta}{\zeta+\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\zeta-\zeta_2}{\zeta-\zeta_1}\right)^k\frac{e^{-i(\alpha+\gamma_1)}(\zeta+\varepsilon)+e^{i(\alpha+\gamma_1)}(1+\varepsilon)}{\zeta+\zeta_1\zeta_2}. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dabei sind für z und ζ jeweils vermöge (3) entsprechende Stellen zu nehmen.

Aus (5) sind nun die interessierenden Koeffizienten der linearisierten Darstellung der Geschwindigkeit[2]) zu berechnen. Dies geschieht in der folgenden Weise:

a) $[v]$, $[\vartheta]$: Diese beiden Koeffizienten ergeben sich unmittelbar, indem in (5) sowohl $\alpha = 0$ als auch $k = 0$ gesetzt und dann $\bar{\mathfrak{v}}_z$ und $-\arg\bar{\mathfrak{v}}_z$ genommen werden. Dabei ist zu beachten, daß für $k = 0$ die Punkte ζ_2 und ζ_1 in die durch das Verhältnis $\sigma = \frac{l_2}{l_1} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}$ (vgl. 1. Teil, III. Abschnitt, (17)) bestimmten Punkte

$$\zeta_0 = e^{i\varphi_0} \text{ bzw. } \bar{\zeta}_0 = e^{-i\varphi_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

übergehen. Man erhält danach

$$[\bar{\mathfrak{v}}_z] = V\left(\frac{\zeta}{\zeta+\varepsilon}\right)^2\frac{\zeta+2\varepsilon+1}{\zeta+1}$$

und damit

$$\left.\begin{aligned}[v] &= \left|V\left(\frac{\zeta}{\zeta+\varepsilon}\right)^2\frac{\zeta+2\varepsilon+1}{\zeta+1}\right|,\\ [\vartheta] &= -\arg\left\{V\left(\frac{\zeta}{\zeta+\varepsilon}\right)^2\frac{\zeta+2\varepsilon+1}{\zeta+1}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

[2]) Vgl. Vorbemerkung, S. 2, (2).

b) $\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]$, $\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right]$: Die Ableitungen nach α ergeben sich bequem durch logarithmische Differentiation. Aus

$$\log\bar{\mathfrak{v}}_z = \log v - i\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

folgt zunächst

$$\left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\alpha}\right] = \frac{1}{[v]}\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right] - i\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

Andrerseits liefert (5), wenn man beachtet, daß ζ_1, ζ_2, γ_1 sämtlich von α unabhängig sind, und wenn man wieder berücksichtigt, daß ζ_2 und ζ_1 für $k = 0$ in die durch (6) gegebenen Punkte ζ_0 und $\bar{\zeta}_0$ übergehen, sofort

$$\left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\alpha}\right] = i\frac{1-\zeta}{1+2\varepsilon+\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7'')$$

Der Vergleich von (7') und (7'') ergibt

$$\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right] = [v]\,\Im\left\{\frac{\zeta-1}{\zeta+2\varepsilon+1}\right\}, \quad \left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right] = \Re\left\{\frac{\zeta-1}{\zeta+2\varepsilon+1}\right\} \quad (II)$$

c) $\left[\frac{\partial v}{\partial\beta}\right]$, $\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta}\right]$: Die Berechnung der Ableitungen nach β ist wesentlich mühsamer. Auch hier geht man von (5) aus und erhält durch Differentiation

$$\left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\beta}\right] = \frac{1}{[v]}\left[\frac{\partial v}{\partial\beta}\right] - i\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Um aber $\left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\beta}\right]$ aus (5) zu bilden, hat man zu beachten, daß einer Änderung von β zunächst eine Änderung von $k = -\frac{1}{\pi}\beta$ entspricht. Damit ändern sich aber auch ζ_1, ζ_2 und damit γ_1, und zwar erfolgt diese Änderung so, daß einmal die Bedingung

$$1 + k(\zeta_1 - \zeta_2) - \zeta_1\zeta_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

erfüllt bleibt, und daß ferner das Verhältnis $\sigma = l_2/l_1$ konstant bleibt, was sich durch die Beziehung

$$e^{-ik\pi}\frac{\zeta_2^k(1-\zeta_1)^{1+k}(1-\zeta_2)^{1-k}}{\zeta_1^k(1+\zeta_1)^{1-k}(1+\zeta_2)^{1+k}} = \text{konst.} \quad . \quad . \quad (9')$$

zum Ausdruck bringen läßt. Weiter ist aber noch zu beachten, daß sich für jede feste Stelle z auch der zugehörige Bildpunkt ζ mit β ändert gemäß der Abbildungsfunktion (3):

$$e^{-i\gamma_1}\zeta^{-1}(\zeta-\zeta_1)^{1+k}(\zeta-\zeta_2)^{1-k} = z - l_1^* \quad (9'')$$

Um diese Abhängigkeiten sämtlich zu berücksichtigen, führen wir in (5) noch

$$e^{i\gamma_1} = e^{i\varphi_1\frac{1+k}{2}}e^{i\varphi_2\frac{1-k}{2}} = \zeta_1^{\frac{1+k}{2}}\zeta_2^{\frac{1-k}{2}}$$

ein und differenzieren dann gemäß

$$\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\beta} = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial k} + \frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\zeta_1}\cdot\frac{\partial\zeta_1}{\partial k} + \frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\zeta_2}\cdot\frac{\partial\zeta_2}{\partial k} + \frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial k}\right\}. \quad (10)$$

Die Berechnung der rechts auftretenden partiellen Ableitungen von $\log\bar{\mathfrak{v}}_z$ ist ohne weiteres möglich; man erhält für die Stelle $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die Werte

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial k}\right] &= -2i\varphi_0\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon+\zeta} + \log\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0},\\ \left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\zeta_1}\right] &= \zeta_0\left(\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon+\zeta} - \frac{1}{\zeta+1}\right),\\ \left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\zeta_2}\right] &= \bar{\zeta}_0\left(\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon+\zeta} - \frac{1}{\zeta+1}\right),\\ \left[\frac{\partial\log\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\zeta}\right] &= \frac{2\varepsilon}{\zeta(\zeta+\varepsilon)} + \frac{1}{1+2\varepsilon+\zeta} - \frac{1}{\zeta+1}\end{aligned}\right\} \quad (10')$$

Um die Ableitungen $\left[\frac{\partial\zeta_1}{\partial k}\right]$, $\left[\frac{\partial\zeta_2}{\partial k}\right]$ zu erhalten, differenziert man (9) und (9') total nach k; es ergeben sich dann für $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die beiden Gleichungen

$$\bar{\zeta}_0 - \zeta_0 = \zeta_0\left[\frac{\partial\zeta_1}{\partial k}\right] + \bar{\zeta}_0\left[\frac{\partial\zeta_2}{\partial k}\right],$$

$$i\pi + \log\frac{\bar{\zeta}_0(1-\zeta_0^2)}{\zeta_0(1-\bar{\zeta}_0^2)} = \frac{2}{\zeta_0^2-1}\left[\frac{\partial\zeta_1}{\partial k}\right] + \frac{2}{\zeta_0^2-1}\left[\frac{\partial\zeta_2}{\partial k}\right].$$

Digitized by Google

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial k}\right] &= -\frac{1}{2}(1-\bar{\zeta}_0^2) = -\sin\varphi_0 e^{i\varphi_0}\\ \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial k}\right] &= \frac{1}{2}(1-\zeta_0^2) = \sin\varphi_0 e^{-i\varphi_0}\end{aligned}\right\}. \quad (10'')$$

Um schließlich noch $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial k}\right]$ zu bestimmen, differenziert man (9″) total nach k. Dabei hat man zu berücksichtigen, daß l_1^* in 1. Ordnung konstant ist, und bekommt

$$i\varphi_0 + \log\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{\zeta-\zeta_0} - \left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial k}\right]\frac{\zeta_0}{2}\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0} - \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial k}\right]\frac{\bar{\zeta}_0}{2}\frac{\zeta+\zeta_0}{\zeta-\zeta_0} + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial k}\right]\frac{\zeta^2-1}{\zeta(\zeta^2-2\zeta\cos\varphi_0+1)} = 0.$$

Setzt man $\left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial k}\right]$, $\left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial k}\right]$ aus (10″) ein, so ergibt sich

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial k}\right] = -\zeta\left\{i\sin\varphi_0 + \left(i\varphi_0 + \log\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{\zeta+\zeta_0}\right)\frac{\zeta^2-2\zeta\cos\varphi_0+1}{\zeta^2-1}\right\} \quad \ldots\ldots (10''')$$

Die gesuchten Koeffizienten $\left[\frac{\partial v}{\partial \beta}\right]$, $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$ lassen sich damit bilden als

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \beta}\right] = [v]\,\Re\left[\frac{\partial \log \bar{v}_z}{\partial \beta}\right], \quad \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right] = -\Im\left[\frac{\partial \log \bar{v}_z}{\partial \beta}\right], \quad (III)$$

wobei $\left[\frac{\partial \log \bar{v}_z}{\partial \beta}\right]$ durch die Gleichungen (10)—(10‴) bestimmt ist.

Will man auf Grund der Formeln (I)—(III) die Koeffizienten $[v]$, ..., $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$ für eine Stelle z des Strömungsfeldes berechnen, so hat man zunächst den der Stelle z in der Bildkreisebene entsprechenden Punkt ζ zu ermitteln. Da sich die Koeffizienten auf die Stelle $k = 0$ beziehen, so ist für den Zusammenhang zwischen z und ζ die Gleichung (4) zuständig. Man rechnet also etwa zunächst

$$z^* = z - l_1^* + 2\cos\varphi_0$$

und dann ζ aus der Beziehung

$$z^* = \zeta + \frac{1}{\zeta} \text{ oder } \zeta = \frac{z^*}{2} + \sqrt{\left(\frac{z^*}{2}\right)^2 - 1}.$$

Geht man mit diesem Punkt ζ in die Formeln (I)—(III) ein, so erhält man $[v]$, ..., $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$ für die Stelle z.

3. Numerische Ergebnisse.

Die unter 2. abgeleiteten Formeln wurden ausgewertet für das Profil, das zu dem Dickenverhältnis $d/l_L = 0{,}1$ und dem Rudertiefenverhältnis $l_R/l_L = 0{,}2$ gehört. Dieses Profil ergibt sich für

$$\varepsilon = 0{,}0836 \text{ und } \sigma = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2} = 0{,}2518.$$

Die gesamte Profiltiefe berechnet sich dann zu

$$l_L = 4\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+2\varepsilon} = 4{,}0239,$$

Flossen- und Rudertiefe sind

$$l_F = l_1^* = 3{,}2193 \sim 0{,}8\,l_L, \qquad l_R = l_2 = 0{,}8046 \sim 0{,}2\,l_L.$$

Der Bereich um das Profil, für den das Geschwindigkeitsfeld berechnet wurde, ist aus Bild 1 ersichtlich. Er ist charakterisiert durch die Beziehungen

$$0{,}2 < \frac{y}{l_L} < 0{,}6; \qquad -1 < \frac{x}{l_L} < 3{,}5$$

sowie

$$0 < \frac{y}{l_L} < 0{,}2; \qquad -1 < \frac{x}{l_L} < -0{,}25 \text{ und } 1{,}5 < \frac{x}{l_L} < 3{,}5.$$

Der Bereich erstreckt sich also in Tiefenrichtung über 4½ Profiltiefen und beginnt eine Profiltiefe vor der Nase. Die für ein Punktgitter dieses Bereichs berechneten Werte von $[v]$, ..., $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$ sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Damit sind auch die Werte dieser Koeffizienten in den Punkten des bzgl. der reellen Achse dazu spiegelbildlichen Gitters bekannt. Man hat nun zu beachten, daß beim Übergang von einem Punkt des Strömungsfelds zu dem dazu bzgl. der reellen Achse spiegelbildlichen Punkt

$\left[\frac{v}{V}\right]$, $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right]$, $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$ ungeändert bleiben,

$[\vartheta]$, $\left[\frac{\partial \frac{v}{V}}{\partial \alpha}\right]$, $\left[\frac{\partial \frac{v}{V}}{\partial \beta}\right]$ nur das Vorzeichen ändern.

Eine graphische Darstellung der Werte der Koeffizienten längs der Schnitte $\frac{y}{l_L} = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6$ durch das betrachtete Geschwindigkeitsfeld zeigen Bild 2 bis 7.

Um an einem Beispiel den Dickeneinfluß des Profils auf das Geschwindigkeitsfeld zu veranschaulichen, wurden für den Anstellwinkel $\alpha = 10^0$ und die Ruderwinkel $\beta = -2^0$ und $\beta = -10^0$ die Werte von $\frac{v}{V}$ und ϑ in einer Reihe von Punkten des Geschwindigkeitsfelds berechnet. Die Er-

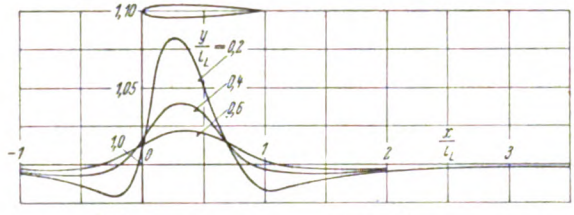


Bild 2. $\left[\frac{v}{V}\right]$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{l_L}$ für $\frac{y}{l_L} = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6$.

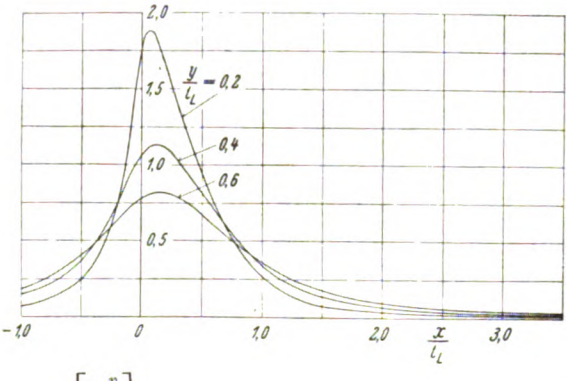


Bild 3. $\left[\frac{\partial \frac{v}{V}}{\partial \alpha}\right]$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{l_L}$ für $\frac{y}{l_L} = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6$.

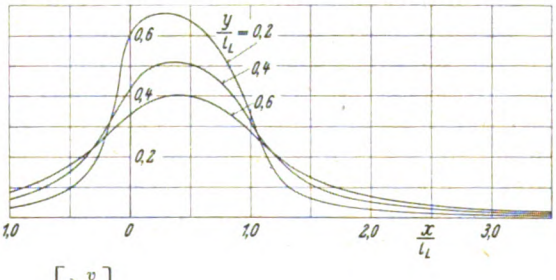


Bild 4. $\left[\frac{\partial \frac{v}{V}}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{l_L}$ für $\frac{y}{l_L} = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6$.

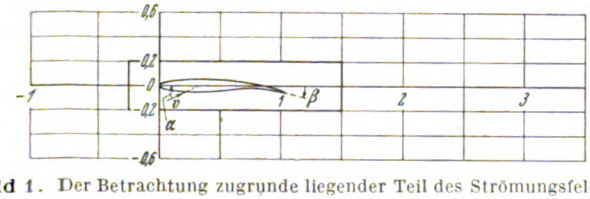


Bild 1. Der Betrachtung zugrunde liegender Teil des Strömungsfeldes.

Digitized by Google

Zahlentafel 1. Betrag der Geschwindigkeit an einer Stelle des Strömungsfelds: $v = [v] + \left[\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right]\alpha + \left[\frac{\partial v}{\partial \beta}\right]\beta$.

Richtungswinkel der Geschwindigkeit an einer Stelle des Strömungsfeldes: $\vartheta = [\vartheta] + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right]\alpha + \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]\beta$.

$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	$[v\ V]$	$\left[\frac{\partial v/V}{\partial \alpha}\right]$	$\left[\frac{\partial v/V}{\partial \beta}\right]$	$[\vartheta°]$	$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right]$	$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$
−1	+0,6	+0,997	+0,190	+0,084	+0,23	+1,362	+0,181
	+0,4	+0,995	+0,144	+0,062	+0,19	+1,413	+0,202
	+0,2	+0,994	+0,079	+0,034	+0,11	+1,451	+0,217
	0	+0,994	0	0	0	+1,465	+0,222
−0,75	+0,6	+0,997	+0,273	+0,118	+0,36	+1,405	+0,203
	+0,4	+0,994	+0,223	+0,093	+0,33	+1,492	+0,237
	+0,2	+0,991	+0,129	+0,053	+0,21	+1,567	+0,266
	0	+0,990	0	0	0	+1,598	+0,277
−0,5	+0,6	+0,998	+0,407	+0,172	+0,58	+1,429	+0,221
	+0,4	+0,993	+0,376	+0,151	+0,64	+1,583	+0,281
	+0,2	+0,986	+0,248	+0,095	+0,48	+1,757	+0,343
	0	+0,982	0	0	0	+1,845	+0,373
−0,4	+0,6	+0,999	+0,479	+0,201	+0,68	+1,423	+0,224
	+0,5	+0,996	+0,486	+0,197	+0,78	+1,508	+0,258
	+0,4	+0,993	+0,475	+0,187	+0,84	+1,611	+0,297
	+0,3	+0,988	+0,435	+0,166	+0,85	+1,734	+0,341
	+0,2	+0,983	+0,345	+0,128	+0,73	+1,865	+0,386
	+0,1	+0,978	+0,196	+0,071	+0,44	+1,974	+0,422
	0	+0,976	0	0	0	+2,018	+0,436
−0,3	+0,6	+1,001	+0,558	+0,234	+0,79	+1,400	+0,221
	+0,5	+0,999	+0,588	+0,238	+0,95	+1,494	+0,260
	+0,4	+0,995	+0,605	+0,235	+1,11	+1,620	+0,308
	+0,3	+0,988	+0,590	+0,220	+1,22	+1,785	+0,367
	+0,2	+0,979	+0,508	+0,182	+1,16	+1,991	+0,436
	+0,1	+0,970	+0,311	+0,108	+0,76	+2.195	+0,502
	0	+0,965	0	0	0	+2,289	+0,531
−0,25	+0,6	+1,002	+0,600	+0,252	+0,84	+1,381	+0,217
	+0,4	+0,996	+0,681	+0,263	+1,26	+1,610	+0,309
	+0,2	+0,978	+0,630	+0,222	+1,50	+2,053	+0,463
	0	+0,957	0	0	0	+2,494	+0,601
−0,2	+0,6	+1,004	+0,642	+0,270	+0,88	+1,355	+0,211
	+0,5	+1,002	+0,702	+0,284	+1,12	+1,450	+0,253
	+0,4	+0,999	+0,763	+0,294	+1,41	+1,586	+0,307
	+0,3	+0,991	+0,810	+0,296	+1,74	+1,791	+0,382
	+0,2	+0,981	+0,795	+0,275	+1,95	+2,104	+0,487
−0,1	+0,6	+1,008	+0,719	+0,308	+0,91	+1,284	+0,192
	+0,5	+1,008	+0,813	+0,333	+1,22	+1,365	+0,232
	+0,4	+1,006	+0,932	+0,362	+1,67	+1,487	+0,287
	+0,3	+1,000	+1,084	+0,395	+2,32	+1,688	+0,366
	+0,2	+0,985	+1,260	+0,426	+3,23	+2,066	+0,497
0	+0,6	+1,012	+0,778	+0,342	+0,86	+1,190	+0,165
	+0,4	+1,017	+1,071	+0,426	+1,72	+1,317	+0,244
	+0,2	+1,015	+1,763	+0,604	+4,31	+1,641	+0,414
+0,1	+0,6	+1,017	+0,811	+0,370	+0,70	+1,082	+0,130
	+0,5	+1,022	+0,946	+0,415	+0,99	+1,096	+0,155
	+0,4	+1,028	+1,135	+0,474	+1,45	+1,109	+0,184
	+0,3	+1,039	+1,416	+0,557	+2,22	+1,106	+0,217
	+0,2	+1,058	+1,879	+0,685	+3,62	+1,034	+0,240
+0,2	+0,6	+1,021	+0,813	+0,390	+0,44	+0,973	+0,090
	+0,5	+1,027	+0,943	+0,439	+0,62	+0,952	+0,105
	+0,4	+1,037	+1,116	+0,501	+0,88	+0,910	+0,121
	+0,3	+1,052	+1,351	+0,581	+1,27	+0,824	+0,132
	+0,2	+1,080	+1,668	+0,686	+1,76	+0,641	+0,126
+0,25	+0,6	+1,022	+0,803	+0,397	+0,29	+0,921	+0,069
	+0,4	+1,0. 9	+1,082	+0,508	+0,54	+0,825	+0,091
	+0,2	+1,082	+1,531	+0,675	+0,82	+0,524	+0,087
+0,3	+0,6	+1,022	+0,786	+0,402	+0,13	+0,872	+0,048
	+0,5	+1,029	+0,899	+0,452	+0,17	+0,825	+0,055
	+0,4	+1,040	+1,038	+0,512	+0,19	+0,751	+0,062
	+0,3	+1,055	+1,208	−0,584	+0,17	+0,632	+0,064
	+0,2	+1,080	+1,397	+0,664	−0,03	+0,442	+0,055
+0,5	+0,6	+1,020	+0,679	+0,402	−0,46	+0,719	−0,036
	+0,4	+1,032	+0,817	+0,507	−0,98	+0,556	−0,049
	+0,2	+1,052	+0,950	+0,640	−2,26	+0,286	−0,051
+0,75	+0,6	+1,010	+0,511	+0,361	−0,84	+0,619	−0,135
	+0,4	+1,011	+0,550	−0,452	−1,49	+0,465	−0,193
	+0,2	+1,008	−0,557	+0,619	−2,79	+0,248	−0,270
+0,8	+0,6	+1,008	+0,479	+0,348	0,85	+0,609	−0,152
	+0,4	+1,008	+0,502	+0,430	1,47	+0,460	−0,221
	+0,2	+1,000	+0,491	+0,588	−2,64	+0,253	−0,334
+1,0	+0,6	+1,002	−0,360	+0,282	−0,77	+0,595	−0,203
	+0,4	+0,997	+0,340	+0,316	−1,12	+0,475	−0,263
	+0,2	+0,983	+0,269	+0,338	−1,49	+0,319	−0,470
+1,5	+0,6	+0,997	+0,174	+0,134	−0,34	+0,654	−0,210
	+0,4	+0,994	+0,134	+0,110	−0,32	+0,608	−0,252
	+0,2	+0,992	+0,074	+0,065	−0,20	+0,572	−0,290
	0	+0,990	0	0	0	+0,558	−0,306
+2,0	+0,6	+0,997	+0,096	+0,070	−0,14	+0,725	−0,168
	+0,4	+0,997	+0,069	+0,050	−0,11	+0,707	−0,183
	+0,2	+0,996	+0,036	+0,027	−0,06	+0,695	−0,190
	0	+0,996	0	0	0	+0,690	−0,197
+3,0	+0,6	+0,999	+0,041	+0,027	−0,04	+0,813	−0,111
	+0,4	+0,999	+0,028	+0,018	−0,03	+0,808	−0,115
	+0,2	+0,998	+0,014	+0,009	−0,01	+0,805	−0,117
	0	+0,998	0	0	0	+0,804	−0,118
+3,5	+0,6	+0,999	+0,030	+0,019	−0,02	+0,840	−0,094
	+0,4	+0,999	+0,020	+0,013	−0,02	+0,837	−0,096
	+0,2	+0,999	+0,010	+0,006	−0,01	+0,835	−0,098
	0	+0,999	0	0	0	+0,834	−0,098

gebnisse sind in den Zahlentafeln 2, 3 und 4 den entsprechenden Werten für das Profil verschwindender Dicke gegenübergestellt. Man erkennt, daß der Dickeneinfluß vor und hinter dem Profil sehr rasch abklingt.

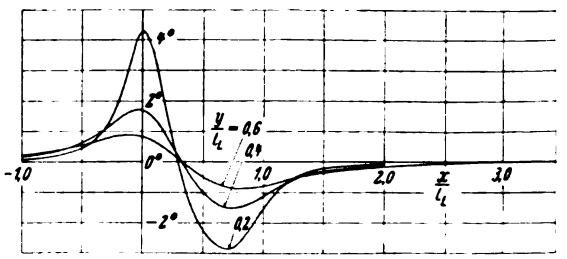


Bild 5. $[\vartheta]$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{l_L}$ für $\frac{y}{l_L} = 0.2;\ 0.4;\ 0.6$.

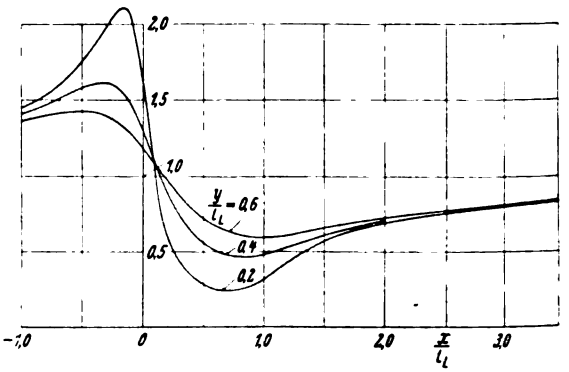


Bild 6. $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right]$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{l_L}$ für $\frac{y}{l_L} = 0.2;\ 0.4;\ 0.6$.

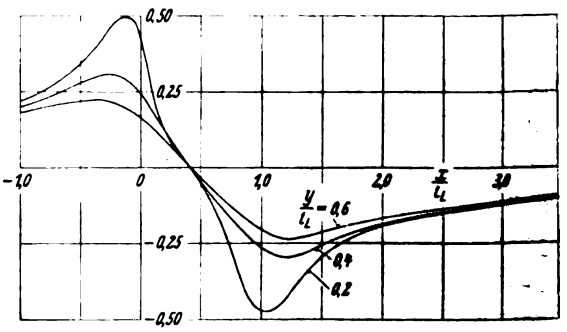


Bild 7. $\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}\right]$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{l_L}$ für $\frac{y}{l_L} = 0.2;\ 0.4;\ 0.6$.

Digitized by Google

Zahlentafel 2. Betrag und Richtungswinkel der Geschwindigkeit in Punkten vor dem Leitwerksprofil für die Dickenverhältnisse $\frac{d}{l_L} = 0$ und $\frac{d}{l_L} = 0{,}1$. ($\alpha = 10^0$, $\beta = -2^0$ und $\beta = -10^0$).

		$\frac{d}{l_L} = 0$		$\frac{d}{l_L} = 0{,}10$		$\frac{d}{l_L} = 0$		$\frac{d}{l_L} = 0{,}10$	
$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	v/V für $\beta = -2^0$	v/V für $\beta = -10^0$	v/V für $\beta = -2^0$	v/V für $\beta = -10^0$	ϑ^0 für $\beta = -2^0$	ϑ^0 für $\beta = -10^0$	ϑ^0 für $\beta = -2^0$	ϑ^0 für $\beta = -10^0$
−1	+0,6	+1,027	+1,020	+1,027	+1,015	+13,04	+12,13	+13,49	+12,05
	+0,4	+1,021	+1,016	+1,018	+1,011	+13,45	+12,45	+13,92	+12,30
	+0,2	+1,012	+1,010	+1,007	+1,002	+13,76	+12,70	+14,19	+12,45
	0	+1,000	+1,000	+0,994	+0,994	+13,87	+12,78	+14,21	+12,43
−0,75	+0,6	+1,040	+1,031	+1,040	+1,024	+13,41	+12,39	+14,00	+12,38
	+0,4	+1,031	+1,023	+1,031	+1,018	+14,12	+12,95	+14,78	+12,88
	+0,2	+1,018	+1,013	+1,012	+1,005	+14,70	+13,41	+15,35	+13,22
	0	+1,000	+1,000	+0,990	+0,990	+14,95	+13,62	+15,43	+13,21
−0,5	+0,6	+1,058	+1,044	+1,063	+1,039	+13,67	+12,54	+14,43	+12,65
	+0,4	+1,053	+1,042	+1,053	+1,032	+14,89	+13,51	+15,91	+13,66
	+0,2	+1,034	+1,027	+1,026	+1,013	+16,22	+14,57	+17,36	+14,62
	0	+1,000	+1,000	+0,982	+0,982	+16,94	+15,32	+17,70	+14,72
−0,4	+0,6	+1,068	+1,052	+1,075	+1,047	+13,64	+12,48	+14,46	+12,67
	+0,5	+1,067	+1,051	+1,074	+1,047	+14,33	+13,02	+15,34	+13,28
	+0,4	+1,067	+1,053	+1,069	+1,043	+15,17	+13,70	+16,36	+13,98
	+0,3	+1,060	+1,047	+1,058	+1,035	+16,12	+14,48	+17,51	+14,78
	+0,2	+1,047	+1,038	+1,039	+1,021	+17,11	+15,30	+18,61	+15,52
	+0,1	+1,027	+1,022	+1,010	+1,000	+17,91	+15,98	+19,34	+15,96
	0	+1,000	+1,000	+0,976	+0,976	+17,20	+15,21	+19,31	+15,82
−0,3	+0,6	+1,075	+1,048	+1,090	+1,058	+13,50	+12,33	+14,35	+12,57
	+0,5	+1,078	+1,051	+1,093	+1,060	+14,28	+12,94	+15,37	+13,29
	+0,4	+1,081	+1,055	+1,092	+1,059	+15,30	+13,75	+16,69	+14,23
	+0,3	+1,077	+1,054	+1,084	+1,053	+16,60	+14,82	+18,34	+15,40
	+0,2	+1,065	+1,046	+1,062	+1,036	+18,15	+16,12	+20,20	+16,71
	+0,1	+1,039	+1,028	+1,020	+1,005	+19,60	+17,35	+21,71	+17,69
	0	+1,000	+1,000	+0,965	+0,965	+20,24	+17,89	+21,83	+17,58
−0,25	+0,6	+1,081	+1,058	+1,098	+1,063	+13,36	+12,20	+14,22	+12,48
	+0,4	+1,095	+1,075	+1,106	+1,069	+15,30	+13,72	+16,74	+14,27
	+0,2	+1,084	+1,069	+1,080	+1,049	+18,68	+16,52	+21,11	+17,41
	0	+1,000	+1,000	+0,957	+0,957	+21,71	+19,11	+23,74	+18,93
−0,2	+0,6	+1,089	+1,055	+1,107	+1,069	+13,05	+11,45	+14,01	+12,32
	+0,4	+1,103	+1,067	+1,121	+1,080	+14,96	+12,66	+16,66	+14,20
	+0,2	+1,102	+1,070	+1,110	+1,071	+18,87	+15,35	+22,02	+18,12
−0,1	+0,6	+1,100	+1,062	+1,123	+1,080	+12,53	+11,05	+13,37	+11,83
	+0,4	+1,127	+1,083	+1,156	+1,106	+13,34	+11,15	+15,97	+13,67
	+0,2	+1,162	+1,112	+1,190	+1,130	+19,07	+15,35	+22,90	+18,92
0	+0,6	+1,109	+1,066	+1,136	+1,088	+11,81	+10,52	+12,43	+11,11
	+0,4	+1,147	+1,095	+1,189	+1,130	+13,11	+11,19	+14,40	+12,45
	+0,2	+1,237	+1,165	+1,302	+1,217	+16,99	+13,70	+19,89	+16,58
+0,1	+0,6	+1,115	+1,068	+1,146	+1,094	+10,95	+9,92	+11,26	+10,22
	+0,4	+1,159	+1,100	+1,210	+1,144	+11,46	+9,95	+12,17	+10,70
	+0,2	+1,259	+1,175	+1,363	+1,273	+11,96	+9,80	+13,48	+11,52
+0,25	+0,6	+1,115	+1,065	+1,148	+1,093	+9,27	+8,68	+9,36	+8,81
	+0,4	+1,155	+1,092	+1,210	+1,139	+8,96	+8,15	+8,61	+7,88
	+0,2	+1,222	+1,139	+1,325	+1,231	+6,81	+5,95	+5,89	+5,19
+0,5	+0,6	+1,099	+1,047	+1,124	+1,068	+7,74	+7,96	+6,80	+7,09
	+0,4	+1,120	+1,055	+1,157	+1,086	+6,31	+6,60	+4,68	+5,07
	+0,2	+1,142	+1,061	+1,195	+1,104	+3,80	+4,12	+0,70	+1,11
+0,75	+0,6	+1,075	+1,028	+1,087	+1,036	+6,82	+7,81	+5,62	+6,70
	+0,4	+1,080	+1,021	+1,091	+1,028	+5,44	+6,87	+3,54	+5,09
	+0,2	+1,079	+0,997	+1,083	+0,997	+3,40	+5,43	+0,23	+2,39
+1,0	+0,6	+1,052	+1,016	+1,055	+1,016	+6,61	+8,12	+5,58	+7,21
	+0,4	+1,049	+1,008	+1,045	+1,001	+5,54	+7,50	+4,16	+6,26
	+0,2	+1,038	+0,993	+1,018	+0,971	+4,33	+7,93	+2,64	+6,40

4. Vergleich mit dem Verfahren von Keune zur Berechnung der Potentialströmung um allgemeine Tragflügelprofile.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat F. Keune[3]) ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile angegeben. Es dürfte von Interesse sein, an einigen Beispielen die von dem Keuneschen Verfahren bei seiner Anwendung auf das hier behandelte Profil gelieferten Werte mit unseren, nach der exakten Methode der konformen Abbildung berechneten Ergebnissen zu vergleichen. Der Vergleich wurde für die zu der Anströmrichtung $\alpha = 10^0$ und den Ruderwinkeln $\beta = 2^0$ und $\beta = 10^0$ gehörigen Strömungen in einigen vor der Profilnase gelegenen Punkten durchgeführt.

a) Die Anwendung des Keuneschen Verfahrens geschieht im vorliegenden Fall in der Weise, daß dem Geschwindigkeitsfeld der geknickten Platte der Dickeneinfluß nach Keune überlagert wird. Bezeichnet man die (in K. u und v genannten) Geschwindigkeiten in Richtung der x- bzw. y-Achse mit v_x und v_y, so berechnen sich die für v_x und v_y geltenden Korrekturgrößen des Dickeneinflusses $\tilde{v}_x$ und $\tilde{v}_y$ nach K. (97) und Tafel I, wobei in diesen Formeln

[3]) F. Keune, Die ebene Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, I, 3—26. Die Arbeit wird weiterhin kurz als »K.« zitiert.

Digitized by Google

Zahlentafel 3. Betrag und Richtungswinkel der Geschwindigkeit in Punkten hinter dem Leitwerksprofil für die Dickenverhältnisse $\frac{d}{l_L} = 0$ und $\frac{d}{l_L} = 0{,}1$. ($\alpha = 10^0$, $\beta = -2^0$ und $\beta = -10^0$).

$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	$\frac{d}{l_L}=0$ v/V für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0$ v/V für $\beta=-10^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}1$ v/V für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}1$ v/V für $\beta=-10^0$	$\frac{d}{l_L}=0$ ϑ^0 für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0$ ϑ^0 für $\beta=-10^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}1$ ϑ^0 für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}1$ ϑ^0 für $\beta=-10^0$
+1,0	+0,2	1,038	0,993	1,018	0,971	+4,33	+7,93	+2,64	+6,40
	0	—	—	—	—	—	—	—	—
+1,5	+0,2	1,011	1,002	1,002	0,993	+6,46	+8,62	+6,10	+8,41
	0	1,000	1,000	0,990	0,990	+6,34	+8,62	+6,19	+8,64
+2,0	+0,2	1,005	1,002	1,001	0,998	+7,41	+8,84	+7,26	+8,79
	0	1,000	1,000	0,996	0,996	+7,43	+8,89	+7,30	+8,88
+3,0	+0,2	1,002	1,001	1,001	0,999	+8,39	+9,26	+8,27	+9,21
	0	1,000	1,000	0,998	0,998	+8,39	+9,27	+8,28	+9,22
+3,5	+0,2	1,000	0,998	1,001	0,999	+8,64	+9,37	+8,54	+9,32
	0	1,000	1,000	0,999	0,999	+8,63	+9,37	+8,54	+9,32

Zahlentafel 4. Betrag und Richtungswinkel der Geschwindigkeit in Punkten der unmittelbaren Umgebung der Profilnase für die Dickenverhältnisse $\frac{d}{l_L} = 0$ und $\frac{d}{l_L} = 0{,}1$. ($\alpha = 10^0$, $\beta = -2^0$ und $\beta = -10^0$).

$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	$\frac{d}{l_L}=0$ v/V für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0$ v/V für $\beta=-10^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}10$ v/V für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}10$ v/V für $\beta=-10^0$	$\frac{d}{l_L}=0$ ϑ^0 für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0$ ϑ^0 für $\beta=-10^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}10$ ϑ^0 für $\beta=-2^0$	$\frac{d}{l_L}=0{,}10$ ϑ^0 für $\beta=-10^0$
−0,2	−0,2	+0,898	+0,930	+0,848	+0,887	+18,87	+15,35	+18,12	+14,22
	−0,4	+0,897	+0,933	+0,876	+0,917	+14,96	+13,81	+13,84	+11,38
−0,1	−0,2	+0,838	+0,888	+0,780	+0,839	+19,07	+15,25	+16,44	+12,46
	−0,4	+0,873	+0,917	+0,856	+0,906	+14,33	+12,14	+12,63	+10,33
0	−0,2	+0,763	+0,835	+0,729	+0,814	+16,99	+13,70	+11,27	+7,96
	−0,4	+0,853	+0,905	+0,845	+0,905	+13,11	+11,19	+10,96	+9,01
+0,1	−0,2	+0,741	+0,825	+0,754	+0,850	+11,96	+9,80	+6,24	+4,32
	−0,4	+0,841	+0,900	+0,847	+0,913	+11,45	+9,94	+9,27	+7,80

der Einfluß der ebenen Platte zu streichen ist. Man erhält unter Vernachlässigung des quadratischen Glieds (das nur in unmittelbarer Umgebung des Profils ins Gewicht fällt)

$$\frac{\tilde{v}_x}{V} = \cos\alpha\left\{1 + \frac{d}{a}\cdot\frac{\partial Q_1}{\partial\, y/a'} + 2\,\frac{d}{a}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial\, y/a'}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right\},$$

$$\frac{v_y}{V} = -\cos\alpha\left\{\frac{d}{a}\,\frac{\partial Q_1}{\partial\, x/a'} - \left(1 - 2\,\frac{d}{a}\,\frac{\partial W_2}{\partial\, x/a'}\right)\mathrm{tg}\,\alpha\right\},$$

wobei in unserem Fall $a' = 0{,}5\, l_L \sim 2{,}012$ ist, während sich $\frac{d}{a}$ aus K. (90) mit $\frac{D_1}{a'} \sim 0{,}01$, $\frac{D_2}{a'} \sim 0{,}1$ zu $\frac{d}{a} \sim 0{,}055$ berechnet. Die danach berechneten Korrekturgrößen

$$\frac{\tilde{v}}{V} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{v}_x}{V}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{V}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tilde{\vartheta} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\tilde{v}_y}{\tilde{v}_x}$$

sind in Spalte 1 der Zahlentafel 5 wiedergegeben. Der Dickeneinfluß zeigt sich in den Differenzen dieser Größen gegen 1 bzw. 10°. Weiter tritt nun in unserem Falle an die Stelle des Einflusses der ebenen Platte der der geknickten Platte. Die für die geknickte Platte berechneten Geschwindigkeiten sind aus Spalte 1 der Zahlentafel 6 ersichtlich. Um beide Einflüsse zusammen zu berücksichtigen, hat man daher noch diese, für die geknickte Platte geltenden Geschwindigkeiten (Zahlentafel 6, Spalte 1) um die Differenzen der Korrekturgrößen des Dickeneinflusses (Zahlentafel 5, Spalte 1) gegen 1 bzw. 10° zu ändern. Die Ergebnisse zeigt Spalte 2 der Zahlentafel 6. Zum Vergleich sind in der danebenstehenden Spalte 3 die mittels konformer Abbildung gewonnenen Werte angegeben. Die nach Keune berechneten Werte zeigen eine befriedigende Übereinstimmung mit den unseren.

b) Man kann jedoch noch eine wesentlich bessere Übereinstimmung erhalten[4]), wenn man beachtet, daß bei geknickten Profilen der Einfluß der Dicke auf c_a vom Ruderausschlag β und dem Rudertiefenverhältnis l_R/l_L abhängt. Nach K. (92) gilt nämlich die Beziehung

Zahlentafel 5. Berechnung der Korrekturgrößen des Dickeneinflusses nach Keune.

$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	I $\frac{\tilde{v}}{V}$	I $\tilde{\vartheta}^0$	II ($\beta = 2^0$) $\frac{\tilde{v}}{V}$	II ($\beta = 2^0$) $\tilde{\vartheta}^0$	III ($\beta = 10^0$) $\frac{\tilde{v}}{V}$	III ($\beta = 10^0$) $\tilde{\vartheta}^0$
−0,75	0	0,995	10,49	0,992	10,58	0,992	10,76
	−0,2	0,993	10,39	0,990	10,42	0,990	10,58
	−0,4	0,992	10,20	0,990	10,19	0,988	10,38
−0,5	0	0,991	10,81	0,985	10,94	0,986	11,23
	−0,2	0,988	10,44	0,985	10,41	0,982	10,67
	−0,4	0,989	10,15	0,986	10,12	0,984	10,30

Zahlentafel 6. Vergleich mit den Ergebnissen der Rechnung nach Keune. ($\alpha = 10^0$, $\beta = 2^0$ und $\beta = 10^0$)

$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	I $\beta=2^0$ $\frac{v}{V}$	I $\beta=10^0$ $\frac{v}{V}$	II $\beta=2^0$ $\frac{v}{V}$	II $\beta=10^0$ $\frac{v}{V}$	III $\beta=2^0$ $\frac{v}{V}$	III $\beta=10^0$ $\frac{v}{V}$	IV $\beta=2^0$ $\frac{v}{V}$	IV $\beta=10^0$ $\frac{v}{V}$
−0,75	0	1,000	1,000	0,995	0,995	0,990	0,990	0,992	0,992
	−0,2	0,979	0,973	0,972	0,966	0,967	0,960	0,969	0,963
	−0,4	0,964	0,952	0,956	0,944	0,950	0,937	0,954	0,940
−0,50	0	1,000	1,000	0,991	0,991	0,982	0,982	0,985	0,986
	−0,2	0,961	0,949	0,949	0,937	0,940	0,926	0,946	0,931
	−0,4	0,939	0,921	0,928	0,910	0,922	0,901	0,925	0,905
$\frac{x}{l_L}$	$\frac{y}{l_L}$	ϑ^0	ϑ^0	ϑ^0	ϑ^0	ϑ^0	ϑ^0	ϑ^0	ϑ^0
−0,75	0	15,78	17,78	16,27	18,27	16,54	18,75	16,36	18,54
	−0,2	15,50	17,43	15,89	17,82	15,99	18,12	15,92	18,21
	−0,4	14,84	16,57	15,04	16,77	15,06	16,96	15,03	16,95
−0,50	0	17,99	20,65	18,80	21,46	19,20	22,18	18,93	21,88
	−0,2	17,25	19,72	17,69	20,16	17,77	20,51	17,66	20,39
	−0,4	15,75	17,80	15,90	17,95	15,75	18,00	15,87	18,10

[4]) Den folgenden Vorschlag für die Verbesserung des Verfahrens im Falle eines geknickten Profils verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Keune, der auch die Zahlentafel 5 entnommen ist.

Digitized by Google

$$\frac{c_{a\ \text{Profil}}}{c_{a\ \text{Skelett}}} = 1 + \frac{d}{a},$$

die auch auf geknickte dicke Profile anwendbar ist, wenn man für das geknickte Skelett bei beliebigem Ruderwinkel und Rudertiefenverhältnis

$$c_{a\ \text{Skelett}} = \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \sin(\alpha - \alpha_0)$$

(α_0 = Nullanstellwinkel) setzt. Dabei ist $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ und auch α_0 eine Funktion von l_K/l_L und β, während $\frac{d}{a}$ als in erster Näherung von l_K/l_L und β unabhängig anzusehen ist.

Der Einfluß der Dicke auf die Zirkulation wird nun beim Keuneschen Verfahren durch die Glieder $\frac{d}{a}\frac{\partial W_i}{\partial y/a'}$ und $\frac{d}{a}\frac{\partial W_i}{\partial x/a'}$ berücksichtigt. Beim Übergang zu geknickten Profilen hat man diese Geschwindigkeitskomponenten durch die entsprechenden der geknickten Platte zu ersetzen. Die der Einflußfunktion $\frac{\partial W_2}{\partial y/a'}$, $\frac{\partial W_2}{\partial x/a'}$ der ebenen Platte entsprechende Einflußfunktion $\frac{\partial W_2^*}{\partial x/a'}$, $\frac{\partial W_2^*}{\partial x/a'}$ der geknickten Platte ergibt sich aber nach K. (97) und Tafel I unmittelbar zu

$$\frac{d}{a}\frac{\partial W_2^*}{\partial y/a'} = \frac{v_x^*/V - \cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{d}{a}\frac{\partial W_2^*}{\partial x/a'} = 1 - \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{v_y^*}{V},$$

wenn v_x^*, v_y^* die (für unser Beispiel der Spalte 1 von Zahlentafel 6 zu entnehmenden) Geschwindigkeitskomponenten der Strömung um die geknickte Platte sind. In analoger Weise läßt sich auch der geringere Einfluß des Nullanstellwinkels α_0 erfassen, doch soll darauf verzichtet und mit $\alpha_0 = 0$ gerechnet werden. Dann erhält man entsprechend K. (97) und Tafel I für die Geschwindigkeit der Strömung um das geknickte Joukowsky-Profil (wieder unter Vernachlässigung des quadratischen Glieds)

$$\frac{v_x}{V} = \cos\alpha\left\{1 + \frac{d}{a}\frac{\partial Q_1}{\partial y/a'} + \left(\frac{1}{2} + 2\frac{d}{a}\right)\frac{\partial W_2^*}{\partial y/a'}\operatorname{tg}\alpha\right\},$$

$$\frac{v_y}{V} = -\cos\alpha\left\{\frac{d}{a}\frac{\partial Q_1}{\partial x/a'} - \left(1 - \left(\frac{1}{2} + 2\frac{d}{a}\right)\frac{\partial W_2^*}{\partial x/a'}\right)\operatorname{tg}\alpha\right\}.$$

Rechnet man hier wie unter a) die Korrekturgrößen des Dickeneinflusses gesondert, läßt also in den vorstehenden Formeln die unterstrichenen Glieder, welche den Einfluß der geknickten Platte angeben, weg, so erhält man die aus Spalte 2 und 3 der Zahlentafel 5 ersichtlichen Werte. Im Gegensatz zu dem unter a) geschilderten Vorgehen zeigt sich nun, wie es sein muß, eine Abhängigkeit des Dickeneinflusses vom Ruderausschlag. Verwendet man diese Korrekturgrößen in derselben Weise wie unter a), so ergeben sich für die Geschwindigkeiten die Werte in Spalte 4 der Zahlentafel 6. Der Vergleich mit der danebenstehenden Spalte 3 zeigt, daß die Abweichungen von unseren Ergebnissen jetzt nur noch um ½% bzw. um 0,1° liegen.

5. Zusammenfassung.

Es wird das Geschwindigkeitsfeld der ebenen Potentialströmung um ein Profil, das angenähert mit einem in Flosse und Ruder aufgeteilten Joukowsky-Profil übereinstimmt, unter Beschränkung auf eine lineare Theorie in dem Anstellwinkel α und dem Ruderwinkel β mittels konformer Abbildung berechnet. Für ein das Profil umgebendes Punktgitter, das sich in Tiefenrichtung über 4½ Profiltiefen erstreckt und 1 Profiltiefe vor der Nase beginnt, werden die Koeffizienten der in α, β linearisierten Darstellung von Betrag und Richtungswinkel der Geschwindigkeit angegeben und in Diagrammen dargestellt. Zur Veranschaulichung des Dickeneinflusses des Profils auf das Geschwindigkeitsfeld werden daraus für die zu dem Anstellwinkel $\alpha = 10°$ und den Ruderwinkeln $\beta = -2°$ und $\beta = -10°$ gehörigen Strömungen in einigen Gitterpunkten Betrag und Richtungswinkel der Geschwindigkeit berechnet und den entsprechenden Werten für das Profil verschwindender Dicke gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß der Dickeneinfluß mit der Entfernung vom Profil rasch abklingt. Schließlich werden noch in einigen Punkten die Geschwindigkeiten nach einem von F. Keune angegebenen Näherungsverfahren zur Ermittlung des Geschwindigkeitsfelds der Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile berechnet und mit den auf Grund der konformen Abbildung erhaltenen Werten verglichen, wobei sich eine gute Übereinstimmung zeigt.

3. Teil.

Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt.

Von H. Söhngen.

Es werden die Auftriebs- und Momentenbeiwerte sowie die Druckverteilungen des symmetrischen Doppelflügels für eine lineare Theorie in den Strömungswinkeln bestimmt.

Gliederung.

1. Berechnung der Wirbeldichten.
2. Die Luftkraftbeiwerte.
3. Gültigkeitsbereich.
4. Zusammenfassung.

1. Berechnung der Wirbeldichten.

Nach Birnbaum kann die Strömung um eine beliebige Anordnung zweier dünner Profile als Überlagerung der Anströmgeschwindigkeit V mit demjenigen Geschwindigkeitsfeld dargestellt werden, das durch die Belegung der Flosse und des Ruders mit Wirbeln geeigneter Dichten γ_F und γ_R erzeugt wird. Die Funktionen γ_F und γ_R sind dabei so zu bestimmen, daß die resultierende Strömung die gegebenen Skelettkonturen umfließt, d. h. dort eine verschwindende Normalkomponente hat. Mathematisch findet diese Forderung ihren Ausdruck in einem System von zwei singulären Integralgleichungen für γ_F und γ_R, dessen Lösungen aber nicht eindeutig bestimmt sind, sondern noch zwei willkürliche Konstanten enthalten, so daß also die Werte von γ_F und γ_R an zwei Stellen vorgegeben werden dürfen. Wir verlangen hier, daß das resultierende Geschwindigkeitsfeld an den beiden Hinterkanten a bzw. c endlich ist und legen dadurch die beiden Konstanten fest.

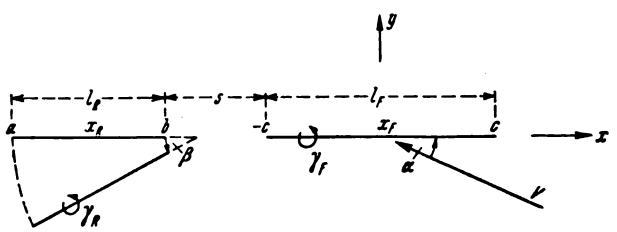


Bild 1. Geknickte Platte mit Spalt.

Unter der oben gemachten Annahme über den Ruderwinkel β vereinfacht sich das Integralgleichungssystem für die vorliegende Leitwerksanordnung zu den beiden Gleichungen (vgl. für die Bezeichnungen Bild 1)

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\oint_{-c}^{c}\frac{\gamma_F(\xi_F)}{x_F-\xi_F}\,d\xi_F+\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\frac{\gamma_K(\xi_K)}{x_F-\xi_K}\,d\xi_K+V\cdot\sin\alpha=0,\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\gamma_F(\xi_F)}{x_K-\xi_F}\,d\xi_F+\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\frac{\gamma_K(\xi_K)}{x_K-\xi_K}\,d\xi_K+V\sin(\alpha+\beta)=0,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

die besagen, daß für die Berechnung der Normalkomponenten des Geschwindigkeitsfeldes die Belegung des Ruders durch die Belegung der Strecke $[a, b]$ ersetzt werden darf.

Für die Funktionen γ_F und γ_K ergeben sich aus (1) unter Hinzunahme der Bedingung des glatten Abflusses an den Hinterkanten die beiden Ausdrücke[1])

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_F(x_F)}{V}&=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(x_F-a)(c+x_F)}{(x_F-b)(c-x_F)}}\left\{\pi\cdot\sin\alpha\right.\\&\left.+[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]\int_{a}^{b}\frac{1}{x_F-\xi_K}\sqrt{\frac{(b-\xi_K)(\xi_K-c)}{(\xi_K-a)(\xi_K+c)}}\,d\xi_K\right\},\\ \frac{\gamma_K(x_K)}{V}&=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(x_K-a)(x_K+c)}{(b-x_K)(x_K-c)}}\left\{\pi\cdot\sin(\alpha+\beta)\right.\\&\left.-[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]\int_{-c}^{c}\frac{1}{x_K-\xi_F}\sqrt{\frac{(\xi_F-b)(c-\xi_F)}{(\xi_F-a)(c+\xi_F)}}\,d\xi_F\right\},\end{aligned}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

die für $\beta = 0$ unmittelbar in die bekannten Ergebnisse der Tandemanordnung übergehen[2]). Weiter entnimmt man den Gl. (2), daß die Wirbeldichten γ_F und γ_K im Rahmen einer linearen Theorie in β von der Lage der Ruderdrehachse unabhängig sind.

Die in den Gl. (2) auftretenden Integrale sind vollständige elliptische Integrale 3. Gattung und lassen sich nach einem Satz von Legendre durch elliptische Integrale 1. und 2. Gattung, d. s. Integrale der Form

$$\left.\begin{aligned}&F(k,\varphi)=\int_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)},\quad K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right),\\ &\text{bzw.}\\ &E(k,\varphi)=\int_{0}^{\varphi}\Delta(k,\varphi)\,d\varphi,\quad E=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(3)$$

mit

$$\Delta(k,\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin\varphi},$$

ausdrücken. Um diese Darstellung zu gewinnen, nehmen wir die bekannten Substitutionen

$$x_F=\frac{c(a+c)-2ac\sin^2\varphi_F}{(a+c)-2c\sin^2\varphi_F},$$

$$x_K=\frac{a(c-b)-c(a-b)\sin^2\varphi_K}{(c-b)-(a-b)\sin^2\varphi_K}$$

mit

$$0\leq\varphi_F\leq\frac{\pi}{2}\quad\text{und}\quad 0\leq\varphi_K\leq\frac{\pi}{2}$$

vor und setzen

$$\operatorname{tg}^2\alpha_1=\frac{a+c}{2c}=\frac{l_K+s}{l_F}$$

sowie

$$\operatorname{tg}^2\alpha_2=\frac{c-b}{b-a}=\frac{l_F+s}{l_K}$$

mit $0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$ und $0<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$. Führt man dies in den Gl. (2) durch, so treten neben den unter (3) aufgeführten zu dem Modul k mit

$$k^2=\frac{2c(a-b)}{(c-b)(a+c)}=\frac{l_K\cdot l_F}{(l_K+s)(l_F+s)}=\operatorname{ctg}^2\alpha_1\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha_2$$

gehörenden elliptischen Normalintegrale 1. und 2. Gattung noch die beiden vollständigen Normalintegrale 3. Gattung

$$S(k,\varphi)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1-k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi)\,\Delta(k,\psi)}$$

und

$$T_1(\alpha_\mu)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1+k^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha_\mu\cdot\sin^2\psi)\,\Delta(k,\psi)}\qquad(\mu=1,2)$$

auf. Diese genügen mit

$$k'^2=1-k^2$$

den Beziehungen[3])

$$S(k,\varphi)=K+\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\cdot[K\cdot E(k,\varphi)-E\cdot F(k,\varphi)]$$

bzw.

$$\begin{aligned}T_1(\alpha_1)&=K\cdot\cos\alpha_1\\&\quad+[K\cdot E(k',\alpha_1)+(E-K)\cdot F(k',\alpha_1)]\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\end{aligned}$$

und

$$T_1(\alpha_2)=K-T_1(\alpha_1)+\frac{\pi}{2}\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2.$$

Damit haben wir die in den Gl. (2) auftretenden elliptischen Integrale 3. Gattung durch solche 1. und 2. Gattung, d. h. durch tabulierte Funktionen, ausgedrückt. Es ergeben sich so für die Wirbeldichten die Darstellungen

$$\begin{aligned}\gamma_F(x_F)=&-\frac{4V}{\pi}[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]\times\\&[K\cdot\Delta(k,\varphi_F)\cdot\operatorname{ctg}\varphi_F+K\cdot E(k,\varphi_F)-E\cdot F(k,\varphi_F)]\\&+\frac{2V}{\pi}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\operatorname{ctg}\varphi_F}{\Delta(k,\varphi_F)}\times\\&\left\{\pi\sin\alpha+2[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]\frac{T_1(\alpha_1)}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}\right\}\end{aligned}\quad(4)$$

und

$$\begin{aligned}\gamma_K(x_K)=&-\frac{4V}{\pi}[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]\times\\&[K\cdot E(k,\varphi_K)-E\cdot F(k,\varphi_K)]+\frac{2V}{\pi}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\Delta(k,\varphi_K)\operatorname{tg}\varphi_K\times\\&\left\{\pi\sin\alpha+2[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]\frac{T_1(\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}\right\}\end{aligned}\quad\ldots\quad(5)$$

Die Zirkulationen um Flosse und Ruder erhält man aus den Gl. (4) und (5) durch Integration. Formt man die dabei entstehenden Integrale über elliptische Integrale mittels partieller Integration um, so entstehen wieder vollständige elliptische Integrale. Unter Benutzung der Relationen[4])

$$\begin{aligned}T_2(\alpha_1)&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha_1\cdot\sin^2\psi)^2\cdot\Delta(k,\psi)}\\&=\frac{1}{2}\{\sin^2\alpha_1\cdot\sin^2\alpha_2[E-(1+\operatorname{ctg}\alpha_1)\cdot K]\\&\quad+(1+\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2)\cdot T_1(\alpha_1)\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}T_2(\alpha_2)&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1+k^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha_2\cdot\sin^2\psi)^2\,\Delta(k,\psi)}\\&=T_2(\alpha_1)+K-2T_1(\alpha_1)\\&\quad+\frac{\pi}{4}\sin\alpha_1\sin\alpha_2(1+\sin^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2)\end{aligned}$$

[1]) Vgl. H. Sohngen, Über die Lösungen der Integralgleichung $g(x)=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{f(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Math. Z. Bd. 45 (1939), S. 245–264.

[2]) Vgl. z. B. R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917, S. 76ff.

[3]) Vgl. z. B. Enneper, Elliptische Funktionen (1876), S. 175, 176 u. 203.

[4]) Vgl. a. a. O. [3]).

Digitized by Google

findet man dann

$$\Gamma_F = 2V(l_F + l_R + s)\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha \times$$
$$\left\{E - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1)\cdot K + (\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + 2k^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2)\cdot T_1(\alpha_2)\right\}$$
$$+\frac{4V}{\pi}(l_F + l_R + s)[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha]\times$$
$$\left\{\frac{\pi}{2}E\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + K^2 - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_2)K\cdot T_1(\alpha_1)\right.$$
$$\left.+[\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + 2k^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2]\cdot T_1(\alpha_1)T_1(\alpha_2) - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1)K\cdot T_1(\alpha_2)\right\} \quad \ldots (6)$$

$$\Gamma_R = 2V(l_F + l_R + s)\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha\times$$
$$\left\{E + (\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + 2k^2 - 1)K - (\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + 2k^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2)T_1(\alpha_1)\right\}$$
$$-\frac{4V}{\pi}(l_F + l_R + s)[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha]\times$$
$$\left\{2(\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + k^2)\cdot K\cdot T_1(\alpha_1)\right.$$
$$\left.- (\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + 2k^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2)\cdot T_1^2(\alpha_1) - \operatorname{ctg}^2\alpha_1\cdot K^2\right\} \quad (7)$$

sowie

$$\Gamma = \Gamma_F + \Gamma_R = \pi\cdot V\cdot(l_F + l_R)\cdot\sin\alpha$$
$$+4V(l_F + l_R + s)\cdot\frac{T_2(\alpha_1) - \sin^2\alpha_1}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha] \quad \ldots\ldots (8)$$

Schließlich sei noch vermerkt, daß bei der später vorzunehmenden Berechnung der Momente die Integrale

$$T_3(\alpha_\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1 + k^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha_\mu\cdot\sin^2\psi)^3\,\Delta(k,\psi)} \qquad (\mu = 1,2)$$

auftreten, für die

$$4(1+\operatorname{tg}^2\alpha_\mu)(1 + k^2\operatorname{tg}^2\alpha_\mu)\cdot T_3(\alpha_\mu)$$
$$+2[\operatorname{tg}^2\alpha_\mu(1+k^2) + 3]\cdot T_1(\alpha_\mu)$$
$$= K + 3[k^2\operatorname{tg}^4\alpha_\mu + 2\operatorname{tg}^2\alpha_\mu(1+k^2) + 3]\cdot T_2(\alpha_\mu)$$

gilt.

2. Luftkraftbeiwerte.

In dem vorhergehenden Abschnitt wurde nur von der hinsichtlich der Größe von β gemachten Voraussetzung Gebrauch gemacht, so daß also die Gl. (4), (5), (6), (7) und (8) für beliebige Anstellwinkel Gültigkeit haben. Die Druckdifferenzen und Auftriebe an Flossen und Ruder werden aber durch die mit $\varrho\cdot V$ multiplizierten Gl. (4), (5), (6), (7) und (8) nur für kleine Anstellwinkel unmittelbar geliefert; andernfalls muß z. B. bei der Berechnung der Druckdifferenz an der Flosse auch noch diejenige Tangentialgeschwindigkeit berücksichtigt werden, die die Belegung des Ruders an der Flosse induziert. Davon wollen wir hier absehen.

Nachstehend geben wir die Auftriebs- und Momentenbeiwerte der linearen Theorie in den Strömungswinkeln an. Als unabhängige Veränderliche wählen wir c_a und β[5]), d. h. wir setzen

$$\alpha = \left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right]c_a + \left[\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right]\beta$$

und, wenn c_ϱ irgendeinen Auftriebs- oder Momentenbeiwert bedeutet,

$$c_\varrho = \left[\frac{\partial c_\varrho}{\partial c_a}\right]c_a + \left[\frac{\partial c_\varrho}{\partial\beta}\right]\beta.$$

Die Auftriebsbeiwerte sind dabei stets auf die Tiefe desjenigen Teiles bezogen, für den der Auftrieb berechnet wird, d. h. auf $l_L = l_F + l_R$, l_F bzw. l_R. Die Bezugstiefe der Momente ist dagegen stets die gesamte Leitwerkstiefe l_L. Als Momentenachse nehmen wir die Flossen- bzw. Rudernase. Mit diesen Verabredungen ergeben sich die folgenden Darstellungen, die bei festem $l_R/l_L > 0$ mit $s/l_L \to 0$ in die bekannten Ergebnisse der geknickten Platte ohne Spalt übergehen.

[5]) Vgl. Vorbemerkung, S. 2, (1).

Genau wie in der soeben angeführten Theorie gilt auch für $s > 0$ die Beziehung

$$\left[\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial c_a}\right] = \frac{1}{2\pi},$$

während die für die Bestimmung der Nullauftriebsrichtung wesentliche Größe $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right]$ hier durch den Ausdruck

$$\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2}\times$$
$$\left\{E - K(1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1) + (\operatorname{ctg}^2\alpha_2 + 2k^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha_1)\cdot T_1(\alpha_1)\right\}$$

gegeben wird.

Die am Ruder angreifende Normalkraft wird durch die beiden Gleichungen

$$\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right] = \frac{l_L}{l_R}\left\{-\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right] + \frac{4}{\pi}\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2}(k'^2\cdot K - E)\right\}$$

und

$$\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial\beta}\right] = \frac{l_L}{l_R}\frac{8}{\pi}\frac{\sin^2\alpha_1\cdot\sin^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2}[E^2 + K(K - 2E)k'^2]$$

bestimmt. Hierin darf die Größe c_{n_R} stets durch c_{a_R} ersetzt werden, denn in der linearen Theorie fallen ja die Auftriebe mit den Normalkräften zusammen. Weiter sei noch vermerkt, daß der letzte Ausdruck für $l_R/l_L \to 0$ bei fester Spaltgröße $s/l_L > 0$ stets gegen den zu erwartenden Wert 2π konvergiert. Führt man dagegen denselben Grenzübergang an der entsprechenden Formel für $s/l_L = 0$ aus, so ergibt sich der Grenzwert $8/\pi$. Diese Erscheinung, die bei den übrigen Koeffizienten nicht auftritt, ist durchaus erklärbar. Führt man nämlich den Grenzübergang $l_R/l_L \to 0$ bei fester Rudertiefe l_R durch, so entspricht dem ein Grenzübergang $l_L \to \infty$, wobei auch $s \to \infty$ gehen muß, da $s/l_L > 0$ und fest sein soll. Beachtet man weiter, daß $c_a = 0$ ist, so tritt wegen des großen Spaltes keine Induktion zwischen Flosse und Ruder ein. Dies ist dagegen der Fall, wenn $s/l_L = 0$ ist.

Sind die Auftriebskoeffizienten des Ruders bekannt, so können damit die entsprechenden Größen für die Flosse berechnet werden, denn es gilt die Beziehung

$$l_L c_a = l_F c_{n_F} + l_R\cdot c_{n_R},$$

die die Gleichungen

$$\left[\frac{\partial c_{n_F}}{\partial c_a}\right] = \frac{l_L}{l_F} - \frac{l_R}{l_F}\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial c_a}\right]$$

und

$$\left[\frac{\partial c_{n_F}}{\partial\beta}\right] = -\frac{l_R}{l_F}\left[\frac{\partial c_{n_R}}{\partial\beta}\right]$$

nach sich zieht.

Abschließend geben wir die Koeffizienten der Momentenbeiwerte an:

$$\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] = -\frac{1}{4} - \frac{l_R}{l_L}\cdot\frac{s}{l_L},$$

$$\left[\frac{\partial c_m}{\partial\beta}\right] = -\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)^2}\times$$
$$\left\{[E - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1)K]\left[4\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right](\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)\right.\right.$$
$$\left.\left. + 1 + \cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2\right] + 2K\operatorname{ctg}^2\alpha_1\right\},$$

$$\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right] = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)}\left\{[E - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1)\cdot K]\right.$$
$$+ \operatorname{ctg}^2\alpha_2\cdot T_1(\alpha_1) + 3\operatorname{ctg}^2\alpha_1[K - T_1(\alpha_1)]$$
$$\left. + (\operatorname{ctg}^2\alpha_1 - \operatorname{ctg}^2\alpha_2)T_2(\alpha_1)\right\},$$

$$\left[\frac{\partial c_R}{\partial\beta}\right] = -4\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)}[E - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1)\cdot K]\left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right]$$
$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)^2}\times$$
$$\left\{[E - (1+\operatorname{ctg}^2\alpha_1)\cdot K][2\sin^2\alpha_2\cdot T_1(\alpha_1) - T_2(\alpha_1)]\right.$$
$$\left. + K\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha_1[2K\sin^2\alpha_2 - T_1(\alpha_1)]\right\}.$$

Digitized by Google

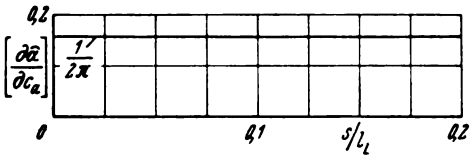
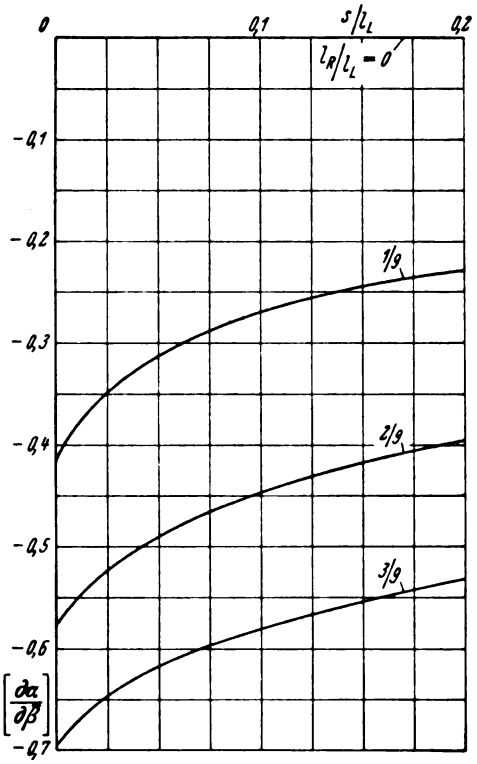


Bild 2 (links). Anstellwinkel
$\hat{\alpha} = \left[\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \beta}\right] \beta.$



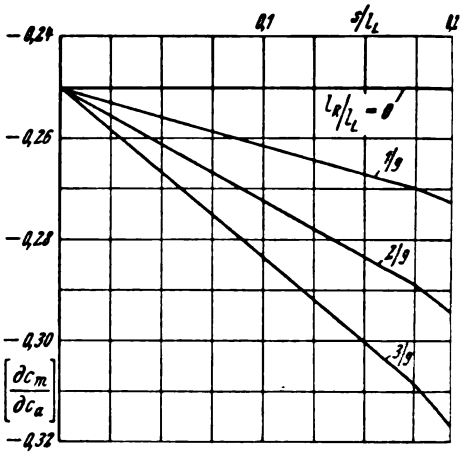
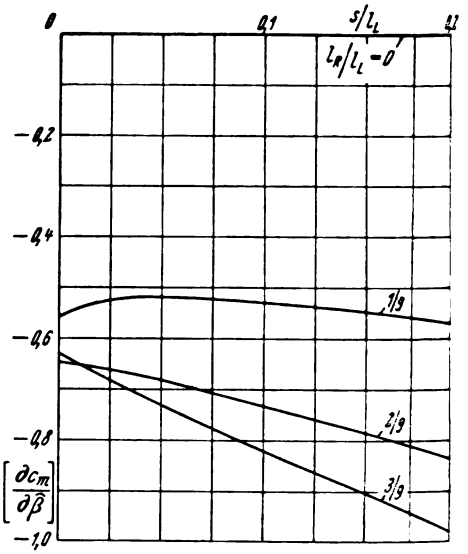


Bild 3 (rechts). Längsmoment
$c_m = \left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta}\right] \beta.$



In Bild 2 bis 6 sind für die vier Rudertiefenverhältnisse $l_R/l_L = 0$, 1/9, 2/9, 3/9 die oben angegebenen Koeffizienten der Beiwerte sowie der von der Rudervorderkante aus gemessene Hebelarm der Normalkraft des Ruders für $\beta = 0$ über s/l_L aufgetragen.

8. Gültigkeitsbereich.

Der hier zur Bestimmung der Auftriebe und Momente eingeschlagene Weg weist zwei Fehlerquellen auf:

1. Bei der Berechnung der Wirbeldichten (4) und (5) haben wir die Randbedingung nicht auf der geknickten Platte mit Spalt erfüllt, sondern wir haben nur Wirbelbelegungen bestimmt, die dieselben Normalkomponenten bei tandemartiger Anordnung der Platten erzeugen.

2. Bei der Berechnung der Auftriebsverteilungen aus den Wirbeldichten haben wir die Gleichung

$$p_u - p_0 = \varrho \cdot V \cdot \gamma(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

verwandt, während es z. B. an der Flosse

$$p_u - p_0 = (V \cdot \cos\alpha + v_i(x_F)) \cdot \gamma_F(x_F) \quad \ldots \quad (10)$$

heißen muß. Dabei bedeutet $v_i(x)$ die von der Belegung des Ruders am Ort der Flosse induzierte Geschwindigkeit in Richtung der negativen x-Achse.

Eine allgemeingültige und brauchbare Abschätzung der hierdurch begangenen Fehler ist naturgemäß sehr schwierig. Wir wollen uns daher mit einigen überschlägigen Rechnungen begnügen, die wir an dem speziellen Beispiel $l_R/l_L = 2/9$, $s/l_L = 0{,}03$ durchführen, die Ruderdrehachse möge dabei in der Spaltmitte liegen. Weiter begnügen wir uns mit der Untersuchung des Einflusses, den das Ruder auf die Flosse ausübt, denn dieser ist wegen der starken Wirbel an der Vorderkante des Ruders der Größere. Das Ruder selbst belegen wir mit derjenigen Wirbeldichte, die diese für einen unendlich großen Spalt aufweist. Diese Belegung ist, da wir uns hier nur mit der Abschätzung einiger Korrekturen beschäftigen, als durchaus zureichend anzusehen, zumal Rechnungen, die von anderer Seite durchgeführt wurden, gezeigt haben, daß die Abweichungen von der exakten Wirbeldichte gering sind.

Um den unter 1. aufgezeigten Fehler abzuschätzen, müssen wir die Differenz v_{nk} derjenigen Normalkomponenten, die das Ruder mit der oben angegebenen Belegung bei einem Ruderausschlag β und in Tandemanordnung auf der Flosse erzeugt, durch eine geeignete Korrekturbelegung γ_{Fk} der Flosse kompensieren. In Bild 7 ist die Größe $v_{nk}/[V(1 - \cos\beta) \sin(\alpha + \beta)]$ für das obengenannte Beispiel aufgetragen und gleichzeitig der konstante Mittelwert über die Platte (Flosse) angegeben, der denselben Auftrieb (Abtrieb) wie die v_{nk} $V(1 - \cos\beta)\sin(\alpha + \beta)$-Verteilung erzeugt. Dieser Mittelwert ist infolge des starken Einflusses der Werte an der Hinterkante relativ groß. Ist $\alpha = \beta = 10^0$, so erzeugt die Korrekturbelegung γ_{Fk} einen Auftrieb, der der Größe nach einer Anstellung der Platte unter einem Winkel von $-0^0{,}012$ entspricht. Der Angriffspunkt der Kraft liegt in etwa $^1/_3$ Flossentiefe hinter dem Mittelpunkt.

Die relative Abweichung der nach Gl. (9) gegenüber der nach Gl. (10) berechneten Auftriebsverteilung ist

$$\cos\alpha - 1 + v_i(x_F)/V.$$

Hierin entspricht der erste Bestandteil der üblichen Linearisierung, während der zweite Bestandteil durch die von dem Ruder induzierte Tangentialgeschwindigkeit (vgl. Bild 8) bedingt ist. Belegen wir auch noch die Flosse mit der dem Spalt $s = \infty$ entsprechenden Wirbeldichte, so wird für $\alpha = \beta = 10^0$ durch die Vernachlässigung von $v_i(x)$ bei dem gesamten Auftrieb ein Fehler von höchstens 0,3% begangen, während der von dem ersten Gliede herrührende Fehler 1,5% beträgt.

Der — allerdings nur an einem Beispiel — untersuchte Einfluß der unter 1 und 2 genannten Fehlerquellen zeigt

Digitized by Google

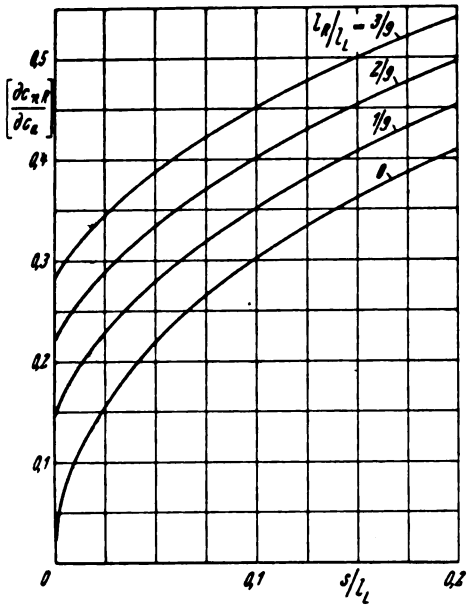
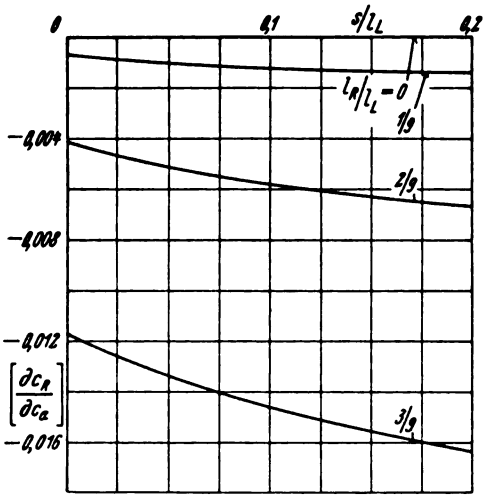
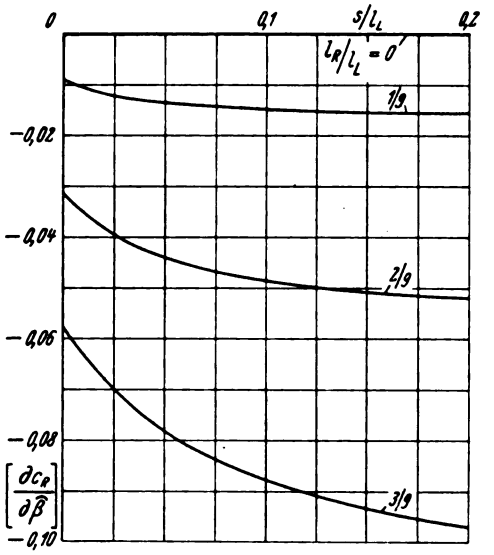


Bild 4 (links). Rudernormalkraft

$$c_{nR} = \left[\frac{\partial c_{nR}}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial c_{nR}}{\partial \hat{\beta}}\right] \hat{\beta}.$$





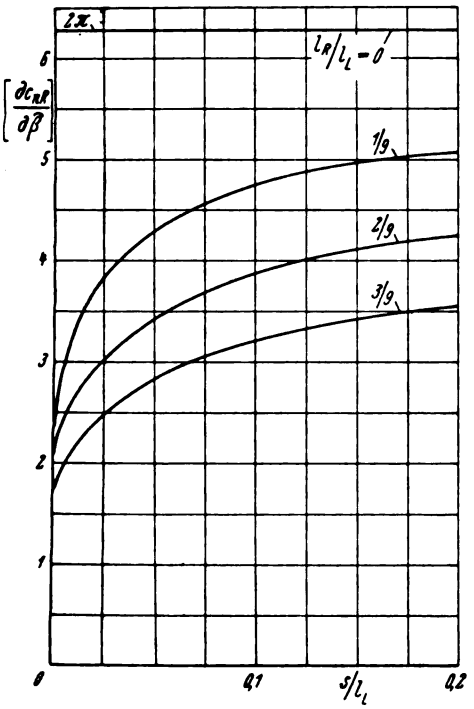


Bild 5 (rechts). Rudermoment

$$c_R = \left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right] c_a + \left[\frac{\partial c_R}{\partial \hat{\beta}}\right] \hat{\beta}.$$

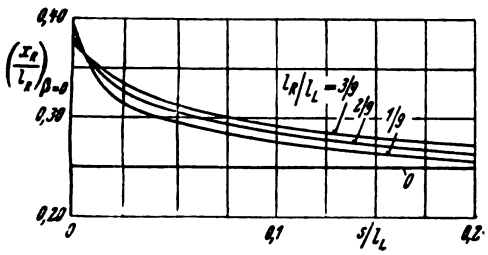


Bild 6. Angriffspunkt der Luftkraft am Ruder. x_R Abstand von der Rudernase.

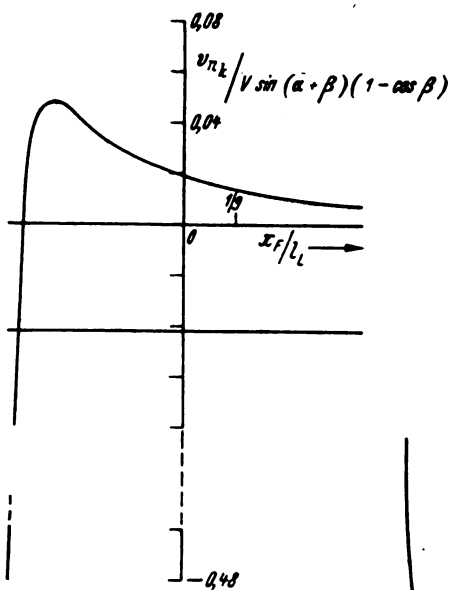


Bild 7. Vernachlässigte Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Flosse ($l_R/l_L = 2/9$, $s/l_L = 0{,}03$).

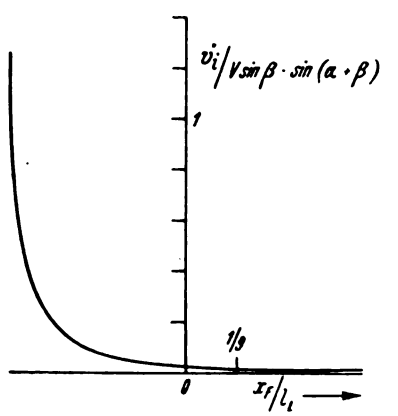


Bild 8. Bei der Bestimmung der Druckverteilung nicht berücksichtigte Tangentialgeschwindigkeit an der Flosse ($l_R/l_L = 2/9$, $s/l_L = 0{,}03$).

Digitized by Google

daß die dadurch hervorgerufenen Abweichungen für Strömungswinkel, die dem Betrage nach unterhalb von 10° liegen, praktisch bedeutungslos und kleiner sind als die Fehler, die man üblicherweise durch die Linearisierung begeht.

4. Zusammenfassung.

Das in dem vorstehenden Bericht angegebene Verfahren zur Berechnung der Auftriebs- und Momentenbeiwerte sowie der Druckverteilungen eines symmetrischen Doppelflügels gründet sich auf die Birnbaumsche Theorie der tragenden Wirbelfläche und auf die Lösung eines Integralgleichungssystems der Form (1), das der Verf. a. a. O.[6]) behandelt hat. Die verschiedenen Lösungsgrößen werden in expliziter Form angegeben und sind im Sinne einer linearen Theorie in den Strömungswinkeln exakt. Für die vier Rudertiefenverhältnisse $l_R/l_L = 0,\ 1/9,\ 2/9,\ 3/9$ wurden die Koeffizienten der Auftriebs- und Momentenbeiwerte sowie der Hebelarm der Normalkraft am Ruder für $\beta = 0$ in Schaubildern dargestellt, die zur Interpolation dazwischenliegender Werte von l_R/l_L ausreichen dürften.

[6]) Vgl. Fußnote [1]).

4. Teil.

Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels.

Von F. Lösch.

Die ebene Potentialströmung um einen unsymmetrischen Doppelflügel, dessen Flosse und Ruder zueinander ähnliche Joukowsky-Betz-Profile sind, wird mittels konformer Abbildung berechnet. Unter Beschränkung auf kleine Ruderwinkel werden ermittelt: Druckverteilung über Flosse und Ruder, Auftrieb und Moment des Doppelflügels, Normalkraft auf das Ruder und Rudermoment.

Gliederung.

1. Beschreibung des Doppelflügels.
2. Konforme Abbildung des Strömungsgebiets auf das Außengebiet zweier Kreise.
3. Berechnung der Druckverteilung über Flosse und Ruder.
4. Berechnung der Auftriebe und Momente.
5. Zusammenfassung.

1. Beschreibung des Doppelflügels.

Der den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegte Doppelflügel ist aufgebaut aus zwei zueinander ähnlichen, symmetrischen Joukowsky-Betz-Profilen[1]). Wählt man in einer ζ-Ebene einen Kreis $\mathfrak{K}_1$, der den Einheitskreis in $\zeta = -1$ berührt und im übrigen umschließt, so erhält man aus ihm durch die Transformation

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

in der z-Ebene ein symmetrisches Joukowsky-Profil. Wendet man statt dessen die Transformation (1) auf einen zu $\mathfrak{K}_1$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}_2$ von größerem Radius an, so entsteht ein symmetrisches Joukowsky-Betz-Profil (Bild 1). Im Gegensatz zum Joukowsky-Profil hat es keine scharfe Hinterkante, doch besitzt der Krümmungsradius seiner Kontur in dem auf der Symmetrielinie des Profils liegenden hintersten Punkt ein Minimum, weshalb diese Stelle als Hinterkante des Profils angesprochen wird. Als Skelett des Profils wird, wie beim gewöhnlichen Joukowsky-Profil, die als Bild des Einheitskreises $|\zeta| = 1$ erscheinende Strecke $-2 \ldots +2$ der reellen Achse der z-Ebene bezeichnet.

Wir betrachten speziell dasjenige Joukowsky-Betz-Profil, das durch die Transformation (1) aus dem Kreis

$$\zeta = 0{,}0606 + 1{,}0928\, e^{i\omega} \qquad (0 < \omega < 2\pi) \quad \ldots \quad (2)$$

hervorgeht. Dieser Kreis ist so gewählt, daß (auf 4 Dezimalen) die Dicke des entstehenden Profils $d = 0{,}1\ l$ (l = Profiltiefe) und der Krümmungsradius an der Profilhinterkante $\varrho = 0{,}0005\ l$ ist. Dazu bezüglich $z = 0$ ähnliche Profile ergeben sich, wenn man für beliebiges $b > 0$ die Transformation

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

auf den Kreis

$$\zeta = b\,(0{,}0606 + 1{,}0928\, e^{i\omega}) \qquad (0 < \omega < 2\pi) \quad \ldots \quad (2')$$

anwendet. Die Tiefe des Profils ist dabei jeweils

$$l = 4{,}0214\ b.$$

Dieses Profil mit $b = 4$ bzw. $b = 1$ wählen wir als Profil von Flosse und Ruder des zu untersuchenden Doppelflügels. Flossen- und Rudertiefe sind danach

[1]) Vgl. Vorbemerkung, S. 2, [5]).

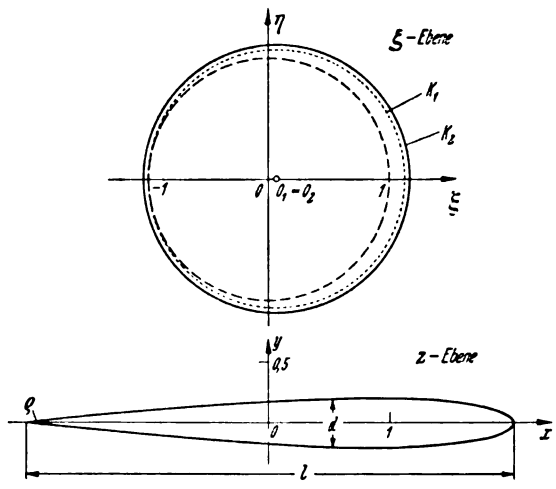


Bild 1. Symmetrisches Joukowsky-Betz-Profil.

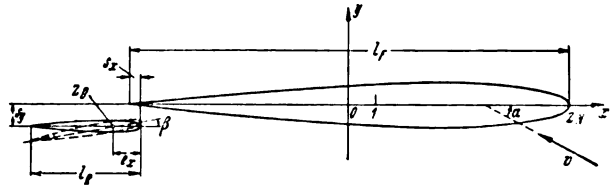


Bild 2. Unsymmetrischer Doppelflügel.

$$l_F = 16{,}0856 \qquad l_R = 4{,}0214,$$

die Gesamttiefe

$$l_L = l_F + l_R = 20{,}1070$$

und das Rudertiefenverhältnis

$$\frac{l_R}{l_L} = 0{,}2.$$

Die gegenseitige Lage von Flosse und Ruder (vgl. Bild 2) wird für den Ruderwinkel $\beta = 0$, also Parallellage der Symmetrielinien von Flosse und Ruder, durch die beiden Größen

$$s_x = 0{,}02\, l_L = 0{,}4021 \qquad s_y = 0{,}04\, l_L = 0{,}8043$$

bestimmt. Schließlich wird die Ruderdrehachse durch ihren Abstand

$$e_x = 0{,}25\, l_R = 1{,}0054$$

von der Rudernase festgelegt.

2. Konforme Abbildung des Strömungsgebiets auf das Außengebiet zweier Kreise.

Die Ermittlung der ebenen Potentialströmung um den Doppelflügel geschieht für einen festen Ruderwinkel β in der Weise, daß zunächst das Außengebiet des Doppelflügels mit entsprechend ausgeschlagenem Ruder konform auf das Außengebiet zweier Kreise abgebildet wird. Die Strömung um die beiden Kreise läßt sich dann nach bekannten Formeln

Digitized by Google

Zahlentafel 1. Konforme Abbildung der Flosse auf einen Kreis im Falle $\beta = 0°$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	x	y	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	$\sqrt{x_4'^2 + y_4'^2}$	Θ	$G(\Theta)$	x_5	y_5	Y
1	8,0816	0	4,6136	0	11,3599	3,8374	10,4725	−5,4799	10,4715	−5,4794	4,4863	− 34° 00′	$0{,}0031_4$	3,6917	−2,5279	0,0381
2	7,8321	0,2780	4,4647	1,1315	10,9996	4,9312	10,9988	−4,4550	10,9978	−4,4545	4,4968	− 19° 20′	54_7	4,2153	−1,4967	−0,0161
3	7,0967	0,5205	4,0280	2,1856	10,3711	5,8938	11,2435	−3,3312	11,2425	−3,3306	4,5033	− 4° 40′	69_3	4,4607	−0,3672	−0,0708
4	5,9142	0,6977	3,3333	3,0909	9,5178	6,6609	11,1911	−2,1842	11,1900	−2,1836	4,5051	10° 00′	73_3	4,4077	0,7822	−0,1276
5	4,3487	0,7909	2,4280	3,7856	8,4980	7,1817	10,8462	−1,0915	10,8451	−1,0908	4,5015	24° 40′	65_4	4,0592	1,8797	−0,1890
6	2,4887	0,7956	1,3737	4,2223	7,3812	7,4223	10,2336	−0,1261	10,2326	−0,1254	4,4926	39° 20′	45_3	3,4453	2,8534	−0,2575
7	0,4448	0,7221	0,2424	4,3712	6,2433	7,3686	9,3962	0,6477	9,3951	0,6485	4,4785	53° 50′	14_0	2,6088	3,6344	−0,3368
8	−1,6529	0,5937	−0,8889	4,2223	5,1608	7,0265	8,3920	1,1799	8,3910	1,1808	4,4603	68° 30′	− 26_6	1,6040	4,1746	−0,4329
9	−3,6603	0,4404	−1,9432	3,7856	4,2055	6,4228	7,2903	1,4380	7,2892	1,4390	4,4396	83° 00′	− 73_2	0,5040	4,4454	−0,5551
10	−5,4281	0,2918	−2,8485	3,0909	3,4379	5,6026	6,1653	1,4103	6,1641	1,4115	4,4192	97° 40′	− 118_8	−0,6143	4,4309	−0,7189
11	−6,8142	0,1678	−3,5432	2,1856	2,9007	4,6255	5,0891	1,1081	5,0878	1,1095	4,4049	112° 10′	− 150_8	−1,6826	4,1447	−0,9558
12	−7,6995	0,0740	−3,9799	1,1313	2,6110	3,5562	4,1194	0,5635	4,1176	0,5652	4,4085	126° 40′	− 142_7	−2,6295	3,6250	−1,3222
13	−8,0040	0	−4,1288	0	2,5577	2,4402	3,2809	−0,1859	3,2780	−0,1843	4,4532	141° 20′	− 42_7	−3,4153	2,8805	−1,9479
14	−7,6995	−0,0740	−3,9799	−1,1313	2,7501	1,2548	2,5695	−1,1662	2,5658	−1,1664	4,5591	156° 40′	194_0	−4,0791	1,8511	−3,1067
15	−6,8142	−0,1678	−3,5432	−2,1856	3,3955	0,0683	2,1877	−2,4658	2,1858	−2,4669	4,5954	173° 40′	275_3	−4,4594	0,4798	1,8520
16	−5,4281	−0,2918	−2,8485	−3,0909	4,3851	−0,7649	2,2957	−3,7526	2,2944	−3,7531	4,5279	190° 00′	124_3	−4,3899	−0,8467	1,1726
17	−3,6603	−0,4404	−1,9432	−3,7856	5,4962	−1,2726	2,7163	−4,8971	2,7152	−4,8972	4,4756	205° 30′	7_4	−4,0056	−1,9927	0,8347
18	−1,6529	−0,5937	−0,8889	−4,2223	6,6691	−1,4808	3,3920	−5,8764	3,3910	−5,8763	4,4459	220° 50′	− 59_1	−3,3480	−2,9647	0,6278
19	0,4448	−0,7221	0,2424	−4,3712	7,8426	−1,3889	4,2813	−6,6462	4,2802	−6,6460	4,4323	236° 00′	− 89_5	−2,4715	−3,7290	0,4842
20	2,4887	−0,7956	1,3737	−4,2223	8,9473	−1,0054	5,3297	−7,1629	5,3287	−7,1626	4,4299	251° 10′	− 94_7	−1,4327	−4,2380	0,3762
21	4,3487	−0,7909	2,4280	−3,7856	9,9138	−0,3560	6,4705	−7,3947	6,4695	−7,3944	4,4354	266° 20′	− 82_6	−0,2974	−4,4634	0,2895
22	5,9142	− 0,6977	3,3333	−3,0909	10,6797	0,5163	7,6294	−7,3276	7,6284	−7,3272	4,4459	281° 20′	− 59_0	0,8562	−4,3907	0,2166
23	7,0967	− 0,5205	4,0280	−2,1856	11,1953	1,5533	8,7300	−6,9666	8,7289	−6,9661	4,4592	296° 20′	− 29_2	1,9534	−4,0228	0,1523
24	7,8321	−0,2780	4,4647	−1,1313	11,4270	2,6856	9,6991	−6,3364	9,6981	−6,3359	4,4733	311° 10′	2_3	2,9214	−3,3880	0,0935

Zahlentafel 2. Konforme Abbildung des Ruders auf einen Kreis im Falle $\beta = 0°$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	x	y	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$\sqrt{x_3^2 + y_3^2}$	Θ	$g(\Theta)$	x_4	y_4	x_5	y_5	Y
1	− 7,6019	−0,8043	− 4,7471	−2,0176	1,5473	−0,0489	0,7936	−1,2614	1,4903	−57° 50′	$-0{,}0030_7$	0,7928	−1,2671	−5,8952	1,7135	2,0435
2	− 7,6642	−0,7348	− 4,7587	−1,8867	1,5985	0,3506	1,1020	−1,0073	1,4930	−42° 30′	− 12_8	1,0981	−1,0143	−5,5872	1,9734	2,5146
3	− 7,8481	−0,6742	− 4,9303	−1,6516	1,5326	0,7922	1,3607	−0,6352	1,5016	−25° 00′	45_3	1,3511	−0,6403	−5,3355	2,3567	3,1200
4	− 8,1437	−0,6299	− 5,3149	−1,3465	1,2943	1,2328	1,5024	−0,1366	1,5086	− 5° 10′	91_7	1,4897	−0,1333	−5,2044	2,8718	−2,4620
5	− 8,5351	−0,6066	− 5,9207	− 1,0862	0,8818	1,5529	1,4426	0,4034	1,4979	15° 40′	20_5	1,4356	0,4157	−5,2684	3,4228	−1,8421
6	− 9,0001	−0,6054	− 6,6367	−0,9402	0,4069	1,6883	1,2141	0,8554	1,4852	35° 10′	− 64_8	1,2174	0,8683	−5,4936	3,8731	−1,4058
7	− 9,5111	−0,6238	− 7,3708	−0,8790	−0,0495	1,6730	0,8959	1,1831	1,4841	52° 50′	− 72_2	0,9051	1,1901	−5,8099	4,1915	−1,1005
8	−10,0355	−0,6559	− 8,0771	−0,8658	−0,4580	1,5447	0,5327	1,3922	1,4906	69° 00′	− 28_5	0,5426	1,3927	−6,1748	4,3907	−0,8690
9	−10,5374	−0,6942	− 8,7211	−0,8768	−0,8040	1,3287	0,1514	1,4906	1,4982	84° 10′	22_6	0,1592	1,4865	−6,5594	4,4814	−0,6815
10	−10,9793	−0,7313	− 9,2692	−0,8968	−1,0766	1,0458	−0,2264	1,4858	1,5029	98° 40′	53_8	−0,2219	1,4788	−6,9411	4,4708	−0,5220
11	−11,3258	−0,7623	− 9,6892	−0,9173	−1,2672	0,7159	−0,5812	1,3861	1,5030	112° 40′	54_7	−0,5807	1,3778	−7,2999	4,3673	−0,3805
12	−11,5472	−0,7858	− 9,9538	−0,9355	−1,3703	0,3592	−0,8951	1,2024	1,4990	126° 40′	27_9	−0,8988	1,1945	−7,6178	4,1817	−0,2506
13	−11,6233	−0,8043	−10,0446	−0,9543	− 1,3845	−0,0033	−1,1528	0,9484	1,4928	140° 30′	− 13_8	−1,1602	0,9429	−7,8786	3,9279	−0,1280
14	−11,5472	−0,8228	− 9,9554	−0,9794	− 1,3124	−0,3513	−1,3422	0,6407	1,4873	154° 30′	− 50_7	−1,3517	0,6392	−8,0694	3,6221	−0,0096
15	−11,3258	−0,8462	− 9,6932	− 1,0176	− 1,1609	−0,6654	−1,4550	0,2986	1,4853	168° 20′	− 63_7	−1,4644	0,3016	−8,1811	3,2827	0,1077
16	−10,9793	−0,8772	− 9,2775	− 1,0743	−0,9409	−0,9286	−1,4872	−0,0572	1,4883	182° 10′	− 44_2	−1,4942	−0,0502	−8,2097	2,9292	0,2265
17	−10,5374	−0,9144	− 8,7374	− 1,1516	−0,6665	− 1,1270	−1,4385	−0,4059	1,4946	195° 50′	− 1_5	−1,4414	−0,3966	−8,1554	2,5811	0,3494
18	−10,0355	−0,9527	− 8,1079	− 1,2498	−0,3538	− 1,2507	−1,3127	−0,7280	1,5010	209° 00′	41_3	−1,3109	−0,7188	−8,0230	2,2574	0,4792
19	− 9,5111	−0,9848	− 7,4277	− 1,3687	−0,0202	− 1,2936	−1,1171	−1,0068	1,5039	222° 00′	60_1	−1,1114	−1,0002	−7,8213	1,9746	0,6193
20	− 9,0001	−1,0032	− 6,7394	− 1,5095	0,3178	− 1,2546	−0,8622	−1,2292	1,5014	235° 00′	44_0	−0,8546	−1,2268	−7,5620	1,7470	0,7736
21	− 8,5351	−1,0020	− 6,0931	− 1,6722	0,6448	− 1,1374	−0,5610	−1,3866	1,4957	248° 00′	5_9	−0,5541	−1,3884	−7,2584	1,5848	0,9477
22	− 8,1437	−0,9787	− 5,5450	− 1,8420	0,9460	− 0,9499	−0,2293	−1,4735	1,4913	261° 10′	− 24_0	−0,2249	−1,4779	−6,9257	1,4951	1,1491
23	− 7,8481	−0,9344	− 5,1359	− 1,9800	1,2062	− 0,7020	0,1161	−1,4856	1,4901	274° 30′	− 31_8	0,1179	−1,4906	−6,5788	1,4833	1,3874
24	− 7,6642	−0,8738	− 4,8727	− 2,0458	1,4110	− 0,4003	0,4609	−1,4171	1,4902	288° 00′	− 31_4	0,4612	−1,4220	−6,2311	1,5542	1,6779

Digitized by Google

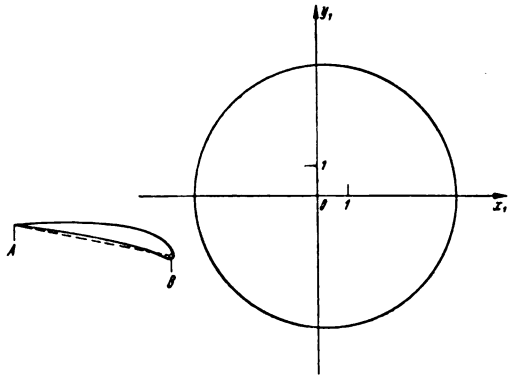


Bild 3. Erstes Zwischenbild des Doppelflügels ($\beta = 0°$).

berechnen. Durchgeführt wurde die Rechnung, um die Abhängigkeit von β für die vorwiegend interessierenden kleinen $|\beta|$ zu erfassen, für $\beta = 0°$, $10°$ und $-10°$.

Die konforme Abbildung wurde dabei jeweils in mehreren Schritten näherungsweise ausgeführt. Sie wurde rechnerisch verfolgt für diejenigen 24 Flossen- und Ruderpunkte, die bei der Abbildung (1′) aus den zu

$$\omega = 0, \quad \frac{2\pi}{24}, \quad 2\cdot\frac{2\pi}{24}, \quad \ldots, \quad 23\cdot\frac{2\pi}{24} \quad \ldots \quad (3)$$

gehörigen Punkten des Kreises (2′) hervorgehen. Wir bezeichnen diese Punkte kurz als die Grundpunkte von Flosse und Ruder und denken sie je in der (3) entsprechenden Reihenfolge von 1 bis 24 durchnumeriert. Ihre Koordinaten x, y ($z = x + iy$) zeigen für den Fall $\beta = 0°$ je die beiden ersten Spalten der Zahlentafeln 1 und 2[2]). Dabei ist angenommen, daß die Flosse in der z-Ebene diejenige Lage einnimmt, die sie bei ihrer Entstehung aus (2′) durch die Transformation (1′) erhält.

Es sollen nun für den Fall $\beta = 0°$ die einzelnen Schritte der Abbildung geschildert werden:

1. Schritt: Die Flosse wird auf einen Kreis abgebildet. Dies geschieht dadurch, daß die Transformation (1′), welche die Flosse aus dem Kreis (2′) erzeugt, rückgängig gemacht wird, also durch

$$z = z_1 + \frac{4^2}{z_1} \quad \text{oder} \quad z_1 = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 4^2} \quad \ldots \quad (4)$$

Die Koordinaten x_1, y_1 ($z_1 = x_1 + i\,y_1$) der den Grundpunkten von Flosse und Ruder entsprechenden Bildpunkte, die wir kurz als die Grundpunkte des Bildes ansprechen, zeigen je die Spalten 3 und 4 der Zahlentafeln 1 und 2. Das danach entstehende 1. Zwischenbild von Flosse und Ruder veranschaulicht Bild 3.

2. Schritt: Die Endpunkte des Ruderskeletts gehen beim 1. Abbildungsschritt in die Punkte

$A: -10{,}0435 - i\,0{,}9543$ und $B: -4{,}7698 - i\,2{,}0009$

über. Der Mittelpunkt der Strecke AB ist der Punkt $-7{,}4066 - i\,1{,}4776$, ihr Winkel φ_1 gegen die reelle Achse bestimmt sich aus $\cos\varphi_1 = 0{,}9809$, $\sin\varphi_1 = -0{,}1947$. Als 2. Schritt wählen wir nun diejenige Transformation, welche die (doppelt durchlaufene) Strecke AB in einen Kreis überführt. Dazu verschieben wir vermöge

$$z_1' = z_1 + (7{,}4066 + i\,1{,}4776) \quad \ldots \quad (5)$$

den Mittelpunkt von AB in den Nullpunkt, drehen dann um den Nullpunkt so, daß AB in die reelle Achse zu liegen kommt, was durch

$$z_1'' = e^{-i\varphi_1} z_1' \quad \ldots \quad (5')$$

bewirkt wird, und nehmen schließlich die Transformation

$$z_1'' = z_2 + \frac{1.8067}{z_2} \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{z_1''}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1''}{2}\right)^2 - 1{,}8067} \quad (5'')$$

[2]) Die Werte in diesen Zahlentafeln sind je auf 4 Dezimalen angegeben. Die Durchrechnung selbst wurde, um den Einfluß der Fehlerfortpflanzung klein zu halten, mit 6 Dezimalen begonnen. Erst nach Durchführung der Abbildungen wurden die unsicher gewordenen beiden letzten Dezimalen gestrichen.

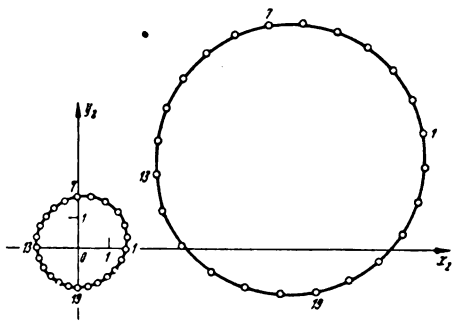


Bild 4. Zweites Zwischenbild des Doppelflügels ($\beta = 0°$).

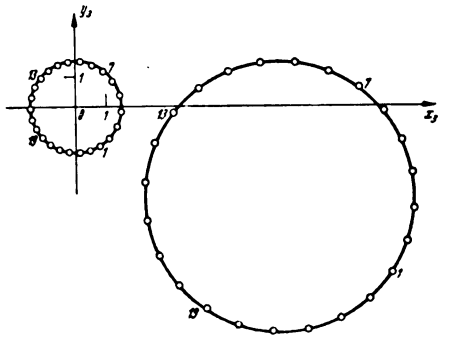


Bild 5. Drittes Zwischenbild des Doppelflügels ($\beta = 0°$).

vor. Die Koordinaten x_2, y_2 ($z_2 = x_2 + i\,y_2$) der Grundpunkte der entstehenden Bilder von Flosse und Ruder sind je in den Spalten 5 und 6 der Zahlentafeln 1 und 2 wiedergegeben. Wie Bild 4 zeigt, ist danach das 2. Zwischenbild der Flosse noch nahezu ein Kreis, während das 2. Zwischenbild des Ruders nahezu eine Ellipse geworden ist.

3. Schritt: Um sowohl für die Flosse als auch für das Ruder ein nahezu kreisförmiges Bild zu erhalten, ermitteln wir diejenige Ellipse, die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut die 24 Grundpunkte des 2. Ruderbildes approximiert und nehmen als 3. Schritt diejenige Abbildung vor, welche die betreffende Ellipse in einen Kreis überführt. Als Gleichung der Ellipse erhält man

$$0{,}4611\,x_2^2 - 0{,}0734\,x_2 y_2 + 0{,}4599\,y_2^2 - 0{,}0816\,x_2 - 0{,}1876\,y_2 - 1 = 0;$$

ihr Mittelpunkt ist $0{,}1054 + i\,0{,}2123$, der Neigungswinkel φ_2 ihrer großen Achse gegen die x_2-Achse bestimmt sich aus $\cos\varphi_2 = 0{,}7016$, $\sin\varphi_2 = 0{,}7126$ und die Längen ihrer Halbachsen sind 1,5546 und 1,4352. Zur Durchführung der genannten Abbildung verschieben wir zunächst den Ellipsenmittelpunkt in den Nullpunkt vermöge

$$z_2' = z_2 - (0{,}1054 + i\,0{,}2123), \quad \ldots \quad (6)$$

drehen dann durch den Winkel $-\varphi_2$ um den Nullpunkt, was durch

$$z_2'' = e^{-i\varphi_2} z_2' \quad \ldots \quad (6')$$

bewirkt wird, und nehmen endlich noch die Transformation

$$z_2'' = z_3 + \frac{0{,}0892}{z_3} \quad \text{oder} \quad z_3 = \frac{z_2''}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_2''}{2}\right)^2 - 0{,}0892} \quad (6'')$$

vor. Damit gehen die Grundpunkte der 2. Zwischenbilder von Flosse und Ruder in die Punkte über, deren Koordinaten x_3, y_3 ($z_3 = x_3 + i\,y_3$) in den Spalten 7 und 8 der Zahlentafeln 1 und 2 wiedergegeben sind. Das danach entworfene Bild 5 zeigt, daß das entstandene 3. Zwischenbild von Flosse und Ruder je nahezu ein Kreis ist.

Vorbemerkung zum 4. und 5. Schritt: Die beiden nun noch folgenden Abbildungsschritte haben das Ziel, die Abweichung von der Kreisform, welche die 3. Zwischenbilder von Flosse und Ruder zeigen, noch weiter zu verringern. Dazu sei zunächst bemerkt, daß bereits die 3. Zwischenbilder sehr wenig von der Kreisform abweichen. Bestimmt man die beiden Kreise, welche die 24 Grundpunkte des 3. Flossen- und Ruderbildes im Sinne der Methode der kleinsten Qua-

Digitized by Google

drate je am besten approximieren, so beträgt beim Flossenbild die maximale Abweichung eines der 24 Grundpunkte vom approximierenden Kreis weniger als 3%, beim Ruder sogar weniger als 1% des Radius. Um eine weitere erhebliche Verbesserung der Kreisform zu erhalten, genügt es daher, Flossen- und Ruderbild je einmal einem Korrekturverfahren zu unterwerfen, wobei das folgende, im wesentlichen auf E. Trefftz[3]) zurückgehende, einfache Verfahren ausreicht:

Um das Außengebiet eines Kreises $\mathfrak{K}$

$$\zeta = r e^{i\vartheta} \qquad (0 \leq \vartheta < 2\pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

auf das Außengebiet einer wenig von dem Kreis abweichenden, einfach geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$

$$z = r\,[1 + g(\Theta)]\, e^{i\Theta} \quad (0 \leq \Theta < 2\pi;\ |g(\Theta)| \ll 1) \quad . \quad . \quad (8)$$

einschließlich der Ränder konform zu beziehen, werde die Abbildungsfunktion in der Form

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\zeta}\,[1 + f(\zeta)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

angesetzt, wo $f(\zeta)$ in $|\zeta| \geq r$ analytisch ist und $|f(\zeta)| \ll 1$ sein wird. Zur näherungsweisen Bestimmung der Funktion $f(\zeta)$ logarithmiert man (9) und erhält, wenn man die entstehende Beziehung

$$\log z = \log \zeta - \log\,[1 + f(\zeta)]$$

speziell längs der Ränder der abzubildenden Gebiete betrachtet, für $f(\zeta)$ die Bedingung

$$\log r\,[1 + g(\Theta)]\, e^{i\Theta} = \log r\, e^{i\vartheta} - \log\,[1 + f(r\, e^{i\vartheta})], \quad . \quad (10)$$

wo ϑ und Θ zu entsprechenden Stellen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ gehören. Da $|g(\Theta)|$ und damit $|f(r e^{i\vartheta})|$ als klein anzusehen sind, sollen die Logarithmen in Potenzreihen entwickelt und davon nur die Glieder 1. Ordnung beibehalten werden. Damit erhält (10) die Form

$$f(r\, e^{i\vartheta}) = -g(\Theta) - i\,(\Theta - \vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

Um danach $f(\zeta)$ näherungsweise zu bestimmen, beachtet man wieder, daß sich $\mathfrak{C}$ von dem Kreis $\mathfrak{K}$ wenig unterscheidet, so daß bei passender Normierung der Abbildung (9) annähernd $\Theta = \vartheta$ gelten wird. Macht man dementsprechend die Annahme $\Theta = \vartheta$, so führt zunächst der Vergleich der Realteile der beiden Seiten von (10′) auf die Bedingung

$$\Re f(r\, e^{i\vartheta}) = -g(\vartheta) \qquad (0 \leq \vartheta < 2\pi) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Um diese Bedingung auszuwerten, denkt man sich die Funktion $f(\zeta)$ für $|\zeta| \geq r$ in ihre Potenzreihe

$$f(\zeta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

entwickelt und hat dann nach (11) deren Koeffizienten gemäß der Beziehung

$$\Re(c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}\,[\Re(c_n)\cos n\vartheta + \Im(c_n)\sin n\vartheta] = -g(\vartheta) \qquad (0 \leq \vartheta < 2\pi)$$

zu bestimmen. Durch Vergleich mit der Fourier-Entwicklung von $g(\vartheta)$

$$g(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

erhält man hieraus für die Koeffizienten c_n die Werte

$$\left.\begin{aligned} \Re(c_0) &= -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta, \\ \Re(c_n) &= -a_n r^n = -\frac{r^n}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta, \\ \Im(c_n) &= -b_n r^n = -\frac{r^n}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (12')$$

Frei ist noch die Wahl von $\Im(c_0)$. Sie kann so getroffen werden, daß in (10′) auch die Imaginärteile beider Seiten wenigstens näherungsweise übereinstimmen, indem für irgendeine Stelle ϑ von $\mathfrak{K}$ und die zugeordnete Stelle Θ von $\mathfrak{C}$ das genaue Bestehen der Beziehung $\Theta = \vartheta$ verlangt wird. Indem wir auf eine solche Normierung der Abbildungsfunktion verzichten, setzen wir einfach

$$\Im(c_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12'')$$

und erhalten damit als eine Abbildungsfunktion (9) der gesuchten Art

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\zeta}\left[(1 + c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wobei sich die Koeffizienten c_n aus (12′) und (12″) bestimmen.

Für die folgende Anwendung ist es zweckmäßig, der vorstehenden Transformation noch eine Streckung vom Nullpunkt aus so zu überlagern, daß insgesamt das Unendlichferne ungeändert bleibt. Dazu geht man von (13) über zu

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\zeta}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\zeta^n}\right] \text{ mit } C_n = \frac{c_n}{1 + c_0} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Schließlich ist es noch notwendig, die funktionale Beziehung umzukehren. Beachtet man dabei, daß die Fourierkoeffizienten a_n, b_n von $g(\Theta)$ durchweg sehr klein sein werden, so erhält man unter Vernachlässigung der Ausdrücke höherer Ordnung in a_n, b_n

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{z}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}\right] \text{ mit } C_n = \frac{c_n}{1 + c_0} \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (14)$$

wobei sich die Werte von c_n aus (12′) und (12″) bestimmen. Von dieser Transformation (14) läßt sich auf Grund unserer Überlegungen noch sagen, daß sie das Außengebiet der durch (8) gegebenen, annähernd kreisförmigen Kurve $\mathfrak{C}$ näherungsweise auf das Außengebiet eines Kreises um den Nullpunkt abbilden wird.

4. Schritt: Der 4. Abbildungsschritt besteht nun in der Anwendung des eben geschilderten Verfahrens auf das 3. Zwischenbild des Ruders. Die Entfernungen der Grundpunkte desselben vom Nullpunkt sind aus Spalte 9 der Zahlentafel 2 ersichtlich. Die Gleichung des Kreises um den Nullpunkt, der diese Punkte im Mittel am besten approximiert, lautet

$$x_3^2 + y_3^2 = 1{,}4949^2.$$

Um das geschilderte Abbildungsverfahren anzuwenden, setzen wir daher die Gleichung des 3. Ruderbildes in die Form

$$z_3 = r\,[1 + g(\Theta)]\, e^{i\Theta}\ (0 \leq \Theta < 2\pi) \text{ mit } r = 1{,}4949.$$

Die zu seinen Grundpunkten gehörigen Werte von Θ und $g(\Theta)$ zeigen die Spalten 10 und 11 der Zahlentafel 2. Die daraus bestimmte Abbildungsfunktion (14) lautet, wenn für die Rechnung 6 Glieder der Reihe beibehalten werden,

$$\frac{1}{z_4} = \frac{1}{z_3}\left[1 - \sum_{n=1}^{6} \frac{C_n}{z_3^n}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei die durch Planimetrieren ermittelten Koeffizienten C_n die Werte

$$\begin{aligned} C_1 &= (0{,}54 - i\cdot 0{,}35)\ 10^{-3}\, r, & C_2 &= (0{,}42 - 0{,}41)\ 10^{-3}\, r^2, \\ C_3 &= (4{,}88 - i\,3{,}80)\ 10^{-3}\, r^3, & C_4 &= (0{,}92 + i\cdot 0{,}74)\ 10^{-3}\, r^4, \\ C_5 &= (1{,}28 + 0{,}01)\ 10^{-3}\, r^5, & C_6 &= (0{,}33 - i\,0{,}24)\ 10^{-3}\, r^6 \end{aligned}$$

haben. Spalte 9 und 10 der Zahlentafel 1 und Spalte 12 und 13 der Zahlentafel 2 zeigen die Koordinaten x_4, y_4 ($z_4 = x_4 + i\,y_4$) der danach berechneten Bilder der Grundpunkte von Flosse und Ruder. Approximiert man die Grundpunkte des so entstandenen 4. Ruderbildes durch einen Kreis, so beträgt die maximale Abweichung eines Grundpunktes von demselben nur noch $\sim 1{,}5‰$ des Kreisradius. Beim Flossenbild hat die maximale Abweichung vom approximierenden Kreis gegenüber dem 3. Zwischenbild keine nennenswerte Änderung erfahren, sie ist auch für das 4. Flossenbild $\sim 3\%$ des Kreisradius.

5. Schritt: Das beim 4. Schritt auf das Ruderbild angewandte Verfahren wird nun entsprechend noch auf das Flossenbild angewandt. Wir approximieren dazu die 24

[3]) von Kármán, Th. und Trefftz, E., Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte. Z. Flugtechn. Bd. 9 (1918), S. 111.

Digitized by Google

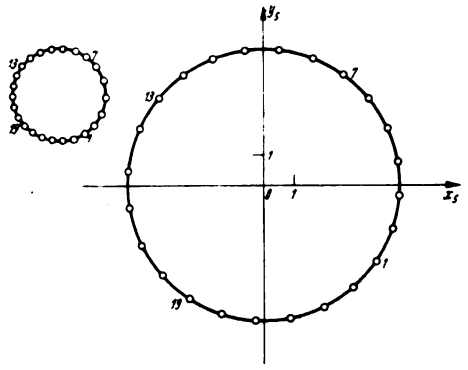


Bild 6. Bild des Doppelflügels ($\beta = 0°$).

Grundpunkte des 4. Flossenbildes wieder möglichst gut durch einen Kreis und finden als seine Gleichung

$$(x_4 - 6{,}7538)^2 + (y_4 + 2{,}9682)^2 = 4{,}4723^2.$$

Um das fragliche Abbildungsverfahren anwenden zu können, verschieben wir den Mittelpunkt dieses Kreises in den Nullpunkt gemäß

$$z_4' = z_4 - (6{,}7538 - i\,2{,}9682)$$

und setzen die Gleichung des 4. Flossenbildes in die Form

$$z_4' = R\,[1 + G(\Theta)]\,e^{i\Theta} \quad (0 \leqq \Theta < 2\pi) \quad \text{mit} \quad R = 4{,}4723.$$

Die Entfernungen seiner Grundpunkte vom Nullpunkt sowie die zu den Grundpunkten gehörigen Werte von Θ und $G(\Theta)$ sind aus den Spalten 11 bis 13 der Zahlentafel 1 ersichtlich. Damit bilden wir die Abbildungsfunktion gemäß (14), diesmal unter Beibehaltung von 8 Gliedern der Reihe. Sie erhält die Form

$$\frac{1}{z_5} = \frac{1}{z_4'}\left[1 - \sum_{n=1}^{8} \frac{C_n}{z_4'^n}\right], \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

wobei sich die Werte der Koeffizienten C_n durch Planimetrieren zu

$C_1 = (-0{,}52 + i\,0{,}16)\,10^{-3}\,R$, $C_2 = (11{,}48 - i\,0{,}11)\,10^{-3}\,R^2$,
$C_3 = (-6{,}52 + i\,2{,}56)\,10^{-3}\,R^3$, $C_4 = (3{,}09 - i\,2{,}79)\,10^{-3}\,R^4$,
$C_5 = (-1{,}27 + i\,2{,}23)\,10^{-3}\,R^5$, $C_6 = (0{,}21 - i\,1{,}57)\,10^{-3}\,R^6$,
$C_7 = (0{,}09 + i\,0{,}79)\,10^{-3}\,R^7$, $C_8 = (-0{,}30 - i\,0{,}40)\,10^{-3}\,R^8$

bestimmen. Die Koordinaten x_5, y_5 ($z_5 = x_5 + i\,y_5$) der hieraus berechneten Grundpunkte des 5. Bildes von Flosse und Ruder sind je aus Spalte 14 und 15 der Zahlentafeln 1 und 2 ersichtlich. Approximiert man die Grundpunkte der beiden Bilder wieder je möglichst gut durch einen Kreis, so ergibt sich nunmehr für die Grundpunkte des Flossenbildes eine maximale Abweichung von $\sim 2‰$, beim Ruder unverändert von $\sim 1{,}5‰$. Man überlegt sich an dem Gang der Abbildungsfunktionen, daß auch die maximalen Abweichungen der gesamten Bilder von Flosse und Ruder von den approximierenden Kreisen etwa von dieser Größenordnung sind. Bild 6 zeigt die approximierenden Kreise und daneben die Bilder der Grundpunkte.

Mit der damit erzielten Genauigkeit der Abbildung des Doppelflügels auf zwei Kreise begnügen wir uns und wir bezeichnen demgemäß das 5. Bild von Flosse und Ruder, an das die weiteren Betrachtungen anschließen, künftig kurz als das Flossen- bzw. Ruderbild. Die erreichte Genauigkeit entspricht durchaus derjenigen, die für die Abbildung eines Einzelprofils auf einen Kreis bei der Berechnung der Druckverteilung des Profils üblich ist[4]). Auch hinsichtlich der Erfassung der Strömungsverhältnisse im Spalt bestehen keine Bedenken, da die maximale Abweichung der Bilder von Flosse und Ruder von den approximierenden Kreisen nur $\sim 1\%$ des Abstands dieser beiden Kreise betragen. (Die grundsätzliche Frage, wie weit sich die tatsächlichen Verhältnisse im Spalt überhaupt mit der Annahme einer Potentialströmung erfassen lassen, steht hier nicht zur Erörterung. Immerhin sei bemerkt, daß die unter der Annahme einer Potentialströmung berechneten Druckverteilungen bei — wie im vorliegenden Falle — nicht zu kleinem Spalt das charakteristische Verhalten der aus Messungen bekannten Druckverteilungen wiedergeben.)

Wollte man die Genauigkeit der Rechnung noch weiter treiben, so hätte man das beim 4. und 5. Schritt benutzte Verfahren weiterhin abwechslungsweise auf das Ruder- und Flossenbild anzuwenden. Wie sich bei den beiden durchgerechneten Schritten zeigte, beeinflußt dabei die Anwendung des Verfahrens auf das Ruderbild das Flossenbild außerordentlich wenig, ebenso umgekehrt. Die Wirkung des Verfahrens ist also praktisch dieselbe wie in dem geläufigen Fall, wo es sich um die näherungsweise Abbildung eines einzelnen, annähernd kreisförmigen Gebiets auf einen Kreis handelt. Eine genauere Begründung dieser Tatsache soll hier nicht gegeben werden.

3. Berechnung der Druckverteilung über Flosse und Ruder.

Für die Berechnung der Druckverteilung über Flosse und Ruder des Doppelflügels, die wieder für den Fall $\beta = 0°$ geschildert werden soll, denken wir uns die Bilder von Flosse und Ruder ersetzt durch die beiden möglichst gut approximierenden Kreise, welche je durch den Bildpunkt der Profilhinterkante hindurchgehen. Die Gleichungen dieser Kreise lauten im Falle $\beta = 0°$ für das Flossenbild

$$(x_5 + 0{,}0031)^2 + (y_5 - 0{,}0025)^2 = 19{,}9262, \quad \ldots \quad (17)$$

für das Ruderbild

$$(x_5 + 6{,}7061)^2 + (y_5 - 2{,}9838)^2 = 2{,}2662 \quad \ldots \quad (18)$$

Wir denken uns die Grundpunkte des Flossenbildes von dem Mittelpunkt des approximierenden Kreises (17) aus radial auf diesen Kreis verschoben, wodurch wir auf dem Kreis 24 Punkte erhalten, die wir als seine Grundpunkte ansprechen wollen. Ebenso verfahren wir beim Ruderbild. Wir berechnen dann für die Strömung um die beiden Kreise (17) und (18) die Geschwindigkeiten in den Grundpunkten der beiden Kreise und verwenden dieselben zur Berechnung der Drucke in den Grundpunkten von Flosse und Ruder.

Die Strömung um die beiden Kreise läßt sich nach M. Lagally[5]) in geschlossener Form mittels elliptischer Funktionen berechnen. Sie ist eindeutig bestimmt, wenn noch die Anströmgeschwindigkeit und Anströmrichtung sowie die Zirkulationen um die beiden Kreise vorgegeben werden. Soll die gesuchte Strömung um den Doppelflügel die Anströmgeschwindigkeit V und die Anströmrichtung α aufweisen (vgl. Bild 1), so haben wir auf Grund der unter 2. vorgenommenen Abbildungen für die Strömung um die beiden Kreise die Anströmgeschwindigkeit

$$V^* = V$$

und die Anströmrichtung

$$\varkappa^* = \varkappa - \varphi_1 - \varphi_2$$

zu wählen, wo φ_1 und φ_2 die bei den Abbildungen (5′) und (6′) auftretenden Winkel bedeuten. Die Zirkulationen um die beiden Kreise werden durch die Forderung festgelegt, es soll die Strömung um den Doppelflügel an den Hinterkanten abfließen[6]). Für die Strömung um die beiden Kreise bedeutet dies, daß sie die den Profilhinterkanten entsprechenden (13.) Grundpunkte beider Kreise als Staupunkte haben soll.

Zur Berechnung der so bestimmten Strömung um die beiden Kreise sind zunächst die Nullkreise des durch (17) und (18) definierten Kreisbüschels zu ermitteln. Es sind die Punkte

$$-2{,}6715 + i \cdot 1{,}1893 \text{ und } -6{,}2372 + i\,2{,}7752.$$

Ihr Mittelpunkt wird durch die Translation

$$z^* = z_5 + (4{,}4543 - i\,1{,}9823) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

in den Nullpunkt übergeführt, sie selbst gehen dabei in zwei

[4]) Vgl. z. B. W. F. Durand, Aerodynamic Theory. Berlin 1935, II, S. 97–99.

[5]) M. Lagally, Die reibungslose Strömung im Außengebiet zweier Kreise, Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929), S. 299. Vgl. auch G. Schmitz, Beitrag zur Theorie der ebenen wirbelfreien Strömung um den Doppeldecker, Annalen der Physik Bd. 21 (1934), S. 37.

[6]) Da über den hinteren Staupunkt nichts bekannt ist, wird diese Festsetzung die natürlichste sein, denn das der Betrachtung zugrunde liegende Joukowsky-Betz-Profil hat zwar keine scharfe Hinterkante, wohl aber eine äußerst scharfe Krümmung an der Hinterkante.

Digitized by Google

zum Nullpunkt symmetrisch gelegene Punkte z_0^* und $-z_0^*$ mit

$$z_0^* = x_0^* + i\,y_0^* = 1{,}7828 - i\,0{,}7929$$

über. Durch die Transformation

$$Z = \log\frac{z^*+z_0^*}{z^*-z_0^*} \qquad \left(-\pi < \arc\frac{z^*+z_0^*}{z^*-z_0^*} \leq \pi\right) \quad . \; . \; (20)$$

($Z = X + i\,Y$) wird schließlich das Strömungsgebiet auf ein Rechteck abgebildet, dessen horizontale Begrenzungen die Geraden

$$Y = \pi \text{ und } Y = -\pi$$

und dessen vertikale Begrenzungen die Geraden

$$X = \lambda = 0{,}4243 \text{ und } X = -\mu = -1{,}0761$$

bilden. Die Grundpunkte der beiden Kreise (17) und (18) gehen dabei in Punkte der vertikalen Begrenzungen $X = \lambda$ und $X = \mu$ über, deren Ordinaten Y je der Spalte 16 der Zahlentafeln 1 und 2 zu entnehmen sind.

Mit Hilfe der zu den Perioden

$$2\,\omega_1 = 2\,(\lambda+\mu) = 2\cdot 1{,}5004 \text{ und } 2\,\omega_3 = 2\,\pi\,i$$

gehörigen elliptischen Funktionen p und ζ erhält man nun für den zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_Z$ der Bildströmung in der Z-Ebene bzgl. der X-Achse spiegelbildlichen Vektor $\bar{\mathfrak{v}}_Z$ die Darstellung

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mathfrak{v}}_Z = {}& \frac{i}{4\pi}\,\Gamma' \\ & - \frac{i}{4\pi}\,\Gamma\cdot\left\{2\,\zeta(Z) - 2\,\zeta(Z+2\mu) + 1 - \frac{4\,i\,\mu\,\eta_3}{\pi}\right\} \\ & - 2\,V^*\cos\alpha^*\left\{\bar{z}_0^*\,p\,(Z+2\mu) - z_0^*\,p\,(Z) - \frac{2\,\eta_3\,y_0^*}{\pi}\right\} \\ & + 2\,i\,V^*\sin\alpha^*\left\{\bar{z}_0^*\,p\,(Z+2\mu) - z_0^*\,p\,(Z) - \frac{2\,\eta_3\,i\,x_0^*}{\pi}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Dabei ist

$$\eta_3 = \zeta(\omega_3) = \zeta(\pi\,i)$$

und

$$\Gamma = -(\Gamma_F + \Gamma_R), \qquad \Gamma' = \Gamma_F - \Gamma_R, \quad . \; . \; (21')$$

wobei Γ_F und Γ_R die Zirkulationen um die beiden Kreise bedeuten. Diese Zirkulationen bestimmen sich noch aus der Forderung, daß $\bar{\mathfrak{v}}_Z$ in den Bildpunkten

$$Z_1 = \lambda - i\,1{,}9479 \text{ und } Z_2 = -\mu - i\cdot 0{,}1280$$

der Profilhinterkanten verschwinden soll. Man findet

$$\left.\begin{aligned}\Gamma &= 4\,\pi\,V^*\,(2{,}8546\cos\alpha^* - 4{,}3218\sin\alpha^*) \\ \Gamma' &= 4\,\pi\,V^*\,(-2{,}5477\cos\alpha^* + 3{,}9099\sin\alpha^*).\end{aligned}\right\} \quad (21'')$$

Der zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_{z^*}$ der Strömung in der Kreisebene bzgl. der reellen Achse spiegelbildliche Vektor $\bar{\mathfrak{v}}_{z^*}$ ergibt sich aus $\bar{\mathfrak{v}}_Z$ vermöge

$$\bar{\mathfrak{v}}_{z^*} = \bar{\mathfrak{v}}_Z\,\frac{dZ}{dz^*} \text{ mit } \frac{dZ}{dz^*} = \frac{-2\,z_0^*}{z^{*2} - z_0^{*2}} \quad . \; . \; . \; (22)$$

Um nun vollends die Druckverteilung über Flosse und Ruder zu erhalten, hat man den Betrag v_z der Geschwindigkeit längs Flossen- und Ruderkontur nach der Formel

$$v_z = |\bar{\mathfrak{v}}_{z^*}|\cdot\left|\frac{dz_5}{dz_4'}\cdot\frac{dz_4}{dz_3}\cdot\frac{dz_3}{dz_2''}\cdot\frac{dz_2}{dz_1''}\cdot\frac{dz_1}{dz}\right|$$

zu berechnen. Man findet

$$v_z^2 = V^2\,(a_z\cos^2\alpha + 2\,b_z\cos\alpha\sin\alpha + c_z\sin^2\alpha), \quad . \; (23)$$

wo die Werte der Koeffizienten a_z, b_z, c_z für die Grundpunkte von Flosse und Ruder aus den Spalten 1 bis 3 der Zahlentafeln 3 und 4 zu entnehmen sind[7]). Die Ergebnisse der entsprechenden Rechnung für die Ruderwinkel $\beta = 10^0$ und $\beta = -10^0$ zeigen die Spalten 4 bis 6 bzw. 7 bis 9 der Zahlentafeln 3 und 4.

Für die Druckverteilung p_z hat man nach der Bernoullischen Gleichung

$$p_z = p_\infty + q - \frac{\varrho}{2}\,v_z^2,$$

wo p_∞ den Druck in unendlicher Entfernung vom Profil, $q = \frac{\varrho}{2}\,V^2$ den Staudruck bedeutet. Zur Darstellung verwenden wir den von p_∞ und q unabhängigen Druckbeiwert

$$c_p(z) = \frac{p_z - p_\infty}{q} = 1 - \frac{v_z^2}{V^2},$$

der nach (23) den Wert

$$c_p(z) = 1 - (a_z\cos^2\alpha + 2\,b_z\cos\alpha\sin\alpha + c_z\sin^2\alpha) \quad (24)$$

besitzt.

Bild 7 bis 11 zeigen die danach berechneten Druckverteilungen über Flosse und Ruder für die Anstellwinkel $\alpha = -10^0, -5^0, 0^0, 5^0, 10^0$ und die Ruderwinkel $\beta = -10^0, 0^0, 10^0$. Interessant ist vor allem der Verlauf der Kurven in der Gegend des Spalts. Man erkennt deutlich die Beeinflussung der Flosse durch das Ruder, während die Kurven für das Ruder einen überraschend glatten Verlauf zeigen.

[7]) Die für die Ermittlung dieser Koeffizienten notwendigen Werte der elliptischen Funktionen p und ζ wurden mit Hilfe von Thetareihen berechnet.

Zahlentafel 8. Druckbeiwert an einer Stelle z der Flosse: $c_p(z) = 1 - (a_z\cos^2\alpha + 2\,b_z\cos\alpha\sin\alpha + c_z\sin^2\alpha)$.

	$\beta = 0^0$			$\beta = 10^0$			$\beta = -10^0$		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	a_z	b_z	c_z	a_z	b_z	c_z	a_z	b_z	c_z
1	0,021	2,557	304,100	0,776	15,351	303,626	0,340	— 10,196	305,355
2	1,261	9,750	75,407	2,211	12,835	-74,491	0,563	6,515	75,403
3	1,416	5,581	22,000	1,999	6,664	22,221	0,978	4,666	22,249
4	1,397	3,632	9,444	1,835	4,202	9,620	1,083	3,205	9,491
5	1,360	2,578	4,886	1,681	2,864	4,880	1,106	2,327	4,896
6	1,295	1,883	2,738	1,543	2,039	2,694	1,075	1,715	2,737
7	1,224	1,407	1,617	1,469	1,537	1,608	1,031	1,289	1,613
8	1,169	1,075	0,988	1,386	1,160	0,971	0,976	0,979	0,983
9	1,102	0,816	0,605	1,305	0,876	0,589	0,915	0,745	0,606
10	1,061	0,636	0,382	1,305	0,700	0,375	0,854	0,569	0,379
11	1,032	0,506	0,248	1,310	0,564	0,243	0,796	0,441	0,244
12	0,991	0,408	0,168	1,345	0,474	0,167	0,708	0,338	0,161
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0,926	0,250	0,067	1,581	0,410	0,106	0,559	0,169	0,051
15	0,787	— 0,184	0,043	0,824	— 0,202	0,050	0,728	— 0,174	0,042
16	0,924	— 0,518	0,291	0,796	— 0,480	0,290	1,030	— 0,538	0,281
17	0,992	— 0,742	0,555	0,829	— 0,671	0,543	1,155	— 0,798	0,551
18	1,074	— 1,013	0,955	0,899	— 0,918	0,938	1,262	— 1,097	0,954
19	1,135	— 1,343	1,590	0,956	— 1,227	1,574	1,333	— 1,453	1,584
20	1,197	— 1,803	2,717	0,991	— 1,635	2,698	1,436	— 1,979	2,728
21	1,246	— 2,459	4,853	1,014	— 2,219	4,853	1,542	— 2,751	4,908
22	1,268	— 3,459	9,437	0,971	— 3,033	9,474	1,622	— 3,989	9,810
23	1,233	— 5,225	22,136	0,826	— 4,271	22,090	1,758	— 6,259	22,277
24	0,947	— 8,427	74,960	0,361	— 5,194	74,836	1,816	— 11,768	76,251

Digitized by Google

Zahlentafel 4. Druckbeiwert an einer Stelle z des Ruders: $c_p(z) = 1 - (a_z \cos^2\alpha + 2\,b_z \cos\alpha \sin\alpha + c_z \sin^2\alpha)$.

	$\beta = 0°$			$\beta = 10°$			$\beta = -10°$		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	a_z	b_z	c_z	a_z	b_z	c_z	a_z	b_z	c_z
1	0,001	0,081	4,636	2,958	3,158	3,370	2,941	— 4,177	5,931
2	0,962	0,872	0,790	3,314	1,455	0,639	0,018	0,131	0,947
3	1,108	0,524	0,248	2,293	0,728	0,231	0,356	0,291	0,238
4	1,075	0,395	0,145	1,808	0,525	0,153	0,540	0,263	0,128
5	1,066	0,363	0,124	1,600	0,431	0,116	0,635	0,267	0,112
6	1,060	0,330	0,103	1,448	0,343	0,081	0,716	0,281	0,111
7	1,046	0,287	0,079	1,337	0,262	0,051	0,767	0,274	0,098
8	1,021	0,233	0,053	1,228	0,184	0,028	0,799	0,251	0,079
9	0,981	0,176	0,032	1,125	0,110	0,011	0,813	0,217	0,058
10	0,945	0,117	0,014	1,038	0,044	0,002	0,821	0,174	0,037
11	0,915	0,062	0,004	0,969	— 0,013	0,000	0,834	0,130	0,020
12	0,888	0,008	0,000	0,908	— 0,071	0,006	0,846	0,088	0,009
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0,887	— 0,091	0,009	0,833	— 0,163	0,032	0,917	0,017	0,000
15	0,930	— 0,157	0,026	0,833	— 0,218	0,057	0,983	— 0,079	0,006
16	0,969	— 0,222	0,051	0,836	— 0,275	0,090	1,070	— 0,151	0,021
17	1,019	— 0,300	0,088	0,841	— 0,332	0,131	1,175	— 0,237	0,048
18	1,073	— 0,387	0,140	0,840	— 0,393	0,184	1,298	— 0,344	0,091
19	1,127	— 0,483	0,207	0,828	— 0,450	0,244	1,440	— 0,470	0,153
20	1,181	— 0,589	0,294	0,792	— 0,499	0,315	1,616	— 0,628	0,244
21	1,221	— 0,708	0,411	0,726	— 0,537	0,397	1,834	— 0,832	0,377
22	1,231	— 0,843	0,578	0,599	— 0,551	0,507	2,103	— 1,110	0,586
23	1,184	— 1,031	0,898	0,358	— 0,505	0,713	2,546	— 1,597	1,002
24	0,941	— 1,330	1,879	0,012	— 0,127	1,379	3,527	— 2,865	2,327

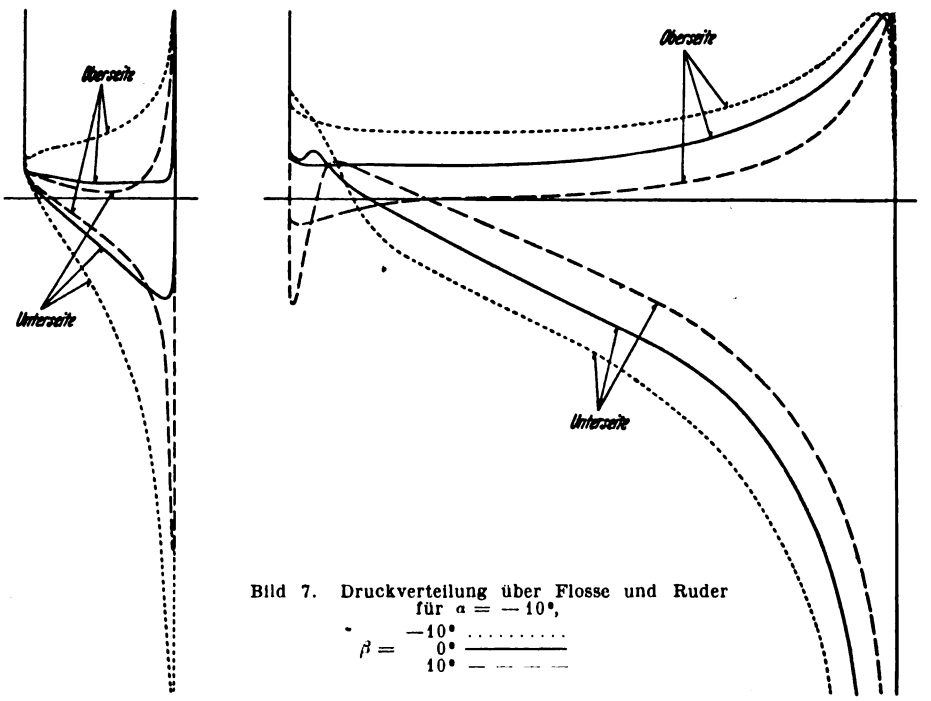


Bild 7. Druckverteilung über Flosse und Ruder für $\alpha = -10°$, $\beta = -10°$ ....., $0°$ ——, $10°$ — — — —

4. Berechnung der Auftriebe und Momente.

Aus den bisher gewonnenen Ergebnissen, insbesondere den Druckverteilungen, lassen sich nun ohne weiteres vollends die Auftriebs- und Momentenbeiwerte des Doppelflügels ermitteln:

a) Der Gesamtauftrieb des Doppelflügels berechnet sich nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz (der für das Gesamtsystem des Doppelflügels, nicht aber für Flosse und Ruder einzeln gilt) zu

$$A = \varrho V (\Gamma_F + \Gamma_R).$$

Entnimmt man den Wert der Zirkulation den Gl. (21′) und (21″), so erhält man im Falle $\beta = 0°$

$$A = 4\pi\varrho V^2 (0{,}0700 \cos\alpha + 5{,}1790 \sin\alpha).$$

Entsprechend ergibt die Rechnung für $\beta = 10°$

$$A = 4\pi\varrho V^2 (0{,}4962 \cos\alpha + 5{,}1558 \sin\alpha)$$

und für $\beta = -10°$

$$A = 4\pi\varrho V^2 (-0{,}3511 \cos\alpha + 5{,}1868 \sin\alpha).$$

Auf Grund dieser Formeln wurde der Auftriebsbeiwert c_a für die Anstellwinkel $\alpha = -10°, -5°, 0°, 5°, 10°$ ermittelt; die Ergebnisse sind in Zahlentafel 5 zusammengestellt und durch Bild 12a und 12b veranschaulicht.

Zur Kontrolle der Druckverteilungen wurde der Gesamtauftrieb auch aus diesen durch Planimetrieren ermittelt. Für den Anstellwinkel α und den Ruderwinkel β erhält man den von der Flosse herrührenden Anteil als

$$A_F = \int p (\cos\alpha\, dx - \sin\alpha\, dy) = q \cos\alpha \int c_p d(x - \operatorname{tg}\alpha \cdot y),$$

den vom Ruder herrührenden Anteil als

$$A_R = \int p (\cos(\alpha+\beta)\, dx - \sin(\alpha+\beta)\, dy)$$
$$= q \cos(\alpha+\beta) \int c_p d(x - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) y),$$

Digitized by Google

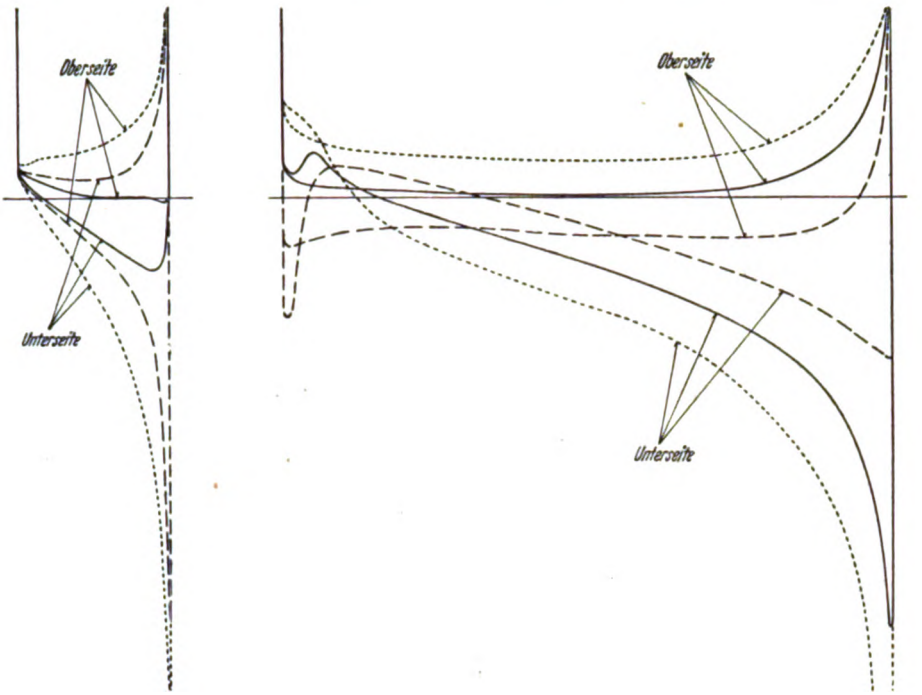


Bild 8. Druckverteilung über Flosse und Ruder für $\alpha = -5°$,
$\beta =$ $-10°$ ..... $0°$ ——— $10°$ — — — —

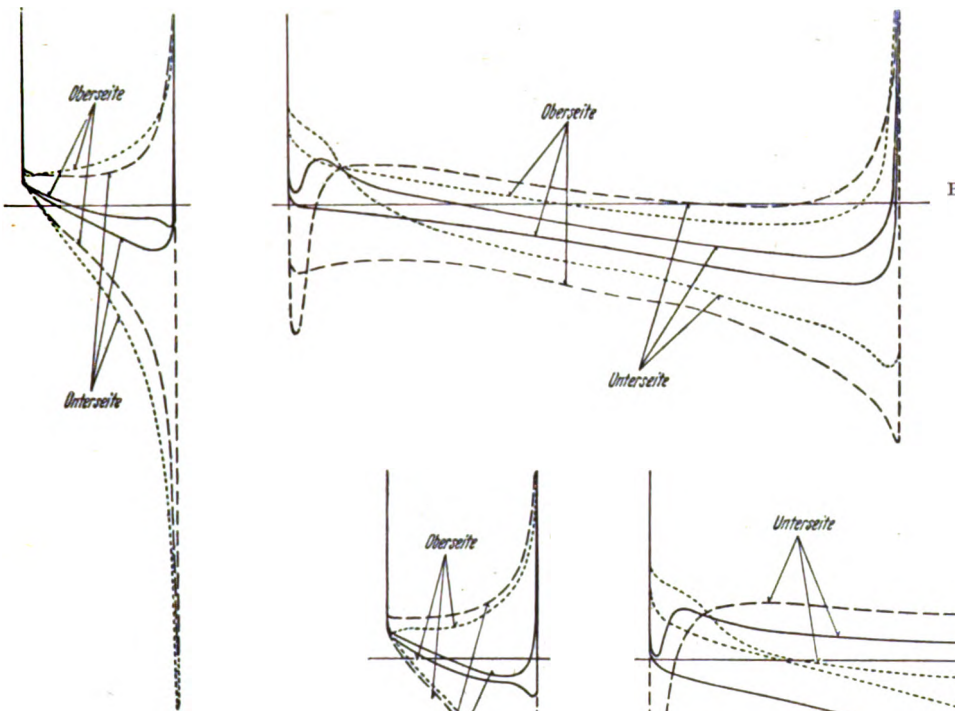


Bild 9. Druckverteilung über Flosse und Ruder für $\alpha = 0°$,
$\beta =$ $-10°$ ..... $0°$ ——— $10°$ — — — —

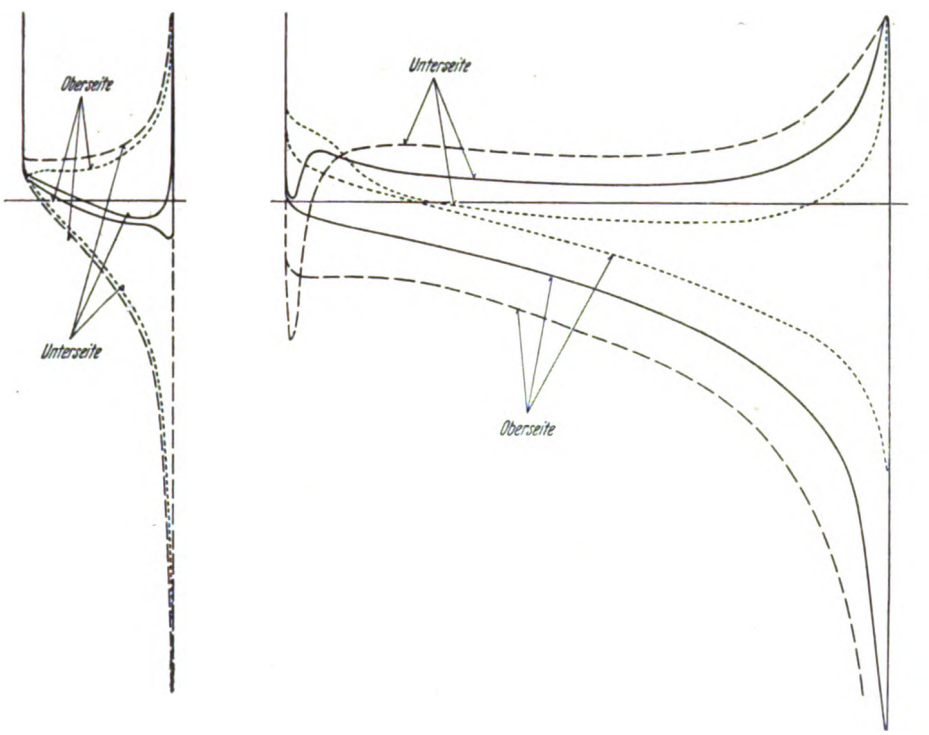


Bild 10. Druckverteilung über Flosse und Ruder für $\alpha = 5°$,
$\beta =$ $-10°$ ..... $0°$ ——— $10°$ — — — —

Digitized by Google

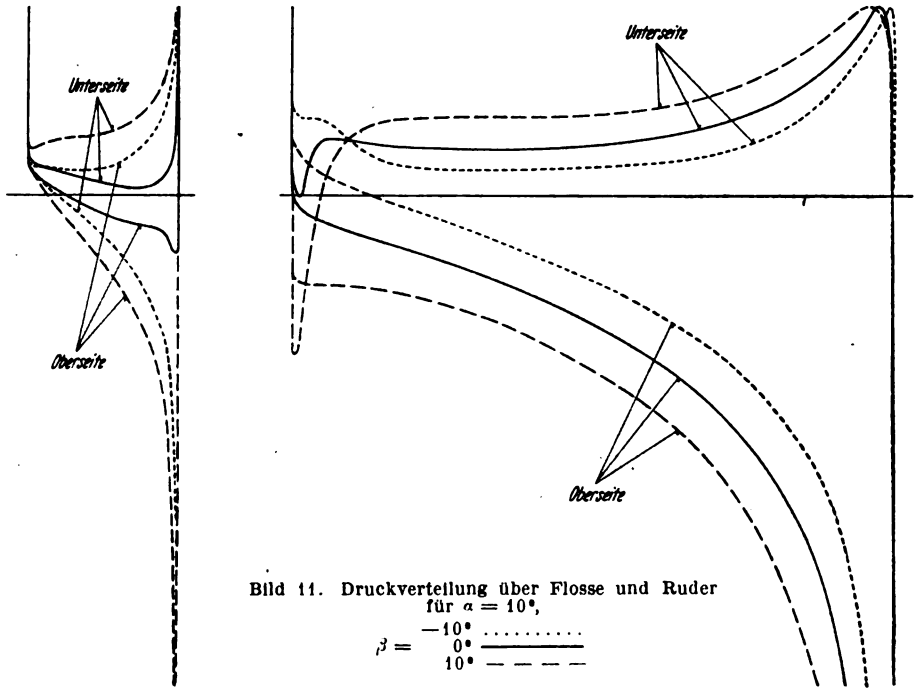


Bild 11. Druckverteilung über Flosse und Ruder für $\alpha = 10°$,
$\beta =$ $-10°$ ..... $0°$ ——— $10°$ — — — —

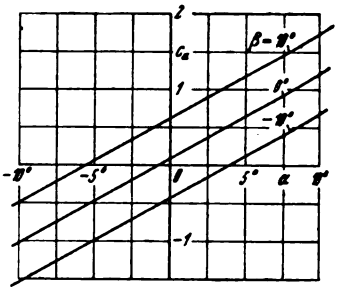


Bild 12a. Auftriebsbeiwert c_a in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α.

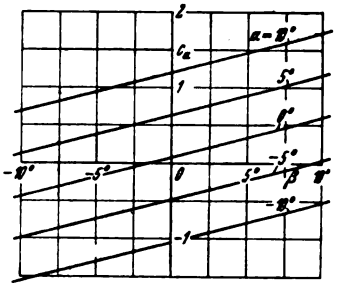


Bild 12b. Auftriebsbeiwert c_a in Abhängigkeit vom Ruderwinkel β.

wobei die Integrale je über die betreffende Kontur zu erstrecken sind. Die sich dabei ergebenden Werte von A_F/q und A_R/q zeigen die Zahlentafeln 7 und 8. Die entsprechenden Werte von c_a gibt Zahlentafel 6, sie zeigen eine Übereinstimmung mit den direkt errechneten Werten aus Tafel 5 auf weniger als 1%.

b) Das Gesamtmoment des Doppelflügels, bezogen auf seine Nase, läßt sich ebenfalls geschlossen berechnen. Da diese Rechnung jedoch sehr mühsam ist, wurde die Bestimmung des Moments aus den Druckverteilungen durch Planimetrieren vorgezogen. Ist

$$z_N = x_N + i\,y_N$$

die Leitwerksnase, so stellt sich das Moment von Flosse und Ruder durch das Integral

$$M = \int p\,\{(x - x_N)\,dx + (y - y_N)\,dy\} = \frac{1}{2}\,q \int c_p\,d\,(s^2)$$

mit

$$s^2 = (x - x_N)^2 + (y - y_N)^2$$

dar, wo die Integration je über die betreffende Kontur zu erstrecken ist. Die sich hieraus ergebenden Werte von c_m zeigt Zahlentafel 9, sie sind in Bild 13a und 13b veranschaulicht.

c) Die Rudernormalkraft wurde ebenfalls durch Planimetrieren aus den Druckverteilungen erhalten. Sie wird durch

$$N_R = \int p\,dx = q \int c_p\,dx,$$

wo das Integral über die Ruderkontur zu nehmen ist, dargestellt. Die Ergebnisse sind aus Zahlentafel 10 und Bild 14a und 14b zu ersehen.

d) Auch das Rudermoment bezüglich der Ruderdrehachse

$$z_D = x_D + i\,y_D$$

wurde auf Grund der Formel

$$M_R = \int p\,\{(x - x_D)\,dx + (y - y_D)\,dy\} = \frac{1}{2}\,q \int c_p\,d\,(t^2)$$

mit

$$t^2 = (x - x_D)^2 + (y - y_D)^2,$$

wobei das Integral über die Ruderkontur zu erstrecken ist, durch Planimetrieren ermittelt. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 11 und Bild 15a und 15b dargestellt.

Zur Kontrolle der Rudermomente wurden die auf die Drehachse bezogenen Momente auf die Leitwerksnase um-

Zahlentafel 5. Auftriebsbeiwert c_a. (Ergebnisse der Rechnung nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz.)

β \ α	$-10°$	$-5°$	$0°$	$5°$	$10°$
$-10°$	$-1{,}55_7$	$-1{,}00_3$	$-0{,}43_9$	$0{,}12_8$	$0{,}69_3$
$0°$	$-1{,}03_7$	$-0{,}47_7$	$0{,}08_8$	$0{,}65_1$	$1{,}21_6$
$10°$	$-0{,}50_8$	$0{,}05_6$	$0{,}62_0$	$1{,}18_0$	$1{,}72_9$

Zahlentafel 6. Auftriebsbeiwert c_a.
(Ergebnisse nach Zahlentafel 7 und 8.)

β \ α	$-10°$	$-5°$	$0°$	$5°$	$10°$
$-10°$	$-1{,}55_5$	$-1{,}00_2$	$-0{,}44_2$	$0{,}12_8$	$0{,}69_1$
$0°$	$-1{,}03_4$	$-0{,}47_5$	$0{,}08_9$	$0{,}65_1$	$1{,}20_7$
$10°$	$-0{,}50_6$	$0{,}05_6$	$0{,}62_0$	$1{,}17_7$	$1{,}72_9$

Zahlentafel 7. Anteil der Flosse am Gesamtauftrieb: $\frac{1}{q}A_F$.
(Ergebnisse der planimetrischen Auswertung der Druckverteilung.)

β \ α	$-10°$	$-5°$	$0°$	$5°$	$10°$
$-10°$	$-27{,}04$	$-16{,}28$	$-5{,}50$	$5{,}37$	$16{,}12$
$0°$	$-19{,}40$	$-8{,}70$	$2{,}07$	$12{,}81$	$23{,}52$
$10°$	$-11{,}89$	$-1{,}12$	$9{,}71$	$20{,}52$	$31{,}32$

Zahlentafel 8. Anteil des Ruders am Gesamtauftrieb: $\frac{1}{q}A_R$.
(Ergebnisse der planimetrischen Auswertung der Druckverteilung.)

β \ α	$-10°$	$-5°$	$0°$	$5°$	$10°$
$-10°$	$-4{,}24$	$-3{,}88$	$-3{,}38$	$-2{,}79$	$-2{,}22$
$0°$	$-1{,}39$	$-0{,}85$	$-0{,}28$	$0{,}28$	$0{,}76$
$10°$	$1{,}71$	$2{,}25$	$2{,}76$	$3{,}15$	$3{,}46$

Digitized by Google

Zahlentafel 9. Beiwert c_m des auf die Leitwerksnase bezogenen Moments. (Ergebnisse der planimetrischen Auswertung der Druckverteilung.)

β \ α	-10^0	-5^0	0^0	5^0	10^0
-10^0	$0{,}47_8$	$0{,}34_6$	$0{,}20_8$	$0{,}06_7$	$-0{,}07_0$
0^0	$0{,}25_0$	$0{,}11_2$	$-0{,}02_8$	$-0{,}16_6$	$-0{,}29_8$
10^0	$0{,}01_6$	$-0{,}12_4$	$-0{,}26_5$	$-0{,}39_9$	$-0{,}52_3$

Zahlentafel 10. Beiwert c_{nR} der Rudernormalkraft. (Ergebnisse der planimetrischen Auswertung der Druckverteilung.)

β \ α	-10^0	-5^0	0^0	5^0	10^0
-10^0	$-1{,}11_2$	$-0{,}98_8$	$-0{,}84_6$	$-0{,}70_1$	$-0{,}55_2$
0^0	$-0{,}34_3$	$-0{,}20_9$	$-0{,}07_0$	$0{,}06_7$	$0{,}18_7$
10^0	$0{,}42_5$	$0{,}54_7$	$0{,}67_4$	$0{,}79_4$	$0{,}90_5$

Zahlentafel 11. Beiwert c_R des auf die Drehachse bezogenen Rudermoments. (Ergebnisse der planimetrischen Auswertung der Druckverteilung.)

β \ α	-10^0	-5^0	0^0	5^0	10^0
-10^0	$0{,}0021_2$	$0{,}0017_3$	$0{,}0013_1$	$0{,}0008_6$	$0{,}0004_3$
0^0	$0{,}0013_6$	$0{,}0008_6$	$0{,}0003_2$	$-0{,}0002_2$	$-0{,}0007_2$
10^0	$0{,}0003_5$	$-0{,}0002_0$	$-0{,}0007_7$	$-0{,}0012_9$	$-0{,}0017_8$

Zahlentafel 12. Auf die Leitwerksnase bezogenes Rudermoment. (Ergebnisse der planimetrischen Auswertung der Druckverteilung.)

β \ α	-10^0	-5^0	0^0	5^0	10^0
-10^0	75,46	67,03	57,47	47,07	36,25
0^0	23,97	14,86	5,10	— 4,27	— 13,15
10^0	— 28,17	— 37,75	— 46,50	— 54,81	— 61,12

Zahlentafel 13. Auf die Leitwerksnase bezogenes Rudermoment. (Ergebnisse der Umrechnung des auf die Drehachse bezogenen Rudermoments nach Zahlentafel 11.)

β \ α	-10^0	-5^0	0^0	5^0	10^0
-10^0	75,83	67,04	57,60	47,37	36,74
0^0	24,22	14,73	5,00	— 4,33	— 13,34
10^0	— 28,30	— 37,73	— 46,53	— 54,67	— 61,13

gerechnet und mit den direkt ermittelten Rudermomenten bez. der Leitwerksnase verglichen. Die auf den beiden Wegen erhaltenen, auf die Leitwerksnase bezogenen Rudermomente sind in den Zahlentafeln 12 und 13 wiedergegeben, die Übereinstimmung ist sehr gut.

Aus dem bisher erhaltenen Zahlenmaterial lassen sich schließlich noch ohne weiteres die Koeffizienten der linearisierten Darstellung[8]) der Auftriebe und Momente ablesen. Man findet unter Beibehaltung der geometrischen Anstellwinkel α, β von Flosse und Ruder[9])

$$[\alpha^0] = -0{,}78_9, \quad \left[\frac{\partial \alpha^0}{\partial c_a}\right] = 8{,}9_0, \quad \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right] = -0{,}47_3,$$

$$[c_m] = -0{,}00_6, \quad \left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] = -0{,}24_8, \quad \left[\frac{\partial c_m}{\partial \beta^0}\right] = -0{,}010_3,$$

$$[c_{nR}] = -0{,}09_2, \quad \left[\frac{\partial c_{nR}}{\partial c_a}\right] = 0{,}24_6, \quad \left[\frac{\partial c_{nR}}{\partial \beta^0}\right] = 0{,}063_4,$$

$$[c_R] = 0{,}0004_1, \quad \left[\frac{\partial c_R}{\partial c_a}\right] = -0{,}0009_7, \quad \left[\frac{\partial c_R}{\partial \beta^0}\right] = -0{,}00005_5.$$

[8]) S. Vorbemerkung (1).

[9]) Der Übergang zu denjenigen Anstell- und Ruderwinkeln $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, die gleichzeitig mit c_a und c_R verschwinden, erfolgt vermöge $\bar{\alpha} = \alpha + 4°$, 31 und $\bar{\beta} = \beta - 7°$, 45.

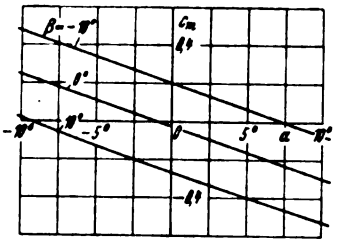


Bild 13a. Momentenbeiwert c_m in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α.

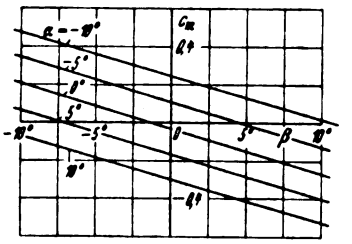


Bild 13b. Momentenbeiwert c_m in Abhängigkeit vom Ruderwinkel β.

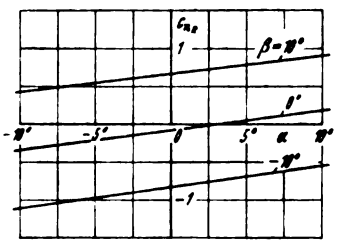


Bild 14a. Beiwert c_{nR} der Rudernormalkraft in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α.

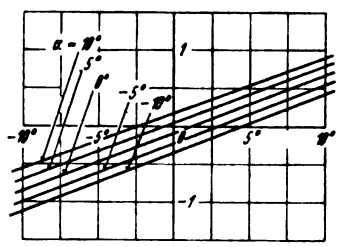


Bild 14b. Beiwert c_{nR} der Rudernormalkraft in Abhängigkeit vom Ruderwinkel β.

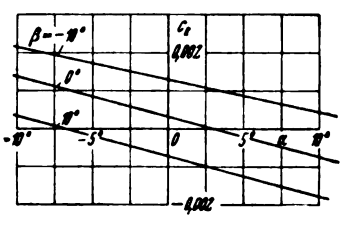


Bild 15a. Beiwert c_R des Rudermoments in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α.

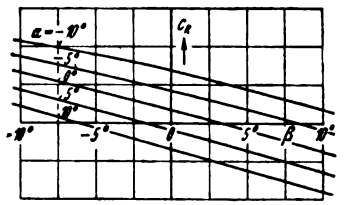


Bild 15b. Beiwert c_R des Rudermoments in Abhängigkeit vom Ruderwinkel β.

5. Zusammenfassung.

Die ebene Potentialströmung um einen speziellen unsymmetrischen Doppelflügel mit endlich dicken Profilen wird an Hand der (näherungsweisen) konformen Abbildung des Strömungsgebietes auf das Außengebiet zweier Kreise berechnet. Für beliebige Anstellwinkel α und die Ruderwinkel $\beta = -10^0$, 0^0, 10^0 werden die Druckverteilungen über Flosse und Ruder berechnet und für die Anstellwinkel $\alpha = -10^0$, -5^0, 0^0, 5^0, 10^0 aufgezeichnet. Weiter werden für kleine Anstell- und Ruderwinkel (linearer Bereich) die Beiwerte von Auftrieb, Moment, Rudernormalkraft und Rudermoment aus den Druckverteilungen ermittelt und in Diagrammen dargestellt. Schließlich werden noch die Koeffizienten der linearisierten Darstellung der Auftriebe und Momente angegeben.

Digitized by Google

Das beschleunigungsunabhängige Pendel von einem Freiheitsgrad auf einer Kleinkreisbahn.

Von Erich Schmid.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Bordgerät und Navigation.

Es wird gezeigt, daß die Schwingungsdauer des beschleunigungsunabhängigen physikalischen Pendels von einem Freiheitsgrad, die man bisher allgemein zu 84 min annahm, einen anderen Wert besitzt. Ferner wird die Stabilität der Gleichgewichtslagen dieses Pendels untersucht, wenn die Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit als Tangente einer Kleinkreisbahn im Schwerefeld der Erde geführt wird.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Aufstellung der Bewegungsgleichung.
3. Folgerungen aus der Bewegungsgleichung.
4. Umrechnung der Stabilitätsgrenze auf Geschwindigkeit und Bahnhalbmesser.
5. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Obwohl den physikalischen Pendeln sehr langer Schwingungsdauer[1]) — von welchen wir im folgenden einen Sonderfall näher untersuchen wollen — infolge der Schwierigkeiten, welche ihrer Herstellung entgegenstehen, vorläufig praktisch keine Bedeutung zukommt, so erheben sie doch vom grundsätzlichen Standpunkt aus Anspruch auf unser Interesse. Dabei möge man bedenken, daß es bisher u. W. ja auch noch nicht gelungen ist, Kreiselpendel von so großer Schwingungsdauer in einer für Flugzeuge brauchbaren Form zu bauen[2]). Man muß außerdem beachten, daß die am physikalischen Pendel gewonnenen Ergebnisse nicht ohne weiteres auf das Kreiselpendel und den Kreiselkompaß übertragen werden dürfen.

Durch geeignete Wahl des Verhältnisses von Trägheits- und Schwerемoment — die formal errechnete reduzierte Pendellänge muß gleich dem Abstand des Pendelaufhängepunktes vom Erdmittelpunkt sein — kann dann eine Unempfindlichkeit eines im Schwerefeld der Erde sich bewegenden physikalischen Pendels gegen beliebige Beschleunigung des Aufhängepunktes erreicht werden, wenn das Pendel nur diejenige Drehung mitmacht, welche der jeweiligen Horizontalkomponente des Winkelgeschwindigkeitsvektors der Führungsbewegung des Pendels (bzw. der Erddrehung) entspricht, nicht aber die der Vertikalkomponente entsprechende; dafür ist notwendige Voraussetzung, daß das Pendel 3 Freiheitsgrade besitzt (z. B. auf einer Spitze gelagert ist). Soll das Pendel dagegen auch die der jeweiligen Vertikalkomponente des Winkelgeschwindigkeitsvektors der Führungsbewegung entsprechende Drehung mitmachen, d. h. in bezug auf das führende System in Ruhe bleiben (was bei Kreuzgelenk-Lagerung des Pendels im führenden System zwangsweise geschieht), so ist ein allgemeines Pendel, sofern es die oben angegebene Bedingung für das Verhältnis von Trägheitsmoment zu Schwerемoment erfüllt, nicht mehr beschleunigungsunabhängig[3]), wohl aber das »Stabpendel« (d. h. ein Pendel, dessen Trägheitsmoment um die durch den Aufhängepunkt gehende Schwerachse gleich Null ist). Für ein solches Pendel ist die Lotlage stets Gleichgewichtslage. Bei allen seitherigen Untersuchungen wurde jedoch die Frage außer acht gelassen, ob, bzw. wann das Gleichgewicht in der Lotlage stabil ist.

Wie weit die Verhältnisse bei Pendeln von so großer Schwingungsdauer von den üblichen Vorstellungen abweichen, geht daraus hervor, daß die Größenunterschiede der Zentrifugalbeschleunigung bei Führung des Aufhängepunktes auf einer Kleinkreisbahn infolge der verschieden großen Halbmesser der Bahnen der einzelnen Massenelemente bewirken, daß die Resultante der Trägheitskräfte der Führungsbewegung (in anderer Betrachtungsweise Fliehkraft- und Kreiselmomente) beim Stabpendel nicht immer durch den Schwerpunkt, bei Lage des Pendels im wahren Lot vielmehr durch den Aufhängepunkt geht. Aber auch die Veränderlichkeit der Schwerebeschleunigung mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt, d. h. über die Länge des Pendels, macht sich bei den Pendeln mit sehr großer Schwingungsdauer erheblich bemerkbar. Sie äußert sich in einer Abweichung der Schwingungsdauer von der mit unveränderlicher Schwerebeschleunigung errechneten.

In der vorliegenden Arbeit soll ein einfaches, leicht zu überschendes Beispiel betrachtet werden: Das Stabpendel von einem Freiheitsgrad, dessen Drehachse im Schwerefeld der Erde mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis durchläuft. Dabei falle die Drehachse des Pendels stets in Richtung der Bahntangente, so daß seine Schwingungsebene durch die Achse der Führungsbewegung geht. Wir werden die Gleichgewichtslagen dieses Pendels berechnen und feststellen, welche stabil und welche labil sind. Ferner werden wir für das beschleunigungsunabhängige Pendel mit ruhender Achse die Schwingungsdauer um seine stabilen Gleichgewichtslagen bestimmen.

2. Aufstellung der Bewegungsgleichung.

Die geometrischen Verhältnisse des Pendels sind in Bild 1 dargestellt. Wir sehen die Achse der Führungsbewegung MN, den Durchstoßpunkt A der Drehachse des Pendels mit der Zeichenebene (Aufhängepunkt) und die längs einer Geraden verteilte Stabmasse mit dem Massenelement dm im Punkt P mit dem Abstand x von der Drehachse. Ferner ist

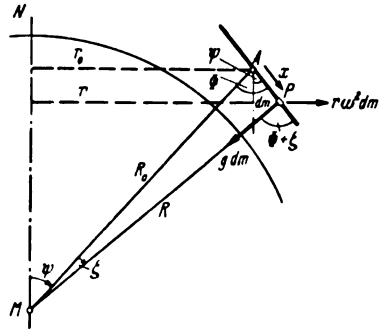


Bild 1. Das Stabpendel von einem Freiheitsgrad auf einer Kleinkreisbahn.

[1]) M. Schuler, Physikalische Zeitschr., Bd. 24 (1923), S. 344. E. Schmid, Jahrbuch 1938 d. deutschen Luftfahrtforschung S. III, 8. K. Stellmacher, Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 247. E. Schmid, ebenda S. 249.

[2]) Vgl. J. W. Geckeler, Ing.-Arch. Bd. 6 (1935), S. 229.

[3]) K. Stellmacher, E. Schmid a. a. O.

Digitized by Google

ψ der halbe Öffnungswinkel der Kleinkreisbahn des Punktes A,
Φ der Winkel des Stabs mit dem wahren Lot im Aufhängepunkt,
r_0, R_0 (r, R) der Abstand des Punktes A (P) von der Achse MN der Führungsbewegung bzw. vom Erdmittelpunkt,
ζ der Winkel zwischen den Erdhalbmessern durch A und durch P,
g_0, g die Erdbeschleunigung in A bzw. P,
$\omega = \frac{2\pi}{T_u}$ die Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung (um die Achse MN).

Wir begeben uns in das mit dem Pendel um MN rotierende Koordinatensystem, rechnen die auf jedes Massenelement wirkenden Kräfte aus, bilden deren Moment in bezug auf die Drehachse des Pendels, integrieren über alle Massenelemente und setzen schließlich die Summe der Integrale gleich Null. Die Erddrehung lassen wir zunächst außer acht; da sie eine Bewegung des Aufhängepunktes auf einer Kleinkreisbahn um die Erdachse bedeutet, wird auch sie von der vorliegenden Aufgabenstellung erfaßt. Wir kommen später nochmals darauf zurück.

Auf das Massenelement wirken in der Gleichgewichtslage des Pendels die beiden folgenden Kräfte[4]):

1. die Schwerkraft $g\,dm$ in Richtung des Erdhalbmessers durch P,
2. die Zentrifugalkraft $r\omega^2 dm$ senkrecht zur Achse MN der Führungsbewegung;

bei schwingendem Pendel kommen hinzu:

3. der Trägheitswiderstand,
4. die Corioliskraft $2\,dm\ \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$, welche aber in der durch Drehachse des Pendels und Massenelement gehenden Ebene liegt und daher kein Moment um diese Drehachse ergibt.

Das Moment der am Massenelement dm angreifenden Schwerkraft ist:

$$dM_s = -dm \cdot g\, x \sin(\Phi + \zeta).$$

Sieht man von lokalen Schwerestörungen[5]) ab, so ist die Erdbeschleunigung umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{R^2};$$

ferner ist, vgl. Bild 1,

$$\frac{\sin(\Phi+\zeta)}{\sin\Phi} = \frac{R_0}{R}$$

und

$$R^2 = R_0^2 + x^2 - 2\,R_0\, x \cos\Phi$$

somit wird

$$dM_s = -dm \cdot g_0\, x \sin\Phi \left[1 - 2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^{-3/2}$$

und das gesamte Schweremoment

$$M_s = -g_0 \sin\Phi \int x \left[1 - 2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^{-3/2} dm.$$

Wir entwickeln die Klammer nach dem binomischen Satz

$$\left[1 - 2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\left[-2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right] + \frac{15}{8}\left[-2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^2 - + \ldots,$$

brechen, da $\frac{x}{R_0} \ll 1$ ist, die Entwicklung nach dem in $\frac{x}{R_0}$ linearen Glied ab und erhalten unter Einführung von

$\int x\ dm = m \cdot s$,
s = Abstand des Massenmittelpunkts vom Aufhängepunkt,
m = gesamte Masse des Pendels,
und $\int x^2\, dm = \Theta$, Trägheitsmoment des Pendels um seine Achse,

für das Moment

$$M_s = -\left(ms + 3\frac{\Theta}{R_0}\cos\Phi\right) g_0 \sin\Phi + \mu,$$

wobei das Restglied μ noch abgeschätzt werden muß.

Abschätzung des Restgliedes μ.

Da die obige binomische Entwicklung alternierend ist, so wird beim Abbrechen nach dem zweiten Glied der Fehler dasselbe Vorzeichen wie das dritte Glied besitzen und seinem Betrag nach kleiner als dieses sein. Zu diesem Rest haben wir noch den Teil des zweiten Entwicklungsglieds zu addieren, der vernachlässigt wurde, so daß wir erhalten

$$\frac{15}{8}\left[-2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{R_0}\right)^2 \geq \text{Rest} \geq -\frac{3}{2}\left(\frac{x}{R_0}\right)^2,$$

also sicher

$$|\text{Rest}| < \frac{15}{8}\left[-2\frac{x}{R_0}\cos\Phi + \left(\frac{x}{R_0}\right)^2\right]^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{R_0}\right)^2$$

oder auch

$$|\text{Rest}| < 9\left(\frac{x}{R_0}\right)^2 + \frac{15}{2}\left|\left(\frac{x}{R_0}\right)^3\right| + \frac{15}{8}\left(\frac{x}{R_0}\right)^4$$

somit

$$|\mu| < g_0 \sin\Phi \int \left(\frac{9}{R_0^2}x^3 + \frac{15}{8R_0^4}x^5 + \frac{15}{2R_0^3}x^3|x|\right) dm.$$

Nach einem Mittelwertsatz der Integralrechnung[6]) ist

$$\int x^3\, dm = \int x \cdot x^2\, dm = \xi_1 \int x^2\, dm = \xi_1 \Theta,$$
$$\int x^5\, dm = \int x^3 \cdot x^2\, dm = \xi_2^3 \int x^2\, dm = \xi_2^3 \Theta,$$
$$\int x^3 |x|\, dm = \xi_3^3 \int |x|\, dm,$$

wo $\xi_1 \ldots \xi_3$ im Integrationsintervall liegende x-Werte (Mittelwerte) bedeuten. Nennt man die größte vom Aufhängepunkt aus gemessene Ausdehnung des Pendels l, so ist

$$\int x^3\, dm < l\Theta,$$
$$\int x^5\, dm < l^3\Theta,$$
$$\int x^3 |x|\, dm < 2\,l^4 \cdot m,$$

damit wird der durch die Vernachlässigung des Restgliedes entstehende Fehler

$$|\mu| < 9\, g_0 \sin\Phi \cdot \frac{l\Theta}{R_0^2}\left(1 + \frac{5}{24}\left(\frac{l}{R_0}\right)^2 + \frac{5}{3}\frac{l}{R_0} \cdot \frac{ml^2}{\Theta}\right).$$

[4]) Das fiktive »Stabpendel« besitzt den Rauminhalt Null und erfährt daher keinen Luftauftrieb. Bei jedem anderen Pendel wäre der Auftrieb zu berücksichtigen; infolge der Abnahme der Luftdichte mit der Höhe liefert er ein großes zusätzliches Moment M_L, das sich (für einen dünnen Zylinder) zum Schweremoment M_S (unter Annahme konstanter Temperatur) näherungsweise wie

$$\frac{M_L}{M_S} = -\frac{\varrho_0}{\varrho_p}\left(\frac{\frac{\varrho_0 g_0 R_0}{p_0}\cdot\frac{\Theta}{ms R_0}\cos\Phi}{1 + 3\frac{\Theta}{ms R_0}\cos\Phi}\right)$$

verhält, wobei

ϱ_0, p_0 Luftdichte und Luftdruck in A,
ϱ_p die Dichte des Pendelwerkstoffs bedeuten.

In Bodennähe ist obiges Verhältnis für ein beschleunigungsunabhängiges Messingpendel in der »unteren« Lotlage ($\Phi = 0$) 0,03, in der »oberen« ($\Phi = \pi$) 0,06, für $|\Phi| < \frac{\pi}{2}$ kleiner als 0,03. Für die bei ruhendem Pendelaufhängepunkt labile Gleichgewichtslage $\Phi = 109°, 47$ bekommt das Verhältnis den Wert ∞, da dort $M_S = 0$ wird; dies bedeutet eine Verlagerung dieser labilen Gleichgewichtslage bei Wirksamkeit von Luftauftrieb.

Durch den Luftauftrieb wird zwar — wenn man von Luftreibung u. ä. absieht — die Beschleunigungsunabhängigkeit nicht gestört, er ruft jedoch eine Änderung des Stabilitätsbereichs der Gleichgewichtslagen und der Schwingungsdauern des Pendels hervor. Bei ruhendem Pendelaufhängepunkt wird die Schwingungsdauer um die »untere« Lotlage um 1,6 %, die um die »obere« Lotlage um 3 % größer.

[5]) Auf die Berücksichtigung der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt sowie des Schwerefeldes von der Kugelsymmetrie wollen wir verzichten, obwohl streng genommen die durch sie hervorgerufenen Abänderungen der Gleichgewichtslage und der Schwingungsdauer nicht vernachlässigt werden dürfen.

[6]) Siehe z. B. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl., Bd. I, S. 102.

Digitized by Google

Θ ist von der Größenordnung $m l^2$; solange also $l/R_0 \ll 1$, kann in dieser Abschätzung von μ der Klammerausdruck $= 1$ gesetzt werden. Wir erhalten daher mit großer Genauigkeit als obere Grenze des relativen Fehlers

$$\left|\frac{\mu}{M_s}\right|_{\max} = 9\,\frac{l}{R_0}\cdot\frac{\Theta/R_0}{ms+3\,\frac{\Theta}{R_0}\cos\Phi}.$$

Die Fehlergrenze ist von der Größenordnung

$$9\,\frac{l}{R_0}\cdot\frac{\Theta}{ms\,R_0},$$

sofern nicht

$$\left|\cos\Phi+\frac{ms\,R_0}{3\,\Theta}\right| \ll 1.$$

Klein ist dieser Ausdruck aber nur in einem engen Bereich um die Lage $\Phi_k = \pi \pm \arccos\frac{ms\,R_0}{3\,\Theta}$, weil das Schweremoment in diesem Bereich verschwindet; der absolute Fehler zeigt den plötzlichen starken Anstieg in diesem Bereich von Φ nicht. Für das beschleunigungsunabhängige Pendel gilt die Bedingung $\Theta = ms\,R_0$. Bei allen Pendeln, die keine wesentlich größere Schwingungsdauer als dieses besitzen und deren Längenausdehnung klein gegen den Erdhalbmesser ist, dürfen wir also — mit Ausnahme des Gebietes um Φ_k — das Restglied vernachlässigen.

Das Moment der am Massenelement dm angreifenden Fliehkraft ist

$$dM_F = dm\cdot r\,\omega^2\,x\cos(\Phi-\psi),$$

wobei

$$r = r_0 + x\sin(\Phi-\psi) = R_0\sin\psi + x\sin(\Phi-\psi).$$

Man erhält

$$M_F = \int dM_F = ms\,R_0\,\omega^2\sin\psi\cos(\Phi-\psi) + \Theta\,\omega^2\sin(\Phi-\psi)\cos(\Phi-\psi).$$

Das Moment des Trägheitswiderstandes ist

$$M_T = -\int x\cdot x\,\ddot{\Phi}\,dm = -\Theta\,\ddot{\Phi}.$$

Die Bewegungsgleichung des Pendels, $M_T + M_S + M_F = 0$, lautet dann:

$$\Theta\,\ddot{\Phi}+\left(ms+3\,\frac{\Theta}{R_0}\cos\Phi\right)g_0\sin\Phi - \omega^2\left[ms\,R_0\sin\psi+\Theta\sin(\Phi-\psi)\right]\cos(\Phi-\psi) = 0 \quad (I)$$

3. Folgerungen aus der Bewegungsgleichung.

Zwischen der Gleichgewichtslage Φ und der Bahnumlaufszeit $T_u = \frac{2\pi}{\omega}$ des Pendels erhält man durch Nullsetzen von $\ddot{\Phi}$ die Beziehung

$$\varrho^2 = \left(\frac{T_u}{T_0}\right)^2 = \frac{\sin\psi+\frac{\Theta}{ms\,R_0}\sin(\Phi-\psi)}{1+3\,\frac{\Theta}{ms\,R_0}\cos\Phi}\cdot\frac{\cos(\Phi-\psi)}{\sin\Phi} \quad (II)$$

wobei die Abkürzung

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}$$

bedeutet. Wo für R_0 künftig ein Zahlenwert eingesetzt wird, ist immer der Fall der Erdnähe vorausgesetzt; hierfür ergibt sich T_0 zu 84,4 min.

Ein Stabpendel hat die Lotlage $\Phi = 0$ unabhängig vom Wert der Zentrifugalbeschleunigung als Gleichgewichtslage, wenn für $\Phi = 0$ der Faktor von ω in der Bewegungsgleichung (I) verschwindet, d. h. wenn entweder

$$\Theta = ms\,R_0$$

ist, oder wenn bei beliebigem Trägheitsmoment Θ die Bahnkurve der Großkreis $\psi = \pi/2$ ist oder die Drehung »am Ort« ($\psi = 0$) erfolgt. Da jedoch das Pendel nach Voraussetzung nur senkrecht zur Großkreisebene schwingen kann, so ist die Lösung $\psi = \pi/2$ trivial. Wir werden uns daher mit ihr wie auch mit der Lösung $\psi = 0$ nicht weiter befassen.

Für kleine Amplituden Φ nimmt die Bewegungsgleichung des beschleunigungsunabhängigen Pendels bei Vernachlässigung von Gliedern höherer als der ersten Ordnung in Φ die Form an

$$ms\,R_0\,\ddot{\Phi} + ms\,(4\,g_0 - \omega^2\,R_0\cos^2\psi)\,\Phi = 0.$$

Die Lotlage ist also stabile Gleichgewichtslage, sofern

$$\omega^2 < \frac{4\,g_0}{R_0\cos^2\psi},$$

d. h. wenn die Umlaufszeit des Aufhängepunkts auf seiner Bahn

$$T_u > \frac{1}{2}\,T_0\cos\psi = 42{,}2\cdot\cos\psi\ \text{min}$$

ist.

Bei kleinen Umlaufszeiten $T_u < 42{,}2\cos\psi$ min ist das wahre Lot für das Pendel labile Gleichgewichtslage, bei $42{,}2\cos\psi$ min Umlaufzeit indifferente.

Die Schwingungsdauer des Pendels hängt dementsprechend von der Umlaufszeit des Aufhängepunktes ab. Bei ruhendem Aufhängepunkt ($T_u = \infty$, d. h. $\omega = 0$) ist die Schwingungsdauer

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{4\,g_0}} = 42{,}2\ \text{min}^7)$$

und nimmt mit wachsendem ω zu bis zum Wert ∞ für $T_u = 42{,}2\cos\psi$ min, mit Ausnahme der Bewegung des Aufhängepunktes auf einem Großkreis $\psi = \pi/2$, bei welcher die Schwingungsdauer für alle Umlaufzeiten 42,2 min bleibt.

Bei ruhendem Aufhängepunkt ist außerdem die Lage $\Phi = \pi$, d. h. Massenmittelpunkt senkrecht über dem Unterstützungspunkt, stabile Gleichgewichtslage, denn mit $\omega = 0$, $\Phi = \pi + \varphi$, $\varphi \ll 1$ erhält man aus Gl. (I)

$$ms\,R_0\,\ddot{\varphi} + 2\,ms\,g_0\,\varphi = 0$$

und daher

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{2\,g_0}} = 59{,}7\ \text{min}.$$

Die Stabilität dieser Lage beruht auf dem Zusammenwirken von 2 Ursachen: 1. Wenngleich der größere Teil der Masse oberhalb des Unterstützungspunktes liegt, so wirkt auf ihn doch, wegen der größeren Entfernung vom Erdmittelpunkt, eine kleinere Erdbeschleunigung als auf die Teilmasse unterhalb des Unterstützungspunktes. 2. Der Winkel ζ zweier in entgegengesetzter Richtung gleich weit vom Aufhängepunkt entfernter Massenelemente wird bei Auslenkung des Pendels aus der stabilen Lage für das näher am Erdmittelpunkt liegende Element größer, also auch der Hebelarm größer, mit welchem die Schwerkraft das Element in die stabile Lage zurückzieht. — Die beiden stabilen Gleichgewichtslagen sind erwartungsgemäß durch labile Gleichgewichtslagen getrennt. Bei ruhendem Pendelaufhängepunkt liegen diese Gleichgewichtslagen bei den Auslenkungswinkeln $\Phi = \Phi_k = \pi \pm \arccos\frac{1}{3}$, d. h. bei $\pm 109^0,47$ (abgesehen von kleinen Verschiebungen, welche durch die früher erwähnten Korrekturglieder hinzukommen). In diesen Lagen ist das, vom Aufhängepunkt aus gesehen, mit weniger Masse versehene Teilstück des Pendels im Mittel um so viel näher am Erdmittelpunkt als das mit der größeren Masse, daß sich die Anziehungskräfte auf die beiden Teile gerade das Gleichgewicht halten. — In den folgenden Abschnitten wollen wir nun die Gleichgewichtslagen bei bewegtem Aufhängepunkt einer näheren Betrachtung unterziehen.

In Bild 2 sind die Gleichgewichtslagen Φ in Abhängigkeit von der Umlaufsdauer T_u des beschleunigungsunempfindlichen Pendels ($\Theta = ms\,R_0$) für verschiedene Werte des Bahnkreisöffnungswinkels ψ nach Gleichung (II) dar-

[7]) Bei Pendeln mit diesen großen Schwingungsdauern im Schwerefeld der Erde kommt der Größe $\frac{\Theta}{ms}$ der Begriff »reduzierte Pendellänge« nicht in dem Sinne zu, daß ein mathematisches Pendel von dieser Länge dieselbe Schwingungsdauer hat.

Digitized by Google

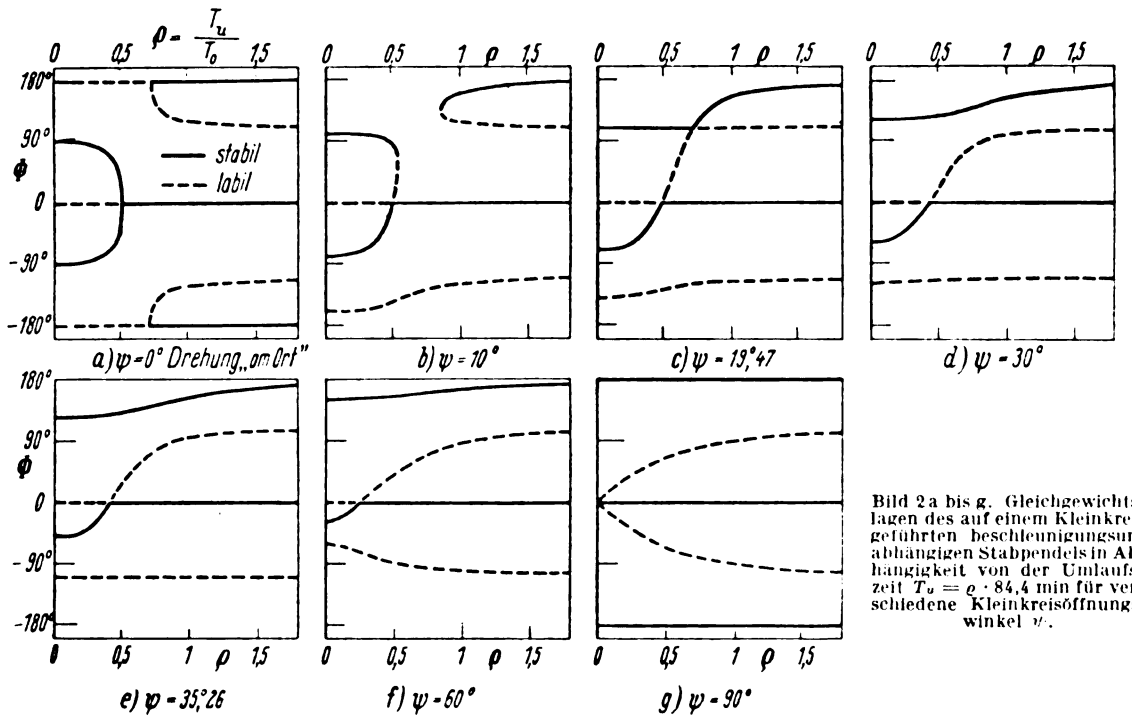


Bild 2a bis g. Gleichgewichtslagen des auf einem Kleinkreis geführten beschleunigungsunabhängigen Stabpendels in Abhängigkeit von der Umlaufszeit $T_u = \varrho \cdot 84{,}4$ min für verschiedene Kleinkreisöffnungswinkel ψ.

gestellt. Stabile Lagen sind voll, labile gestrichelt gezeichnet. Die Stabilität läßt sich durch eine Betrachtung des Vorzeichens des Rückstellmomentes leicht feststellen: Gebiete verschiedenen Vorzeichens sind durch eine Gleichgewichtslage getrennt; geben die Rückstellmomente zu beiden Seiten einer Gleichgewichtslage eine Bewegung auf diese hin, so ist sie stabil, andernfalls labil. Bei den in unmittelbarer Umgebung von $\Phi = \pi \pm \arccos \frac{1}{3}$, d. h. von $\pm 109°, 47$ liegenden Gleichgewichtslagen ist allerdings wegen des Verhaltens des Restgliedes Vorsicht geboten; das Restglied kann jedoch nur eine kleine Verschiebung der Gleichgewichtslage hervorrufen.

Bild 2a zeigt den Grenzfall $\psi = 0$, d. h. das sich »am Ort« drehende Pendel. Die Lotlage $\Phi = 0$ ist für Werte $\frac{\omega_0}{\omega} > 0{,}5$, d. h. $\omega < 2\omega_0$ stabile Gleichgewichtslage, für Werte $\omega > 2\omega_0$ labile. Das Labilwerden der Gleichgewichtslage ist bei Pendeln kurzer Schwingungsdauer bekannt; beim beschleunigungsunabhängigen Pendel kommt jedoch hinzu, daß die bei Pendeln kurzer Schwingungsdauer stets **labile** Lotlage $\Phi = \pi$ (Schwerpunkt senkrecht über dem Unterstützungspunkt) für $\varrho > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, d. h. $\omega < \omega_0\sqrt{2}$ **stabile** Gleichgewichtslage ist. Ferner hat das Pendel, dessen Drehachse ruht $\left(\frac{\omega_0}{\omega} = \infty\right)$, die labilen Gleichgewichtslagen $\Phi = 57°, 3 \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pm 109°, 47$; für $\omega \neq 0$ entnehme man die Gleichgewichtslagen dem Bild 2a.

Bild 2b stellt ein Beispiel für einen Bahnöffnungswinkel ψ zwischen 0 und $57°, 3 \arcsin \frac{1}{3} = 19°, 47$ dar: $\Phi = 180°$ ist nur noch für $T_u = \infty$ ($\omega = 0$) Gleichgewichtslage; im übrigen haben sich die Gleichgewichtslagen verschoben, der Zweig zwischen $\Phi = 0°$ und $\Phi = 90°$ und der zwischen $\Phi = 109°, 47$ und $180°$ haben sich einander genähert und stoßen bei $\psi = 57°, 3 \arcsin \frac{1}{3} = 19°, 47$, Bild 2c, im Punkte $\varrho = \frac{T_u}{T_0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\Phi = 109°, 47$ zusammen. Außerdem wird dann $\Phi = 109°, 47$ für $\varrho < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ stabile, für $\varrho > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ labile Gleichgewichtslage. Bei weiterer Zunahme von ψ erfolgt wieder eine Auftrennung der sich schneidenden Zweige, Bild 2d, $\psi = 30°$. Bei $\psi = \frac{1}{2} \cdot 57°, 3 \cdot \arccos \frac{1}{3} = 35°, 26$, Bild 2e, ist $\Phi = -109°, 47$ eine für alle Werte ϱ labile Gleichgewichtslage. Über die Zwischenlage $\psi = 60°$, Bild 2f, kommen wir zum Großkreis, Bild 2g.

Infolge der durch den Stand der Technik begrenzten Geschwindigkeit (etwa 800 km/h) kommen für $\psi > 19°, 47$ (wegen der Beziehung $T_u = \left(\frac{2\pi R_0 \sin\psi}{v}\right)$ nur Werte $T_u > 1000$ min, $\varrho > 12$ in Betracht. Die dazu gehörigen Gleichgewichtslagen Φ stimmen ziemlich genau mit den Gleichgewichtslagen des ruhenden Pendels überein: $\Phi = 0$ (genau) und $\Phi \approx 180°$ stabil, $\Phi \approx \pm 109°, 47$ labil. Es interessiert also insbesondere $\psi < 19°, 47$; um den Zusammenhang mit Pendeln anderer Schwingungsdauer klarzustellen, sind daher in Bild 3 für eine Reihe von Werten $K = \frac{\Theta}{m s R_0}$ die Gleichgewichtslagen beim Bahnöffnungswinkel $\psi = 10°$ dargestellt. Während für kleine Werte K nur eine stabile und eine labile Gleichgewichtslage auftritt, kommen für $K > \sin\psi$ je eine weitere stabile und labile Lage hinzu, die sich zunächst nur auf kleine, mit wachsendem K auf immer größere Werte ϱ erstreckt. Außerdem rückt für $K > \frac{1}{3}$ ein Zweig der Gleichgewichtskurve mit einem Φ-Wert, der wenig kleiner als $180°$ ist, von großen ϱ-Werten her gegen kleinere vor und ergibt für $K = \frac{1}{3 \sin\psi}$ eine bei $\Phi = 90° + \psi$ für alle ϱ-Werte bestehende Gleichgewichtslage, welche für $\varrho < \sqrt{\frac{1}{3}(1 + 4\,\mathrm{tg}^2\psi)}$ stabil, für größere ϱ labil ist.

4. Umrechnung der Stabilitätsgrenze auf Geschwindigkeit und Bahnhalbmesser.

Die Grenze zwischen stabilem und labilem Gleichgewicht ist gegeben durch

$$\varrho_k = \frac{1}{2}\cos\psi,$$

woraus folgt

$$T_{uk} = \frac{\frac{1}{2}T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2}};$$

Digitized by Google

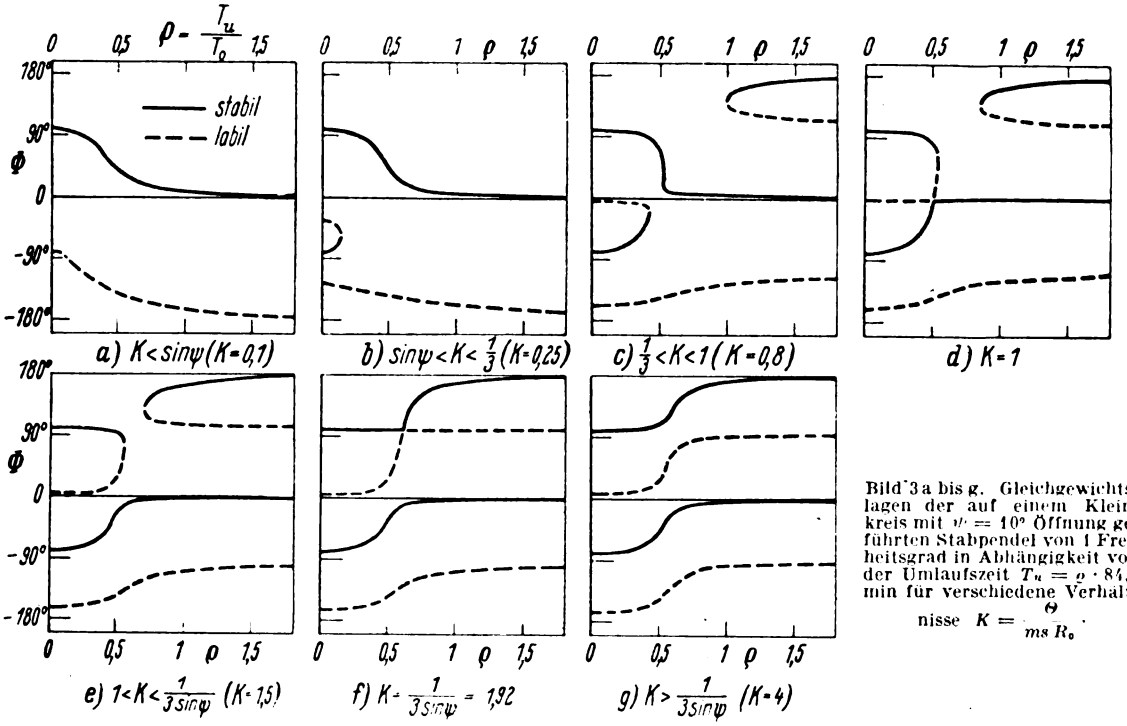


Bild 3a bis g. Gleichgewichtslagen der auf einem Kleinkreis mit $\psi = 10°$ Öffnung geführten Stabpendel von 1 Freiheitsgrad in Abhängigkeit von der Umlaufszeit $T_u = \varrho \cdot 84{,}4$ min für verschiedene Verhältnisse $K = \frac{\Theta}{m s R_0}$.

die Geschwindigkeit v_0 ist

$$v_0 = 2\sqrt{R_0 g_0} = 5{,}7 \cdot 10^4 \text{ km/h};$$

es ist also bei allen bisher verwirklichten Geschwindigkeiten

$$v \ll v_0;$$

somit in sehr guter Annäherung

$$T_{uk} = \frac{1}{2} T_0 = 42{,}2 \text{ min},$$

und der zugehörige Bahnradius

$$r_k = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}$$

oder, wenn v in km/h und r_k in km ausgedrückt wird:

$$r_k = 0{,}112\, v_{[\text{km h}]} \text{ [km]}.$$

Diese Beziehung ist in Bild 4 dargestellt. Bei Bahnhalbmessern, die größer sind als der zur vorliegenden Geschwindigkeit gehörige kritische Halbmesser ist das Pendel stabil, auf der anderen Seite der Kurve labil.

Einfluß der Erddrehung: Die Erddrehung allein kann keine Labilität der Pendelgleichgewichtslage hervorrufen. da die Drehzeit der Erde größer als die kritische Umlaufszeit ist.

Um nun das Verhalten eines Pendels auf einer Kreisbahn bezüglich der rotierenden Erde zu berechnen, addieren wir die Winkelgeschwindigkeitsvektoren der Bahndrehung und der Erddrehung vektoriell. Zwar ist die Anwendung der seitherigen Betrachtung auf diesen Fall streng genommen nicht mehr zulässig, da die Bahn gegenüber einem Inertialsystem kein Kreis mehr ist; nur in den Grenzfällen gleich- und entgegengesetzt gerichteter Winkelgeschwindigkeitsvektoren kann so vorgegangen werden. Die so unter Berücksichtigung der Erddrehung erhaltenen Stabilitätsgrenzen sind:

$$r_k' = r_k \cdot \frac{\omega_k}{\omega_k + \omega_E}; \quad r_k'' = r_k \cdot \frac{\omega_k}{\omega_k - \omega_E}$$

somit

$$r_k' = 0{,}109\, v_{\text{km h}} \text{ [km]}, \quad r_k'' = 0{,}115\, v_{\text{km h}} \text{ [km]}.$$

Diese Grenzen sind in Bild 4 gestrichelt eingezeichnet; im Zwischengebiet ist je nach Lage des Bahnkreises die Gleichgewichtslage stabil oder labil.

5. Zusammenfassung.

Am Beispiel des Stabpendels von einem Freiheitsgrad wurde gezeigt, daß es bei physikalischen Pendeln mit sehr

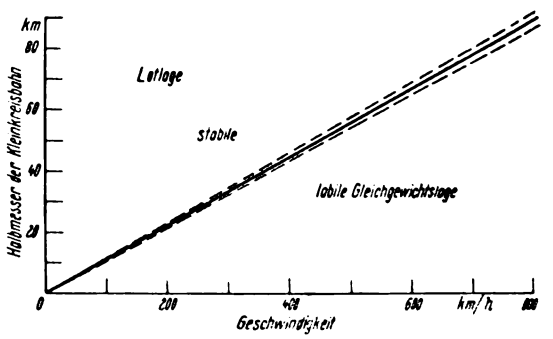


Bild 4. Art des Gleichgewichts des beschleunigungsunabhängigen Stabpendels in der Lotlage.

großer reduzierter Pendellänge, insbesondere bei beschleunigungsunabhängigen Pendeln, nicht erlaubt ist, zur Berechnung der Schwingungsdauer die Schwerebeschleunigung über das ganze Pendel hinweg als konstant anzusehen, auch dann nicht, wenn die Ausmaße des Pendels sehr klein sind. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes findet man, daß die Schwingungsdauer des beschleunigungsunabhängigen Pendels einen von 84 min abweichenden Wert besitzt und daß die Frage nach der Stabilität der Lotlage als Gleichgewichtslage einer besonderen Untersuchung bedarf.

Die Lotlage ist für ein beschleunigungsunabhängiges Pendel von einem Freiheitsgrad, dessen Drehachse nach der Tangente einer Kleinkreisbahn geführt wird, nur dann stabile Gleichgewichtslage, wenn der Bahnhalbmesser einen gewissen, von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs abhängigen Betrag nicht unterschreitet. Bei kleineren Bahnhalbmessern treten zwei von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs abhängige, von der Lotlage abweichende stabile Gleichgewichtslagen auf. Bei genügend großen Drehzeiten bzw. Bahnhalbmessern besteht neben der »unteren« Lotlage eine stabile Gleichgewichtslage des Pendels, die bei ruhendem Fahrzeug in diejenige Lotlage übergeht, in welcher der Massenmittelpunkt senkrecht über dem Unterstützungspunkt liegt. Die Schwingungsdauer des beschleunigungsunabhängigen Pendels auf ruhendem Fahrzeug um die beiden Lotlagen ist für kleine Amplituden bei Lage des Massenmittelpunkts unterhalb bzw. oberhalb des Unterstützungspunktes 42,2 bzw. 59,7 min.

Digitized by Google

E. Eng

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 2 enthält Arbeiten von: C. Schmieden S. 37—46, K. Jaeckel S. 47—53, J. Meyer S. 54—55, Berichtigung S. 55, W. Holle und E. Lübcke S. 56—58, W. Oppelt S. 59—64

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 2 SEITE 37 BIS 64 | MÜNCHEN, 20. 2. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Über Tragflügelströmungen mit Wirbelablösung. Von C. Schmieden . . Seite 37

Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen. Von K. Jaeckel . . . . . Seite 47

Zur Frage der bei Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebenden Drehsteifigkeit. Von J. Meyer . . . . . Seite 54

Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren. Berichtigung . . . . . Seite 55

Zur Schallstärke des von schnell bewegten Profilen erzeugten Schalles. Von W. Holle und E. Lübcke . . . . . Seite 56

Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben unter Berücksichtigung der apparativen Verwirklichung des Regelgesetzes. Von W. Oppelt . Seite 59

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern: bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. Februar 1940 Lfg. 2

Über Tragflügelströmungen mit Wirbelablösung.

Von C. Schmieden, Darmstadt.

Die auf Grund der üblichen Ansätze berechnete Umströmung eines gegebenen Profils besitzt wegen der Abflußbedingung von Kutta-Joukowski bei endlichem Kantenwinkel in der Hinterkante einen Staupunkt. Dies ist die Hauptursache dafür, daß die theoretische und experimentelle Druckverteilung in der Umgebung der Hinterkante stark voneinander abweichen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Ansatz entwickelt, bei dem, bedingt durch die Ablösung von zwei Wirbelschichten entgegengesetzt gleicher Zirkulation, in der Hinterkante kein Staupunkt mehr auftritt, sondern dort die Strömung das Profil tangential zur Druckseite mit der Anströmgeschwindigkeit verläßt. Damit wird in der Druckverteilung eine bessere Übereinstimmung mit der Wirklichkeit erzielt.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Die Strömung um die ebene Platte.
3. Allgemeine Profilströmungen.
4. Benachbarte Profile.
5. Anhang: Berechnung der Kraft.

1. Einleitung.

Berechnet man auf Grund der üblichen Ansätze die Zirkulationsströmung um ein gegebenes Profil, so weicht diese Strömung in verschiedenen Punkten von der wirklichen Strömung ab, auch wenn man von den Fehlern absieht, die durch den Ersatz der wirklichen Flüssigkeit durch die ideale, also durch die Vernachlässigung der Reibungswirkungen, hereinkommen. Die Hauptabweichung gegenüber der wirklichen Strömung tritt bei der Druckverteilung in der Nähe der Hinterkante auf und ist bedingt durch die Kutta-Joukowskische Abflußbedingung an der Hinterkante: bei endlichem Kantenwinkel wird durch diese Bedingung ein Staupunkt in die Hinterkante gelegt, und die Stromlinie, die das Profil umschlingt, verläßt dort das Profil in der Richtung der Winkelhalbierenden der Hinterkante (Bild 1). Die wirkliche Strömung zeigt aber dies Verhalten durchaus nicht; aus Strömungsbildern erkennt man, daß die Strömung an der Hinterkante das Profil in Richtung der Tangente an die Druckseite verläßt und sich außerdem auf der Saugseite in der Nähe der Hinterkante ablöst unter Ausbildung eines Wirbelgebietes hinter dem Tragflügel. Um eine ideale Flüssigkeitsströmung zu konstruieren, die sich diesem wirklichen Strömungsbild besser anpaßt als die Kutta-Joukowski-Strömung, idealisieren wir das Wirbelgebiet durch zwei Wirbelschichten mit konstanter und entgegengesetzt gleicher Zirkulation, von denen die eine sich an der Hinterkante in der Richtung der Tangente an die Druckseite ablöst, während die andere die Saugseite in der Nähe der Hinterkante tangential zum Profil verläßt, Bild 2. Weit genug hinter dem Profil muß sich wieder die ungestörte Parallelströmung einstellen, woraus bereits folgt, daß die beiden Wirbelschichten sich unbegrenzt einander nähern und entgegengesetzt gleiche Zirkulation besitzen müssen, da nur dann im Unendlichen hinter dem Profil die ungestörte Parallelströmung sich wieder einstellt. In der unmittelbaren Nachbarschaft jeder dieser Wirbelschichten verhält sich die Strömung ebenso wie die Strömung, welche durch

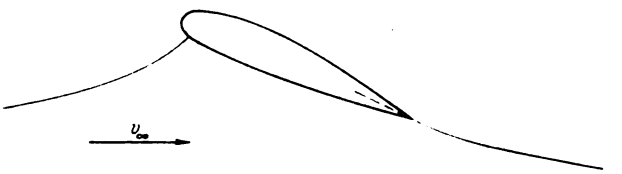


Bild 1. Die Strömung um ein Profil gemäß der Abflußbedingung von Kutta-Joukowski: die Strömung verläßt das Profil in der Richtung der Winkelhalbierenden der Hinterkante; in der Hinterkante liegt bei von Null verschiedenem Kantenwinkel ein Staupunkt.

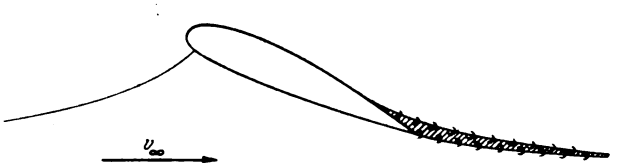


Bild 2. Die Strömung um dasselbe Profil wie in Bild 1 mit Wirbelablösung: die Strömung verläßt das Profil an der Hinterkante in der Richtung der Tangente an die Druckseite mit einer Geschwindigkeit gleich der Anströmgeschwindigkeit. Außerdem löst die Strömung in einem Punkt der Saugseite in der Nähe der Hinterkante tangential zum Profil ab. Zwischen den beiden abgehenden Stromlinien, die gleichzeitig Wirbelschichten konstanter Zirkulation sind, liegt ein Totwasserbereich.

eine geradlinige, unendlich lange Wirbelschicht konstanter Zirkulation erzeugt wird, ist also eine Parallelströmung mit einem Geschwindigkeitssprung proportional zur Wirbelstärke beim Durchgang durch die Schicht. Somit muß die Strömungsgeschwindigkeit überall an beiden Wirbelschichten den gleichen, konstanten Wert besitzen, also gleich der Anströmgeschwindigkeit sein, da im Unendlichen ja die ungestörte Parallelströmung besteht. Da nun schließlich kein Flüssigkeitsteilchen von außen her in das Gebiet zwischen den beiden Wirbelschichten eindringen kann, folgt aus der Kontinuität, daß die Flüssigkeit zwischen den beiden Wirbelschichten in Ruhe sein, also ein Totwasser bilden muß. Aus Stetigkeitsgründen herrscht in diesem Totwassergebiet überall der statische Druck des unendlich Fernen. Damit haben wir die Bedingungen gefunden, welche die gesuchte Strömung erfüllen muß: auf den beiden Wirbelschichten, die gleichzeitig die Grenzen des Totwassergebietes bilden (freie Stromlinien), muß eine Strömungsgeschwindigkeit herrschen, die konstant und gleich der Anströmgeschwindigkeit ist. Der Verlauf der freien Stromlinien ist ferner so zu bestimmen, daß außer dieser Geschwindigkeitsbedingung auch noch die weitere Bedingung erfüllt ist, daß die Breite des Totwassers mit wachsendem Abstand von Profil gegen Null konvergiert.

Wir werden nun folgendes zeigen: Für jedes Profil und für jeden Anstellwinkel existiert eine einparametrige unendliche Schar von Strömungen, die alle die Geschwindigkeitsbedingung erfüllen, aber nur eine einzige Strömung, die auch die zweite Bedingung erfüllt. (Alle übrigen liefern ein Totwasser, dessen Breite schließlich über alle Grenzen zunimmt.) Jede dieser Lösungen ist eindeutig festgelegt durch die Lage der Ablösungsstelle auf der Saugseite, die also den charakteristischen Parameter darstellt. An diese Schar von Lösungen schließt sich stetig eine zweite Schar an, bei der

Digitized by Google

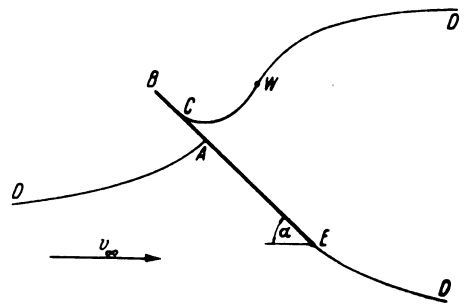


Bild 3. Skizze der Totwasserströmung um eine ebene Platte im allgemeinen Fall eines unendlich breit werdenden Totwassers.

die Geschwindigkeit auf den freien Grenzen zwar noch konstant, aber kleiner als die Anströmgeschwindigkeit ist; diese Strömungen besitzen demgemäß einen Totwasserbereich, der sich bereits im Endlichen schließt. Als Grenzfall dieser Lösungsschar ergibt sich die gewöhnliche Zirkulationsströmung, bei der das Totwassergebiet sich auf den Staupunkt in der Hinterkante zusammengezogen hat.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden wir diese Strömungen für den Fall der ebenen Platte explizit berechnen, im zweiten Abschnitt die allgemeinen Ansätze für beliebige Profile entwickeln und schließlich im dritten Abschnitt eine Klasse von Profilen untersuchen, die das Analogon zu den symmetrischen Joukowskiprofilen darstellen und sich rechnerisch besonders einfach behandeln lassen.

2. Die Strömung um die ebene Platte.

Die Platte von der Länge l werde unter dem Anstellwinkel α mit der Geschwindigkeit $v_\infty = 1$ von links her angeströmt, Bild 3. In der Hinterkante E löst sich die untere freie Stromlinie ab, während die obere in dem zunächst unbekannten — bzw. willkürlich festgelegten — Punkt C der Saugseite sich ablöst. Die untere freie Stromlinie ist dauernd konvex zur strömenden Flüssigkeit, wobei sich ihre Richtung asymptotisch der Richtung der Anströmung nähert. Die obere freie Stromlinie ist zunächst konkav zur strömenden Flüssigkeit, besitzt in W einen Wendepunkt und verläuft dann ebenfalls konvex wie die untere freie Stromlinie. Der Staupunkt liegt in A; die Vorderkante B wird mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt.

Ist das komplexe Potential dieser Strömung

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) \quad \ldots\ldots\ (1)$$

und die komplexe Geschwindigkeit

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i\,v_y = q \cdot e^{-i\Theta} \quad \ldots\ldots\ (1a)$$

so haben wir folgende Randbedingungen zu erfüllen:

1. Für das komplexe Potential gilt entlang der Platte und auf den freien Stromlinien $\psi = \text{const.}$, wobei wir die Konstante Null setzen können.

2. Für die komplexe Geschwindigkeit ist entlang der umströmten Teile der Platte die Richtung gegeben, und zwar

auf AE und BC: $\Theta = -\alpha$
auf AB : $\Theta = \pi - \alpha$

während auf den freien Stromlinien $q = v_\infty = 1$ gilt.

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$\zeta = \ln \frac{dz}{dw} = \ln \frac{1}{q} + i\,\Theta \quad \ldots\ldots\ (2)$$

so bildet sich der von strömender Flüssigkeit erfüllte Bereich der z-Ebene auf den in Bild 4 gezeichneten Bereich der ζ-Ebene ab. D ist der Nullpunkt dieser Ebene;

da in A $\quad \Re(\zeta) = +\infty$
und in B $\quad \Re(\zeta) = -\infty$

wird, so liefern die Plattenstücke die horizontalen Begrenzungen eines Parallelstreifens im Abstande $\pi - \alpha$ bzw. $-\alpha$ zur reellen Achse, während die freien Stromlinien wegen $\Re(\zeta) = 0$ das doppelt zu zählende Stück der imaginären Achse $CWDE$ liefern. Alle Stromlinien in der ζ-Ebene als Bilder der Stromlinien der z-Ebene beginnen und enden im Punkte D.

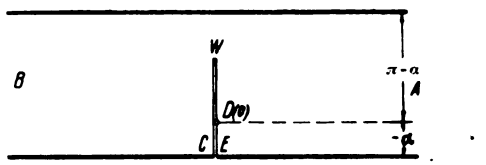


Bild 4. Abbildung der Strömungsebene auf die Ebene des Logarithmus der komplexen Geschwindigkeit. Der der Platte entsprechende Rand ist stark ausgezogen, der den freien Stromlinien entsprechende Rand dünn.

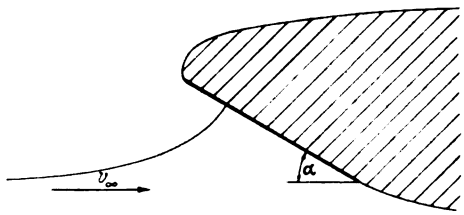


Bild 5. Skizze der gewöhnlichen Helmholtz-Strömung um eine ebene Platte; die Kraft steht senkrecht auf der Platte.

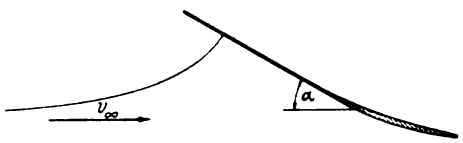


Bild 6. Skizze der Totwasserströmung um eine ebene Platte mit gegen Null konvergierender Totwasserbreite; die Kraft steht senkrecht auf der Anströmrichtung.

Wir erkennen aus diesem Bild, daß die Tangentenrichtung im Wendepunkt der oberen freien Stromlinie immer $< (\pi - \alpha)$ sein muß, und daß außerdem mit wachsender Annäherung an diese Grenze die Spitze W der Buhne in der ζ-Ebene sich immer mehr der oberen Streifenwand nähert, so daß das Tor zwischen den beiden Streifenhälften immer schmaler wird. Folglich muß auch die Durchflußmenge, welche die Bildströmung durch dies Tor sendet, immer kleiner werden. In der z-Ebene bedeutet dies ein unbegrenztes Heranrücken von W an C und zugleich von C an B; im Grenzfalle fallen alle drei Punkte in B zusammen, die Abbildung artet aus: in der ζ-Ebene erhalten wir einen Halbstreifen und in der z-Ebene die gewöhnliche Helmholtz-Strömung mit Ablösung von zwei immer konvexen freien Stromlinien an den Plattenenden, Bild 5.

Verkleinern wir hingegen die Tangentenneigung im Wendepunkt, so erhalten wir einen zweiten wesentlichen Grenzfall für $\Theta_w = 0$. Hier fällt die Buhnenspitze mit dem Bilde des Unendlichen zusammen, in der z-Ebene ist also der Wendepunkt ins Unendliche gerückt, die obere freie Stromlinie also überall konkav. Mit der unteren — dauernd konvexen — zusammen bildet sie jetzt ein Totwasser, dessen Breite gegen Null konvergiert, Bild 6.

Verkürzen wir die Länge der Buhne noch mehr, so erhalten wir ein Totwasser, das sich bereits im Endlichen schließt. Diese Fälle sind nur zu realisieren, wenn die Anströmgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit auf den freien Stromlinien nicht mehr gleich sind, sondern in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Wir müssen also bei der weiteren Verkürzung der Buhne sie als Ganzes parallel zu sich selbst aus der imaginären Achse heraus verschieben, wobei wir mit kürzer werdender Buhne ein immer kleineres Totwassergebiet erhalten. Die Buhne wandert dabei nach rechts, bis sie im Grenzfall verschwindender Länge in den Punkt

$$\zeta = \ln \sec \alpha - i\,\alpha$$

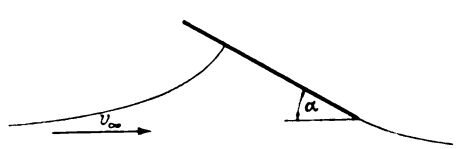


Bild 7. Skizze der reinen Zirkulationsströmung um eine ebene Platte mit glattem Abfluß an der Hinterkante; die Kraft steht senkrecht auf der Anströmrichtung.

Digitized by Google

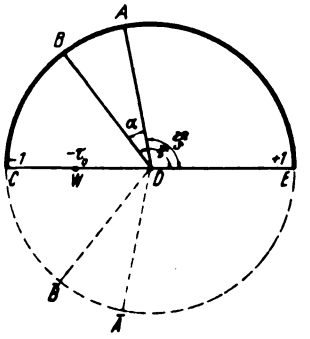


Bild 8. Abbildung der Strömungsebene auf einen Halbkreisbereich. Der der Platte entsprechende Rand ist stark ausgezogen, der den freien Stromlinien entsprechende Rand dünn.

hineinfällt. Die Größe des Totwassergebietes ist dann Null geworden, und wir haben in der z-Ebene die bekannte Kutta-Joukowski-Strömung um eine ebene Platte mit Zirkulation vor uns, Bild 7.

Wir sehen also, daß die hier betrachteten Strömungen einen stetigen Übergang von der unstetigen Helmholtz-Strömung zu der stetigen Zirkulationsströmung vermitteln[1]). Jede einzelne dieser Strömungen liegt durch Vorgabe der Ablösungsstelle auf der Saugseite vollkommen fest, wobei allerdings die Ablösungsstelle der Strömung, welche den Übergang vom unendlichen Totwasserbereich zum endlichen herstellt, a priori nicht angebbar ist. Die auf die Platte ausgeübte Kraft ändert sich ebenfalls stetig mit der Ablösungsstelle: bei der Helmholtz-Strömung steht sie senkrecht auf der Platte, für die Strömungen mit unendlich ausgedehntem Totwasserbereich dreht sie allmählich in die Vertikale und ist für die Strömungen mit endlichem Totwasserbereich einschließlich der beiden Grenzfälle immer reiner Auftrieb. Von besonderem Interesse ist offenbar die Strömung mit gegen Null konvergierender Totwasserbreite, da sie die erste der Schar ist, bei der sich weit genug hinter der Platte wieder die ungestörte Parallelströmung einstellt. Sie erfüllt außerdem die in der Einleitung formulierten weiteren Forderungen: Ablösung einer Wirbelschicht an der Hinterkante in der Richtung der Tangente an die Druckseite und einer weiteren Wirbelschicht entgegengesetzt gleicher Zirkulation auf der Saugseite in der Nähe der Hinterkante. Diese Strömung wird uns daher im folgenden besonders beschäftigen.

Um die anschaulich aus der Variation der Bereichsgrenzen in der ζ-Ebene gewonnenen Resultate auch analytisch und vor allem quantitativ zu formulieren, bilden wir den Bereich der ζ-Ebene auf die obere Hälfte des Einheitskreises der τ-Ebene ab, Bild 8, und zwar so, daß die horizontalen Begrenzungen des Streifens, also die Bilder der umströmten Teile der Platte auf den Halbkreis fallen und die Buhne, also das Bild der freien Stromlinien, auf das Stück der reellen Achse zwischen -1 und $+1$. Weiter wollen wir die Abbildung so normieren, daß der Nullpunkt der ζ-Ebene, also das Bild des Unendlichen der z-Ebene für ins Unendliche reichendes Totwasser — dieser Fall wird uns zunächst allein beschäftigen — in den Nullpunkt der τ-Ebene fällt. Der Punkt W möge nach $-\tau_0$ zwischen -1 und 0 fallen, die Punkte A und B nach $e^{i\vartheta_s}$ und $e^{i\vartheta_0}$. Die Durchführung dieser Abbildung ergibt:

$$e^{\zeta} = \frac{dz}{dw} = e^{-i\alpha} \cdot \frac{1 + 2\varkappa^2\tau + \tau^2 + i \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1-\tau^2)}{1 + 2\varkappa^2\tau + \tau^2 - i \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1-\tau^2)};$$

$$0 < \varkappa^2 < 1 \quad \ldots \quad (3)$$

Wir zeigen, daß (3) allen Bedingungen der Aufgabe genügt:

1. für reelle τ ist der Zähler konjugiert komplex zum Nenner, also besitzt $\frac{dz}{dw}$ dort den Betrag Eins;

2. für $\tau = 0$, also im Unendlichen der z-Ebene wird

$$\frac{dz}{dw} = e^{-i\alpha} \cdot \frac{1 + i \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - i \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 1;$$

3. für $\tau = e^{i\vartheta}$ gilt

$$\frac{dz}{dw} = e^{-i\alpha} \cdot \frac{\varkappa^2 + \cos\vartheta + \sin\vartheta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\varkappa^2 + \cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

also ist dort die Richtung von $\frac{dz}{dw}$ entweder $-\alpha$ oder $\pi - \alpha$;

4. auf der oberen Hälfte des Einheitskreises verschwindet $\frac{dz}{dw}$ einmal und wird ebenso einmal unendlich. Es gilt für ϑ_0 und ϑ_s

$$\varkappa^2 + \cos\vartheta_0 + \sin\vartheta_0 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\varkappa^2 + \cos\vartheta_s - \sin\vartheta_s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2} = \frac{1}{(1-\varkappa^2)\cos\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 - \varkappa^4 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2} = \frac{1}{(1-\varkappa^2)\cos\frac{\alpha}{2}} \left\{ -\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 - \varkappa^4 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

Die Wurzel hat das Pluszeichen. Die beiden anderen Wurzeln liegen auf der unteren Hälfte des Einheitskreises. Man rechnet leicht nach, daß die Beziehung gilt:

$$\vartheta_0 - \vartheta_s = \alpha.$$

5. Wendepunkte auf der freien Stromlinie treten auf, wenn $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dz}{dw}\right)$ verschwindet. Zwischen -1 und $+1$ verschwindet diese Ableitung nur einmal für

$$\tau_0 = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(1 - \sqrt{1-\varkappa^4}\right)$$

mit den speziellen Werten $\tau_0 = -1$ für $\varkappa^2 = 1$
und $\tau_0 = 0$ für $\varkappa^2 = 0$.

6. Endlich wird für $\tau = \pm 1$ und $\varkappa^2 \neq 1$

$$\frac{dz}{dw} = e^{-i\alpha},$$

so daß die freien Stromlinien die Platte tangential verlassen. Somit erfüllt (3) alle Bedingungen der Aufgabe.

Zur vollständigen Bestimmung der Strömung benötigen wir noch das komplexe Potential als Funktion von τ, das wir am einfachsten mit der Singularitätenmethode gewinnen können. Da in der τ-Ebene das Unendlichferne der z-Ebene ein Randpunkt ist, wird aus dem die Parallelströmung der z-Ebene erzeugenden Dipol in der τ Ebene ein Vierpol im Ursprung, dessen Achsenrichtungen mit den Koordinatenrichtungen übereinstimmen, und aus dem Wirbel im Unend-

[1]) Außer dieser Schar möglicher unstetiger Strömungen gibt es noch eine weitere Schar solcher Strömungen, die in ganz entsprechender Weise von der Helmholtz-Strömung zu der zirkulationsfreien stetigen Plattenströmung führt. (Reine Ausweichströmung.) Eine eingehende Diskussion dieser Klasse von unstetigen Strömungen, insbesondere für die Kreiskontur, habe ich bereits vor längerer Zeit in meiner Arbeit »Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unstetigen Strömungen« (Ing.-Arch. Bd. 3 (1932), S. 356) durchgeführt. Da es außer der Ausweichströmung und der reinen Zirkulationsströmung mit glattem Abfluß in der Hinterkante auch noch die — unendliche — Schar der Zirkulationsströmungen mit Umströmung der Hinterkante gibt, die nun ihrerseits einen stetigen Übergang von der reinen Ausweichströmung zur reinen Zirkulationsströmung herstellen, so darf man annehmen, daß es auch zu jeder dieser Zirkulationsströmungen nun wieder eine Schar unstetiger Strömungen gibt, die von der Helmholtz-Strömung zu dieser Zirkulationsströmung führen. Auf einen Beweis dafür, der ebenso zu führen ist wie in den beiden bereits behandelten Fällen, verzichten wir, wollen aber die Folgerung aus dieser Sachlage in der folgenden Form aussprechen:
Im allgemeinen gibt es zu jeder Kontur eine zweifach unendliche Schar von unstetigen Strömungen, für welche die Lage der Ablösungsstellen der beiden freien Stromlinien auf der Kontur die Rolle der beiden Schar-Parameter spielt. Die Lagen der Ablösungsstellen werden dabei nach vorn durch die Ablösungsstellen der gewöhnlichen Helmholtz-Strömung mit überall konvexen freien Stromlinien begrenzt, falls diese Strömung bei der gegebenen Kontur existiert.

Digitized by Google

lichen der z-Ebene — dem Gegenwirbel der Plattenzirkulation —, ein Dipol mit horizontaler Achse, den wir uns aus dem Zusammenrücken von zwei Wirbeln entgegengesetzt gleicher Zirkulation mit festem Wirbelmoment (Zirkulation mal Wirbelabstand) entstanden denken können. Diese Singularitäten liefern bereits die reelle Achse als Stromlinie. Damit auch der Einheitskreis Stromlinie wird, spiegeln wir sie an diesem Kreis und erhalten unter Hinzufügung einer unwesentlichen Konstanten für w:

$$w = \frac{C}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)^2 - 2\lambda C\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) \quad \ldots \quad (4)$$

Die Konstante legt den Maßstab der z-Ebene fest. λ ist so zu bestimmen, daß der Staupunkt auf der oberen Hälfte des Einheitskreises nach $e^{i\vartheta_s}$ fällt. Wir berechnen $\frac{dw}{d\tau}$:

$$\frac{dw}{d\tau} = -C\frac{1-\tau^2}{\tau^3}(1+\tau^2-2\lambda\tau),$$

so daß

$$\lambda = \frac{1+\tau_s^2}{2\tau_s} = \cos\vartheta_s$$

wird, und somit endgültig:

$$\frac{dw}{d\tau} = -C\frac{(1-\tau^2)(1+\tau^2-2\tau\cdot\cos\vartheta_s)}{\tau^3} \quad \ldots \quad (5)$$

Mit (3) und (5) ist die Aufgabe prinzipiell gelöst, da

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{d\tau},$$

also $\frac{dz}{d\tau}$ ebenfalls bekannt ist, und damit durch Integration auch die Abbildungsfunktion $z(\tau)$, so daß das Strombild in der z-Ebene durch Übertragung des leicht zu konstruierenden Stromliniennetzes der τ-Ebene gezeichnet werden kann.

Obgleich diese Integration elementar ist, wollen wir, um langwierige Formelschreibereien zu vermeiden, diese Rechnung nur in zwei Spezialfällen durchführen.

1. Der Fall $\varkappa = 1$ liefert die Helmholtz-Strömung, Bild 5. Wir erhalten hier

$$\tau_0 = -1;\ \vartheta_0 = \pi;\ \vartheta_s = \pi - \alpha$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dw} &= e^{-2i\alpha}\cdot\frac{\tau+e^{i\alpha}}{\tau+e^{-i\alpha}};\\ \frac{dw}{d\tau} &= -C\frac{1-\tau^2}{\tau^3}(1+\tau^2+2\tau\cos\alpha)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Für die Richtung der Geschwindigkeit in den Ansatzpunkten der freien Stromlinie folgt:

$$\tau = +1 \qquad \frac{dz}{dw} = e^{-i\alpha}$$

$$\tau = -1 \qquad \frac{dz}{dw} = -e^{-i\alpha} = e^{i(\pi-\alpha)}.$$

Wenn wir hier als Richtung der Tangente der oberen freien Stromlinie an der Ablösungsstelle jetzt $\pi - \alpha$ — statt wie bisher — α — erhalten, so rührt das daher, daß jetzt in (3) von vornherein $\varkappa^2 = 1$ zu setzen ist, und dann erst $\tau = -1$ einzutragen ist. Dabei vereinfacht sich eben (3) zu (6), weil die Singularitäten bei ϑ_0 und $-\vartheta_0$ in $\vartheta_0 = \pi$ zusammenfallen und sich demgemäß die entsprechenden Linearfaktoren in (3) herauskürzen.

Wegen

$$1+\tau^2+2\tau\cos\alpha = (\tau+e^{i\alpha})(\tau+e^{-i\alpha})$$

wird

$$\frac{dz}{d\tau} = -Ce^{-2i\alpha}\frac{(1-\tau^2)(\tau+e^{i\alpha})^2}{\tau^3}$$

und wenn wir den Koordinatenanfang in die Hinterkante legen:

$$z = -Ce^{-i\alpha}\left\{\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\tau^2 e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\tau^2}\right) + 4 - 2\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right) - 2i\cdot\sin\alpha\cdot\ln\tau\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Die Plattenlänge l und den Abstand des Staupunktes von der Hinterkante l_s erhalten wir für $\tau = -1$ bzw. für $\tau = e^{i(\pi-\alpha)}$, also

$$l = 2C(4+\pi\sin\alpha);$$

$$l_s = 2C\left\{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha + 2(1+\cos\alpha) + (\pi-\alpha)\sin\alpha\right\}$$

oder

$$\frac{l_s}{l} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha + 2(1+\cos\alpha) + (\pi-\alpha)\sin\alpha}{4+\pi\cdot\sin\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}+\ldots\right) \quad \ldots \quad (8)$$

Da bei der reinen Zirkulationsströmung der Staupunkt den Abstand $l\frac{1+\cos\alpha}{2}$ von der Hinterkante besitzt, liegt der Staupunkt der Helmholtz-Strömung ein wenig weiter nach vorn verschoben. Für die Kraft auf die Platte, die hier natürlich senkrecht auf der Platte steht, ergibt sich nach Formel (34) des Anhangs:

$$P = \frac{\pi\varrho l v_\infty^2\cdot\sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha} \quad \ldots \quad (9)$$

Die Kraft beträgt also weniger als ein Viertel des Auftriebes der reinen Zirkulationsströmung.

2. Der Fall $\varkappa = 0$ (Bild 6).

Jetzt wird

$$\tau_0 = 0;\ \operatorname{tg}\vartheta_0 = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};\ \operatorname{tg}\vartheta_s = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$\vartheta_0 = \frac{\pi+\alpha}{2} \qquad \vartheta_s = \frac{\pi-\alpha}{2}.$$

Die Singularitäten liegen symmetrisch zur imaginären Achse. Weiter wird wegen

$$\lambda = \cos\vartheta_s = \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dw} &= e^{-2i\alpha}\cdot\frac{\tau^2+e^{i\alpha}}{\tau^2+e^{-i\alpha}};\\ \frac{dw}{d\tau} &= -C\frac{1-\tau^2}{\tau^3}\left(1+\tau^2-2\tau\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Da jetzt der Wendepunkt der oberen freien Stromlinie ins Unendliche fällt, erhalten wir eine dauernd konkave obere freie Stromlinie, die sich der dauernd konvexen unteren freien Stromlinie unbeschränkt nähert. Dabei verhalten sich beide Totwassergrenzen für großen Abstand von der Platte wie $y \sim -\ln x$ (s. u.), ihr Abstand von der x-Achse wird also logarithmisch unendlich.

Wir berechnen $z(\tau)$. Wegen

$$1+\tau^2-2\tau\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\tau+ie^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\tau-ie^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$$

wird

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{d\tau} = -Ce^{-2i\alpha}\cdot\frac{1-\tau^2}{\tau^3}\cdot\frac{\tau-ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau+ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}\left(\tau+ie^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

Die Zerlegung in Partialbrüche liefert:

$$\frac{dz}{d\tau}e^{i\alpha} = -C\left\{\frac{e^{i\alpha}}{\tau^3} - \tau e^{-i\alpha} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{e^{i\alpha}}{\tau^2} - e^{-i\alpha}\right) - \frac{2i\sin\alpha\,e^{i\alpha}}{\tau} - \frac{4\sin^2\alpha}{\tau+ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}\right\}, \quad \ldots \quad (11)$$

woraus durch Integration folgt:

$$ze^{i\alpha} = C\left\{4\sin^2\alpha\cdot\ln\left(\tau+ie^{-i\alpha/2}\right) + 2i\sin\alpha\,e^{i\alpha}\ln\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\alpha}}{\tau^2}+\tau^2e^{-i\alpha}\right) - 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{e^{i\alpha}}{\tau}+\tau e^{-i\alpha}\right)\right\} + D \quad \ldots \quad (12)$$

Digitized by Google

Die Plattenlänge erhalten wir durch Einsetzen der Grenzen von $\tau = 1$ bis $\tau = i e^{i\frac{\alpha}{2}}$ zu

$$l = 2C\left\{1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi+\alpha}{4}\sin 2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \ln\left[2\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\} \quad (13)$$

Ebenso erhalten wir für den Abstand d der Ablösungsstelle der oberen freien Stromlinie von der Hinterkante

$$d = 2C\left\{\frac{\pi}{2}\sin 2\alpha - 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \sin^2\alpha \cdot \ln\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

sowie für den Abstand des Staupunktes von der Vorderkante:

$$l - l_s = 2C\left\{\alpha\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^4\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\alpha \cdot \ln\cos\frac{\alpha}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Schließlich erkennen wir aus (12), daß für kleine reelle τ, also auf den freien Grenzen weit hinter der Platte, gilt:

$$x \sim \frac{C}{2\tau^2} - \frac{2C\sin\frac{\alpha}{2}}{\tau}; \quad y \sim 2C\sin\alpha\ln\tau$$

oder

$$y \sim -C\sin\alpha\ln x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

womit die obige Behauptung über den asymptotischen Verlauf der freien Stromlinien bewiesen ist. Aus (12) ersieht man außerdem unmittelbar, daß sich die beiden freien Stromlinien unbegrenzt einander nähern.

Für die Kraft auf die Platte erhalten wir durch Auswertung der Formel (34) des Anhangs

$$P_x = 0; \quad P_y = 2\pi\varrho C v_\infty^2 \cdot \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Es ergibt sich also ein reiner Auftrieb, wie es sein muß. Für den praktisch allein interessierenden Bereich kleiner Anstellwinkel empfiehlt es sich, an Stelle der unübersichtlichen Formeln (13), (14), (15) und (17) Reihenentwicklungen nach dem Anstellwinkel zu benutzen. Wir erhalten

$$l = 2C\left\{1 + \frac{\alpha}{2}(\pi - 2) + \alpha^2\left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) + \ldots\right\}$$

und hieraus für kleine α

$$\frac{d}{l} = \alpha(\pi - 2)\left[1 - \frac{\alpha}{2}(\pi - 2)\right]$$

$$\frac{l - l_s}{l} = \alpha^2\left[1 - \frac{\alpha}{2}(\pi - 2)\right]$$

und endlich

$$A = \frac{\pi\varrho l v_\infty^2 \sin\alpha}{1 + \frac{\alpha}{2}(\pi - 2) + \alpha^2\left(\frac{3}{4} - \ln 2\right)} = A_z f(\alpha)$$

$$\text{mit } A_z = \pi\varrho l v_\infty^2 \sin\alpha \quad (18)$$

Der Auftrieb wird also kleiner als der Auftrieb der Zirkulationsströmung A_z, weil $f(\alpha) < 1$ ist. Für kleine α ist der Auftrieb als Funktion von α keine Gerade mehr, sondern eine Parabel, die durch die Auftriebsgerade der Kutta-Joukowski-Strömung im Ursprung tangiert wird. In Zahlentafel 1 sind für eine Reihe von Anstellwinkeln Zahlenwerte für A/A_z, d/l, l_s/l, und zum Vergleich auch noch unter l_{sz}/l für die Staupunktsentfernung der Zirkulationsströmung, ebenfalls von der Hinterkante gezählt, zusammengestellt.

Zahlentafel 1.

α	A/A_z	d/l	l_s/l	l_{sz}/l
3°	0,9708	0,0580	0,9973	0,9973
6°	0,9430	0,1127	0,9897	0,9891
9°	0,9166	0,1643	0,9775	0,9755
12°	0,8912	0,2130	0,9612	0,9568
90°	0,4915	0,8663	0,1679	0,0000

Um die anschließende Serie der Strömungen mit endlichem Totwasser zu erhalten, haben wir die Singularitäten im Nullpunkt der τ-Ebene aufzuspalten: aus dem Vierpol werden zwei Dipole, von denen der eine im Innern der oberen Hälfte des Einheitskreises liegt, der andere spiegelbildlich dazu in der unteren Hälfte. Entsprechend rückt der Dipol in zwei spiegelbildlich zur reellen Achse gelegene Wirbel von entgegengesetzt gleicher Zirkulation auseinander. Der Ort der Singularitäten und die Orientierung der Dipolachse sind so zu bestimmen, daß sich die aus der Platte und dem Totwassergebiet bestehende Kontur in der z-Ebene schließt. Die Geschwindigkeit auf den freien Stromlinien errechnet sich aus der Lage der Ablösungsstelle der oberen freien Stromlinie, die man in dem zulässigen Gebiet der Saugseite als vorgegeben anzunehmen hat. Das resultierende komplexe Potential wird wesentlich komplizierter als bei den bisher untersuchten Strömungen, weil die Spiegelbilder der Singularitäten in bezug auf den Einheitskreis jetzt ebenfalls im Endlichen liegen. Deshalb soll auf diese Strömungen hier nicht weiter eingegangen werden, weil sie prinzipiell doch nichts Neues bringen.

In Bild 9 ist für einen Anstellwinkel von 12° die Druckverteilung der ausgezeichneten Strömung mit gegen Null konvergierender Totwasserbreite aufgetragen und zum Vergleich gestrichelt die entsprechende Druckverteilung der reinen Zirkulationsströmung. Das Bild 10 zeigt den Verlauf der freien Stromlinien für denselben Anstellwinkel.

8. Allgemeine Profilströmungen.

In diesem Abschnitt wollen wir unseren Ansatz so erweitern, daß er auch bei beliebiger Profilform eine entsprechende Strömung zu konstruieren gestattet, wie sie im ersten Abschnitt für die ebene Platte berechnet wurde. Wir werden

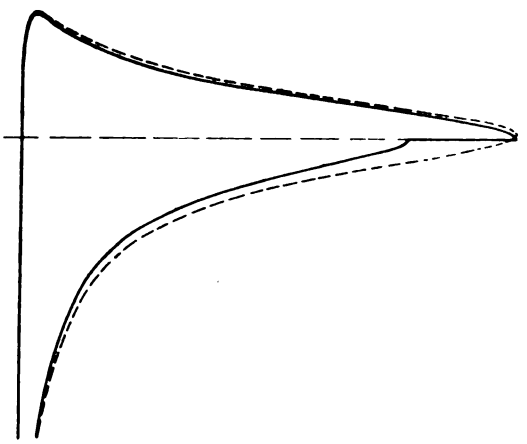


Bild 9. Druckverteilung bei der ebenen Platte mit einem Anstellwinkel von 12°. Die ausgezogene Kurve ist die Druckverteilung der Strömung mit Ablösung, die gestrichelte die Druckverteilung der reinen Zirkulationsströmung. Bei Profilen mit von Null verschiedenem Kantenwinkel werden die Abweichungen beider Kurven in der Nähe der Hinterkante wesentlich größer, da dann der Druckunterschied in der Hinterkante gleich dem Staudruck wird.

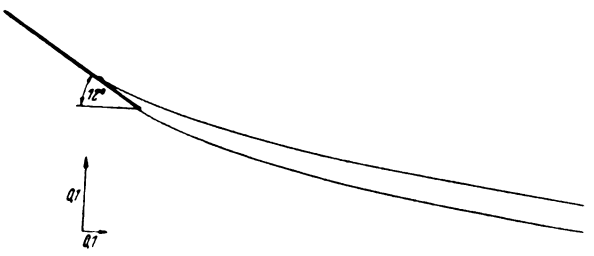


Bild 10. Verlauf der freien Stromlinien für die ebene Platte bei einem Anstellwinkel von 12°. Die Ablösung der oberen freien Stromlinie erfolgt im Abstand 0,213 der Plattentiefe von der Hinterkante. Zur besseren Veranschaulichung ist der y-Maßstab dreimal so groß gewählt wie der x-Maßstab.

Digitized by Google

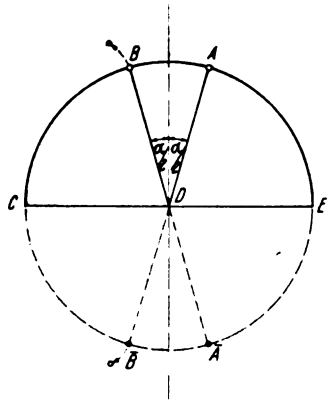


Bild 11. Erzeugung von Profilen endlicher Dicke durch Verschiebung der der scharfen Vorderkante der ebenen Platte zugeordneten Singularität in den Außenraum des Einheitskreises der τ-Ebene.

dabei keine allgemeinen Existenzbeweise führen, sondern nur die Grundzüge eines praktischen Rechnungsverfahrens entwickeln, da es aus physikalischen Gründen sicher erscheint, daß ebenso wie bei der ebenen Platte auch bei jedem Profil die Serie der Totwasserströmungen existiert, die den Übergang von der Helmholtz-Strömung zur reinen Zirkulationsströmung vermittelt[2]).

Wir beschränken uns außerdem auf die Herleitung des Formelsystems für den Fall des Totwassers mit gegen Null konvergierender Breite, weil dieser Fall physikalisch am meisten interessiert. Dazu schreiben wir die komplexe Geschwindigkeit der entsprechenden Plattenströmung nach (10)

$$\zeta = \ln \frac{dz}{dw} = \ln \frac{\tau + ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau - ie^{-i\frac{\alpha}{2}}} + \ln \frac{\tau - ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau + ie^{-i\frac{\alpha}{2}}} - 2i\alpha \quad (19)$$

Der erste Term enthält die dem Staupunkt zugeordneten Singularitäten in konjugierten Punkten des Einheitskreises, der zweite Term entsprechend die der scharfen Vorderkante zugeordneten Singularitäten. Für Profile endlicher Dicke mit stetiger Krümmung darf diese letztere Singularität nicht auftreten. Wir beseitigen sie dadurch, daß wir die Punkte B und $\bar{B}$ (vgl. Bild 8 und 11) vom Einheitskreis fort nach außen rücken, aber natürlich so, daß sie auch nach der Verschiebung wieder konjugiert zueinander liegen. Wir ersetzen also in (19) etwa $i\,e^{i\alpha/2}$ durch $r\,e^{i\beta}$ mit $r > 1$. Damit wird aber der zweite Term in (19) in und auf dem Einheitskreis regulär, so daß wir ihn in eine Potenzreihe nach Potenzen von τ entwickeln können, deren Konvergenzradius gleich $r > 1$ ist. Die Koeffizienten dieser Reihe werden rein imaginär, so daß wir die Reihe schreiben können

$$i\sum_0^\infty n\, a_n \tau^n \qquad a_n \text{ reell}.$$

Dabei können wir uns die imaginäre und jetzt unwesentliche Konstante $-2i\alpha$ in das absolute Glied dieser Reihe mitaufgenommen denken.

Wir erkennen also, daß durch den Ansatz

$$\zeta = \ln \frac{\tau + ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau - ie^{-i\frac{\alpha}{2}}} + i\sum_1^\infty n\, a_n \tau^n \qquad a_n \text{ reell} \quad \ldots \quad (20)$$

jedenfalls gekrümmte Konturen erfaßt werden. Berücksichtigen wir ferner, daß in diesem Ansatz der Weg, der zu ihm führte, gar nicht mehr wesentlich zum Ausdruck kommt, d. h. daß die Konstanten ja gar nicht notwendig mit den durch die Entwicklung des Logarithmus gewonnenen übereinstimmen müssen, um die formal an (20) zu stellenden Forderungen zu erfüllen, so liegt die Vermutung nahe, daß (20) bereits der allgemeinste Ansatz für beliebige Profile ist. Wir zeigen, daß — mit einigen zusätzlichen Bedingungen für die Konstanten a_n — diese Vermutung in der Tat zutrifft.

[2]) Vgl. Anmerkung 1.

Zunächst ist klar, daß für $-1 \leqq \tau \leqq +1$, also auf den freien Stromlinien, ζ rein imaginär ist, also dort die konstante Geschwindigkeit Eins liefert. Das reicht aber noch nicht hin, um ein Totwasser mit gegen Null konvergierender Breite zu erzeugen. Dazu ist weiter nötig, daß die obere freie Stromlinie dauernd konkav ist, während die untere entweder dauernd konvex — wie bei der ebenen Platte — oder aber — bei Profilen mit endlichem Kantenwinkel — evtl. zunächst konkav, dann aber dauernd konvex sein muß. Daß nämlich solche Fälle bei kleinen Anstellwinkeln notwendig auftreten müssen, erkennt man sofort aus Bild 2. Schließlich muß im Unendlichen die Krümmung beider freien Stromlinien von derselben Ordnung wie bei dem entsprechenden Fall der ebenen Platte verschwinden, um Überschneidungen der freien Stromlinien zu verhindern. Um die entsprechenden Bedingungen für die Konstanten a_n zu formulieren, berechnen wir die Krümmung der freien Stromlinien als Funktion von τ. Da auf den freien Stromlinien die Geschwindigkeit gleich Eins und die Stromfunktion konstant ist, gilt dort

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = 1 \longrightarrow \varphi = S + C \qquad w = S + C + i\psi_0.$$

Ferner ist dort $\zeta = i\Theta$ und, da die Krümmung einer Kurve durch

$$k = \frac{d\Theta}{dS}$$

gegeben ist, folgt

$$k = \frac{d\Theta}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dw} \cdot \frac{dw}{dS} = \frac{d\Theta}{d\tau} : \frac{dw}{d\tau}.$$

Für die ebene Platte liefern (10) und (19) sofort

$$k = \frac{2C\tau^4 \sin\alpha}{(1-\tau^2)\left(1+\tau^2-2\tau\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(1+\tau^2+2\tau\sin\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (21)$$

während unser Ansatz (20) für beliebige Konturen ergibt

$$k = \frac{C\tau^3}{(1-\tau^2)\left(1+\tau^2-2\tau\sin\frac{\alpha}{2}\right)} \left\{ \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\tau^2-2\tau\sin\frac{\alpha}{2}} - \sum_1^\infty n\, n\, a_n \tau^{n-1} \right\} \quad \ldots \quad (22)$$

Aus (21) lesen wir die bereits bekannten Eigenschaften der freien Stromlinien der Plattenströmung unmittelbar ab: für positive τ — untere freie Stromlinie — ist k positiv, also die freie Stromlinie konvex. Die Krümmung wird an der Ablösungsstelle unendlich und verschwindet im Unendlichen der z-Ebene ($\tau = 0$) von der vierten Ordnung in τ. Für negative τ — obere freie Stromlinie — ist k positiv, die freie Stromlinie also konkav. Im übrigen gilt hier dasselbe wie bei $\tau > 0$. Aus diesem Verhalten bei der Plattenströmung folgt für allgemeine Profilformen sofort eine Bedingung für a_1: damit im Unendlichen ein qualitativ gleicher Strömungsverlauf wie bei der Platte sich einstellt, muß in (22) die geschweifte Klammer für $\tau = 0$ verschwinden, also

$$a_1 = 2\cos\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \quad (23)$$

sein. Diese Bedingung muß unbedingt erfüllt sein, soll weder ein Totwasser unendlicher Breite noch ein physikalisch unmögliches Überschneiden der freien Stromlinien auftreten. Wir nennen diese Bedingung weiterhin zur Abkürzung die Schließungsbedingung.

Weiter ist zu fordern, daß die a_n so beschaffen sind, daß die geschweifte Klammer zwischen -1 und 0 überhaupt nicht und zwischen 0 und $+1$ höchstens einmal verschwindet. Das bedeutet

$$-1 < \tau < 0 \qquad \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\tau^2-2\tau\sin\frac{\alpha}{2}} < \sum_1^\infty n\, n\, a_n \tau^{n-1}$$

Digitized by Google

speziell

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} < \sum_1^\infty n\,(-1)^{n-1}\,n\,a_n.$$

Diese Bedingung ist wegen der Größe von a_1 praktisch wohl immer von selbst erfüllt. Die beiden möglichen Fälle für die untere freie Stromlinie hängen vom Verhalten der geschweiften Klammer für $\tau = 1$ ab. Ist

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}} > \sum_1^\infty n\,n\,a_n,$$

so ist die untere freie Stromlinie dauernd konvex. Gilt aber hier das Kleiner-Zeichen, so verläuft die freie Stromlinie zunächst konkav und dann konvex. Steht hier schließlich das Gleichheitszeichen, so beginnt die dauernd konvexe freie Stromlinie mit endlicher Krümmung an der Ablösungsstelle. Bei dieser Fallunterscheidung ist vorausgesetzt, daß die geschweifte Klammer für $0 < \tau < 1$ höchstens einmal verschwindet, was bei vernünftigen Profilformen auch immer der Fall sein wird. Es soll aber doch ausdrücklich betont werden, daß alle Fälle, in denen die a_n die eben formulierten Bedingungen nicht erfüllen, entweder ein unendlich breit werdendes Totwasser liefern oder aber in der Strömungsebene irgendwelche Überschneidungen ergeben.

Ebenso wie die Krümmung der freien Stromlinien als Funktion von ϑ kann man auch die Konturkrümmung als Funktion von ϑ ($\tau = e^{i\vartheta}$) darstellen. Berücksichtigt man (1) und (2), so folgt

$$k = \frac{d\Theta}{dS} = \frac{d\Theta}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\Theta}{d\vartheta}\cdot\frac{q}{\frac{dw}{d\vartheta}} \quad \ldots (24)$$

Ebenso ist Θ, die Richtung der Geschwindigkeit und damit die Tangentenrichtung der Kontur als Imaginärteil von ζ als Funktion von ϑ bekannt. Um nun für ein vorgegebenes Profil mit gegebener Orientierung zur Anströmrichtung die zugehörige Strömung zu berechnen, verschafft man sich zunächst die Konturkrümmung als Funktion der Tangentenneigung. Damit ist die linke Seite von (23) als Funktion von Θ bekannt und damit auch als Funktion von ϑ und den a_n, wenn man Θ auf Grund von (20) berechnet. Die rechte Seite von (23) ist ebenfalls als Funktion von ϑ und den a_n gegeben, so daß man aus dieser Gleichung wenigstens prinzipiell die a_n berechnen kann. Näherungsweise ist das jedenfalls immer möglich, indem man das Erfülltsein dieser Gleichung nur für eine Anzahl diskreter, zweckmäßig gewählter Werte von ϑ verlangt. Dadurch erhält man ein Profil, das mit dem gegebenen an einer entsprechenden Anzahl von Punkten in der Krümmung und der zugehörigen Tangentenneigung übereinstimmt, also eine ebenso gute Approximation, wie sie der Ersatz einer Kurve durch eine Korbkurve, also eine Folge von Stücken aufeinanderfolgender Krümmungskreise darstellt. Praktisch dürfte diese Rechnung auch bei geringer Dichte der Teilpunkte außerordentlich umständlich sein, zumal man die ganze Konstantenbestimmung bei einer Änderung des Anstellwinkels jeweils erneut vorzunehmen hätte, denn der Anstellwinkel geht über die Tangentenneigung der Druckseite an der Hinterkante in die Konstantenbestimmung ein.

Es kam uns hier aber auch nur auf den Nachweis an, daß es prinzipiell möglich ist, zu jedem Profil und zu jedem Anstellwinkel eine solche Strömung zu berechnen, und damit auch die Lage der Ablösungsstelle auf der Saugseite festzulegen, der ja ein geometrisch in keiner Weise ausgezeichneter Punkt zugeordnet ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir eine spezielle Klasse von Profilen untersuchen, die durch einen ähnlichen Mechanismus wie die Joukowski-Profile erzeugt werden und daher rechnerisch besonders einfach zu behandeln sind.

4. Benachbarte Profile.

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine spezielle Klasse dünner Profile, die sich rechnerisch besonders einfach behandeln lassen. Dazu knüpfen wir an die Überlegungen an, die uns zu dem Ansatz (20) geführt haben. Wir verschieben die Punkte B und $\bar{B}$ ein wenig außerhalb des Kreises in $ire^{i\beta/2}$ und $-ire^{-i\beta/2}$ mit $r > 1$. Dadurch wird die scharfe Vorderkante ausgerundet, und wir werden je nach der Größe der Verschiebung ein mehr oder weniger dickes Profil erhalten, dessen Skelett die entsprechende ebene Platte ist. Der so gewonnene Ansatz ist aber wegen der gleichzeitig zu erfüllenden Schließungsbedingung noch nicht geeignet, brauchbare Profile zu liefern. Wir erweitern ihn, indem wir in der τ-Ebene in den Punkten $iRe^{i\gamma}$ und $-iRe^{-i\gamma}$ weitere Singularitäten anbringen, wobei gelten soll

$$\lim_{r\to 1} R \to \infty$$

so daß also im Grenzfall sich auch jetzt wieder die ebene Plattenströmung ergibt. Wir setzen demnach an (vgl. (19)):

$$\frac{dz}{dw} = -e^{-i(\alpha+\beta+2\gamma)}\cdot\frac{\tau+ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau-ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\tau-ire^{i\frac{\beta}{2}}}{\tau+ire^{-i\frac{\beta}{2}}} \times\frac{\tau-iRe^{i\gamma}}{\tau+iRe^{-i\gamma}} \quad (25)$$

Dieser Ansatz liefert für $\tau = 0$ offenbar $\frac{dz}{dw} = 1$ und auf den freien Stromlinien $\left|\frac{dz}{dw}\right| = 1$. Die Schließungsbedingung (23) lautet hier

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{r} + \frac{\cos\gamma}{R} \quad \ldots\ldots (26)$$

setzen wir noch

$$ire^{i\frac{\beta}{2}} = ie^{i\frac{\alpha}{2}} + \varrho e^{i\delta} \quad \ldots\ldots (27)$$

so wollen wir unter einem »dünnen« Profil ein Profil verstehen, für welches die Profilparameter ϱ und $\frac{1}{R}$ so klein sind, daß ihre Quadrate und Produkte zu vernachlässigen sind.

Dann können wir an Stelle von (25) schreiben:

$$\frac{dz}{dw} = e^{-i(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\tau+ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau-ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\tau-ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau+ie^{-i\frac{\alpha}{2}}} \left\{1-2i\varrho\frac{\tau\sin\delta+\cos\left(\delta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\tau-ie^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\tau+ie^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}+\frac{2i\tau\cos\gamma}{R}\right\} \quad (28)$$

Wir erkennen aus (26) und (28), daß es bei diesen Profilen nur auf den Wert von $\frac{\cos\gamma}{R}$ ankommt, so daß wir hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit entweder $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi$ setzen können.

Setzen wir $\beta = \alpha + \Delta\alpha$ und bezeichnen die Ableitung von z nach τ für die ebene Platte mit dem Index »$_0$«, so folgt nach (11) und (28)

$$\frac{dz}{d\tau} = e^{-i\Delta\alpha}\cdot\frac{dz_0}{d\tau} - Ce^{-i(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1-\tau^2}{\tau^3}\left(\tau+ie^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \left\{\frac{2i\tau\cos\gamma}{R}\cdot\frac{\tau-ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau+ie^{-i\frac{\alpha}{2}}} - 2i\varrho\frac{\tau\sin\delta+\cos\left(\delta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\tau+ie^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^2}\right\} \quad (29)$$

Das erste Glied liefert wiederum die ebene Platte, aber mit einem um $\Delta\alpha$ vergrößerten Anstellwinkel; das zweite

Digitized by Google

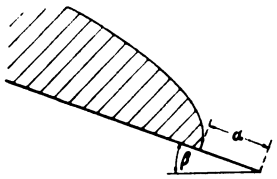


Bild 12. Zulässiger Bereich für die Lage der Ablösungsstelle der oberen freien Stromlinie beim Übergang von der ebenen Platte zu einem benachbarten Profil.

und dritte Glied geben die Abweichung der Profilkontur von der Geraden und sind als klein erster Ordnung zu betrachten.

Hieraus kann man durch Partialbruchzerlegung und elementare Integration $z(\tau)$ berechnen. Die entstehenden Ausdrücke sind aber so unübersichtlich, daß wir auf ihre Wiedergabe verzichten wollen. Uns interessiert hier vor allem die Lage der Ablösungsstelle auf der Saugseite in bezug auf die Hinterkante. Schreiben wir

$$z = e^{-i\,\Delta\alpha} z_0 + \Delta z$$

so wird, wenn wir den Koordinatenanfang in die Hinterkante verlegen, der komplexe Vektor zur Ablösungsstelle auf der Saugseite

$$d\,e^{i(\pi-\beta)} + \Delta z_A$$

mit

$$\Delta z_A\, e^{i\beta} = \frac{\cos\gamma}{R}\Delta z_R + \varrho\cos\left(\delta - \frac{\alpha}{2}\right)\Delta z_{\varrho_1} + \sin\delta\cdot\Delta z_{\varrho_2} \quad (30)$$

wobei d aus (14) zu entnehmen ist. Setzen wir den Maßstabfaktor gleich Eins, so gilt bis auf Glieder in (α^2)

$$\Delta z_R = -\frac{16}{3}\,i + 2\,\alpha\,\frac{16-3\pi}{3}$$
$$\Delta z_{\varrho_1} = 2\pi - 2\,i\,\alpha\,(4-\pi)$$
$$\Delta z_{\varrho_2} = 8\,i + *.$$

Das Glied $\Delta z_A\, e^{i\beta}$ mißt jetzt einfach die Verschiebung der Ablösungsstelle von ihrer Lage auf der ebenen Platte mit dem Anstellwinkel α — diese Platte hat aber als Skelett des Profils den Anstellwinkel β — in ihre Lage auf dem dünnen Profil, und zwar ist der Realteil dieses Ausdrucks die Verschiebung in Richtung der Platte (positive Werte bedeuten eine Verschiebung auf die Hinterkante zu) und der Imaginärteil die Verschiebung senkrecht zur Platte. (Positive Werte bedeuten eine Verschiebung nach oben.)

Wir sehen, daß für kleine α Δz_{ϱ_1} im wesentlichen reell ist, während Δz_R und Δz_{ϱ_2} wesentlich imaginär ausfallen. Die Lage der singulären Punkte muß nun so gewählt werden, daß erstens die Verschiebung der Ablösungsstelle in Richtung der Platte entweder negativ ausfällt oder aber bei positivem Wert möglichst klein wird, damit man dem im Totwasser verlaufenden — an sich willkürlich zu zeichnendem — Stück der Saugseite einen aerodynamisch günstigen Verlauf geben kann.

Zweitens muß aber die Verschiebung senkrecht zur Platte jedenfalls positiv werden, da sich anderenfalls das Profil selbst überschneidet. Die Ablösungsstelle muß also in dem in Bild 12 schraffierten Bereich liegen.

Um den zulässigen Bereich für die Profilkonstanten R, ϱ und δ abzugrenzen, die ja außerdem noch der Schließungsbedingung genügen müssen, betrachten wir zunächst einige Spezialfälle.

1. $\beta = \alpha$ liefert

$$\delta = \frac{\pi+\alpha}{2}; \quad r = 1+\varrho$$

und mit der Schließungsbedingung

$$\frac{\varrho}{1+\varrho}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\gamma}{R}; \quad \gamma = 0 \quad \frac{1}{R} \sim \varrho\cos\frac{\alpha}{2}$$

also nach (30) und (31)

$$\Delta z\, e^{i\beta} = \frac{8\,i}{3}\,\varrho\cos\frac{\alpha}{2} + 2\,\alpha\,\varrho\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{16-3\pi}{3}.$$

Die Verschiebung in Plattenrichtung wird zwar positiv, aber sehr klein; die Verschiebung senkrecht zur Platte wird positiv, so daß wir einen zulässigen Fall erhalten.

2. $\delta = \pi$ liefert

$$r\cdot\cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}; \quad \gamma = 0$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2-1}{r}\cdot\cos\frac{\beta}{2}.$$

Die Verschiebung in Richtung der Platte wird zwar negativ, aber auch die Verschiebung senkrecht zur Platte wird negativ, das Profil überschneidet sich, so daß dieser Fall auszuscheiden ist.

3. $\frac{1}{R} = 0$. Die Schließungsbedingung wird jetzt $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{r}$ und ergibt als Ort der Singularität den Kreis um den Punkt $\left(0, -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$ mit dem Radius $\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ (Bild 13). Da für $r = 1$ und $\beta < \alpha$ jedenfalls $\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{r} > \cos\frac{\alpha}{2}$ ausfällt, folgt, daß die Schließungsbedingung in dem senkrecht schraffierten Bereich $\gamma = \pi$ verlangt. Und da dort außerdem $\delta < \frac{\pi}{2}$ sein muß, liefern in diesem Gebiet alle drei Terme in (30) positive Beiträge, so daß sich die Ablösungsstelle nach oben und auf die Hinterkante zu verschiebt.

4. Schließlich bestimmen wir in der τ-Ebene die Kurve, welche das Gebiet der Profile mit Selbstüberschneidung von dem übrigen Bereich abgrenzt. Auf dieser Kurve gilt gleichzeitig

$$8\,\varrho\sin\delta = \frac{16}{3R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

nach (30) und (31) und die Schließungsbedingung (26), in die wir nach (27) ϱ und δ für r und β einführen. Setzen wir noch $\alpha/2 = \nu$, so erhalten wir mit Rücksicht auf (32) als Gleichung der Grenzkurve

$$2\cos\nu - 3\,\varrho\cdot\sin\delta = 2\,\frac{\cos\nu + \varrho\sin\delta}{1+\varrho^2+2\,\varrho\sin(\delta-\nu)}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$\xi = \varrho\cdot\cos\delta; \quad \eta = \varrho\cdot\sin\delta$$

nach einer einfachen Umformung

$$\eta = \frac{2}{3}\cos\nu\left[1 - \frac{5}{3(\xi-\sin\nu)^2 + 3(\eta+\cos\nu)^2 + 2}\right] \quad (33)$$

Für negative, dem Betrage nach zunehmende ξ (für positive ξ verläuft die Kurve im Innern des Einheitskreises) nimmt η monoton zu und nähert sich asymptotisch der Geraden

$$\eta = \frac{2}{3}\cos\nu.$$

Für kleine ξ gilt dagegen in erster Näherung

$$\eta \sim -\frac{2\sin 2\nu}{1+4\sin^2\nu}\cdot\xi.$$

In dem Bild 13 ist diese Grenzkurve in ihrem ungefähren Verlauf eingezeichnet.

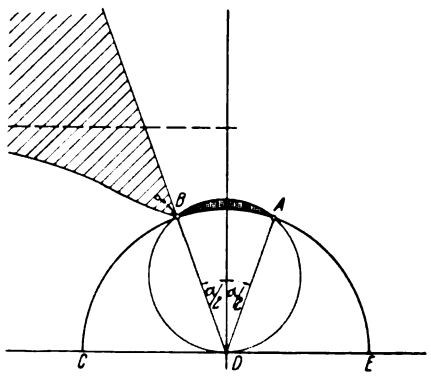


Bild 13. Zulässiger Bereich für die der scharfen Vorderkante der ebenen Platte zugeordneten Singularität in der τ-Ebene. Der Nullkreis in dem schraffierten Bereich entspricht dem in Bild 14 gezeichneten Profil.

Digitized by Google

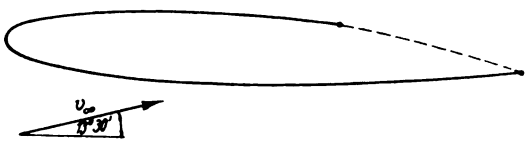


Bild 14. Gestalt des Profils mit den im Text angegebenen Profilparametern. Das gestrichelte Stück der Saugseite liegt im Totwasser, die Anströmung erfolgt unter dem Winkel 13° 30'.

Zusammenfassend erhalten wir also folgendes Ergebnis: liegt die der scharfen Vorderkante der Platte entsprechende Singularität in dem Gebiet unterhalb der Grenzkurve, so ergeben sich Profile mit Selbstüberschneidung. Zwischen der Geraden $\beta = \alpha$ und der Grenzkurve ergeben sich Profile mit einer Verschiebung der Ablösungsstelle im günstigen Sinne, in Richtung der Platte negativ und senkrecht dazu positiv. Rechts von dieser Geraden nimmt die positive Verschiebung senkrecht zur Platte zwar weiter zu, aber auch die Verschiebung in Plattenrichtung wird positiv, so daß sich ein ungünstiger Verlauf des im Totwasser liegenden Stückes der Saugseite ergeben muß[3]). Günstige Profilformen sind also nur bei einer Lage der Singularität in dem Keil zwischen Grenzkurve und der Geraden $\beta = \alpha$ zu erwarten.

Ein Beispiel für die sich in diesem Bereich ergebenden Profilformen zeigt Bild 14. Die Profilparameter haben bei diesem Profil die folgenden Werte:

$$\alpha = 9^0; \quad \beta = 18^0; \quad r = 1{,}1; \quad \frac{1}{R} = 0{,}0990; \quad \gamma = 0.$$

Die Profilkoordinaten wurden durch numerische Integration von (25) gewonnen. Das gestrichelte Stück der Saugseite liegt im Totwasser und wurde, da es an sich völlig willkürlich ist, so eingezeichnet, daß sich ein aerodynamisch günstiger Gesamtverlauf der Saugseite ergibt. Die Anströmungsrichtung verläuft unter einem Winkel von 13° 30' gegen die Horizontale.

5. Anhang: Berechnung der Kraft. Nach der Gleichung von Bernoulli gilt:

$$p - p_0 = p^* = \frac{\varrho}{2}(1 - q^2),$$

wobei p_0 den im Unendlichen herrschenden statischen Druck bedeutet. Im Totwasser verschwindet p^*. Aus der Abbildung liest man als Komponenten der resultierenden Kraft auf das Profil ab:

$$P_x = \oint p^* \cos(n_x)\, ds; \quad P_y = \oint p^* \cos(n_y)\, ds$$

oder wegen

$$ds \cdot \cos(n_x) = -dy; \qquad ds \cos(n_y) = dx$$

$$P_x - i P_y = -\oint p^* (dy + i dx) = -i \frac{\varrho}{2} \oint (1 - q^2)(dx - i dy).$$

Da

$$q = \frac{dw}{dz} \cdot e^{i\vartheta}$$

ist, folgt

$$P_x - i P_y = \overline{P} = -i \frac{\varrho}{2} \oint \left(1 - \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 e^{2i\vartheta}\right) \overline{dz}$$

oder wegen

$$dz = \overline{dz} \cdot e^{2i\vartheta}$$

endgültig

$$\overline{P} = i \frac{\varrho}{2} \oint \left(\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz - \overline{dz}\right).$$

Da das im Totwasser liegende Stück der Saugseite keinen Beitrag zu dem Integral liefert, können wir schreiben

$$\overline{P} = -i \frac{\varrho}{2} \int_0^\pi \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \cdot \frac{dz}{d\tau} d\tau + i \frac{\varrho}{2} \int_0^\pi \overline{\frac{dz}{d\tau}} d\tau.$$

Nun ist nach (20)

[3]) Ist z. B. $r = \frac{1}{\cos\alpha}$ und $\beta = 0$, so liegt die Ablösungsstelle auf der Saugseite bereits rechts von der Hinterkante.

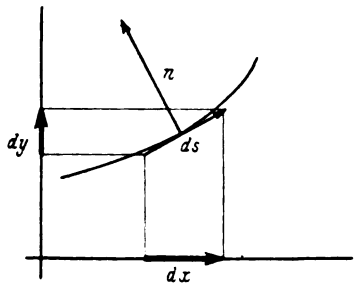


Bild 15. Zur Berechnung der auf das Profil wirkenden Kraft. Der Normalenvektor zeigt in das Innere des Profils.

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\tau + i e^{i\frac{\alpha}{2}}}{\tau - i e^{-i\frac{\alpha}{2}}} e^{i \Sigma a_n \tau^n}.$$

Also gilt auf dem Einheitskreis mit $\tau = e^{i\vartheta}$

$$\overline{\frac{dz}{dw}} = \frac{e^{-i\vartheta} - i e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\vartheta} + i e^{i\frac{\alpha}{2}}} \cdot e^{-i \Sigma a_n e^{-in\vartheta}};$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{e^{i\vartheta} - i e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\vartheta} + i e^{i\frac{\alpha}{2}}} \cdot e^{-i \Sigma a_n e^{in\vartheta}}.$$

Vergleicht man beide Ausdrücke, so sieht man, daß auf dem Einheitskreis gilt

$$\overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)_z} = \left(\frac{dw}{dz}\right)_{\bar{z}}.$$

In Worten: $\frac{dz}{dw}$ gebildet für z ist konjugiert komplex zu $\frac{dw}{dz}$ gebildet für $\bar{z}$.

Da $\frac{dw}{d\tau}$ für reelle τ reell ist, gilt ferner

$$\overline{\left(\frac{dw}{d\tau}\right)_z} = \left(\frac{dw}{d\tau}\right)_{\bar{z}} \qquad \overline{(d\tau)_z} = (d\tau)_{\bar{z}}$$

so daß wir schreiben können:

$$\int_0^\pi \overline{\frac{dz}{d\tau}} d\tau = \int_0^\pi \overline{\frac{dz}{dw}} \cdot \overline{\frac{dw}{d\tau}} \cdot d\tau = \int_0^\pi \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dw}{d\tau} \cdot d\tau\right)_{\bar{z}}$$

$$= \int_0^\pi \left[\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \cdot \frac{dz}{d\tau} \cdot d\tau\right]_{\bar{z}} = -\int_{-\pi}^0 \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \frac{dz}{d\tau} d\tau.$$

Damit wird endgültig

$$\overline{P} = -i \frac{\varrho}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \cdot \frac{dz}{d\tau} d\tau = -i \frac{\varrho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \qquad (34)$$

wobei das letztere Integral im positiven Umlaufsinn über den Einheitskreis der τ-Ebene zu erstrecken ist.

Für die ebene Platte wird der Integrand

$$\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dw}{d\tau} = -C e^{2i\alpha} \cdot \frac{\tau - i e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{\tau - i e^{i\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{(\tau^2 + e^{-i\alpha})(1 - \tau^2)}{\tau^3}.$$

Schneiden wir den der Vorderkante entsprechenden Pol bei $i e^{i\alpha/2}$ durch einen kleinen Halbkreis nach innen aus, so liegt die einzige Singularität bei $\tau = 0$ mit dem Residuum

$$\Re\mathfrak{e}\mathfrak{s}\,(0) = -2\,i\,C \sin\alpha.$$

Somit wird nach (34)

$$\overline{P} = \pi \varrho\, \Re\mathfrak{e}\mathfrak{s}\,(0) = -2\,i\,\pi\,\varrho\,C \sin\alpha.$$

Wir erhalten also einen reinen Auftrieb von der Größe

$$A = 2\,\pi\,\varrho\,C \sin\alpha.$$

Digitized by Google

Zum Schluß berechnen wir auch noch die an der Vorderkante auftretende Saugkraft, indem wir das Integral (34) über den kleinen Halbkreis um den Punkt $i\,e^{i\alpha/2}$ auswerten. Wir erhalten dabei

$$S = -2\pi\varrho\,C\sin^2\alpha\,e^{-i\alpha}.$$

Zur Kontrolle zeigen wir, daß der um die Saugkraft verminderte Auftrieb senkrecht auf der Platte steht:

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{S} = 2\pi\varrho\,C\sin\alpha\,(i + \sin\alpha\,e^{-i\alpha})$$

oder wegen

$$i + \sin\alpha\,e^{-i\alpha} = i\cos\alpha\,e^{-i\alpha}$$

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{S} = \pi\varrho\,C\sin 2\alpha\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}.$$

Für allgemeine Profilformen gilt mit Rücksicht auf (20) und (23)

$$\overline{P} = -\pi\varrho\,i\,C\,(\sin\alpha - a_2), \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

so daß sich also auch hier, wie es sein muß, ein reiner Auftrieb ergibt.

Digitized by Google

Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen.

Von Karl Jaeckel, Breslau.

In der Arbeit wird nachgewiesen, daß die Formulierung der Prandtlschen Grundgleichung für den endlichen Tragflügel als Integro-Differentialgleichung nicht schlechthin an engere Voraussetzungen gebunden ist, als die entsprechende potentialtheoretisch gefaßte Aufgabe. Erweitert man nämlich die Bedeutung des Integrals für die vom Wirbelband am Flügel induzierte Geschwindigkeit in geeigneter Weise, so erweisen sich beide Formulierungen bezüglich ihrer Reichweiten als gleichwertig, so daß gegen die Verwendung von Fourierschen Reihen zur Auswertung der Integro-Differentialgleichung nach dem angegebenen Verfahren auch bei unstetiger Tiefen- oder Anstellwinkelverteilung keine Bedenken mehr bestehen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Entwicklung des Verfahrens unter den bisher üblichen einschränkenden Bedingungen.
1. Vorgabe der Integro-Differentialgleichung und Ansatz von Fourierschen Reihen für die auftretenden Funktionen.
2. Herstellung eines normierten unendlichen Gleichungssystems.
3. Bedingungen für die Gültigkeit des angegebenen Verfahrens.
III. Verallgemeinerung des Verfahrens.
1. Erweiterung der Grundgleichung und der Ansätze für die auftretenden Funktionen.
2. Berechnung des Integrals für die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit.
3. Analoge Herstellung des unendlichen Gleichungssystems.
4. Zusammenstellung der hinreichenden Bedingungen für die Auflösbarkeit der vorgelegten Zirkulationsgleichung.
5. Entwicklung eines Auflösungsverfahrens für das gefundene Gleichungssystem.
IV. Vorschläge für die praktische Durchrechnung.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die Prandtlsche Zirkulationsgleichung für den endlichen Tragflügel läßt sich bekanntlich als Integro-Differentialgleichung wie auch als Randwertaufgabe formulieren. Dabei hat die erste Darstellung gegenüber der zweiten den Vorzug einer formal einfacheren Auswertung durch Fouriersche Reihen, während die Randwertaufgabe mit potentialtheoretischen Hilfsmitteln hingegen mathematisch einwandfrei gelöst werden kann. Aus diesem Grunde wird in den neueren Arbeiten gerade diese Formulierung bevorzugt, insbesondere auch deswegen, als sich ergibt, daß die Lösungen der Integro-Differentialgleichung in der bisher üblichen Form an engere Voraussetzungen gebunden sind [6]. Ich glaube indessen, daß die ungleichen Reichweiten und insbesondere die auffälligen Unterschiede in der Wirksamkeit der heranzuziehenden mathematischen Hilfsmittel ihren Ursprung in einer nicht gleichwertigen Formulierung der an sich gleichen Aufgabe haben.

Nachdem derartige Unterschiede beseitigt sind, lassen sich in der Tat äquivalente Ergebnisse erzielen. Darüber hinaus gelingt es aber noch mit Hilfe der Fourierschen Reihen eine offenbar bisher übersehene Darstellung der Lösung der Zirkulationsgleichung zu finden, die für die Auswertung besondere Vorteile bietet, so daß die sonst überall in den Anwendungen feststellbare überragende Bedeutung des Hilfsmittels der unendlichen Reihen auch hier wieder zu beobachten ist.

II. Entwicklung des Verfahrens unter den bisher üblichen einschränkenden Bedingungen.

In meinen beiden Arbeiten [1] und [2], in denen ich die bisher übliche Form eines Cauchyschen Integrals für die induzierte Geschwindigkeit verwendet habe, konnte ich wenigstens in den Anmerkungen auf die Besonderheit dieser Fassung Bezug nehmen.

Es wird sich zeigen, daß alle einschränkenden Bedingungen, wie sie sich damals aus dem Cauchyschen Integral ergeben haben, in Fortfall kommen, wenn man nur die Formulierung für die induzierte Geschwindigkeit sinngemäß erweitert. Dabei ergibt sich, daß das bei Verwendung von Fourierschen Reihen stets auftretende Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten hier auf eine Normalform zu bringen ist, die ich im folgenden zunächst noch unter einschränkenden Bedingungen entwickeln will.

1. Vorgabe der Integro-Differentialgleichung und Ansatz von Fourierschen Reihen für die auftretenden Funktionen.

Die Prandtlsche Grundgleichung für den endlichen Flügel, die wir zu behandeln haben, liegt uns in der folgenden Form vor

$$\Gamma(y) = \lambda \cdot l(y) \cdot V \cdot \left(\alpha_g(y) - \frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\Gamma'(s)}{y-s}\, ds\right) \qquad (1)$$

wobei $\Gamma(y)$ die Zirkulationsverteilung über die Breite des Tragflügels an der Stelle y, λ eine mittlere Profilkonstante, $l(y)$ die wirksame Flügeltiefe, V die Fluggeschwindigkeit, $\alpha_g(y)$ die Anstellwinkelverteilung und b die Breite des Flügels bedeuten. Gegeben sind die Funktionen $l(y)$ und $\alpha_g(y)$, gesucht wird die Funktion $\Gamma(y)$.

Zur Auswertung dieser Gleichung setzen wir, zum Teil abweichend von den bisher üblichen Ansätzen, folgende Fourier-Reihen an, die die neue Endformulierung möglich machen:

Wir definieren die gesuchte Funktion $\Gamma(y)$ und deren Ableitung durch gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihen, deren Koeffizientensummen absolut konvergieren sollen:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(y) &= 2bV \cdot \sum_1^\infty \Gamma_n \sin n\varphi, & \sum_1^\infty |\Gamma_n| \\ \frac{d\Gamma}{d\varphi} &= 2bV \cdot \sum_1^\infty n\,\Gamma_n \cos n\varphi, & \sum_1^\infty n\,|\Gamma_n| \end{aligned}\right\} \text{konvergent.} \qquad \begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}$$

Weiterhin setzen wir auch für die folgenden Funktionen absolut und gleichmäßig konvergente Reihen an

$$\frac{\Gamma(y)}{\lambda\, l(y)\, V} = \sum_1^\infty A_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\alpha_g(y) = \sum_1^\infty \alpha_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots (5)$$

Digitized by Google

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda\, l(y)\, V} = \frac{1}{\lambda\, l_0\, V}\sum_0^\infty \varepsilon_n \cos n\varphi, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

dabei denken wir uns die Veränderliche y durch

$$y = -\frac{b}{2}\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

in die Variable φ umgeschrieben.

2. Herstellung eines normierten unendlichen Gleichungssystems.

Dividieren wir nun die Gl. (1) durch die im ganzen offenen Intervall $-b/2$, $+b/2$ von Null verschiedenen, positiven Funktion $\lambda\, l(y)\, V$, so erhalten wir eine Darstellung, die auch noch in den Endpunkten des Intervalls ihre Bedeutung behält, denn die als einfach vorausgesetzte Nullstelle des Nenners wird durch die des Zählers ausgeglichen:

$$\frac{\Gamma(y)}{\lambda\, l(y)\, V} = \alpha_g(y) - \frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\Gamma'(s)\,ds}{y-s}, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

dabei bedeutet das Integral die vom Prandtlschen Wirbelband am Flügel induzierte Abwärtsgeschwindigkeit.

Indem wir annehmen, wie sich später auch zeigen wird, daß die gleichmäßige Konvergenz der Reihe für Γ' ausreicht, um auch hier gliedweise integrieren zu können, finden wir wie üblich für die Abwärtsgeschwindigkeit

$$\frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{ds}\,ds}{y-s} = \sum_1^\infty n\,\Gamma_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und sodann mit den Ansätzen (4) und (5) in (8)

$$\sum_1^\infty A_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = \sum_1^\infty \alpha_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} - \sum_1^\infty n\,\Gamma_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}.$$

Hieraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$A_n = \alpha_n - n\,\Gamma_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, die Koeffizienten A_n durch die Γ_n auszudrücken. Definitionsgemäß ist

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\Gamma(y)}{\lambda\, l(y)\, V}\sin\varphi\cdot\sin n\varphi\, d\varphi.$$

Denken wir uns $\Gamma(y)$ aus (2) eingesetzt, wobei wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz Summenzeichen und Integralzeichen unbedingt vertauschen können, so finden wir

$$A_n = \frac{2}{\pi}\cdot 2\,b\,V\cdot\sum_1^\infty \frac{\Gamma_m}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi}{\lambda\, l(y)\, V}\left(\cos(m-n)\varphi - \cos(m+n)\varphi\right)d\varphi. \quad (11)$$

Berücksichtigen wir die absolut und gleichmäßig angesetzte Entwicklung (6), so erhalten wir ähnlich wie früher [1]

$$A_n = \frac{b}{\lambda\, l_0}\sum_{m=1}^\infty \Gamma_m\left(\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}\right) \quad \ldots \quad (12)$$

Setzen wir nun (12) in (10) ein, so ergibt sich das angekündigte unendliche Gleichungssystem

$$n\,\Gamma_n + \frac{b}{\lambda\, l_0}\sum_{m=1}^\infty \Gamma_m\left(\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}\right) = \alpha_n,$$

das wir noch auf eine bessere Form bringen wollen. Dazu ziehen wir aus der Summe einen Bestandteil für $m = n$ heraus und schreiben

$$n\,\Gamma_n\left(1 + \frac{b\cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0\, n}\right) + \frac{b}{\lambda\, l_0}\sum_{m=1}^\infty{}' m\,\Gamma_m\left(1 + \frac{b\cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0\, m}\right)\left(\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m\left(1 + \frac{b\cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0\, m}\right)}\right) = \alpha_n.$$

Führen wir hierin

$$n\,\Gamma_n\left(1 + \frac{b\cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0\, n}\right) = y_n \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

als neue Unbekannte ein, mit

$$\left.\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{b}{\lambda\, l_0}\,\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m + \frac{b\cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0}} \\ a_{nn} &= -\frac{b}{\lambda\, l_0}\,\frac{\varepsilon_{2n}}{n + \frac{b\cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (14)$$

so gewinnen wir endgültig

$$y_n + \sum_{m=1}^\infty a_{mn}\, y_m = \alpha_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Der Vorteil dieser Form des unendlichen Gleichungssystems gegenüber denen mir bisher bekannt gewordenen ist der, daß diese Matrix wenig von der Einheitsmatrix abweicht, denn die a_{mn} werden aus den kleinen Koeffizienten ε_n mit $n > 0$ gebildet. Für die Auflösung ergeben sich hieraus wichtige Folgerungen, auf die wir später noch zurückkommen werden, nachdem dieses System auch für unstetige Tiefen- und Anstellwinkelverteilungen als gültig nachgewiesen sein wird.

3. Bedingungen für die Gültigkeit des angegebenen Verfahrens.

Zunächst wollen wir aus dieser neuen Formulierung die schon bekannten hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des angegebenen Verfahrens entwickeln. Die Bedingungen für die Lösungsfunktion $\Gamma(y)$, deren Koeffizienten aus dem Gleichungssystem (15) zu ermitteln sind, daß die Summen über die absoluten Beträge, nämlich

$$\sum_1^\infty |\Gamma_n| \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty n\,|\Gamma_n|,$$

konvergent sein müssen, lassen sich mit der letzten befriedigen. Wegen $\varepsilon_0 > 0$ ergibt sich aus (13)

$$\sum_1^\infty n\,|\Gamma_n| \leqq \sum_1^\infty |y_n|,$$

woraus folgt, daß mit

$$\sum_1^\infty y_n$$

allen Forderungen genügt werden kann, wenn nur diese Summe konvergent ist. Dazu bilden wir aus (15)

$$|y_n| \leqq \sum_{m=1}^\infty |a_{mn}|\,|y_m| + |\alpha_n|$$

und summieren

$$\sum_{n=1}^\infty |y_n| \leqq \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_{mn}\, y_m + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n.$$

Mit

$$|a_{mn}| \leqq M_n$$

für alle m finden wir

$$\sum_{n=1}^\infty y_n \leqq \left(\sum_{n=1}^\infty M_n\right)\left(\sum_{m=1}^\infty y_m\right) + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n$$

Digitized by Google

und weiterhin

$$\left(1-\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right)\sum_{n=1}^{\infty} y_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n,$$

woraus mit der Beschränktheit der Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n + 1$$

in der Tat folgt, daß $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|$ konvergent ist.

Als hinreichende Bedingungen für die Darstellung der Lösung der vorgelegten Integro-Differentialgleichung können demnach z. B. gelten

$$\sum_{1}^{\infty}|\alpha_n| < A; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} < 1 \text{ für alle } m,$$

wie früher [1] läßt sich dafür auch schreiben

$$\sum_{1}^{\infty} x_n < A; \quad \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n < 1, \quad \ldots\ldots (16)$$

womit gleichzeitig die Voraussetzungen für die Entwicklungen (4), (5) und (6) als ausreichend erkannt sind.

Diese Bedingungen lassen sich nun in starker Weise verallgemeinern, womit wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen wollen.

III. Verallgemeinerung des Verfahrens.

1. Erweiterung der Grundgleichung und der Ansätze für die auftretenden Funktionen.

Man kann in den vorangehenden Rechnungen an einigen wesentlichen Stellen bemerken, daß die vorliegenden Umformungen noch unter ungünstigeren Bedingungen richtig bleiben. Hingegen ist die Vertauschbarkeit des Summen- und Integralzeichens im Integral mit Cauchyschem Hauptwert zunächst nicht gerechtfertigt. Der Ansatz einer gleichmäßig konvergenten Reihe für $d\Gamma/d\varphi$ scheint für die Vertauschbarkeit aber mindestens notwendig zu sein. Andererseits ist die Forderung der gleichmäßigen Konvergenz die Ursache für die Einschränkungen, denen die vorgegebenen Funktionen unterliegen; denn auf Grund der Gl. (16) sind für Tiefen- und Anstellwinkelverteilung nur stetige Funktionen möglich, während bei der potentialtheoretischen Methode ohne Schwierigkeiten auch Sprungfunktionen zugelassen werden. An dieser Stelle tritt die anfangs bereits erwähnte Besonderheit der Formulierung als Integro-Differentialgleichung deutlich in den Vordergrund. Diese Schwierigkeit läßt sich grundsätzlich nur beseitigen, wenn wir den Gültigkeitsbereich der Integro-Differentialgleichung erweitern.

Es bedeutet offensichtlich eine wesentliche Beschränkung für die Lösungsfunktion $\Gamma(y)$, wenn die induzierte Geschwindigkeit am Flügel in der engen Bedeutung eines uneigentlichen Integrals im Cauchyschen Sinne beschrieben werden. Dieser Beschränkung geht die potentialtheoretische Formulierung sinngemäß dadurch aus dem Wege, daß die Zirkulationsgleichung als Randbedingung vom Außenraum her erfüllt wird [4], [5].

Um nun die Fassung als Integro-Differentialgleichung gegenüber der potentialtheoretischen wettbewerbsfähig zu gestalten, müssen wir wie folgt schreiben

$$\Gamma(y) = \lambda l(y)\, V\left(\alpha_g(y) - \frac{1}{4\pi V}\cdot\lim_{z\to 0}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\Gamma'\cdot(y-s)}{(y-s)^2+z^2}\,ds\right) \quad (17)$$

mit der Begründung, daß im ganzen Raum z. B. auch in einem Punkte (y, z) der Ebene durch die tragende Wirbellinie, von dem hier ausgehenden Wirbelband eine Gesamtwirkung erzielt wird, die noch in allen Punkten der Wirbellinie selbst vorhanden sein muß. Dieser Integralwirkung wird man durch Ansatz eines Integrals im Cauchyschen Sinne dann nicht mehr gerecht, wenn von der Funktion Γ' geringere Voraussetzungen als Stetigkeit gelten sollen. Die Tragweite einer solchen Formulierung (17) liegt klar auf der Hand; denn das Integral für die induzierte Geschwindigkeit läßt sich jetzt bei Verwendung von Fourierschen Reihen mit Hilfe der verallgemeinerten Vollständigkeitsrelation leicht berechnen, die mindestens ebenso wirksam sein dürfte, als potentialtheoretische Hilfsmittel.

Für die neue Fassung der Integro-Differentialgleichung kommen wir so mit geringen Voraussetzungen aus und definieren $\Gamma(y)$ als stetige Funktion durch die gleichmäßig konvergente Entwicklung [8]

$$\Gamma(y) = 2\,b\,V\sum_{1}^{\infty}\Gamma_n \sin n\varphi, \quad \ldots\ldots (2)$$

so daß die quadratisch integrierbar vorausgesetzte Ableitung die Fourierkoeffizienten $n\,\Gamma_n$ besitzt, also

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi} \sim 2\,b\,V\sum_{1}^{\infty} n\,\Gamma_n \cos n\varphi \quad \ldots\ldots (18)$$

Für die weiteren Funktionen, die wir lediglich quadratisch integrierbar annehmen, setzen wir ebenfalls nur Äquivalenzen an

$$\frac{\Gamma(y)}{\lambda l(y)\, V} \sim \sum_{1}^{\infty} A_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots (19)$$

$$\alpha_v(y) \sim \sum_{1}^{\infty}\alpha_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots (20)$$

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda l(y)\, V} \sim \frac{1}{\lambda l_0 V}\sum_{0}^{\infty}\varepsilon_n \cos n\varphi, \quad \ldots (21)$$

für die die Summe der Koeffizientenquadrate konvergent sein muß.

2. Berechnung des Integrals für die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, das Integral für die induzierte Geschwindigkeit zu berechnen. Dazu denken wir uns ψ als neue Integrationsvariable durch

$$s = -\frac{b}{2}\cos\psi$$

eingeführt und schreiben

$$\frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\Gamma'\cdot(y-s)}{(y-s)^2+z^2}\,ds = \frac{1}{4\pi V}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{d\Gamma}{d\psi}\right)\left(\frac{y-s}{(y-s)^2+z^2}\right)d\psi.$$

Beachten wir, daß beide Funktionen im Integranden quadratisch integrierbar sind, so folgt mit den Ansätzen

$$\frac{d\Gamma}{d\psi} \sim 2\,b\,V\sum_{1}^{\infty} n\,\Gamma_n \cos n\psi,$$

$$\frac{y-s}{(y-s)^2+z^2} \sim \frac{4}{b}\sum_{0}^{\infty} R_n(y,z)\cos n\psi$$

auf Grund der verallgemeinerten Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\Gamma'\cdot(y-s)}{(y-s)^2+z^2}\,ds = \sum_{1}^{\infty} n\,\Gamma_n R_n(y,z). \quad (22)$$

Zur Darstellung des Ergebnisses für $z \to 0$ fehlen uns noch die expliziten Ausdrücke für $R_n(y, z)$. Definitionsgemäß ist

Digitized by Google

$$R_n(y,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{y-s}{(y-s)^2+z^2}\cdot\frac{b}{4}\cdot\cos n\psi\, d\psi$$

oder

$$R_n(y,z) = \text{Realt}\,\frac{b}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\psi}{(y-s)+iz}\,d\psi = \text{Realt}\,K_n(\zeta),$$

wenn

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\psi}{\zeta+\cos\psi}\,d\psi$$

gesetzt wird, mit

$$\zeta = \frac{y+iz}{b/2}.$$

Dieses Integral liegt in meiner Arbeit [3] im Komplexen ausgewertet vor; es ergibt sich

$$K_n = R_n + iJ_n = -\frac{e^{-n(u-iv)}}{\mathfrak{Sin}(u-iv)},$$

wobei die Koordinaten (y, z) auf elliptische Koordinaten transformiert sind durch die Gleichungen

$$\frac{y}{b/2} = -\mathfrak{Cof}\,u\cos v, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

$$\frac{z}{b/2} = +\mathfrak{Sin}\,u\sin v, \qquad u > 0.$$

Realteil und Imaginärteil dieser Funktion lassen sich in bekannter Weise trennen und ergeben

$$R_n(y,z) = -\frac{e^{-(n-1)u}\cos(n+1)v - e^{-(n+1)u}\cos(n-1)v}{2(\mathfrak{Sin}^2 u + \sin^2 v)},$$

$$J_n(y,z) = -\frac{e^{-(n-1)u}\sin(n+1)v - e^{-(n+1)u}\sin(n-1)v}{2(\mathfrak{Sin}^2 u + \sin^2 v)}.$$

Wir stellen dabei fest, daß mit $z \to 0$, d. h. $u \to 0$ und $v \to \varphi$,

$$\lim_{z\to 0} R_n(y,z) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\lim_{z\to 0} J_n(y,z) = -\frac{\cos n\varphi}{\sin\varphi}$$

vorhanden ist, so daß wir bereits folgende Aussage machen können:

Für den Fall, daß $\sum_1^{\infty} n|\Gamma_n|$ konvergiert, wird

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\Gamma'(s)\cdot(y-s)}{(y-s)^2+z^2}\,ds = \sum_1^{\infty} n\Gamma_n\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi},$$

was gleichbedeutend damit ist, daß die gleichmäßige Konvergenz von (3) hinreicht, um den Cauchyschen Hauptwert gliedweise bilden zu können, so daß nachträglich die Umformung (9) als richtig nachgewiesen ist.

Es ist nun für unsere Zwecke gar nicht notwendig, daß die Reihe

$$\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_n R_n(y,z)$$

konvergiert; zur Aufstellung des unendlichen Gleichungssystems sind lediglich die zugehörigen Fourierkoeffizienten erforderlich, so daß man auf die scharfe Bedingung $\sum_1^{\infty} n\Gamma_n$ verzichten kann. Die gewünschte Äquivalenz erhält man durch gliedweisen Grenzübergang

$$\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_n R_n(y,z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_n\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots \quad (23)$$

Zum Beweise fügen wir zu (22) das konjugierte Integral

$$\frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\Gamma'(s)\cdot z}{(y-s)^2+z^2}\,ds = -\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_n J_n(y,z)$$

und können den Gesamtausdruck

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\Gamma'\cdot(z+i(y-s))}{(y-s)^2+z^2}\,ds = i\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_n(R_n+iJ_n)$$

oder

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = i\sum_1^{\infty} n\Gamma_n K_n = -i\sum_1^{\infty} n\Gamma_n\frac{e^{-(u-iv)}}{\mathfrak{Sin}(u-iv)}$$

als die komplexe Geschwindigkeit in der ζ-Ebene ansehen. In der Bildebene w, die mit der ζ-Ebene durch die Beziehung

$$\zeta = -\mathfrak{Cof}\,w, \qquad w = u - iv, \qquad \zeta = \frac{y}{b/2} + i\frac{z}{b/2},$$

verknüpft ist, gilt demnach

$$\frac{d\Phi}{dw} = i\sum_1^{\infty} n\Gamma_n e^{-nw} \quad \ldots \quad (24)$$

Wir können nun nachweisen, daß diese Reihe für $|w| > 1$ gleichmäßig konvergiert, denn unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung wird der Rest der Reihe

$$\left(\sum_N^{\infty} n\Gamma_n e^{-nw}\right)^2 \le \left(\sum_N^{\infty} n^2\Gamma_n^2\right)\left(\sum_N^{\infty} e^{-2n|w|}\right) \le \left(\sum_N^{\infty} n^2\Gamma_n^2\right)\frac{e^{-2(N+1)\pi}}{1-e^{-2|w|}}$$

mit wachsendem N unabhängig von der Variablen beliebig klein, wenn nur mit (18) $\sum_N^{\infty} n^2\Gamma_n^2$ als konvergent angenommen wird.

$\frac{d\Phi}{dw}$ ist daher als komplexe Potentialfunktion aufzufassen, für die eine Darstellung aus den Randwerten durch das Poissonsche Integral gelingt. An dieser Stelle berühren sich in dieser neuen Fassung der Prandtlschen Integro-Differentialgleichung die Hilfsmittel beider anfangs genannten Methoden [4]:

Die Randwerte der betrachteten Funktion am Einheitskreis der w-Ebene, der durch $u = 0$ und $v = \varphi$ charakterisiert ist, seien gegeben durch die Äquivalenz

$$\left(\frac{d\Phi}{dw}\right) \sim i\sum_1^{\infty} B_n(\cos n + i\sin n),$$

für die $\sum_1^{\infty} B_n^2 < B$ gelten soll.

Dann wird durch das Poissonsche Integral

$$\frac{d\Phi}{dw} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{d\Phi}{dw}\right)\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos(v-\varphi)}\,d\varphi$$

eine sich an die Randwerte anschließende reguläre Funktion im Außengebiet definiert, die mit

$$\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos(v-\varphi)} = 1 + 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{r^{\nu}}\cos\nu(v-\varphi)$$

unter Anwendung der verallgemeinerten Vollständigkeitsrelation schließlich mit $r = e^u$ auf die Form gebracht werden kann:

$$\frac{d\Phi}{dw} = i\sum_1^{\infty} B_n e^{-nw} \quad \ldots \quad (25)$$

Digitized by Google

Durch Vergleich der beiden Darstellungen (24), (25), die aber wegen der Eindeutigkeit nur dieselbe Funktion erklären können, folgt also, daß die Koeffizienten B_n und $n\Gamma_n$ gleich sein müssen, und somit ist die Behauptung (23) erwiesen.

3. Analoge Herstellung des unendlichen Gleichungssystems.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun nicht schwierig, das Gleichungssystem aufzustellen, denn der Fourierkoeffizientenvergleich läßt sich bedeutungsgemäß auch unter Äquivalenzen durchführen. Wir finden mit (19), (20), (22), (23) analog

$$A_n = a_n - n\,\Gamma_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Ebenso ist die Umformung der Koeffizienten A_n auf die Γ_n leicht vorzunehmen. Wegen der auch im allgemeinen Falle vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für $\Gamma(y)$ erhält man Gl. (11) und hieraus unter Anwendung der Vollständigkeitsrelation wie früher

$$A_n = \frac{b}{\lambda\, l_0} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m\,(\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}) \quad \ldots \quad (12)$$

Damit finden wir das vorher aufgestellte Gleichungssystem, das wir der Übersicht halber hierher übertragen, unter allgemeineren Voraussetzungen gültig wieder:

$$y_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\, y_m = x_n \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots \quad (15)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{b}{\lambda\, l_0}\,\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m + \dfrac{b \cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0}}, \\ a_{nn} &= -\frac{b}{\lambda\, l_0}\,\frac{\varepsilon_{2n}}{n + \dfrac{b \cdot 2\,\varepsilon_0}{\lambda\, l_0}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

4. Zusammenstellung der hinreichenden Bedingungen für die Auflösbarkeit der vorgelegten Zirkulationsgleichung.

Die Bedingungen für die Auflösbarkeit müssen der geringeren Voraussetzungen wegen etwas feiner entwickelt werden als unter Abschnitt II 3:

Dazu bemerken wir, daß sich das vorgelegte unendliche Gleichungssystem vollstetig machen läßt, lediglich durch Vorgabe der Fourierkoeffizienten ε_n, durch die Forderung, daß

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^2 = \left(\frac{b}{\lambda\, l_0}\right)^2 \sum_{m,n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m}\right)^2 \quad (26)$$

beschränkt bleibt.

Nach Hilbert [7] ist dann dieses System eindeutig lösbar, wenn nicht gerade das homogene Gleichungssystem eine von Null verschiedene Lösung besitzt und, wenn dieser Fall nicht vorliegt, weiterhin Lösungen mit konvergenter Quadratsumme liefert, falls die Quadratsumme der α_n konvergent ist. Wir wollen zunächst die Bedingung der Vollstetigkeit durch Bedingungen für die ε_n ausdrücken:

Die Doppelsumme

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m}\right)^2$$

ist jedenfalls beschränkt, wenn für alle m

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' (\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n})^2 < M$$

gehalten werden kann, so daß dann

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^2 < M \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \left(\frac{b}{\lambda\, l_0}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

ist.

Diese soeben eingeführte Abschätzung läßt sich aber leicht erreichen, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' (\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n})^2 = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_{m-n}^2 + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_{n-m}^2 + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_{m+n}^2 + 2 \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_{n-m}\,\varepsilon_{m-n} - 2 \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_{m-n}\,\varepsilon_{m+n} - 2 \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_{n-m}\,\varepsilon_{m+n}$$

ist mit $\varepsilon_{-s} = 0$ kleiner als

$$\sum_{m-1}^{1} \varepsilon_\nu^2 + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 + \sum_{m+1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 + 2 \sum_{1}^{m-1} |\varepsilon_\nu|\,|\varepsilon_{2m-\nu}| + 2 \sum_{1}^{\infty} |\varepsilon_\nu|\,|\varepsilon_{\nu+2m}|$$

und nach der Schwarzschen Ungleichung wird schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' (\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n})^2 \leqq M = 6 \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 \quad \ldots \quad (28)$$

Wir finden also die Vollstetigkeit garantiert, wenn $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2$ als konvergent angenommen wird. Diese Voraussetzung zusammen mit der bereits erwähnten konvergenten Quadratsumme für die α_n liefert uns sofort die Berechtigung der Hauptvoraussetzung für die Lösungsfunktion, denn mit

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_n^2 \text{ und } \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

ist nach Hilbert auch $\sum_{1}^{\infty} y_n^2$ vorhanden und damit ist auch wegen (13) mit $\varepsilon_0 > 0$

$$\sum_{1}^{\infty} n^2\,\Gamma_n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

konvergent.

Wir werden im folgenden zeigen, daß die angegebenen Bedingungen alle übrigen Voraussetzungen enthalten, weshalb wir diese hier nochmals zusammenstellen:

1. Die benutzte gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung (2) ist gesichert, wenn

$$\sum_{1}^{\infty} |\Gamma_n| \text{ konvergent} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

angenommen wird.

2. Die Äquivalenzen der Ansätze (18) bis (21) sollen quadratisch integrierbaren Funktionen entsprechen und verlangen konvergente Quadratsummen ihrer Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{1}^{\infty} n^2\,\Gamma_n^2 && \text{bereits nachgewiesen} \quad \ldots\ldots \quad (30) \\ &\sum_{1}^{\infty} A_n^2 && \text{nachzuweisen} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32) \\ &\sum_{1}^{\infty} \alpha_n^2 && \text{wird vorausgesetzt} \quad \ldots\ldots \quad (29a) \\ &\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n^2 && \text{wird vorausgesetzt} \quad \ldots\ldots \quad (29b) \end{aligned}\right\}$$

Aus Gl. (10) kann man aber leicht finden, daß der Bedingung (31) mit (29a) und (32) genügt werden kann:

Zunächst folgt aus (10)

$$\sum_{1}^{\infty} |\Gamma_n| \leqq \sum_{1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{n} + \sum_{1}^{\infty} \frac{|A_n|}{n}$$

und nach der Schwarzschen Ungleichung

Digitized by Google

$$\sum_1^\infty |\Gamma_n| \leq \sqrt{\left(\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\sum_1^\infty \alpha_n^2\right)} + \sqrt{\left(\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_1^\infty A_n^2\right)},$$

woraus die Behauptung folgt.

Es läßt sich schließlich auch die Bedingung (32) befriedigen, denn nach (12) ist $\sum_1^\infty A_n^2$ mit

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty \Gamma_m \left(\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty m\Gamma_m \left(\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m-n}}{m}\right)\right)^2$$

konvergent. Dabei erkennt man leicht, daß diese Forderung mit (30) und der Vollstetigkeitsbedingung (26) erfüllt ist, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_1^\infty m\,\Gamma_m \left(\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m}\right)\right)^2 \leq \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty m^2\Gamma_m^2\right)\left(\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{n-m} - \varepsilon_{m+n}}{m}\right)^2\right).$$

Die einzigen Voraussetzungen, die an die dargelegte Entwicklung und die Auflösbarkeit des unendlichen Gleichungssystems geknüpft sind, sind demnach die, daß die Summen

$$\sum_1^\infty \alpha_n^2 \text{ und } \sum_1^\infty \varepsilon_n^2 \text{ konvergent} \quad \ldots \quad (33)$$

sein müssen. Hieraus geht hervor, daß auch bei unstetigen Tiefen- und Anstellwinkelverteilungen das angegebene Verfahren anwendbar bleibt.

5. Entwicklung eines Auflösungsverfahrens für das Gleichungssystem.

Das vorgelegte Gleichungssystem (15) läßt sich mit Hilfe unendlicher Matrizen in folgender Weise schreiben

$$(\mathfrak{E} + \mathfrak{A})\,\mathfrak{y} = \mathfrak{B},$$

woraus wir formal die Lösung

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{E} + \mathfrak{A})^{-1}\,\mathfrak{B}$$

finden können. Denken wir uns bei genügend kleinen a_{mn} die reziproke Matrix

$$(\mathfrak{E} + \mathfrak{A})^{-1}$$

in die zugehörige geometrische Reihe entwickelt, so erhalten wir

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}^3 + - \ldots)\,\mathfrak{B}.$$

Diese Schreibweise bedeutet nun nichts anderes, als daß das Gleichungssystem (15) durch schrittweise Näherung aufgelöst werden kann.

Betrachtet man die erste Näherung

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{B}$$

so bemerkt man, daß hierdurch der Flügel mit elliptischem Umriß, der als Näherung für den gegebenen Umriß zu gelten hat, bei beliebiger Anstellwinkelverteilung behandelt ist. In Ausführung des angedeuteten Verfahrens bilden wir schrittweise

$$\left.\begin{aligned} y_n^{(0)} &= \alpha_n \\ y_n^{(1)} &= \alpha_n - \sum_{m=1}^\infty a_{m\,n}\, y_m^{(0)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(k)} &= \alpha_n - \sum_{m=1}^\infty a_{m\,n}\, y_m^{(k-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

oder durch Differenzbildung

$$\left.\begin{aligned} y_n^{(0)} &= \alpha_n \\ (y_n^{(1)} - y^{(0)}) &= \sum_{m=1}^\infty a_{m\,n}\, y_m^{(0)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y_n^{(k)} - y_n^{(k-1)}) &= \sum_{m=1}^\infty a_{m\,n}\,(y_m^{(k-1)} - y_m^{(k-2)}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (34)$$

für die man sich wie früher [1] ein einfaches Rechenschema aufstellen kann. Die hierbei erhaltene Näherungsfolge konvergiert gegen die Grenzfunktion unter Bedingungen, die wir jetzt ableiten wollen.

Durch Summation der quadrierten allgemeinen Iterationsgleichung (34) ergibt sich

$$\sum_{n=1}^\infty (y_n^{(k)} - y_n^{(k-1)})^2 = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty a_{m\,n}\,(y_m^{(k-1)} - y_m^{(k-2)})\right)^2 \leq \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty a_{m\,n}^2 \cdot \sum_{m=1}^\infty (y_m^{(k-1)} - y_m^{(k-2)})^2\right) \leq \sum_{m,n=1}^\infty a_{m\,n}^2 \cdot \sum_{n=1}^\infty (y_n^{(k-1)} - y_n^{(k-2)})^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sum_{n=1}^\infty (y_n^{(k)} - y_n^{(k-1)})^2 = S_k^2, \quad y_n^{(-1)} = 0$$

$$\sum_{m,n=1}^\infty a_{mn}^2 = q^2$$

so finden wir

$$S_k^2 \leq q^2\, S_{k-1}^2$$

oder in den einzelnen Näherungsschritten eingesetzt, wobei S_0^2 die konvergente Reihe $\sum_1^\infty \alpha_n^2$ bedeutet,

$$\begin{aligned} S_1^2 &\leq q^2 \cdot S_0^2 \\ S_2^2 &\leq q^2 \cdot S_1^2 \leq q^4 \cdot S_0^2 \\ S_3^2 &\leq q^2 \cdot S_2^2 \leq q^6 \cdot S_0^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S_k^2 &\leq q^{2k} \cdot S_0^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nun ist sicher

$$(y_n^{(k)} - y_n^{(k-1)})^2 \leq \sum_{n=1}^\infty (y_n^{(k)} - y_n^{(k-1)})^2 \leq q^{2k} \cdot S_0^2$$

also

$$|y_n^{(k)} - y_n^{(k-1)}| \leq q^k\, S_0.$$

Daher finden wir

$$y_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^k (y_n^{(\nu)} - y_n^{(\nu-1)}) \leq \sum_{\nu=0}^k |y_n^{(\nu)} - y_n^{(\nu-1)}| \leq \sum_{\nu=0}^k q^\nu \cdot S_0$$

und schließlich

$$\lim_{k\to\infty} y_n^{(k)} \leq \frac{S_0}{1-q} \text{ mit } q^2 < 1,$$

so daß mit

$$\sum_{m,n=1}^\infty a_{m\,n}^2 = q < 1 \quad \ldots \quad (35)$$

die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherung sichergestellt ist. Die hinreichenden Bedingungen für die Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch Fouriersche Reihen, sowie des unendlichen Gleichungssystems durch schrittweise Näherung sind demnach

Digitized by Google

$$\sum_1^\infty \alpha_n^2 < A \text{ und } \sum_{m,n=1}^\infty a_{mn}^2 < 1$$

oder bei Berücksichtigung der Abschätzung (28) auch

$$\sum_1^\infty \alpha_n^2 < A \text{ und } \sum_1^\infty \varepsilon^2 < \left(\frac{\lambda l_0}{\pi b}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Im besonderen erkennen wir aus (34), daß mit $\alpha_n = 0$ nur die triviale Lösung existiert, woraus die Eindeutigkeit der Auflösung hervorgeht; denn gäbe es zwei Lösungen, so würde man für die Differenz unter Berücksichtigung dieser Bemerkung Null herausbekommen, weshalb beide Lösungen nur gleich sein können. Die Ungleichheit für $\sum_1^\infty \varepsilon_n^2$ läßt sich in Sonderfällen noch günstiger gestalten. Als hinreichende Bedingung, die aus wiederholten Abschätzungen hervorgegangen ist, liefert sie jedoch dann immer noch Schranken, die weit unterhalb der durch (35) am besten abgeschätzten Konvergenzgrenze liegen.

IV. Vorschläge für die praktische Durchrechnung.

Für die Durchführung eines praktischen Beispiels ist es zunächst notwendig, die vorgegebenen Funktionen in Fouriersche Reihen zu entwickeln. Da diese Funktionen nur empirisch gegeben sind, können wir dabei näherungsweise vorgehen, indem wir beispielsweise das Rungesche Verfahren zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten heranziehen.

Nehmen wir zunächst an, daß die vorgegebenen Funktionen sprungfrei und symmetrisch sind, dann wird, wie man aus (20) mit $\delta(y)$ als der Verwindung des Flügels

$$\alpha_g(y) = \alpha + \delta(y) = \sum_1^\infty \alpha_n \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

erkennt, $\delta(y) \cdot \sin\varphi$ in eine sin-Reihe entwickelt,

$$\delta(y) \sin\varphi = \sum_1^\infty \delta_n \sin n\varphi.$$

Hieraus folgt dann sofort die Beziehung

$$\alpha_1 = \alpha + \delta_1$$
$$\alpha_n = \delta_n.$$

Die Berechnung der δ_n erfolgt vorteilhaft nach dem schon erwähnten Runge-Verfahren mit 12 Ordinaten im Intervall $0 - 2\pi$, wobei wegen der Symmetrie drei Werte für die Verwindung auf der Halbbreite ausreichen. Zu beachten ist dabei, daß die Fortsetzung der Funktion in das Intervall $\pi - 2\pi$ so erfolgt, wie es einer ungeraden Funktion entspricht.

In ähnlicher Weise verfahren wir für die Funktion (21)

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda l(y) V} = \frac{1}{\lambda l_0 V} \sum_1^\infty \varepsilon_n \cos n\varphi$$

oder

$$\frac{l_0 \sin\varphi}{l(y)} = \sum_1^\infty \varepsilon_n \cos n\varphi.$$

Wir entnehmen der Darstellung

$$\frac{l_0 \sin\varphi}{l(y)}$$

an gewissen vorgeschriebenen Stellen die zugehörigen Ordinaten, wobei wir die Funktion als gerade Funktion fortsetzen müssen. Aus Symmetriegründen genügen wieder die Werte auf der Halbbreite. Die Endformeln sind übrigens in meiner Arbeit [1] angegeben.

Falls nun die Tiefen- und die Anstellwinkelverteilung Sprünge aufweist, so spalten wir zunächst je einen sprungfreien Anteil ab, den wir wie oben behandeln können. Die Sprunganteile approximieren wir in den betreffenden Teilintervallen durch einfache Funktionen und bestimmen ihre Fourierkoeffizienten rechnerisch. Die Gesamtkoeffizienten, mit denen wir in die Rechnung gehen müssen, bilden wir als Summe der entsprechenden Koeffizienten der Anteile. Mit ihnen bestimmen wir uns die Ausdrücke α_{mn} der Gl. (14) und bilden die Näherungsfolge der Gl. (34). Vorher müssen allerdings die Bedingungen (36) bzw. (35) als gültig nachgewiesen sein. Normalerweise konvergiert dann das Verfahren so schnell, daß man nach wenigen Schritten abbrechen kann. Für die Rechnung ist wichtig, daß $a_{mn} = a_{nm}$ ist und für jeden Iterationsschritt dieselben Zahlenwerte verwendet werden. Die in meiner Arbeit [1] angegebene Rechenvorschrift stellt eine Abart des hier entwickelten Verfahrens dar.

V. Zusammenfassung.

Durch eine geeignete Erweiterung der Prandtlschen Integro-Differentialgleichung gelingt es, eine wesentliche Einschränkung zu beseitigen, die bei der Auflösung dieser Gleichung durch Fouriersche Reihen bisher hinderlich war. Die in besonderer Weise gemachten Ansätze liefern für die gesuchten Fourierkoeffizienten ein vollstetiges unendliches Gleichungssystem, das für die Existenz einer Lösung nur die geringe Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit der gegebenen Funktionen verlangt. Die Auflösung dieses Systems durch schrittweise Näherung ist möglich, wobei sich ihre Eindeutigkeit leicht zeigen läßt.

VI. Schrifttum.

[1] Karl Jaeckel, Über ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung usw. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 47.
[2] Karl Jaeckel, Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung usw. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 135.
[3] Karl Jaeckel, Das Geschwindigkeitsfeld eines beliebigen dünnen und schwach gewölbten Tragflügelprofils. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 209.
[4] H. Schmidt, Übersicht über die Grundtatsachen der Theorie der tragenden Linie. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 223.
[5] H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung usw. Mathematische Zeitschrift Bd. 35 (1939), S. 245.
[6] H. Schubert, Über einige Eigenschaften elliptischer und nichtelliptischer Flügel. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 235.
[7] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig und Berlin (1912), S. VII.
[8] G. Hamel, Integralgleichungen. S. 119. Springer 1937.
[9] K. Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Phys.-math. Klasse, Berlin 1938.

Diese Arbeit ist mir während der Korrektur der vorliegenden Mitteilung durch Herrn Prof. Schmeidler, T. H. Berlin, bekannt geworden.

Digitized by Google

Zur Frage der bei Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebenden Drehsteifigkeit.

Von J. Meyer.

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerk-Mechanik.

Die Abhandlung gibt eine Übersicht über die die obige Frage behandelnden Arbeiten der letzten Jahre und nimmt zu ihren zum Teil stark von einander abweichenden Ergebnissen Stellung.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Die Untersuchungen von Grammel, Meyer und Behrmann. Grammel und Klotter und v. Sanden, Kimmel.
III. Folgerungen für die Praxis.
IV. Schrifttum.

I. Einleitung.

In den letzten Jahren war die Frage nach der bei Drehschwingungen maßgebenden Drehsteifigkeit von Kurbelwellen Gegenstand weitgehender theoretischer Untersuchungen. Von Grammel war 1933 behauptet worden, daß der übliche Verdrehversuch zur Bestimmung der Drehsteifigkeit von Kurbelwellen nicht die richtigen Werte liefere und demnach die hieraus errechneten Eigenschwingungszahlen falsch seien. Dies wurde jedoch von der Praxis immer bestritten. Unter den sich hieran anschließenden Arbeiten befinden sich zwei, deren Ergebnisse nicht nur gleich sind, sondern auch mit den Meßergebnissen der Praxis in Übereinstimmung stehen. Damit dürfte diese Frage als geklärt gelten. Im folgenden wird eine kurze Darstellung der dieses Problem betreffenden Arbeiten gegeben.

II. Die Untersuchungen von Grammel, Meyer und Behrmann, Grammel und Klotter und v. Sanden, Kimmel.

Die grundsätzliche Frage wurde 1933 von Grammel [1] aufgerollt, wobei er die Begriffe der Torsion erster und zweiter Art aufstellte. Diese beiden Verdreharten einer Kurbelwelle müssen streng unterschieden werden, weil sie durch verschiedenartige Beanspruchungen hervorgerufen werden. Torsion erster Art entsteht durch Wirkung eines im Wellenzapfen angreifenden Drehmoments, das wieder in einem Wellenzapfen abgefangen wird. Torsion zweiter Art entsteht durch Wirkung einer im Kurbelzapfen angreifenden Einzelkraft, die in der nächsten Kröpfung wieder am Kurbelzapfen abgefangen wird[1]). Mit Berücksichtigung des Lagerspiels ergaben die Rechnungen Grammels, welche durch statische Verdrehmessungen an einer Kurbelwelle bestätigt wurden, folgendes: Bedeutet M das Moment, P die im Kurbelzapfen angreifende Kraft und r ihren Abstand von der Wellenachse, so ist bei gleichen Momenten, also $M = P \cdot r$, die Verdrehung gleicher Querschnitte im ersten Falle größer als im zweiten. Eine Kurbelkröpfung scheint bei Verdrehung nach zweiter Art steifer zu sein.

Grammel betrachtete bei seinen Berechnungen in dieser Arbeit nur die Einzelkröpfung und kam trotz der Richtigkeit der eben angeführten Verhältnisse zu einem Ergebnis, das mit der Erfahrung in scharfem Gegensatz stand. Er verwirft nämlich den sonst üblichen, zur Bestimmung der Drehsteifigkeit von Kurbelwellen benutzten Verdrehversuch, wobei die Kurbelwelle an einem Ende festgehalten und am anderen Ende mittels eines Drehmomentes verdreht wird. Da hier eine Torsion erster Art vorliegt, in Wirklichkeit jedoch wegen der im Kurbelzapfen angreifenden Trägheitskräfte mit Torsion zweiter Art gerechnet werden müßte, die meist viel kleiner ist, so würde man mit der so ermittelten Drehsteifigkeit eine viel zu niedrige Eigenschwingungszahl errechnen. Bisher stimmten aber die gemessenen Eigenschwingungszahlen mit den auf Grund der versuchsmäßig ermittelten Torsion erster Art berechneten immer recht gut überein, so daß dieses Ergebnis in Fachkreisen teils Zweifel, teils Verwunderung erregte.

Dies war der Anlaß zu einer theoretischen Untersuchung, die der Verfasser gemeinsam mit Behrmann im Frühjahr 1936 in der DVL durchführten. Sie betrachteten erstmalig die Kurbelwelle als ein Gebilde, das nicht ohne weiteres auf eine glatte Welle mit Drehmassen zurückgeführt werden kann. Sie behandelten u. a. eine vierkröpfige Flugmotoren-Kurbelwelle und machten den genauen Ansatz, wie er in etwas abgeänderter Form auch in später erscheinenden Arbeiten benutzt wurde. Lediglich bei der Bestimmung der dort auftretenden Einflußzahlen wurde von einer exakten und daher viel Zeit erfordernden Bestimmung abgesehen und die für eine einzelne Kröpfung unbedingt zutreffende Torsion zweiter Art folgendermaßen berücksichtigt: Torsion zweiter Art sollte für jede Kröpfung jeweils nur bis zum nächsten Wellenzapfen gelten, und von dort aus weiter durchweg Torsion erster Art, da im Wellenzapfen trotz der vorhandenen Kurbelkraft ein Moment wirken muß. Die nachfolgenden Kröpfungen sollten also sozusagen nicht mehr entscheiden können, wie dieses Moment hinter dem Lager zustande kam. Diese nicht ganz exakte, jedoch verständliche Annahme gestattete eine sehr einfache Berechnung der Einflußzahlen. Um die Torsion zweiter Art nicht von vornherein zu benachteiligen, wurde sie als von der ersten Art extrem verschieden angenommen, und zwar als halb so groß wie diese, was sich gerade noch nach Grammel[2]) vertreten läßt. Damit ergaben sich folgende wichtige Ergebnisse:

1. Der übliche Verdrehversuch (Torsion erster Art) ergibt für vier und mehrkröpfige Kurbelwellen ausreichend genaue Eigenschwingungszahlen für die tiefsten Schwingungsgrade.
2. Allgemein werden die Schwingungszahlen höher liegen, als aus dem üblichen Verdrehversuch (Torsion erster Art) folgen würde, und zwar wird die Abweichung nach oben um so größer, je höher der betrachtete Grad ist.

Dieser Arbeit folgte im Herbst 1936 eine weitere von Grammel, Klotter und v. Sanden [2], die mit den Ausführungen in obiger Arbeit nicht einig ging, insbesondere die genäherte Bestimmung der Einflußzahlen ablehnte, und worin die gleichen Einwände gegen den üblichen Verdrehversuch erhoben wurden, wie in der ersten Arbeit von

[1]) Näheres hierüber siehe im Schrifttum unter [1] und [3].

[2]) Ing. Arch. Bd. 4 (1933) S. 299.

Digitized by Google

Grammel [1]. Die von der Praxis gefundene Übereinstimmung von durch Rechnung und Messung bestimmten Eigenschwingungszahlen wird so erklärt, daß bei der Massenreduktion Fehler gemacht werden, die sich mit denen durch Benutzung der nicht gültigen Torsion erster Art entstehenden aufheben, oder daß unsichere Daten vielleicht unbewußt nach der Seite des Meßergebnisses hin verschoben werden. Die Arbeit selbst ist wesentlich erweitert gegenüber der ersten von Grammel [1] und geht jetzt auf die ganze Kurbelwelle ein, wobei ein ähnlicher Ansatz benutzt wird, wie ihn Meyer und Behrmann in ihrer Arbeit machten. Die hier auftretenden Einflußzahlen wurden unter sehr großem Rechenaufwand ermittelt.

Die Praxis jedoch wollte die oben angeführten Gründe für die Ablehnung der Torsion erster Art nicht gelten lassen, und es wurden deshalb im Institut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart sorgfältige Versuche durchgeführt, die erneut bestätigten, daß für den tiefsten Schwingungsgrad die Torsion erster Art richtige Eigenschwingungszahlen liefert. Jetzt erst war man davon überzeugt, daß diese gute Übereinstimmung nicht auf Zufälligkeiten beruhen könne, sondern eine tiefere Ursache haben müsse. Dies gab die Anregung zu einer weiteren grundsätzlichen theoretischen Untersuchung, die sich stark an die Arbeit von Grammel, Klotter und v. Sanden [2] anlehnt und von Kimmel [3] durchgeführt wurde.

Als Hauptergebnis findet Kimmel das gleiche wie Meyer und Behrmann. Dies könnte zunächst überraschen. Jedoch läßt sich diese Übereinstimmung auch von der theoretischen Seite her sinnvoll erklären. Kimmel geht zwar von der Torsion zweiter Art aus, berücksichtigt aber im Gegensatz zu der ersten Arbeit Grammels [1] nicht nur die Haupttorsion, sondern auch die sogenannte Nebentorsion[1]). Dies kommt der Aufteilung der Verdrehungen in Torsion zweiter Art ohne Nebentorsion und Torsion erster Art in der Arbeit von Meyer und Behrmann sehr nahe. Kimmel konnte nämlich weiter einen Zusammenhang zwischen Torsion zweiter und erster Art aufdecken, der von Grammel bestritten worden war. Daraus ergibt sich, daß diese Nebentorsionen in der Torsion erster Art näherungsweise enthalten sind. Der Unterschied zwischen den Berechnungen der Einflußzahlen in beiden Arbeiten liegt also lediglich in der Genauigkeit und ist kein grundsätzlicher, womit die Übereinstimmung im Hauptergebnis keine zufällige ist.

III. Folgerungen für die Praxis.

Die Frage nach der bei Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebenden Drehsteifigkeit darf damit endgültig dahin beantwortet werden, daß der übliche Verdrehversuch (Torsion erster Art) beibehalten werden kann und für die beiden tiefsten Schwingungsgrade — und diese sind in der Regel die praktisch interessierenden — von vier- und mehrkröpfigen Wellen mit einem Knoten nahe einem Ende genügend genaue Eigenschwingungszahlen liefert.

IV. Schrifttum.

[1] R. Grammel, Über die Torsion von Kurbelwellen. Ing. Arch. Bd. 4 (1933).
[2] R. Grammel, K. Klotter u. K. v. Sanden, Die elastischen Verformungen von Kurbelwellen bei Torsionsschwingungen. Ing. Arch. Bd. 6 (1936).
[3] A. Kimmel, Grundsätzliche Untersuchungen über die bei den Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebende Drehsteifigkeit. Ing. Arch. Bd. 3 (1939).

Gaswechselvorgang und Grenzen der Ventil-Viertakt-Steuerung bei Flugmotoren.

Berichtigung.

In meiner Arbeit in Bd. 16 (1939) Lfg. 5 dieser Schriftenreihe muß es auf S. 274 linke Spalte Zeile 8 von oben heißen: Perlitisches GSC...

Der Stahl GSE ist ein austenitischer Cr-Ni-Stahl, der vorwiegend für Auslaßventile verwendet wird.

Fr. R. Schmidt.

Digitized by Google

Zur Schallstärke des von schnell bewegten Profilen erzeugten Schalles.

Von Werner Holle und Ernst Lübcke.

Bericht des Akustischen Laboratoriums der Technischen Hochschule Braunschweig und des Dynamowerks der Siemens-Schuckertwerke AG., Berlin-Siemensstadt.

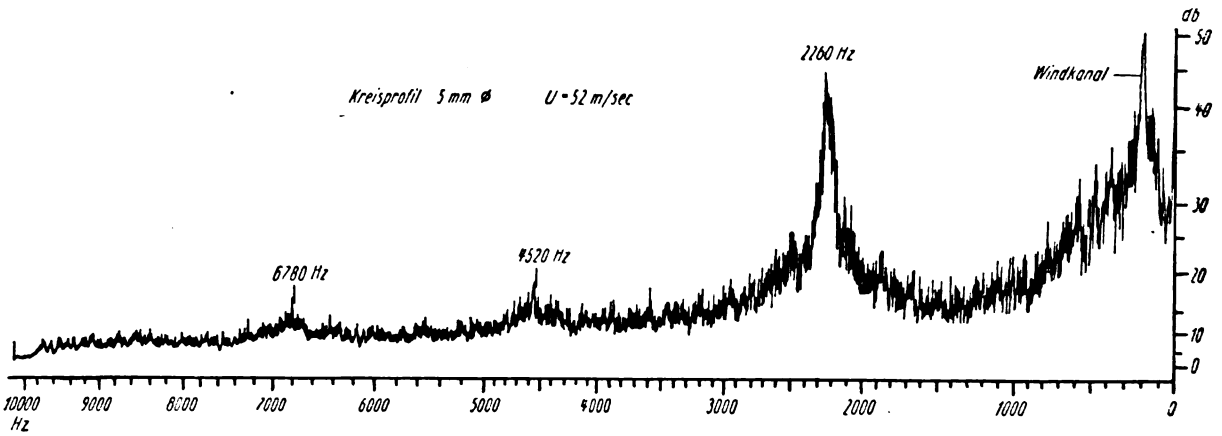


Bild 1. Hiebtonspektrum im Windkanal.

Gliederung.

I. Messungen an einfachen Profilen.
II. Messungen an Lüftern.
III. Schallumsetzungsgrad.
IV. Zusammenfassung.

Beim Vorbeiströmen von Luft an Profilen, Stäben oder Drähten treten Hiebtöne auf, deren Frequenz f Hz ist. Ist bei Kreisprofilen (Durchmesser D) die Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Luft U, dann ist die dimensionslose Wirbelfrequenz $\frac{f \cdot D}{U}$ eine Funktion der Reynoldsschen Zahl[1]) und hat einen Zahlenwert von 0,19[2]).

I. Messungen an einfachen Profilen.

Um Gesetzmäßigkeiten über die Schallstärke dieses Hiebtones zu gewinnen, wurden Untersuchungen über die Schallspektren von Hiebtönen durchgeführt. Bild 1 bis 3 geben Beispiele von drei verschiedenen Versuchsanordnungen wieder. Bild 1 zeigt das Schallspektrum bei der Analyse im Windkanal, wenn der Stab frei im Luftstrom stand; Bild 2 im Raum mit schallschluckenden Wänden, wenn zwei Stäbe zwischen zwei umlaufenden Rundläufen angebracht waren und das Mikrofon senkrecht zur Drehachse stand — hier tritt eine merkbare Dopplerverbreiterung auf — und Bild 3 ebenfalls mit einem Rundlauf und zwei aus ihm herausragenden Stäben gewonnen, wenn das Mikrofon in Achsrichtung stand. Aus den Aufnahmen ergibt sich, daß die Schallstärke der Obertöne gegenüber dem Grundton energiemäßig zu vernachlässigen ist, so daß bei den weiteren Messungen nur die Schallstärke des Grundtones bestimmt wurde.

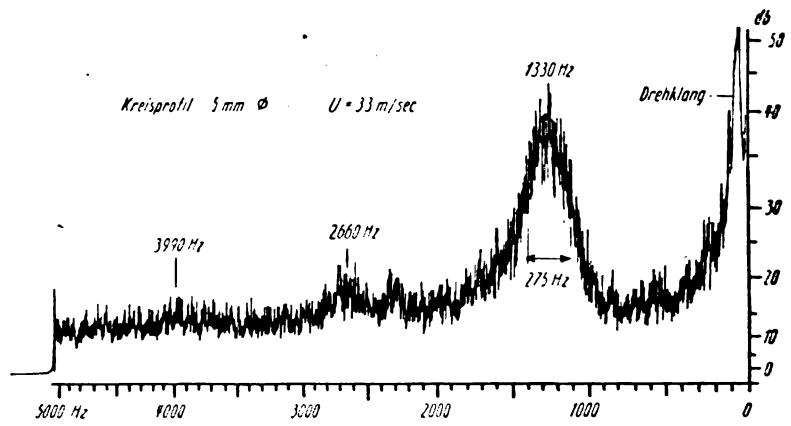


Bild 2. Hiebtonspektrum am Rundlauf bei Mikrophon-Anordnung in Normalebenen.

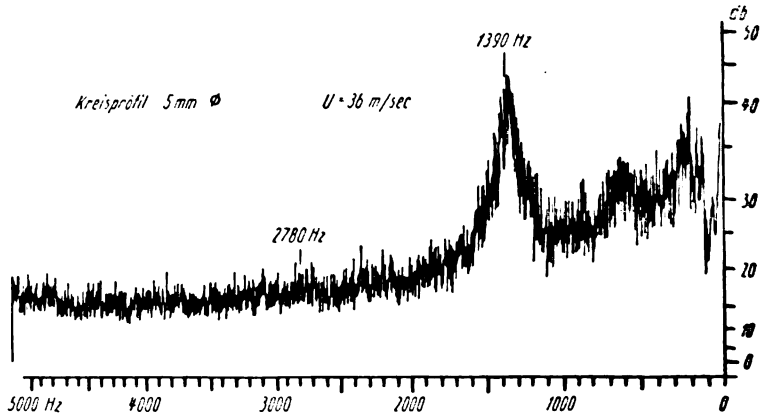


Bild 3. Hiebtonspektrum am Rundlauf bei Mikrophon-Anordnung in Achsrichtung.

Die Schallstärke des Hiebtones hängt von drei Größen ab:

1. Gestalt und Abmessungen des Profils,
2. Länge des Profils,
3. Geschwindigkeit von Luft bzw. von Profil.

Die Untersuchungen über die Abhängigkeit von der Länge zeigten, daß bei den Versuchen mit zwei Rundläufen erst oberhalb einer Länge von 15 cm die Schallstärke pro-

[1]) R. Lehnert, Diss. Leipzig 1937, Phys. Z. Bd. 38 (1937) S. 476.
[2]) Vgl. weiteres Schrifttum unter W. Holle, Akust. Z. Bd. 3 (1938) S. 321.

Digitized by Google

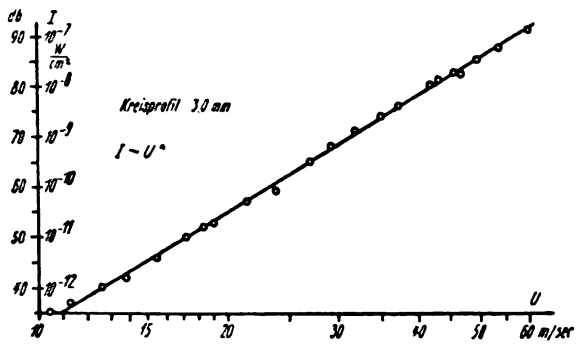


Bild 4. Schallstärke eines Hiebtones in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. $n = 7{,}6$.

portional der Länge ansteigt. Bei kürzeren Stäben fällt sie wesentlich schneller ab, weil an den Stabenden die Ausbildung der Wirbelstraße erheblich gestört ist. Als Beispiel für die Zunahme der Schallstärke mit der Geschwindigkeit ist Bild 4 anzusehen. Als Ordinate ist die Schallstärke J in W/cm^2 angegeben und außerdem das Schalldruckverhältnis in db, bezogen auf $0\,db = 2 \cdot 10^{-4}\,\mu$bar. Der angegebene db-Wert stimmt mit der Lautstärke in Phon für die Frequenz 1000 Hz überein. Es ist erstaunlich, wie wenig die Meßpunkte streuen, obwohl die Wirbelablösung Unregelmäßigkeiten enthält. Die Schallstärke steigt mit $J = \text{konst.} \cdot U^n$, wo $n = 7{,}6$ ist. In Bild 5 ist der Verlauf der Schallstärke für Kreisprofile zwischen 1 und 19,5 mm Durchmesser angegeben. Man sieht, daß der Exponent n eine Funktion des Durchmessers ist und von $n = 6$ bis auf $n > 8$ bei kleiner werdendem Durchmesser ansteigt. Bei nichtkreisförmigen Profilen streute der Exponent n nicht so stark. Er lag bei Vierkantprofilen, Breitseite und Diagonale gegen Bewegungsrichtung, zwischen 2 und 13 mm Kantenlänge zwischen $n = 6{,}6$ und 5,8. Auch bei Winkelprofilen $10 \cdot 2$ mm mit Winkelspitze oder Hohlseite nach vorn war $n = 6{,}0$. Im Windkanal wurde bei Kreisprofilen 3 mm Durchmesser $n = 11$ und 5 mm Durchmesser $n = 9$ gefunden, während aus den Messungen am Rundlauf über einen größeren Geschwindigkeitsbereich $n = 7{,}7$ bzw. $n = 7{,}1$ bestimmt wurde. Die Abhängigkeit von der Gestalt des Profils ist gering; mit kleinen Abmessungen steigt die Schallstärke etwas mehr an. Dies gilt zunächst nur für U bis 60 m/s.

Um den Schallstärkeverlauf bei höheren Umfangsgeschwindigkeiten zu erfassen, wurden noch Versuche mit einer Chrom-Molybdän-Stahlscheibe von 116 cm Durchmesser durchgeführt. Als Versuchsprofile wurden seitlich aus dem Scheibenrand herausragende, also parallel zur Scheibenachse zeigende Bolzen benutzt, die wegen der sehr großen Fliehkräfte bei 15 mm Durchmesser nur 40 mm lang waren. Das Ergebnis der Messungen zeigt Bild 6. Auch hier ist $J = \text{konst.} \cdot U^n$, wo $n = 7{,}3$ ist. Dann wurden als Versuchsprofile zwei radial in den Scheibenrand eingesetzte Stäbe von 8 mm Durchmesser und 200 mm Länge verwendet. Die Schallstärke des Hiebtones hat hier den Exponenten $n = 6{,}7$ für die Umfangsgeschwindigkeit, Bild 6. Das Geräusch der Scheibe allein betrug bei der größten Umfangsgeschwindigkeit in 1 m Abstand mehr als 120 Phon. Die Schallstärke des Scheibengeräusches steigt mit der Umfangsgeschwindigkeit etwas unregelmäßig an — hier kann aber noch eine zusätzliche Schallabstrahlung von der Scheibe (schwingende Platte) selbst sich überlagern —, doch erhält man hier einen mittleren Exponenten $n = 5{,}7$.

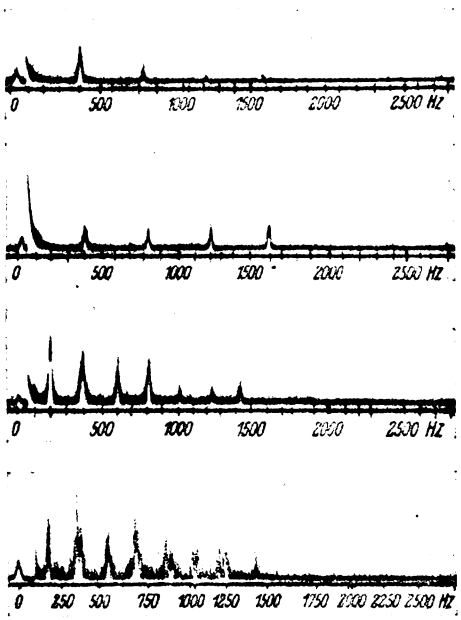


Bild 7. Schallspektrum eines Schraubenlüfters.

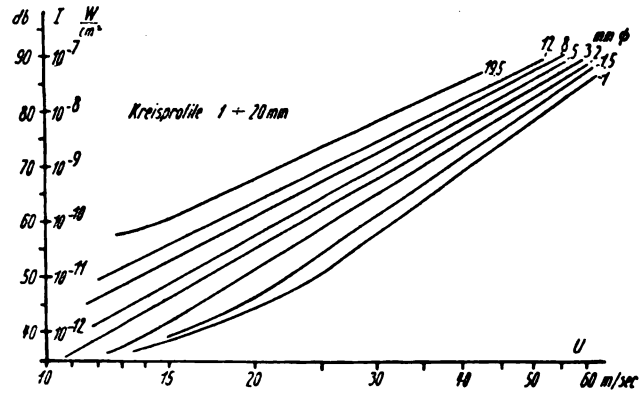


Bild 5. Schallstärke von Hiebtönen, Kreisprofile.

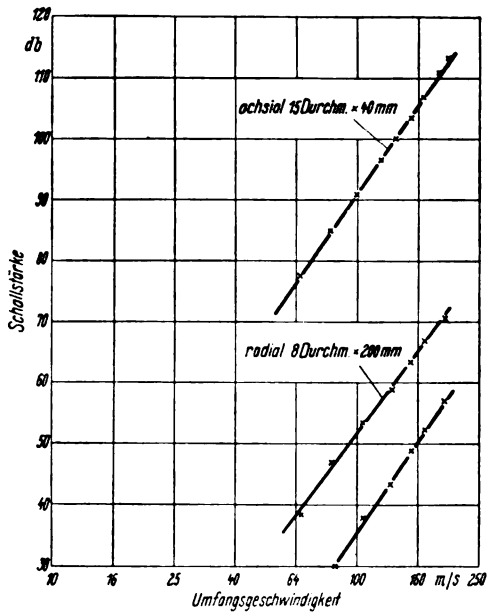


Bild 6. Zunahme der Schallstärke.

II. Messungen an Lüftern.

Bei Fliehkraft- und Schraubenlüftern erhält man im allgemeinen ein Schallspektrum, bei dem der Lüfterton oder Drehklang, d. h. die Zahl der Schaufeln oder Flügel multipliziert mit der Drehzahl überwiegt[3]). Es treten, wie Bild 7 für verschiedene Schraubenlüfter zeigt, im Spektrum die Obertöne zum Teil mit erheblicher Stärke auf, so daß bei den Schallmessungen an Lüftern stets der Gesamtschall gemessen wurde. Für eine große Zahl von Lüftern wurde die Zunahme der Lautstärke — also Schallstärkenverhältnis mit Frequenzbewertung — gemessen. Eine Anzahl Kurven sind in Bild 8 zusammengestellt. Man erkennt ohne weiteres,

[3]) E. Lübcke, Z. phys.-chem. Unterr. Bd. 51 (1938) S. 3

Digitized by Google

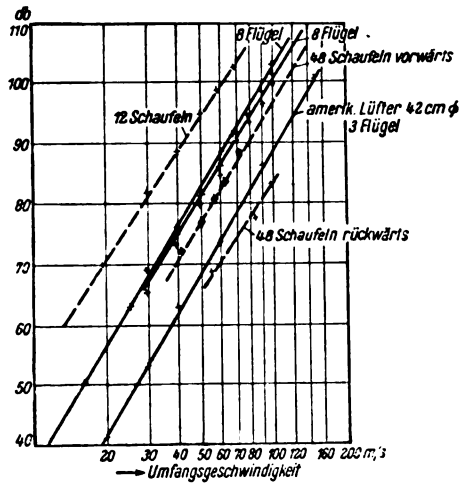


Bild 8. Lautstärkenanstieg bei verschiedenen Lüftertypen.

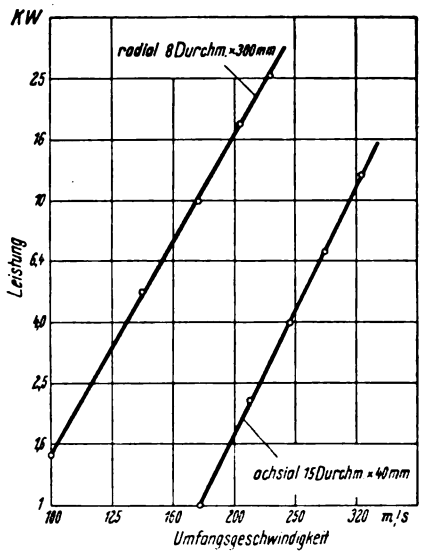


Bild 9. Luftreibungsarbeit vom Profil.

daß auch hier, unabhängig von der Form des Profils bei Schraubenlüftern und der Form und Stellung der Schaufeln bei Fliehkraftlüftern, die Lautstärke L sich durch eine Gleichung der Form $L = \text{konst.} \cdot U^n$ darstellen läßt, wo n zwischen 6,6 und 7,0 liegt. Da wir es hier meist mit hohen Lautstärken zu tun haben, entspricht diese etwa der Schallstärke.

III. Schallumsetzungsgrad.

Bei den Versuchen mit den Profilen in der Stahlscheibe zeigte sich eine erhebliche Leistungszunahme zum Erreichen derselben Drehzahl mit den Profilstäben gegenüber der unbesetzten Scheibe. Es wurde deshalb der zusätzliche Leistungsbedarf für die Bewegung der Profile bestimmt. Dieser Leistungsbedarf steigt nach Bild 9 auch exponentiell mit der Umfangsgeschwindigkeit an: $N_{zus.} = \text{konst.} \cdot U^m$, wo $m = 3{,}5$ bzw. 3.7 gefunden wurde. Dies bedeutet im Zusammenhang mit dem Anstieg der Schallstärke $J = \text{konst.} \cdot U^n$, daß die Verlustenergie in immer höherem Maße mit steigender Geschwindigkeit in Schallenergie umgesetzt wird. Während bei den normalen elektrischen Maschinen die Schalleistung nur etwa das 10^{-8} bis 10^{-9}fache der in der Maschine umgesetzten Energie ist, geht bei einfachen Profilen der Schallumsetzungsgrad, bezogen auf die zum Bewegen des Profils erforderliche Leistung erheblich in die Höhe und erreicht schon bei 250 m/s Geschwindigkeit die Größenordnung von mehreren Promille. Mit einer bei dem vorliegenden Versuchsmaterial vielleicht etwas kühnen Extrapolation kann man sagen, daß beim Erreichen der Umfangsgeschwindigkeit von der Größe der Schallgeschwindigkeit die gesamte für die Bewegung des Profils aufgewandte Leistung in Schallenergie umgesetzt wird.

Nimmt man nach von Kármán an, daß die Wirbelstärke G eines Einzelwirbels proportional der Wirbelschwanzgeschwindigkeit u ist, dann müßte die Wirbelstärke G auch der Profilgeschwindigkeit U proportional sein, da das Verhältnis von Wirbelschwanz- zu Profilgeschwindigkeit $\frac{u}{U}$ konstant bleibt. Der maximale Unterdruck P in einem Wirbel ist dem Quadrat der Wirbelstärke G^2 proportional, damit würde auch $P \sim U^2$ sein. Unter der Annahme nun, daß der Schalldruck am Mikrophon irgendwie proportional dem Druckunterschied im Einzelwirbel ist (wobei allerdings zu beachten ist, daß nicht der stationäre Wirbel hörbar ist, sondern nur die Entstehung des Wirbels, die Änderung in der Druckverteilung), müßte also der Schalldruck mit dem Quadrat, die Schallstärke mit der vierten Potenz der Geschwindigkeit ansteigen. Die Tatsache, daß die Exponenten wesentlich höher liegen, besagt, daß die letztere Annahme nicht gerechtfertigt sein dürfte. Offenbar ist anzunehmen, daß die Drücke in der Wirbelstraße quadratisch mit der Geschwindigkeit ansteigen, daß aber bei höheren Geschwindigkeiten die Strahlungsbedingungen besser werden.

Nach den Gesetzen der Aerodynamik ist der Strömungswiderstand W proportional U^2. Da nun die Leistung $L = W \cdot U$ ist, steigt diese also mit U^3. Aus unseren Messungen ergibt sich ein Leistungsanstieg mit $U^{3.5}$. Der Unterschied gegenüber der Theorie könnte eine Meßungenauigkeit sein. Es ist aber möglich, daß tatsächlich der Exponent größer als 3 ist, da — wie oben gezeigt — ein mit der Geschwindigkeit erheblich ansteigender Anteil der aufzuwendenden Leistung in Schall umgesetzt wird. Warum dieses so ist und wie der Mechanismus der Schallabstrahlung der Wirbelstraße aussieht, läßt sich nach unseren Versuchen noch nicht sagen.

Wir möchten mit diesem Beitrag die Frage zur Diskussion stellen. Läßt sich nämlich die Wirbelerscheinung bzw. der Schallumsetzungsgrad eindeutig klären, dann ergeben sich vielleicht Möglichkeiten, das hohe Geräusch, welches z. Z. mit jedem schnellbewegten Profil, z. B. einer Luftschraube, verbunden ist, herabzusetzen.

IV. Zusammenfassung.

Durch Messungen der Schallstärke von Hiebtönen und der Lautstärke des Drehklanges von Schrauben- und Fliehkraft-Lüftern in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit U der bewegten Profile wird für einen großen Geschwindigkeitsbereich bis zu 250 m/s ein Anstieg mit der 6. bis 7. Potenz der Umfangsgeschwindigkeit U gefunden. Aus gleichzeitigen Messungen der Luftreibungsverluste, die mit etwa der 3,5fachen Potenz der Umfangsgeschwindigkeit ansteigen, wird eine Erhöhung des Schallumsetzungsgrades von 10^{-8} bis 10^{-9} bei Umfangsgeschwindigkeiten von 20 bis 50 m/s auf mehrere Promille bei 250 m/s festgestellt. Eine aerodynamische Erklärung des Schallstärkeanstiegs mit mehr als der 4. Potenz bzw. der Erhöhung des Schallumsetzungsgrades steht noch aus. Ihre Kenntnis könnte Möglichkeiten zur Herabminderung des Geräusches schnellbewegter Profile bieten.

Digitized by Google

Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben unter Berücksichtigung der apparativen Verwirklichung des Regelgesetzes.

Von W. Oppelt VDI, Kiel-Neumühlen.

Bericht der Anschütz & Co. G. m. b. H., Kiel-Neumühlen.

Der Regler wird nach den apparativen Gegebenheiten zergliedert in »Regler mit Stellungszuordnung« und »Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung«. Eine weitere Aufteilung erfolgt nach dem Kennbild des Kraftschalters in »stetige«, »stufenweise« und »schrittweise« Regler. Die dadurch bedingte Abänderung früher erhaltener Ergebnisse wird dargestellt und erläutert. Die Betrachtung umfaßt mittel- und unmittelbare Regler; sie ist ausgedehnt auf Druckregler, Drehzahlregler, Temperaturregler und Fahrzeugselbststeuerung.

Gliederung.

1. Das Kennbild des Kraftschalters.
2. Auswirkung des Kraftschalterkennbildes auf den Regelvorgang.
   a) Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung.
   b) Regler mit Stellungszuordnung.
3. Mittel- und unmittelbarer Regler.

Auf Seite 447 der »Luftfahrtforschung« (Lieferung 8, 1939) ist eine vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmäßigkeit gebracht worden. Der Regler wurde dort in den »fehlerfreien« und fehlerbehafteten »wirklichen« Regler gegliedert. Die Fehler des wirklichen Reglers wurden in die kennzeichnenden Gruppen des »trägen«, »schwingungsfähigen« und »reibungsbehafteten« Reglers aufgeteilt. Diese drei Fehlergruppen besitzen eine gewisse Allgemeingültigkeit dadurch, daß jedes Regelsystem mit Masse, Reibung und Elastizitäten behaftet ist, und somit auch immer diese Fehler mehr oder weniger ausgeprägt zeigen muß. Darüber hinaus hat jeder Regler aber noch Fehler, die in seiner apparativen Gestaltung begründet und nur ihr eigen sind. Um bequeme apparative Hilfsmittel anwenden zu können, ist man von der strengen Verwirklichung (die ja auch nur unter Inkaufnahme von Trägheit, Schwingungsfähigkeit und Reibung zu erreichen ist) des Regelgesetzes abgegangen und bemüht sich bewußt, nur eine bestimmte, durch die ins Auge gefaßte Wahl der Hilfsmittel bedingte Annäherung an das Regelgesetz zu erreichen. Das bedeutet natürlich weitere Fehler, die jetzt mit dem apparativen Aufbau des Reglers zusammenhängen und eine weitere Begrenzung der Regelfähigkeit. Als Fortsetzung der früheren Arbeit soll deshalb darauf im folgenden noch etwas näher eingegangen werden, wenn auch diese Betrachtung nur einen Ausblick in die Vielzahl praktischer Ausführungsformen darstellt und auf die wesentlichsten Zusammenhänge beschränkt ist.

Die Betrachtung erfolgt für den mittelbaren Regler; das Verhalten des unmittelbaren Reglers wird daraus als Grenzfall abgeleitet. Die Arbeitsmaschine sei als »lastunabhängig« angesehen: eine Änderung der aufzubringenden Verstellleistung für das Steuerglied (beispielsweise in Abhängigkeit vom Verstellweg η bei Drosselklappen oder dem Ruder von Fahrzeugen) ändere das Verhalten der Arbeitsmaschine nicht[1]). Massenkräfte und Reibung seien vernachlässigt, desgleichen ein »Spiel« in den Übertragungsgliedern des Reglers.

Dann hängt die Auswirkung der apparativen Eigenarten im wesentlichen von der Art ab, in der die Einschaltung der Hilfskraft erfolgt; diese ist abhängig von dem Kennbild des Kraftschalters.

1. Das Kennbild des Kraftschalters.

Das Kennbild des Kraftschalters gibt an, wie die Laufgeschwindigkeit η' des Steuergliedes von der von den Fühlern kommenden Befehlssumme abhängt. Diese Beziehung kann unabhängig von der Zeit sein, oder in irgendeiner Form mit ihr zusammenhängen.

Die Unterteilung des »zeitunabhängigen« Kraftschalters erfolgt in den »stetigen« und »stufenweisen« Schalter; der stufenweise Kraftschalter kann dabei wieder in ein- und mehrstufige Anordnungen geteilt werden. Die sich dafür ergebenden Kennlinien des Kraftschalters sind in Bild 1 dargestellt. Zur Vergrößerung der Anschaulichkeit sind typische Ausführungsformen eines elektrischen Kraftschalters dazugetragen. Die Ausführungsform ist natürlich für den Verlauf des Regelvorganges nicht das Maßgebende; die Kennlinien werden in gleicher Weise auch bei hydraulischen, pneumatischen, optischen und anderen Kraftschaltern erhalten[2]).

Beim zeitabhängigen Kraftschalter ist der zur Arbeitsmaschine gegebene Befehl nicht allein von der Stellung des Kraftschalters abhängig, sondern auch noch von der Zeit; der Befehl wird in Schritten ausgeführt, »Schrittschalter«. Die drei Arten des zeitunabhängigen Kraftschalters lassen sich sämtlich auch zeitabhängig ausbilden. Dem stetigen Schalter entspricht dann der »stetige Schrittschalter«, dem stufenweisen der »Stufenschrittschalter«. Eine Darstellung der sich hierfür ergebenden Kennlinien erfolgt in Bild 2, wo wieder typische Ausführungsformen eines elektrischen Kraftschalters dazugetragen sind[2]).

[1]) Beispielsweise ist bei einer ventilgesteuerten hydraulischen Arbeitsmaschine mit unzusammendrückbarem Übertragungsmittel diese Lastabhängigkeit im allgemeinen zu vernachlässigen. Schon bei kleinen Ventilöffnungen kommt hier der ganze statische Vordruck zur Auswirkung; bei geschlossenem Ventil ist die Anordnung »selbsthemmend«. Daher sind in diesem Fall auch die Massenkräfte in Arbeitsmaschine und Steuerglied zumeist zu vernachlässigen. Bei einer hydraulischen Arbeitsmaschine mit zusammendrückbarem Übertragungsmittel oder einem Strahlrohrregler (bei dem der ausgeübte Druck mit der Strahlrohrstellung erst ansteigt) ist dies bei großen Massen im allgemeinen nicht mehr der Fall.

[2]) Vgl. z. B. W. Kniehahn, Die Elemente der Schalt-, Steuer- und Regeltechnik. Masch.-Bau-Betrieb 1930, S. 361 und 448 und W. Kniehahn, Verstärker. Masch.-Bau-Betrieb 1931, S. 239 und 272.

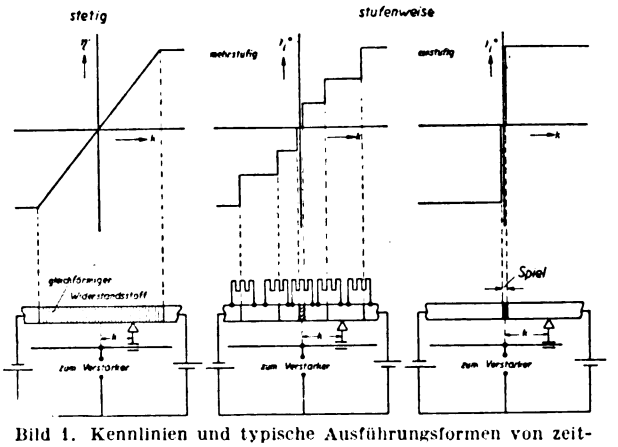


Bild 1. Kennlinien und typische Ausführungsformen von zeitunabhängigen Kraftschaltern.

Digitized by Google

2. Auswirkung des Kraftschalterkennbildes auf den Regelvorgang.

Die verschiedenen Kraftschalterkennbilder wirken sich bei Laufgeschwindigkeitsreglern und Stellungsreglern verschieden aus. Im folgenden erfolgt deshalb diese Teilung[3]). Für die Erläuterung unstetiger Regelvorgänge zeigt es sich als zweckmäßig, außer der Funktion selbst auch ihre zeitliche Ableitung in Abhängigkeit von der Zeit aufzutragen und zu betrachten.

Bei unstetigen Regelvorgängen ergibt sich ganz allgemein, daß sich dieselben in ihrer Sollage nicht beruhigen, sondern dort eine dauernde »Pendelung« vollführen, die nur verschwindet, wenn das Regelsystem (beispielsweise durch Reibung oder Spiel) dort eine genügend breite tote Zone besitzt. Die gewählte Aufteilung: Druckregler, Drehzahlregler, Temperaturregler und Fahrzeugselbststeuerung, bestätigt sich auch hier. Aus den Darstellungen Tafel I bis III zeigt sich stets, daß die Zustandskurve φ gegenüber der Kurve η des Steuergliedes beim Druckregler am wenigsten, bei der Selbststeuerung am weitesten zeitlich nachhinkt.

a) Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung.

Gegen die Anwendung des Laufgeschwindigkeitsreglers beim Drehzahlregler und der Fahrzeugselbststeuerung sprechen, wie in der früheren Arbeit erwähnt, methodische Gründe, weswegen diese Fälle hier nicht aufgezählt werden.

Wie sich die einzelnen Kraftschalterkennlinien bei einer gegebenen Befehlskurve $\varphi\ (t)$ auswirken, ist in Bild 3 dargestellt. Daraus geht hervor, daß die früher bei dem »wirklichen« Regler erhaltenen Ergebnisse jetzt streng für den Fall des stetigen zeitunabhängigen Kraftschalters gelten. Sie gelten offenbar auch mit guter Annäherung für den vielstufigen Schalter und für den stetigen (oder vielstufigen) Schrittschalter.

Erst für den Fall des geringstufigen oder einstufigen Schalters sind die Veränderungen so merkbar, daß eine gesonderte Betrachtung notwendig ist. Für das Verhalten des Reglers im Bereich dicht um seine Sollage ist zudem jeder unstetige Regler als geringstufig anzusehen; nur bei einer an dieser Stelle unendlich feinstufig werdenden Aufteilung wäre ein angenähert stetiger Übergang auf den Sollzustand gewährleistet. Deshalb sei im folgenden auf die Bewegungsformen des Regelvorganges bei einstufigem Kraftschalter ein Blick geworfen, um diese Grenze des Bewegungsverhaltens des Reglers zu zeigen.

α) Einstufiger zeitunabhängiger Kraftschalter.

Beim druckzuregelnden System ergibt sich der Verlauf des Regelvorganges nach einem Anstoß als eine abklingende periodische Bewegung mit während des Abklingevorganges zunehmender Frequenz, Tafel I.

Die Verstellgeschwindigkeit η^* des Steuergliedes ist konstant; aus der früheren Gleichung (1) des zu regelnden Systems ergibt sich damit für die Änderungsgeschw. φ^* des Zustandes eine e-Funktion. Die Ausschwingkurve des Zustandes setzt sich aus Kurvenstücken zusammen, die beim Schneiden mit der Steuergliedkurve ihr Maximum haben; die Ausschwingkurve der Zustandsänderung φ^* setzt sich aus Stücken von e-Funktionen zusammen. Die Verstellgeschwindigkeit des Steuergliedes wird in ihrem Vorzeichen jeweils umgekehrt, wenn der Zustand durch die Nullage geht. Dann müssen die beiden Flächenstücke f_{10} und f_{20} unter der e-Funktion der Zustandsableitung φ^* einander gleich sein, weil sie einzeln ein Maß für die Größtamplitude des Zustandes φ darstellen. Offensichtlich können die beiden folgenden Flächenstücke f_{11} und f_{21} dann nur kleiner sein, woraus sich auf dauerndes Abklingen und Anwachsen der Frequenz des Vorganges schließen läßt. In Wirklichkeit ist ab einem bestimmten Punkt des abklingenden Auspendelvorganges die Unvollkommenheit des Regelapparates so groß, daß infolge Massenwirkung, Reibung und Spiel usw. die Zeitverzögerung beim Umschaltvorgang in die Größenordnung des Regelvorganges fällt. Infolge der entdämpfenden Wirkung dieser Zeitverzögerung ist dann eine Dauerpendelung möglich. Bei passend gewählter Reibung bzw. Spiel kann der Vorgang auch in der dadurch verursachten toten Zone zum Stillstand kommen.

[3]) An dieser Stelle ist der Laufgeschwindigkeitsregler zuerst genannt, weil apparativ ein Stellungsregler durch Einbau einer Rückführung aus diesem hervorgeht.

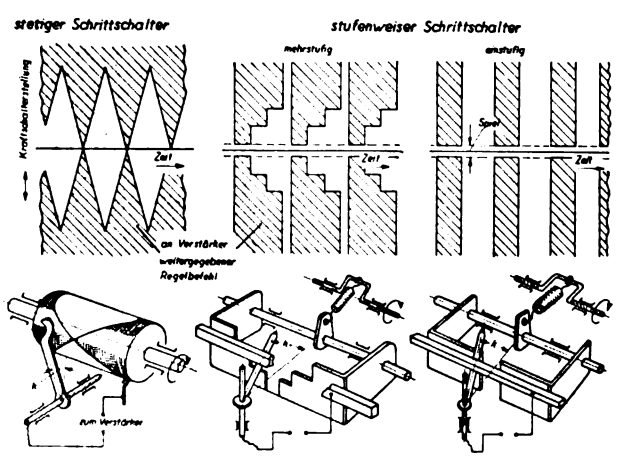


Bild 2. Kennlinien und typische Ausführungsformen von zeitabhängigen Kraftschaltern (Schrittschalter).

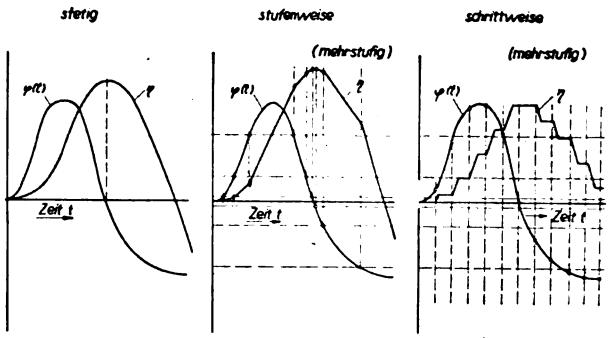
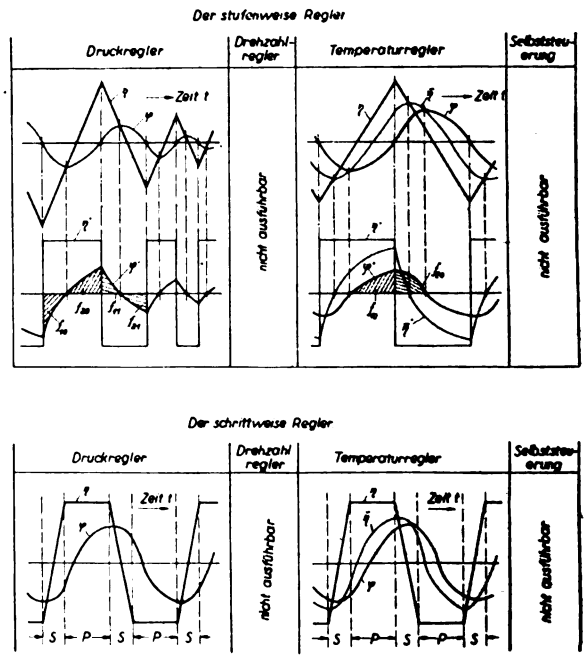


Bild 3. Verhalten verschiedener Laufgeschwindigkeitsregelsysteme bei gegebener Abweichung $\varphi\ (t)$.

Tafel I. Der unstetige Regler bei Laufgeschwindigkeitszuordnung.



Digitized by Google

Das temperaturzuregelnde System enthält infolge seines Aufbaues bereits eine Zeitverzögerung. Deshalb zeigt hier schon der ohne Spiel, Reibung und Schaltverzögerung arbeitende Schaltmechanismus ein Auftreten von Dauerpendelungen. Diese zeigen eine bestimmte Amplitude; bei großen Auslenkungen, wo wie beim Druckregler niedere Frequenzen auftreten, ist die entdämpfende Wirkung dieser Verzögerung noch zu gering.

Aus dem Schaubild in Tafel I sind die Verhältnisse bei der Dauerpendelung zu ersehen. Außer dem Verhalten von Steuerglied (η) und Zustand (φ) ist noch das (zeitlich verschleppte) Verhalten der Energiezufuhr $\bar{\eta}$ (frühere Gleichung 3c) aufgetragen. Jetzt können die Flächen f_{10}, f_{20}; f_{11}, f_{21}; ... laufend einander gleich sein und damit eine Dauerpendelung bestätigen.

β) Einstufiger Schrittschalter.

Der spiel- und reibungsfreie Schrittregler kann grundsätzlich nicht ohne Pendelung arbeiten; bei irgendeiner geringfügigen Abweichung vom Sollzustand macht das Steuerglied einen »Schritt«, der eine Abweichung des Zustandes nach der anderen Seite bewirkt, bei der folgenden Schaltung wieder rückgängig gemacht wird, usw. So bildet sich ein dauernder Pendelvorgang um die Nullage aus. Die Größe dieser Pendelungen ist offenbar um so größer, je weiter das Steuerglied bei jedem Schritt verstellt wird, d. h. je größer die Schrittdauer S und die Verstellgeschwindigkeit η_0^* des Steuergliedes ist; desgleichen ist bei großen Pausen P zwischen den einzelnen Schritten die Amplitude dieser Pendelung größer, als bei geringen Pausen, weil das System dann mehr Zeit hat, um der stattgefundenen Verstellung des Steuergliedes folgen zu können. Bei sehr kurzen Pausen jedoch hat das zu regelnde System zwischen zwei Schritten noch nicht die Zeit gefunden, um das Vorzeichen der Abweichung zu ändern, so daß ein mehrfaches Schalten nach einer und dann ein mehrfaches Schalten nach der anderen Seite auftritt (Bild 4). Mit diesem Mehrfachschalten wächst infolge der jetzt größeren Verstellung des Steuergliedes auch die Amplitude der Pendelung wieder an. Die Grenze für die Dauer $P_{\min}$ der Schaltpause, die eingehalten werden muß[4]), um Mehrfachschalten mit Sicherheit zu vermeiden, ist für den Druckregler aus dem Kurvenverlauf der Pendelung (Bild 4) einfach zu entnehmen.

Diese Grenze ist für den Druckregler bestimmt erreicht, wenn in einer Schaltpause der Zustand φ seine dort größtmögliche Abweichung $\frac{S\eta_0^*}{2z}$ erreicht hat, und nach einer Schaltung die folgende nach einer solchen Pause erfolgt, daß der Zustand φ gerade den Sollzustand durchlaufen hat. Dieser Betrag der Pause ergibt sich aber aus der angenäherten Beziehung

$$\frac{S\eta_0^*}{2z} = \frac{S\eta_0^*}{z}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_a}}\right)$$

zu

$$P_{\min} \approx 0{,}7\, T_a - S.$$

Die Verhältnisse beim Temperaturregler sind ähnlich; der Verlauf des Pendelvorgangs ist in Tafel I dargestellt. Infolge der im zu regelnden System hier liegenden Verzögerung muß die Dauer der Pause hier länger sein, als beim Druckregler, wenn Mehrfachschalten vermieden werden soll. Für den Verlauf der Energiezufuhr gilt jetzt dasselbe, wie beim Druckregler. Da aber die Verschiebung des Zustandes φ gegenüber der Energiezufuhr $\bar{\eta}$ auch im ungünstigsten Falle nicht über den Betrag T_a hinausgehen kann, ergibt sich jetzt

$$P_{\min} \approx 0{,}7\, T_v + T_a - S.$$

[4]) Es ist praktisch nicht immer möglich, diese Grenze einzuhalten, da die Schaltpause nicht zu lang gemacht werden kann, um unzulässig große Abweichungen vom Sollzustand innerhalb derselben zu vermeiden.

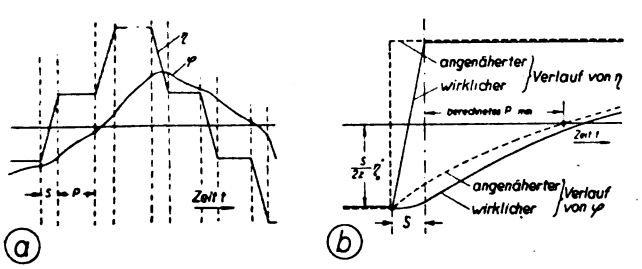


Bild 4. Zur Erläuterung des Mehrfachschaltens beim schrittgeregelten Druckregler.

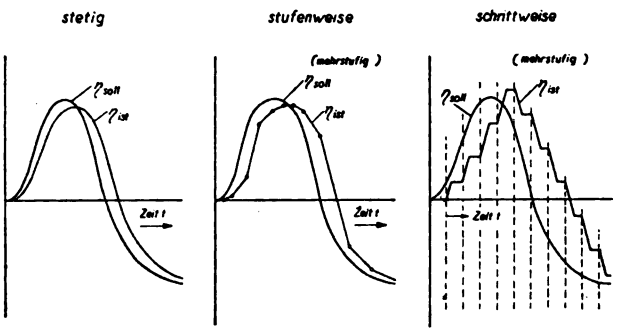


Bild 5. Verhalten verschiedener Regler mit Stellungszuordnung durch Rückführung bei gegebener Abweichung $\varphi(t)$.

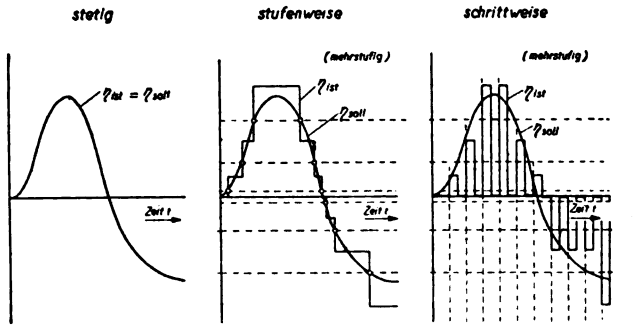


Bild 6. Verhalten verschiedener Regler mit Stellungszuordnung durch stellunggebenden Verstärker bei gegebener Abweichung $\varphi(t)$.

b) Regler mit Stellungszuordnung.

Zur Unterteilung des Gebietes für den Regler mit Stellungszuordnung genügt eine Unterscheidung nach dem Kraftschalterkennbild nicht. Es muß vielmehr eine weitere Unterscheidung nach der Art erfolgen, in der die Stellungszuordnung im Verstärker zustande kommt. Diese kann entweder durch Einbau einer sog. Rückführung erreicht werden, »Regler mit Rückführung«; oder aber der Verstärker ordnet von sich aus jeder Kraftschalterstellung eine bestimmte Stellung des Steuergliedes zu, »Regler mit stellunggebendem Verstärker«.

Die Auswirkung der verschiedenen Kraftschalterkennbilder bei dem Regler mit Stellungszuordnung für einen vorgegebenen zeitlichen Verlauf $\varphi(t)$ des Zustandes ist in Bild 5 und 6 dargestellt. Es zeigt sich bei dem Regler mit Rückführung stets ein Nachhinken des Steuergliedes gegenüber seiner Sollstellung; der Regler mit stellunggebendem Verstärker zeigt sich als stetiger Regler fehlerfrei (da in dieser Darstellung Trägheit, Schwingungsfähigkeit und Reibung nicht berücksichtigt sind), als stufen- und schrittweiser Regler zeigt er ein sprunghaftes Verhalten.

α) Der Regler mit Rückführung.

Die Aufgabe, die Stellung η des Steuergliedes immer verhältnisgleich dem von den Fühlern kommenden Befehl i zu halten, ist an sich schon eine Regelaufgabe. Auch hier ist ein zu regelndes System zu finden, nämlich der Verstärker; auch hier gibt es einen Zustand des zu regelnden Systems, nämlich die Stellung η des Steuergliedes. Schließlich gibt es auch ein Steuerglied, nämlich den Kraftschalter mit seiner Stellung k. Der Verstärker antwortet auf eine bestimmte Stellung des Kraftschalters mit einer bestimmten Verstell-

Digitized by Google

geschwindigkeit η^* des Steuergliedes, so daß sich die »Gleichung des zu regelnden Systems« ergibt zu

$$R\,\eta^* = k.$$

Diese Gleichung entspricht der beim drehzahlzuregelnden System gefundenen Gleichung. Sie ist gewonnen unter Vernachlässigung sämtlicher Massenkräfte im Verstärker. Berücksichtigt man diese noch, dann ergibt sich als neue Gleichung[1])

$$J\,\eta^{**} + R\,\eta^* = k.$$

Im letzteren Falle zeigt sich die Aufgabe also ähnlich der der Fahrzeugselbststeuerung.

Das Regelgesetz, mit dem diese Aufgabe hier gelöst wird, besteht darin, daß (genau wie beim Drehzahlregler und der Fahrzeugselbststeuerung) die Stellung des Steuergliedes verhältnisgleich der Abweichung vom Sollzustand gemacht wird. Das bedeutet hier, daß die Stellung des Kraftschalters abhängig von der Abweichung $(i-\eta)$ gemacht wird[5]):

$$k = a_1 \cdot (i - \eta).$$

Dieses Abhängigmachen erfolgt jetzt sehr einfach dadurch, daß auf den Kraftschalter außer dem vom Fühler kommenden Befehl i noch ein Einfluß entsprechend der Stellung η des Steuergliedes, ein sog. »Rückführeinfluß«, gegeben wird. Damit ergibt sich die Gleichung des geregelten Systems, hier also des Reglers, zu

ohne } Berücksichtigung $\quad R\,\eta^* + a_1\,\eta = a_1\,i \qquad (1\,a)$
mit } von Massenkräften $\quad J\,\eta^{**} + R\,\eta^* + a_1\,\eta = a_1\,i \qquad (1\,b)$

Die beiden Gleichungen (1) ergeben sich als Endergebnis obigen Gedankenganges, bei dem die Stellung η des Steuergliedes die zu regelnde Größe darstellte. Diese dort zu regelnde Größe η ist weiterhin aber ein Teil, nämlich das Steuerglied, in dem eigentlich zu betrachteten Regelvorgang (beispielsweise Druckregler). Somit ist ein durch einen Rückführungsregler geregeltes System als ein »geschachteltes« Regelsystem zu bezeichnen.

Die Gleichungen (1) zeigen das Verhalten des Rückführungsreglers. Man erkennt daraus, daß der Rückführungsregler bei Vernachlässigung seiner Massenkräfte[1]), Gleichung (1 a), sich als ein träges Regelsystem zeigt. Während einer befohlenen Änderung der Steuergliedstellung η kann das Steuerglied ja nur folgen, wenn es von seinem augenblicklichen Sollzustand abweicht. Denn nur dann ist ein (dazu notwendiger) Ausschlag k des Kraftschalters vorhanden. Die Auswirkungen auf den Regelvorgang sind früher unter »der träge Regler« besprochen. Bei Berücksichtigung der Massenkräfte, Gleichung (1 b), zeigt sich der Rückführungsregler als ein schwingungsfähiger Regler, dessen Auswirkungen ebenfalls früher erläutert sind. Hätten zudem noch die Rückführeinrichtungen merkliche Reibung, dann wären die unter »Regler mit Reibung« gebrachten Beziehungen zu betrachten[6]). Somit ist zu ersehen, daß (wie beim Drehzahlregler und der Fahrzeugselbststeuerung) auch hier beim »zu regelnden Verstärker« der »Rückstelleinfluß a_1« (der ja angibt, wieweit bei einer bestimmten Abweichung $i-\eta$ das »Steuerglied« — Kraftschalter — verstellt wird) ein bestimmtes Maß nicht überschreiten darf, falls störende Eigenbewegungen des Verstärkers vermieden werden sollen; d. h. bei einem bestimmten Ausschlag des Kraftschalters darf die Verstellgeschwindigkeit des Steuergliedes nicht zu groß sein. Durch das Auftreten störender Eigenbewegungen ist eine Grenze der Leistungsfähigkeit des Verstärkers gegeben.

Um die Darstellung des Rückführungsreglers als geschachtelten Regler noch weiter zu veranschaulichen, sind in Bild 7 auf diese Weise übliche Einrichtungen zur Übertragung des Rückführeinflusses gezeigt. Der vom Fühler kommende Befehl i erscheint in dieser Form als »Steuerung«, die Rückführeinrichtung als »Regler«.

Um dauernd einwirkende äußere Störungen auszugleichen, wird in das Regelgesetz ein Glied $c\int\varphi dt$ eingeführt; vgl. frühere Gl. (6). Dies kann apparativ dadurch verwirklicht werden, daß eine Integrationsvorrichtung (z. B. ein kleiner von der Abweichung φ beaufschlagter Motor) dieses Glied $c\int\varphi dt$ bildet. Bei Reglern mit Rückführung wird aber im allgemeinen ein anderer Weg gegangen, die Rückführung wird »nachgiebig« ausgebildet. Den kennzeichnenden Aufbau üblicher nachgiebiger Rückführanordnungen zeigt Bild 8. Der am Kraftschalter ankommende Rückführeinfluß erhält durch irgendeine Vorrichtung, beispielsweise eine Feder F, das Bestreben, auf Null zu bleiben. Damit ein gegebener Rückführbefehl im Verlaufe einer gewissen Zeit auch tatsächlich auf Null abklingen kann, ist die Rückführeinrichtung nachgiebig gemacht, beispielsweise durch einen zwischengeschalteten Bremszylinder B, eine Ausweichöffnung O oder ein Ausgleichsrohr R[7]). Die Wirkung dieser Vorrichtung ist folgendermaßen zu verstehen: Zu einer bestimmten Länge der Rückführverbindung (im mechanischen oder hydraulischen Fall) gehört eine bestimmte Nullage des Steuergliedes; Änderungen dieser Länge ändern auch die Nullage. Bei einer dauernden äußeren Gleichgewichtsstörung des Regelvorganges muß andererseits ein dauernder ausgleichender Ausschlag des Steuergliedes gegeben werden. Die Feder F wirkt aber solange auf die Nachgiebigkeit der Rückführung ein, bis dies ohne eine Abweichung φ vom Sollzustand erreicht ist.

Das Verhalten der nachgiebigen Rückführung ist durch folgende Rechnung zu erfassen:

Kraft an der Feder = Kraft am Bremszylinder

$$f_1\,r = r_1\,(\eta - r)^*,$$

wobei bedeuten:

r = Rückführbefehl, = Weg des Punktes P_1,
f_1 = Federkonstante der Feder F,
r_1 = Bremswiderstand des Bremszylinders B.

Andererseits war für die Verstellgeschwindigkeit η^* bei Vernachlässigung von Massenkräften:

$$\eta^* = \frac{k}{R}$$

und

$$k = a_1 \cdot (i - \eta),$$

[1]) Vgl. hierzu z. B. C. Himmler, Arch. f. techn. Mess. J 060—1.

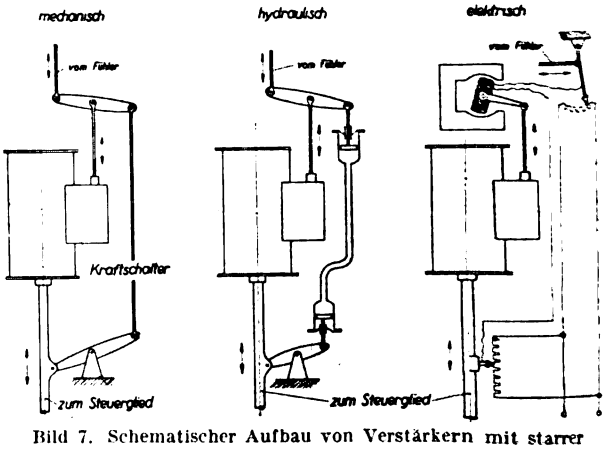


Bild 7. Schematischer Aufbau von Verstärkern mit starrer Rückführung.

[5]) Die Beizahlen des Rückführverhältnisses sind in dieser Rechnung gleich eins gesetzt, da ja doch $\eta = i$ für Kraftschalterstellung null herauskommen soll. Änderung des Regeleinflusses über Änderung der Rückführung soll hier nicht betrachtet werden; es führt zu einer Änderung der Proportionalitätsfaktoren a, b und c.

[6]) Die Tatsache, daß ein Laufgeschwindigkeitsregler durch einfaches Anbringen einer Rückführverbindung zu einem Stellungsregler umzugestalten ist, und die weitere Tatsache, daß ein zu regelndes System unter Einwirkung eines Stellungsreglers sich anders, gedämpfter, verhält, als unter Einwirkung von Laufgeschwindigkeitsreglern, wird häufig ausgedrückt, indem von einer »dämpfenden« Wirkung der Rückführung gesprochen wird. Diese Ausdrucksweise erscheint unzweckmäßig; die »dämpfende« Wirkung wird nicht durch die Rückführung erreicht, sondern durch die dann vorhandene Stellungszuordnung. Sie wäre natürlich gleicherweise vorhanden, wenn diese Stellungszuordnung auf irgend eine andere Weise hervorgerufen würde. (Vgl. hierzu: Regler mit stellunggebendem Verstärker 2, b, β). Es erscheint zweckmäßig, die Rückführung nur als ein Hilfsmittel zum Erreichen der Stellungszuordnung anzusehen. Auch der Ausdruck »Mengenrückführung« zur Bezeichnung beispielsweise der Tatsache, daß eine Dampfdruckregelung ausgeführt werden kann, indem in das Regelgesetz Dampfdruck und Dampfmenge eingehen, wäre in dieser Hinsicht zu vermeiden.

Digitized by Google

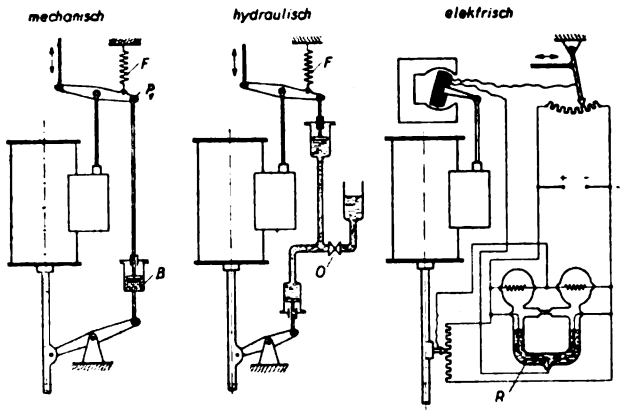


Bild 8. Schematischer Aufbau von Verstärkern mit nachgiebiger Rückführung.

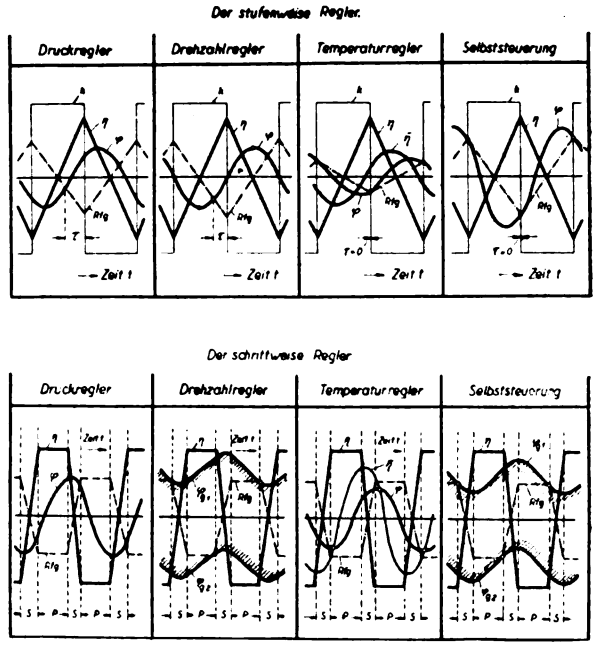
woraus sich ergibt:

$$R\,\eta^{\cdot} + \left(1 + R\,\frac{f_1}{r_1}\right) a_1\,\eta = a_1\,i + a_1\,\frac{f_1}{r_1}\int^{\cdot} i\,dt \quad . \; . \; (2)$$

Es ist aus Gleichung (2) zu entnehmen, daß das gewünschte Regelgesetz bei verschwindender Trägheit von der Vorrichtung streng befolgt wird, da im allgemeinen der Einfluß i eine reine Rückstelleinwirkung $a\varphi$ sein wird[8]). Die Trägheit des Reglers kann durch die nachgiebige Rückführung natürlich nicht beseitigt werden. Wird die Nachgiebigkeit $\frac{f_1}{r_1}$ der Rückführung immer größer gemacht, dann geht der Stellungsregler allmählich in einen Laufgeschwindigkeitsregler über, der Einfluß i verschwindet gegenüber der Verschiebeeinwirkung $\frac{f_1}{r_1}\int^{\cdot} i\,dt$ immer mehr[9]).

Auch bei dem Regler mit Rückführung weicht der eigentliche Regelvorgang bei stufen- und schrittweisem Kraftschalter nicht wesentlich von dem Vorgang bei stetigem Kraftschalter ab. Nur wenn die Stufen- oder Schrittzahl gegenüber den Zeiträumen, in denen sich der Regelvorgang abspielt, gering ist, tritt eine merkliche Abänderung ein; dies ist immer der Fall für das Verhalten des Reglers in seiner Nullage. Der Regelvorgang im Bereich des Sollzustandes sei daher noch näher erläutert. Auch hier tritt, wie beim Laufgeschwindigkeitsregler, eine Pendelung um die Nullage ein, falls nicht durch Spiel oder Reibung eine gewisse tote Zone um die Nullage vorhanden ist. Eine Zusammenstellung dieser Pendelvorgänge zeigt Tafel II. Dort ist aufgetragen die (rechteckige) Kurve der Kraftschalterstellung k, der zeitliche Verlauf der Stellung η des Steuergliedes und der zugehörige Verlauf φ des Zustandes. Bei der eingeführten Vorzeichenwahl, wo zu einem positiven η auch ein positives φ sich einstellt, muß dann die η-Kurve spiegelbildlich als Rückführkurve *Rfg* aufgetragen werden; der Regler soll zu einem positiven φ ja ein entgegenwirkendes negatives η erzeugen. Der Schnittpunkt der Rückführkurve *Rfg*, die also die Sollstellung des Steuergliedes darstellt, mit der Zustandskurve φ stellt dann den Punkt dar, in dem der Kraftschalter umgeschaltet wird.

Tafel II. Der unstetige Regler bei Stellungszuordnung durch Rückführung.



Der stufenweise Regler mit Rückführung zeigt als Druckregler eine Pendelung, die sich aber nur infolge einer Schaltverzögerung τ ausbilden kann. Die Begründung dafür ist die gleiche, wie bei dem Laufgeschwindigkeitsregler. Bei gleicher Pendelgröße kann hier die Schaltverzögerung τ größer sein, als die des Laufgeschwindigkeitsreglers. Ebenso kann sich beim Drehzahlregler die Pendelung nur unter Mitwirkung einer Schaltverzögerung τ ausbilden. Beim Temperaturregler und der Fahrzeugselbststeuerung dagegen, die über eigene Trägheitswirkungen verfügen (das temperaturzuregelnde System in den Speichermassen im Energieflußwege, die Selbststeuerung im Trägheitsmoment des Fahrzeuges), kann sich die Pendelung bereits ohne Schaltverzögerung ausbilden.

Der schrittweise Regler mit Rückführung zeigt, wie der entsprechende Laufgeschwindigkeitsregler, immer Pendelungen. Mit der Annäherung an die Sollage muß jeder endliche Schritt ein Überregeln bedeuten. Ob bei einer Schaltung das Steuerglied im einen oder anderen Sinne verstellt wird, ist durch die dann vorhandene Lage des Sollzustandes φ zur Rückführkurve *Rfg* der Sollstellung des Steuergliedes gegeben. Aus der schon beim Laufgeschwindigkeitsregler durchgeführten angenäherten Betrachtung ergibt sich hier für die kleinste Pause $P_{\min}$, für die noch einfaches Schalten nach beiden Seiten während der Pendelung auftritt:

$$\frac{S\,\eta_0^{\cdot}}{2\,z} - \frac{S\,\eta_0^{\cdot}}{z\,a} = \frac{S\,\eta_0^{\cdot}}{z}\left(1 - e^{-\frac{t_t}{T_a}}\right)$$

und daraus

$$P_{\min} = -\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a}\right) T_a - S.$$

Für den Temperaturregler, dessen Energiezufuhr $\bar{\eta}$ dem Verhalten des Druckreglers ähnlich ist, dessen Zustand φ aber noch weiter verschleppt ist, ergibt sich dann

$$P_{\min} = -\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a}\right) T_v + T_a - S.$$

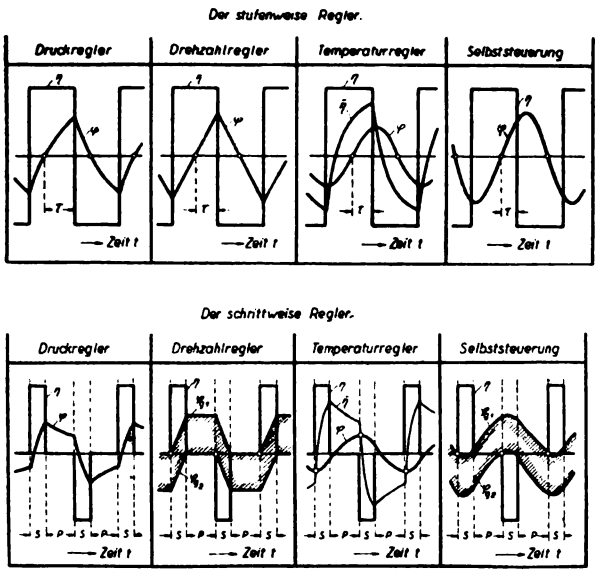
Auch Drehzahlregler und Fahrzeugselbststeuerung könnten mit einem schrittweisen Rückführungsregler ausgerüstet werden. Die Pendelung des Drehzahlreglers sowohl, wie die der Selbststeuerung, könnte sich dabei unbestimmt in einem gewissen Bereich zwischen den Grenzen φ_{g1} und φ_{g2}

[8]) Der Verstärker mit nachgiebiger Rückführung integriert also alle am Kraftschalter ankommenden Befehle, was zu beachten ist, wenn außer der Abweichung φ noch andere Größen (z. B. Dämpfungseinflüsse b u. dgl.) einwirken.

[9]) Die Bezeichnung »nachgiebige Rückführung« wird nicht einheitlich angewandt. Im Drehzahlreglerbau wird von »isodromer« Rückführung, im elektrischen Apparatebau von »elastischer« Rückführung gesprochen. Die Bezeichnung »nachgiebige« Rückführung erscheint am zweckmäßigsten, da die beabsichtigte Wirkung (Verschiebung der Nullage des Steuergliedes) nur durch das Nachgeben der Rückführung erreicht wird. Auch in der Bezeichnung der Auswirkung der nachgiebigen Rückführung auf den Regelvorgang besteht Uneinheitlichkeit. So wird öfters von einer zusätzlichen dämpfenden Wirkung der Nachgiebigkeit gesprochen. Der Übergang von starrer zu nachgiebiger Rückführung bedeutet jedoch, wenn keine anderen Apparatekonstanten gleichzeitig geändert werden, eine Entdämpfung, wie aus den in der früheren Arbeit gebrachten Tafel II bis IV bequem abzulesen. Daß tatsächlich unter gleichen betrieblichen Anforderungen mit nachgiebiger Rückführung ein Regelvorgang oft gedämpfter einzuregulieren ist, wie bei starrer Rückführung, hängt damit zusammen, daß jetzt (da äußere bleibende Störungen nun immer ohne bleibende Abweichung ausgeglichen werden) die Größe der Reglereinwirkung anders gewählt werden kann, wobei die Fehler des Reglers (z. B. seine Trägheit) weniger zur Auswirkung kommen.

Digitized by Google

Tafel III. Der unstetige Regler bei Stellungszuordnung durch stellunggebenden Verstärker.



abspielen. Beide Systeme verfügen über keine eigene Rückstellkraft; die Lage für die Pendelkurve ist also nur dadurch bestimmt, daß zu jedem folgenden Schaltpunkt der Zustand φ des Systems auf die andere Seite der Rückführkurve *Rfg* hinübergewechselt sein muß, was dann innerhalb eines gewissen Bereiches erfüllbar ist.

β) Der Regler mit stellunggebendem Verstärker.

Bei stetigem Kraftschalter liegt ein solcher Fall beispielsweise vor, wenn der Kraftschalter nur das Verstellmoment des Verstärkers steuert und dieses gegenüber einer Feder als Weg ausgewogen wird. Solche Einrichtungen werden bei einfachen Regelanordnungen und kleinen Verstelleistungen (z. B. in der Fernmeldetechnik) öfters angewandt. Da die Verstärkereinrichtung nicht masselos auszubilden ist und eine Rückstellkraft durch die Gegenfeder immer vorhanden ist, trifft hier hauptsächlich die Betrachtung des »schwingungsfähigen Reglers« zu; desgleichen sind naturgemäß die Verhältnisse des »Reglers mit Reibung« zu beachten.

Unstetige Kraftschalter kommen hier im wesentlichen in Verbindung mit Steuergliedanordnungen vor, die an sich schon eine bequeme Unterteilung der Steuergliedstellung in einzelnen Stufen befürworten. So wird beispielsweise die Leistung elektrischer Öfen einfach durch Zu- oder Abschalten von Heizelementen oder Vorwiderständen gesteuert. Das Verhalten des Reglers ist für die unstetigen Fälle in Tafel III dargestellt; für den stetigen Fall ergibt sich zwanglos der Anschluß an den »wirklichen« Regler. Auch diese Darstellung ist nur für den Pendelvorgang, der um die Sollage stattfindet, gebracht; bei größeren Abweichungen φ und vielgeteiltem Kraftschalter verläuft der Regelvorgang ohne einschneidende Veränderung durch seine Unstetigkeit.

Der stufenweise Regler mit stellunggebendem Verstärker zeigt als Druckregler eine Pendelung, die sich nur unter Einwirkung einer Schaltverzögerung τ ausbilden kann. Dies bestätigt sich auch für alle anderen Regelsysteme; es ist immer eine Schaltverzögerung τ zum Aufrechterhalten der Pendelung notwendig. Der Grund liegt darin, daß hier der Regler zwar unstetig, aber sonst ein fehlerfreier Stellungsregler ist, welcher (wie früher erläutert) für alle Regelsysteme gedämpftes Verhalten zeigte[10]).

Der schrittweise Regler mit stellunggebendem Verstärker zeigt, wie jeder Schrittregler, stets eine Pendelung. Die Größe dieser Pendelung wird mit kleineren Schritten und insbesondere kleineren Stufen der Steuergliedstellung geringer. Wie beim schrittweisen Regler mit Rückführung ergeben sich auch hier für den Drehzahlregler und die Fahrzeugselbststeuerung Bereiche, innerhalb deren die Pendelung stattfinden kann, da diese beiden zu regelnden Systeme über keine eigene Rückstellfähigkeit verfügen.

8. Mittel- und unmittelbarer Regler.

Die vorstehenden Ergebnisse sind für den verwickeltsten Regler, den mittelbaren Regler, erhalten. Sie gelten dann naturgemäß gleicherweise für den unmittelbaren Regler, für den der Verstärker wegfällt.

Beim unmittelbaren Regler sind die aufzubringenden Verstelleistungen in ihrer Größe derart, daß sie direkt von dem Arbeitsvermögen des Fühlers bewältigt werden können. Die Fühlsysteme, die jetzt ein verhältnismäßig großes Verstellmoment abgeben müssen, sind daher im allgemeinen mit merklichen Massen behaftet, weswegen hier die Betrachtung »der schwingungsfähige Regler« häufig beachtet werden muß. Desgleichen tritt »Reibung im Fühlsystem« und »Reibung im Steuerglied« bei unmittelbaren Reglern auf. Die grundsätzlichen Betrachtungen des fehlerfreien Reglers gelten natürlich gleicherweise für mittel- und unmittelbare Regler.

Der unmittelbare Regler wird im allgemeinen nur als Regler mit Stellungszuordnung ausgeführt; das Verstellmoment des Fühlers, das der Abweichung φ proportional ist, wird gegenüber einer Feder in Verstellweg verwandelt. Vereinzelt wird der unmittelbare Regler auch als Regler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung gebaut; das der Abweichung φ proportionale Verstellmoment des Fühlers wird dann gegenüber einer Dämpfungseinrichtung in Verstellgeschwindigkeit des Steuergliedes verwandelt. Von den unstetigen Regelanordnungen wird als unmittelbarer Regler insbesondere die Gruppe »stufenweiser Regler mit stellunggebendem Verstärker« beim Temperaturregler ausgeführt; Ausdehnungstemperaturregler schalten über ein Kontaktwerk als Steuerglied direkt die zu regelnde Leistung.

Am Regelsystem, insbesondere am Steuerglied, angreifende unregelmäßige und nicht eindeutig bestimmbare Kräfte (z. B. Rückdrücke von Ventilen und Drosselklappen, Reibungskräfte u. dgl.) müssen, um ein eindeutiges und damit brauchbares Verhalten des Reglers zu geben, wesentlich geringer sein, als die zur Verstellung zur Verfügung stehenden Kräfte. Damit ergibt sich die Grenze für die Anwendung unmittelbarer Regler.

[10]) Für den Temperaturregler ist das nicht ohne weiteres einzusehen. Es gelingt jedoch leicht, wenn die $\bar{\eta}$-Kurve durch (ungünstigere) gerade Strecken ersetzt wird; dann ergibt sich das gleiche Bild, wie beim stufenweisen Druckregler mit Laufgeschwindigkeitszuordnung.

Digitized by Google

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 3 enthält Arbeiten von: H. Muttray S. 65—69, B. Radomski S. 70—75, J. Weinhold S. 76—81, Ergänzung S. 81, F. Schultz-Grunow und K. Wieghardt S. 82—86, K. Schlaefke S. 87—88, G. Weymann S. 89—96

UFTF.-FORSCHG. | BAND 17 | LFG. 3 | SEITE 65 BIS 96 | MÜNCHEN, 20. 3. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Ein Beitrag zur Frage der Messung des Flugstaudruckes. Von H. Muttray . S. 65

Bemerkungen zur Ermittlung der Schubflußverteilung in Hohlquerschnitten. Von B. Radomski . . . . . Seite 70

Über Kippversuche mit einem Holm-Rippenrost. Von J. Weinhold . . . Seite 76

Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen. Ergänzung . . . . . Seite 81

Untersuchungen über die Wirkungsweise des Gleichrichters. Von F. Schultz-Grunow und K. Wieghardt . . . . . Seite 82

Zur harmonischen Analyse von Nockenkurven. Von K. Schlaefke . . . Seite 87

Über Maßnahmen zur Verminderung des Luftschraubenschalls. Von Dipl.-Ing. G. Weymann . . . . . Seite 89

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof zu richten. — Fernruf: 63 8211 Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrgangs. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. März 1940 Lfg. 3

Ein Beitrag zur Frage der Messung des Flugstaudruckes.

Von H. Muttray, Darmstadt.

Bericht der Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug (DFS), Darmstadt, Institut für Aerodynamik und Flugmechanik.

Es wird auf zwei Möglichkeiten zur Messung des Flugstaudruckes hingewiesen, die bislang noch keine Anwendung gefunden haben. Hiervon zeichnet sich das flugzeugfeste Meßverfahren durch besondere Einfachheit aus, gestattet aber nicht wie das bodenfeste Verfahren die gleichzeitige Ermittelung der Windgeschwindigkeit nach Größe und Richtung, die mitunter ebenfalls von Interesse ist.

Gliederung.

I. Übersicht über die bekannten Meßverfahren.
II. Das bodenfeste Verfahren.
III. Das flugzeugfeste Verfahren.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Übersicht über die bekannten Meßverfahren.

Zur genauen oder wenigstens genügend genauen Ermittelung der Fluggeschwindigkeit bzw. des Flugstaudruckes sind verschiedene Verfahren bekannt. Diese lassen sich in zwei Gruppen einteilen, die wir als bodenfeste und flugzeugfeste Meßverfahren bezeichnen können.

Bei den bodenfesten Meßverfahren wird die Erde als Bezugssystem für die in diesem Falle nur mittelbare Messung der Flugzeugeigengeschwindigkeit benutzt. Die Meßgeräte können entweder im Flugzeug oder auf der Erde angeordnet sein. Das bekannteste Verfahren dieser Art ist der sog. »Viereckflug«, bei dem zwei vorgegebene etwa im rechten Winkel zueinander liegende Strecken jeweils in der einen und in der umgekehrten Richtung durchflogen werden. Aus den nach Größe und Richtung gemessenen Geschwindigkeiten über Grund lassen sich dann leicht durch eine einfache geometrische Konstruktion die wahre Fluggeschwindigkeit und die Windgeschwindigkeit nach Größe und Richtung ermitteln. Voraussetzung für eine genügende Genauigkeit dieses Verfahrens ist hauptsächlich eine örtliche und zeitliche Gleichmäßigkeit des Windes nach Größe und Richtung über den Flugstrecken während der gesamten Dauer des Meßfluges.

Bei den flugzeugfesten Meßverfahren werden die Meßgeräte vom Flugzeug getragen und es wird unmittelbar die Relativgeschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber der Luft bzw. der Staudruck als Differenz zwischen dem leicht und vollkommen genau meßbaren ungestörten Gesamtdruck g und dem statischen Druck p in der Flughöhe gemessen. Diesem Verfahren haftet hauptsächlich die Schwierigkeit an, daß der statische Druck in der Umgebung des Flugzeuges gestört ist und daher nicht genügend genau gemessen werden kann. Eine genügende Genauigkeit erhält man erst, wenn man die statische Sonde in sehr großem Abstande vom Flugzeuge als sog. »Schleppsonde« anordnet.

Ein anderer Weg besteht darin, daß man einen Punkt mit dem ungestörten statischen Druck p innerhalb des Flugzeuges aufsucht bzw. künstlich schafft. Bei Doppeldeckern kann ein solcher Punkt noch verhältnismäßig leicht gefunden werden, da sich in einem bestimmten Bereiche zwischen den Tragflügeln der Unterdruck über der Saugseite des Unterflügels und der Überdruck unter der Druckseite des Oberflügels ausgleichen [1]. Bei Eindeckern müßte ein solcher Punkt erst künstlich geschaffen werden, z. B. nach dem Vorgehen von G. Kiel durch eine Verbundleitung zwischen zwei statischen Sonden, die ober- und unterhalb des Flügels angeordnet sind [1].

In jedem Falle aber sind erst zum Auffinden des Punktes, in dem vollkommen oder genügend genau der ungestörte Druck herrscht, zahlreiche Flüge durchzuführen, wobei der wahre Staudruck mit Hilfe einer »Schleppsonde« oder z. B. durch »Viereckflüge« gemessen werden muß.

Entsprechendes gilt für die vorhin erwähnte Staudruckmessung durch eine in der gestörten Strömung angeordnete Sonde. In diesem Falle dienen die Flüge zur Ermittlung des »Eichfaktors«, der sich wiederum mit dem jeweiligen Flugzustand ändert[1]).

Außer den bereits genannten grundsätzlichen Nachteilen haften den beschriebenen Arten der Staudruckvermessung nun noch gewisse praktische Nachteile an, die beide Meßmethoden zu unbequemen Verfahren machen; z. B. ist eine Schleppsondeneinrichtung häufig nicht leicht in einem Flugzeug unterzubringen.

Man ist daher bemüht, andere, einfachere und möglichst genauere Methoden zu finden, die insbesondere sofort angewandt werden können, d. h. ohne daß erst irgendwelche Flüge zur Justierung oder Eichung der Anlage gemacht werden müssen.

Im folgenden werden zwei Verfahren zur Messung des Staudruckes vorgeschlagen, die den gestellten Anforderungen in ausreichendem Maße nachkommen dürften.

II. Das bodenfeste Verfahren.

Das bodenfeste Meßverfahren, das im folgenden erläutert werden soll, setzt das Vorhandensein einer Kinotheodolit-Anlage voraus. Es kann also von vornherein von dieser Methode keine Anwendung in größerem Umfange erwartet werden und der Methode haften die allgemeinen Nachteile — allerdings auch Vorteile — der Kinotheodolit-Vermessung an. Insbesondere kann die Methode nur bei Wetterlagen mit Sichtverhältnissen, die gute photographische Aufnahmen gestatten, angewandt werden.

[1]) Ausnahme siehe unter [2].

Digitized by Google

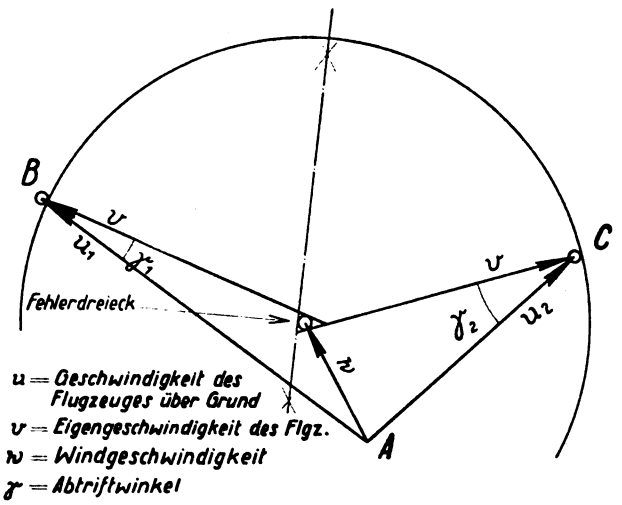


Bild 1. Graphische Ermittelung der Flugzeugeigengeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit auf Grund eines Winkelfluges mit Abtriftmessung.

Das vorzuschlagende Verfahren ähnelt dem »Viereckflug«. Es sind ebenfalls zwei geradlinige Flugstrecken abzufliegen, die auch wie beim Viereckflug zweckmäßig in einem größeren, etwa rechten Winkel zueinander liegen sollen. Im Gegensatz zu dem »Viereckflug« brauchen diese Strecken jedoch jeweils nur in einer Richtung bei konstantem Staudruck abgeflogen werden.

Die vollständige Auswertung der Filmstreifen ergibt nun die jeweilige Geschwindigkeit des Flugzeuges über Grund nach Größe und Richtung und die Abtriftwinkel. Durch eine ebenfalls einfache geometrische Konstruktion, die in Bild 1 wiedergegeben ist, ist dann leicht die wahre Fluggeschwindigkeit und die Windgeschwindigkeit nach Größe und Richtung zu ermitteln. Eine Ähnlichkeit mit dem üblichen »Viereckflug« besteht ferner darin, daß ebenfalls vier Bestimmungsstücke (zwei Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung, zwei Abtriftwinkel) aufgenommen werden, anstatt daß nur die unbedingt notwendige Mindestzahl von drei Größen eingehalten wird. Die Überbestimmung bedeutet in unserem Falle aber eine Genauigkeitskontrolle, die erreicht wird, ohne daß die Flugzeit für den gesamten Meßvorgang dadurch verlängert wird.

Der Vorzug des vorgeschlagenen Verfahrens soll überhaupt der sein, die Zeit des Meßvorganges, während der sich die atmosphärischen Voraussetzungen ändern können, herabzudrücken. Es braucht zum Abfliegen der Flugstrecken nur einmal, statt dreimal — wie beim »Viereckflug« — gewendet zu werden, so daß die Flugzeit wesentlich vermindert wird. Die praktische Erprobung des als »Winkelflug-Verfahren« bezeichneten Meßvorganges steht allerdings noch aus. Ein Nachteil dürfte der Zeitaufwand für die Bestimmung der Abtriftwinkel sein.

Das vorgeschlagene Verfahren ist, wie der Verfasser nach Fertigstellung des Manuskriptes der vorliegenden Abhandlung erfuhr, grundsätzlich nicht neu. Es ist zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit nach Größe und Richtung in der Flugzeugnavigation bereits bekannt [3]. Wenn es trotzdem an dieser Stelle mitgeteilt wird, so hat das seinen Grund darin, daß es in der Flugmechanik zur Bestimmung der Flugzeugeigengeschwindigkeit anscheinend nicht zur Einführung gelangt ist, denn auch in neueren Arbeiten über Flugstaudruckmessungen wird nicht auf das geschilderte Verfahren hingewiesen [4]. Es mag das mit der geringen Verbreitung von Kinotheodoliten, die eine vollständige Aufzeichnung der zeitabhängigen Lage eines Flugzeuges im Raume liefern, zusammenhängen.

III. Das flugzeugfeste Verfahren.

Das im folgenden beschriebene bordfeste Staudruck-Meßverfahren entspricht in seinem grundsätzlichen Aufbau der praktisch am meisten angewandten Methode der Messung des Staudruckes als Differenz zwischen dem ungestörten Gesamtdruck g und dem gestörten statischen Druck p in der Umgebung des Flugzeuges.

Die statische Sonde wird jedoch trotz fester Verbindung mit dem Flugzeuge in einem Punkte der Umgebung des Flugzeuges angeordnet, der so weit von dem die größte Störung hervorrufenden Flügel und Rumpf entfernt ist, daß die Meßgenauigkeit für die praktischen Zwecke vollkommen ausreichen dürfte.

Diese Stelle liegt in einiger Entfernung über dem höchsten Punkt des Seitenleitwerkes normaler Eindecker mit zentralem Seitenleitwerk, die wir im folgenden der Kürze halber nur betrachten wollen.

Diese Anordnung ist auf Grund der Ergebnisse der Abwindforschung der letzten Jahre gewählt worden.

Die wesentlichsten Ergebnisse der Abwindforschung, soweit sie uns in diesem Zusammenhang interessieren, lassen sich wie folgt kurz zusammenfassen [5] [6]:

a) Abgesehen von den Rändern des Bandes sinkt das vom Tragflügel erzeugte freie Wirbelband infolge des Abwindes mit zunehmender Entfernung vom Flügel stark nach unten ab; am stärksten ist das Absinken in der Symmetrieebene des Flügels ausgeprägt.

b) Die Größe des Abwindes nimmt mit zunehmendem Abstande vom Flügel, wenn man auf dem Wirbelbande in Anströmungsrichtung fortschreitet, ab und nähert sich assymptotisch einem konstanten Werte. Am stärksten ist die Abnahme in der Nähe des Flügels (Einfluß der gebundenen Wirbel).

c) Die Größe des Abwindes nimmt ferner stark ab, wenn man sich senkrecht zur Wirbelfläche von dieser nach oben oder unten fortbewegt. Der auf dem Wirbelbande liegende Größtwert des Abwindes tritt unter Umständen als ausgesprochener Spitzenwert auf.

d) Theoretisch und experimentell ermittelte Abwindwinkel hinter Flügeln mit verschiedener Auftriebsverteilung stimmen gut überein.

e) Der Flugzeugrumpf ändert die Abwindgröße in Leitwerksgegend nur in unmittelbarer Rumpfnähe erheblich, jedoch nicht in größerem Abstande; er besitzt keine wesentliche Breiten- und Höhenwirkung.

f) Der Schraubenstrahl fügt sich dem durch das Flügelprofil bzw. die gebundenen Wirbel und das freie Wirbelband bestimmten Stromlinienbilde ein, sinkt somit ebenfalls nach hinten zu ab.

Der Zusammenhang zwischen dem Abwindwinkel und der Störung des statischen bzw. des Staudruckes ist nun näherungsweise der, daß einem kleineren Abwindwinkel auch eine geringere Störung der Drücke entspricht.

Diese Aussage gilt allerdings nur für Punkte, die in genügender Entfernung, die etwa größer als 2 bis 3 Flügeltiefen sein mag, hinter dem Flügel liegen. In Flügelnähe hingegen ist die Größe der Drücke sehr stark durch die in Strömungsrichtung liegenden Komponenten der gebundenen Wirbel, die den Abwindwinkel nur in verschwindendem Maße beeinflussen, bedingt, und sie hängen weiter von der Verdrängungsströmung des Flügelprofiles ab.

Je mehr nun der Einfluß der freien in Strömungsrichtung liegenden Wirbel auf die Abwindgröße überwiegt, um so einfacher ist gleichzeitig der Zusammenhang zwischen Abwindwinkel und Druck. Der Abwindwinkel ist dann nur durch die ungestörte Strömungsgeschwindigkeit v_∞ und durch die in erster Näherung senkrecht zu dieser in den senkrechtstehenden Strömungsebenen liegenden Komponenten w der Wirbel-Umfangsgeschwindigkeiten gegeben [5] [6] (Bild 2). Der Zusammenhang zwischen dem örtlichen Stau-

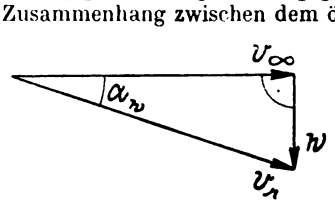


Bild 2. Lage der von den freien Wirbeln herrührenden Störungsgeschwindigkeiten senkrecht zur ungestörten Geschwindigkeit.

Digitized by Google

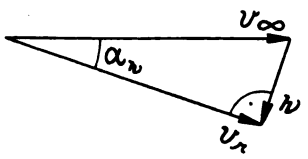
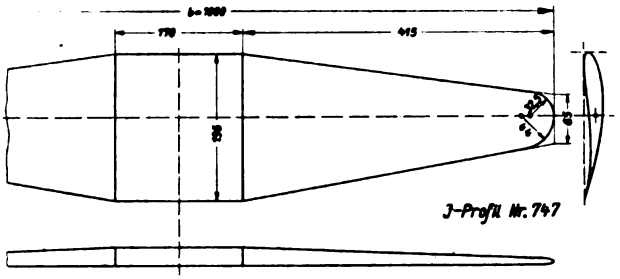


Bild 3. Lage der von den freien Wirbeln herrührenden Störungsgeschwindigkeiten senkrecht zur resultierenden Geschwindigkeit.

Bild 4 (rechts). Trapezflügel mit zylindrischem Mittelstück.



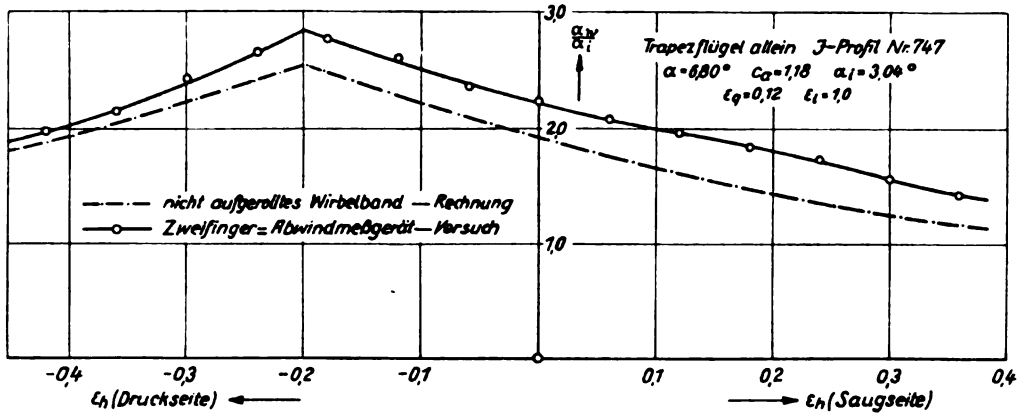


Bild 5. Größe der Abwindwinkel auf einer Senkrechten in Leitwerksgegend hinter dem Trapezflügel von Bild 4.

druck q_r, dem ungestörten Staudruck q_∞ und dem Abwindwinkel α_w ist damit aber nach Bild 2 ebenfalls bekannt. Die Beziehung lautet:

$$\frac{q_r}{q_\infty} = 1 + \alpha_w^2 \text{ bzw. } \frac{p}{q_\infty} = -\alpha_w^2 \quad \ldots \quad (1)$$

Gilt diese Beziehung, so ist in dem praktisch interessierenden Bereiche durchweg Unterdruck vorhanden. Dies erscheint nun aber unwahrscheinlich, da ja hinter der Flügelaustrittskante ein Überdruckgebiet liegt, das nach hinten zu abklingt. Es scheint somit eine noch kleinere Druckstörung, wie durch den Ausdruck (1) angegeben, vorhanden zu sein. Wir befinden uns demnach mit dem Ausdruck (1) hinsichtlich der Größe der Druckstörung auf der sicheren Seite.

Der Wirklichkeit wird man näher kommen, wenn man berücksichtigt, daß die freien Wirbel nicht in Richtung der ungestörten Strömung, sondern in der jeweiligen örtlichen Abströmungsrichtung liegen.

Für die Größe des Abwindes in Symmetrie-Ebene eines Flügels sind nun insbesondere die innen liegenden Wirbel maßgeblich [6]. Wir hätten dann die Störungsgeschwindigkeit w etwa senkrecht zur resultierenden Geschwindigkeit v_r anzunehmen (Bild 3). Damit erhalten wir aber

$$\frac{q_r}{q_\infty} = 1 - \alpha_w^2 \text{ bzw. } \frac{p}{q_\infty} = +\alpha_w^2 \quad \ldots \quad (2)$$

Der wahre Wert von $\frac{p}{q_\infty}$ wird innerhalb der durch die Ausdrücke (1) und (2) gegebenen Grenzen liegen. Es kann erwartet werden, daß wir in Flügelnähe an die durch den Ausdruck (2), in größerer Entfernung an die durch den Ausdruck (1) gegebene Grenze gelangen.

Wir wollen vorerst die Grenzen abschätzen.

Wir betrachten zu diesem Zweck als Beispiel einen Trapezflügel von der in Bild 4 angegebenen Form mit einem Seitenverhältnis $\frac{b^2}{F} = 7{,}085$ (b = Spannweite, F = Flächeninhalt des Flügels). Die Größen der Abwindwerte sind in Bild 5 und 6 auf Grund von Rechnung und Windkanalversuch aufgetragen [5]. Bild 5 enthält die Werte für eine Senkrechte, die annähernd in der Flügelsymmetrie-Ebene und in einem Abstande 1 gleich der halben Spannweite des Flügels $\left(\varepsilon_l = \frac{l}{b/2} = 1\right)$ hinter dem Druckmittelpunkte liegt. Der Auftriebsbeiwert ist $c_a = 1{,}18$.

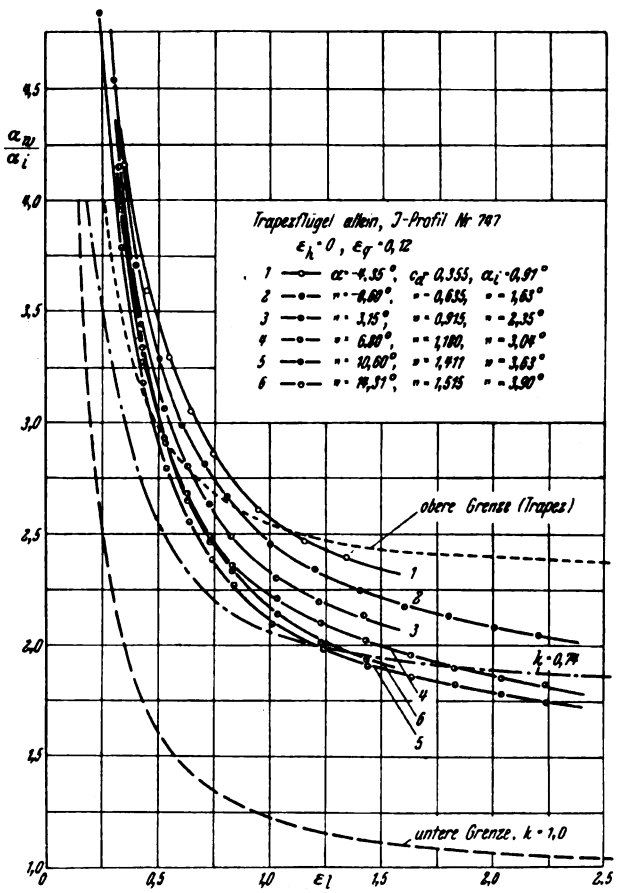


Bild 6. Größe der Abwindwinkel auf hinter dem Flügel von Bild 4 in Flügelhöhe und nahe der Symmetrieebene liegenden Horizontalen.

Bild 6 bringt die Werte für in Flügelhöhe in der Symmetrie-Ebene liegende Längsachsen bei veränderlichem Anstellwinkel[2]).

Aus Bild 5 entnehmen wir den »Spitzenwert« des Abwindwinkels zu etwa

$$\alpha_w = 2{,}8 \cdot 3{,}04^0 \approx 8{,}5^0 \approx 0{,}15$$

[2]) Bild 4 bis 7 entsprechen Bild 1, 6, 19 und 20 der Veröffentl. [5].

Digitized by Google

und damit die größte Druckstörung zu $\alpha_w^2 = 0{,}022$ bzw. zu 2,2%.

Dieser Wert gilt nun aber für einen Punkt, der etwa das 0,2fache der Halbspannweite ($\varepsilon_h = -0{,}2$) unterhalb des Flügels liegt. Die »Seitenleitwerkssonde« eines Eindeckers mit dem betrachteten Flügel dürfte aber etwa im Abstande $\varepsilon_h = 0{,}3 \cdot b/2$ über dem Flügel liegen. Damit erhalten wir aber

$$\alpha_w = 1{,}6 \cdot 3{,}04^0 \approx 4{,}9^0 \approx 0{,}0855$$

und die größte Störung des Druckes zu

$$\alpha_w^2 = 0{,}0073 \text{ bzw. } \approx {}^3/_4\,\%.$$

Der Größtwert des möglichen Meßfehlers ist also bereits sehr gering.

Erst bei Annäherung an $c_{a\max}$ kommen wir auf Grund des Bildes 6 auf einen höheren Betrag von etwa $1\,{}^2/_3\,\%$, da dann die Sonde sich dem Wirbelbande nähert ($\varepsilon_h \approx +0{,}13$) und der Abwind größer ist.

Für Zwecke der Flugüberwachung dürfte aber auch dieser Betrag noch ohne weiteres in Kauf genommen werden können.

Ein weiteres Beispiel möge aus Bild 7 berechnet werden.

In Bild 7 sind über dem in Strömungsrichtung gemessenen Abstande ε_l die größten in der Symmetrie-Ebene eines Flügels mit elliptischer Auftriebsverteilung auftretenden theoretischen Abwindwerte aufgetragen. Diese Werte haben für beliebige elliptische Flügelumrisse und beliebige c_a-Werte Gültigkeit.

Wir wollen ein Segelflugzeug mit dem Seitenverhältnis 1:15 betrachten und annehmen, daß die Seitenleitwerkssonde im ungünstigsten Falle — gerade bei Segelflugzeugen liegen aber die Verhältnisse wesentlich günstiger — in der Wirbelschleppe liegt. Der Abstand der Seitenleitwerkssonde beträgt etwa $\varepsilon_l \approx 0{,}5$.

Dann ist $\frac{\alpha_w}{\alpha_i} = 2{,}67$ und für $c_a = 1{,}5$

$$\alpha_i = \frac{1{,}5}{\pi \cdot 15} \approx 0{,}032,\ \alpha_w = 0{,}0855$$

und damit

$$\alpha_w^2 = 0{,}0073$$

d. h. die Störung ist nur ¾% des wahren Staudruckes. In Wirklichkeit wird sie kleiner als ½% sein.

Wir haben nun nur noch die Aufgabe, zu prüfen, ob die durch die Ausdrücke (1) und (2) festgelegten Drücke mit entsprechenden Versuchen übereinstimmen.

Zu diesem Zwecke sind in Bild 8 auf Grund von Göttinger Untersuchungen des Verfassers aus dem Jahre 1935 die hinter einem Rechteckflügel mit dem Seitenverhältnis $\frac{b^2}{F} = 5{,}36$ gemessenen Drücke und Winkel aufgetragen. In das Bild sind ferner die Schnittlinie des Wirbelbandes mit der Symmetrie-Ebene des Flügels und die Kurven $\pm\alpha_w^2$ eingetragen.

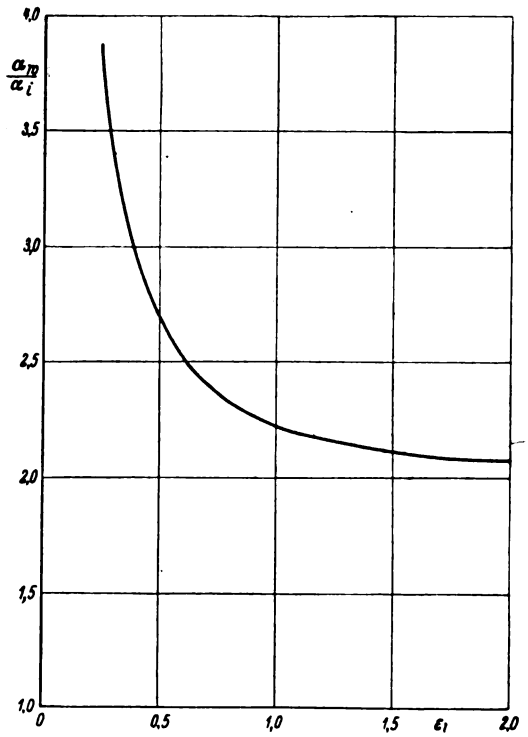


Bild 7. »Obere Grenze« der Abwindwinkel in der Symmetrieebene eines Flügels mit elliptischem Umriß.

Der Anstellwinkel des Flügels von dickerem Profil ($d/t \approx 0{,}17$) mit ebener Unterseite betrug $\alpha = -0{,}6^0$; der zugehörige Auftriebsbeiwert war $c_a = 0{,}55$. Die Abwindwinkel und Drücke sind jeweils über eine Breite von etwa $\pm 0{,}6 \cdot \frac{b}{2}$ konstant. Sie besitzen auf Grund der Rechteckflügel-Auftriebsverteilung in Richtung senkrecht zur Flügelebene ein verhältnismäßig breites Maximum — also keinen ausgesprochenen Spitzenwert.

Vergleicht man nun die Kurven $\frac{p}{q_\infty}$ und $\pm\alpha_w^2$ miteinander, so findet man, daß sie sich etwa im Abstande $a \approx 3\,t \approx \frac{b}{2}$ schneiden, d. h. in diesem Punkte ist der Überdruck hinter der Flügelaustrittskante auf die durch den Ausdruck (2) vorgegebene obere Grenze herabgesunken. Im Abstande $a \approx 4{,}0 \cdot t \approx 1{,}5 \cdot \frac{b}{2}$ ist keine Druckstörung vorhanden, und in größeren Abständen nähert man sich offensichtlich mehr der unteren Grenze.

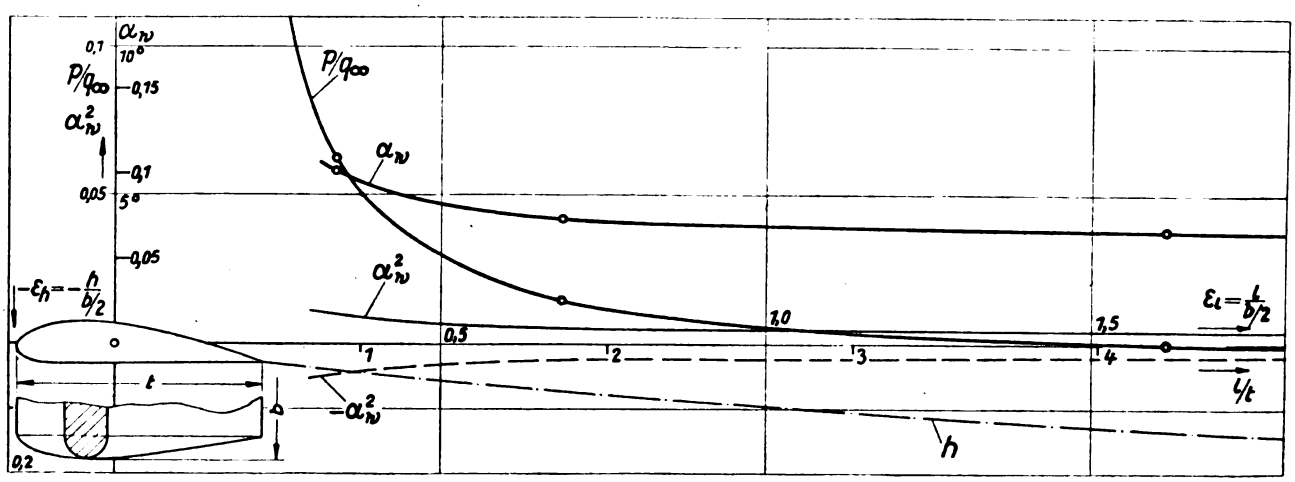


Bild 8. Größe der Abwindwinkel und Drücke auf einer in Flügelhöhe und in der Symmetrieebene eines Rechteckflügels liegenden Horizontalen.

Digitized by Google

Damit sind durch das mitgeteilte Meßergebnis die Überlegungen bestätigt worden, die aussagten, daß in Leitwerksgegend $\left(a \approx 3{,}0 \cdot t \approx \frac{b}{2}\right)$ praktisch für die Staudruckmessung nur vernachlässigbare Störungen des Druckfeldes um den Flügel auftreten. Das gewählte Beispiel hat allerdings den Nachteil, daß es nur für einen verhältnismäßig kleinen c_a-Wert gilt, und daß nur wenige Meßpunkte vorliegen, von denen der entscheidende bei $\varepsilon_l \approx 1{,}5$ liegende Wert der Druckdifferenz zudem gleich Null ist; doch war bei der Messung außerordentlich sorgfältig vorgegangen worden[3]), so daß mit einer nennenswerten Streuung nicht zu rechnen ist. Leider ist das vorliegende Beispiel das einzige, das gebracht werden konnte, da aus der Literatur keine Druckmessungen im Strömungsfelde hinter endlich langen Flügeln bekannt sind.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß es sich empfiehlt, auch bei der praktischen Anwendung der vorgeschlagenen Staudruck-Meßmethode im Flugzeuge auf die Messung der statischen Drücke große Sorgfalt zu verwenden. Ein Fehler der Druckanzeige durch Schräganströmung der stationären Sonde kann entweder durch Verwendung einer Sonde mit nur 2 Anbohrungen in der oberen und unteren Mantellinie des Sondenkörpers oder — nach einem Vorschlage von W. Spilger, DFS-Darmstadt — noch besser durch Verwendung einer in die Anströmungsrichtung windfahnenartig einschwenkbaren Sonde vermieden werden.

Das geschilderte Meßverfahren hat sich bei Segelflugzeugvermessungen der DFS-Darmstadt seit längerer Zeit gut bewährt. Sicher kann es auch bei Motorflugzeugen angewandt werden, wenn durch genügendes Hochlegen der Sonde die von Rumpf, Schraubenstrahl und Leitwerk ausgehenden Störungen ebenfalls genügend klein gehalten werden. Bei mehrmotorigen Flugzeugen, die keinen zentral angeordneten Motor besitzen, dürften die Verhältnisse hinsichtlich des Schraubenstrahles sogar besonders günstig liegen.

[3]) Die statische Sonde wurde in die Anströmungsrichtung eingeschwenkt und vor und nach der Messung geeicht.

IV. Zusammenfassung.

Das vorgeschlagene bodenfeste Fluggeschwindigkeits-Meßverfahren ähnelt dem bekannten Verfahren des »Viereckfluges«. Jedoch werden mit Hilfe einer Kinotheodolithanlage beim Abfliegen der Meßstrecken gleichzeitig die Abtriftwinkel gemessen, so daß sich ein nochmaliges Abfliegen der Meßstrecken in umgekehrter Richtung erübrigt. Es wird erwartet, daß mit der hierdurch gewonnenen Herabsetzung der Flugzeit eine wesentliche Erhöhung der Meßgenauigkeit verbunden ist.

Bei dem vorgeschlagenen bordfesten Staudruck-Meßverfahren wird die Sonde für den statischen Druck als »Seitenleitwerkssonde« in einiger Entfernung über dem höchsten Punkte des Seitenleitwerks normaler Eindecker angeordnet. Es wird an Hand einfachen Zusammenhanges zwischen Abwind und Druck gezeigt, daß an dieser Stelle nur eine vernachlässigbar kleine Störung des Druckfeldes um den Tragflügel vorhanden ist. Die gleiche Feststellung wird auf Grund von Windkanalmessungen im Störungsfeld hinter einem Tragflügel gemacht. Ein Fehler in der Anzeige des Druckes infolge Schräganströmung der Sonde kann durch besondere Ausbildung der Sonde leicht vermieden werden.

V. Schrifttum.

[1] G. Kiel, Beitrag zur wirklichkeitsgetreuen Messung des Flugstaudruckes und statischen Druckes. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) Lfg. 12, S. 583.

[2] P. Ruden, Flugstaudruckmessung beim Eindecker mit Sonden, die im Störfeld des Tragflügels liegen. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung I S. 588.

[3] Henry Hughes, Hughes-Waage Course Corrector. Flight (1929) Nr. 20, S. 403.

[4] Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik 2. Aufl. 1934 Bd. I: Mechanik des Flugzeuges, S. 19. Verlag J. Springer, Berlin.

[5] H. Muttray, Untersuchungen über den Abwind hinter einem Trapezflügel mit Rumpf und Schraube. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) Lfg. 3, S. 101.

[6] H. Multhopp, Die Berechnung des Abwindes hinter Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) Lfg. 9, S. 463.

Digitized by Google

Bemerkungen zur Ermittlung der Schubflußverteilung in Hohlquerschnitten.

Von B. Radomski.

Bericht der Dornier-Werke GmbH., Friedrichshafen.

Aus bekannten Methoden wird im folgenden ein für die Praxis geeignetes einfaches Rechnungsverfahren zur Bestimmung des Schubflußverlaufs in ein- und mehrzelligen Hohlquerschnitten hergeleitet. Die Schubflüsse infolge drillfreier Querkraftbiegung und reiner Verdrehung lassen sich bei einem Hohlquerschnitt mit n Zellen durch Lösung von n 3-gliedrigen Gleichungen ermitteln.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Schub infolge drillfreier Querkraftbiegung.
III. Schub infolge reiner Verdrehung.
IV. Zahlenbeispiel.
V. Gültigkeitsbereich.
VI. Der längsversteifte Hohlträger.
VII. Der einzellige Hohlquerschnitt.
VIII. Schrifttum.

I. Einleitung.

In Anlehnung an die von W. J. Goodey [1] angegebene Schubspannungsermittlung bei mehrzelligen Hohlquerschnitten für die Fälle drillfreier Querkraftbiegung und reiner Verdrehung entwickelte A. Pflüger [2] für den Fall drillfreier Querkraftbiegung beim mehrzelligen Hohlquerschnitt einen Lösungsweg, der zu einem einfacheren Rechenverfahren führte. H. Ebner wies auf die elementaren Spannungszustände des einzelligen Schalenrumpfquerschnitts [3] und des mehrzelligen Schalenflügelquerschnitts [4] hin und gab die Lösung der Schubspannungsermittlung für die Fälle drillfreier Querkraftbiegung und reiner Verdrehung mittels eines Systems dreigliedriger Gleichungen an, deren linke Seiten für beide Fälle die gleichen waren.

Im folgenden wird der Verlauf der statisch unbestimmten Rechnung und die Aufstellung der dreigliedrigen Gleichungen für den praktischen Gebrauch gezeigt und die Anwendung des Verfahrens für die Fälle drillfreier Querkraftbiegung und reiner Verdrehung an einem einfachen Beispiel erläutert.

In weiteren Ausführungen wird dann ein Hinweis gegeben, wie in der Praxis vorkommende Fälle, deren Rechnungsgang normalerweise kompliziert wäre, durch Umformung und Ersatz vereinfacht werden können.

II. Schub infolge drillfreier Querkraftbiegung.

Die Wahl der statisch unbestimmten Schubflüsse X_1, $X_2 \ldots X_n$ erfolgt entgegen der Festlegung durch A. Pflüger [2] so, daß der Rechnungsgang zahlenmäßig einfacher wird. Der Zustand alle $X = 0$ sieht wie folgt aus (Bild 1):

Man wählt die Stellen 1, 2...n, an denen man die zunächst unbekannten Schubflüsse X_1, $X_2 \ldots X_n$ zu Null annimmt, nicht wie Goodey und Pflüger an den Schnittpunkten der neutralen Achse $N - A$ mit den Stegen zwischen den Zellen, sondern an einer beliebigen Stelle in der Haut zwischen den Stegen.

Infolgedessen werden erstens die Schubflüsse t_0 im statisch bestimmten Hauptsystem zahlenmäßig viel kleiner, wie aus dem Vergleich von Bild 1 und Bild 2 deutlich hervorgeht, da die Schubflüsse t_0 sich nicht fortlaufend addieren, sondern wegen des mehrmaligen Vorzeichenwechsels um

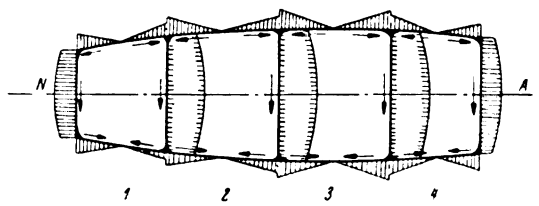


Bild 1. Schubfluß t_0 im stat. best. Nullsystem.

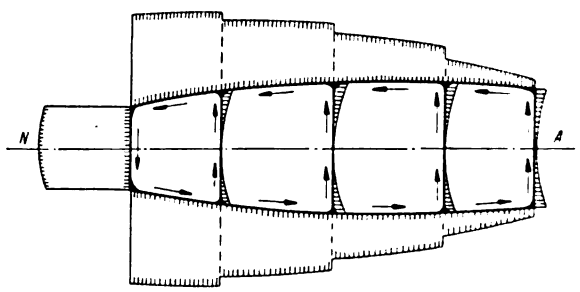


Bild 2. Schubfluß t_0 nach Goodey.

Null herum pendeln. Zweitens ergeben sich die statisch unbestimmten Größen X_1, $X_2 \ldots X_n$ später als kleine Werte, da es dem erfahrenen Rechner nach Bewältigung einiger Zahlenbeispiele sehr bald möglich sein wird, die Schubflußnullstellen im statisch bestimmten Hauptsystem so geschickt zu wählen, daß die statisch unbestimmten Größen X als kleine Korrekturglieder angesehen werden können.

Im folgenden bedeutet:

Q = Querkraft in z-Richtung,
J = Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts,
S = Statisches Moment des Querschnittsteils bis zur betrachteten Stelle,
δ = Wandstärke (veränderlich),
z = Abstand von der neutralen Achse $N - A$,
ds = Element der Abwicklung s,
t_0 = Schubfluß im stat. best. Hauptsystem,
$t_1, t_2 \ldots t_n$ = Schubfluß im Zustand $X_1, X_2 \ldots X_n = -1$,
G = Gleitmodul.

Der Schubflußverlauf im statisch bestimmten Hauptsystem ergibt sich bekanntlich zu:

$$t_0 = \frac{Q}{J} \int \delta \cdot z \cdot ds = \frac{Q}{J} \cdot S = \tau_0 \cdot \delta,$$

darin erstreckt sich das Integral vom Anfang des Integrationsweges bis zur betrachteten Stelle, für die der Schubfuß ermittelt werden soll. Der Verlauf des Schubflusses t_0 ist im Prinzip in Bild 1 angegeben. Die Pfeile geben die Richtung des Schubflusses an und gelten als Ersatz für Vorzeichen. Die Zustände $X_1, X_2 \ldots X_n = -1$ sind in Bild 3 dargestellt. Der Drehsinn der einzelnen Zustände ist als Linksmoment gewählt. Es ist darauf zu achten, daß im

Digitized by Google

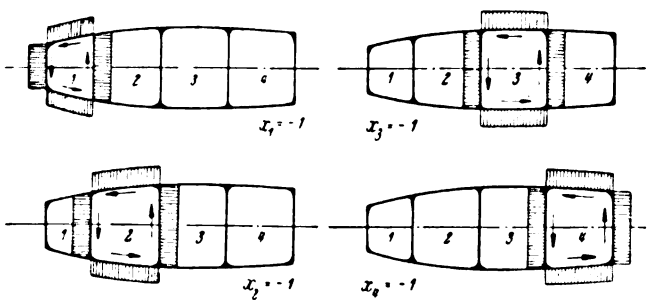


Bild 3. Zustände $X_n = -1$ und deren Schubflüsse t_n.

Steg zwischen zwei Zellen in den beiden Zuständen die Pfeilrichtung verschieden ist. Bei der Bestimmung des Vorzeichens der Verschiebungsgrößen ist die Pfeilrichtung des Schubflusses maßgeblich. Allgemein lautet die Formel für die Verschiebungsgröße:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{G}\int \frac{t_i \cdot t_k}{\delta} \cdot ds.$$

Im Bereich gleicher Pfeilrichtung von t_i und t_k wird der Anteil zum δ_{ik}-Wert positiv, im Bereich entgegengesetzter Pfeilrichtung jedoch negativ.

Bei der Aufstellung der Verschiebungsgrößen ergibt sich, daß sich die Werte δ_{11}, δ_{22}, ...δ_{nn} jeweils nur über einen Zellenumfang erstrecken. Sie sind immer positiv. Die Werte δ_{10}, δ_{20}...δ_{n0} erstrecken sich ebenfalls jeweils nur über einen Zellenumfang, ihre Vorzeichen können verschieden sein. Die Werte $\delta_{1,2}$, $\delta_{1,3}$...$\delta_{n-1,n}$ erstrecken sich sogar nur über den zwei benachbarten Zellen gemeinsamen Steg, ihr Vorzeichen ist immer negativ. Alle übrigen δ-Werte werden zu Null. Das dreigliedrige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} &= \delta_{10} \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} &= \delta_{20} \\ + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} &= \delta_{30} \\ + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} &= \delta_{40}. \end{aligned}$$

Es empfiehlt sich, den konstanten Faktor $\frac{1}{G}$, der alle δ-Werten gemeinsam ist, herauszulassen oder mit den G-fachen δ-Werten $G \cdot \delta = \delta'$ zu rechnen.

Der Schubfluß an einer beliebigen Stelle ist dann:

$$t = t_0 - t_1 \cdot X_1 - t_2 \cdot X_2 - t_3 \cdot X_3 - t_4 \cdot X_4.$$

Unter IV. folgt ein Zahlenbeispiel hierfür.

Die Resultierende des Schubflusses t des gesamten Querschnitts geht dann durch den Schubmittelpunkt, d. i. der Punkt, in dem die Querkraft angreifen muß, damit sich der Querschnitt nicht verdreht; Bedingung hierfür ist:

$$\oint t \frac{ds}{\delta} = 0.$$

III. Schub infolge reiner Verdrehung.

Nach dem Satz von Bredt $\int \tau\, ds = 2\,G\,\vartheta\,F$ läßt sich bekanntlich in einem mehrzelligen Hohlquerschnitt der Schubflußverlauf bestimmen mittels der Bedingungen, daß erstens alle Zellen den gleichen Drehwinkel ϑ beschreiben und zweitens das Gesamtdrehmoment gleich der Summe der Zellenmomente ist (Bild 4). Die n Zellenmomente M_1, M_2...M_n ergeben in den einzelnen Zellen die Schubflüsse $X_1 = \frac{M_1}{2F_1}$, X_2..., so daß in den Zwischenstegen jeweils die Differenz zweier Schubflüsse erscheint. Bei der Anwendung des Satzes von Bredt in der Form $\int t \cdot \frac{ds}{\delta} = 2\,G \cdot \vartheta \cdot F$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \oint_a \frac{ds}{\delta} - \int_d^c X_2 \cdot \frac{ds}{\delta} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot F_1 \\ - \int_d^c X_1 \cdot \frac{ds}{\delta} + \oint_f X_2 \cdot \frac{ds}{\delta} - \int_f^e X_3 \cdot \frac{ds}{\delta} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot F_2 \end{aligned}$$

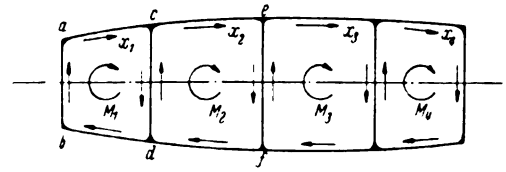


Bild 4. Schubfluß infolge reiner Verdrehung.

usw.

Da die Schubflüsse X konstant sind, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \oint_a \frac{ds}{\delta} - X_2 \cdot \int_d^c \frac{ds}{\delta} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot F_1 \\ - X_1 \cdot \int_d^c \frac{ds}{\delta} + X_2 \cdot \oint_f \frac{ds}{\delta} - X_3 \cdot \int_f^e \frac{ds}{\delta} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot F_2 \end{aligned}$$

usw. und man erkennt leicht, daß die Integrale den Werten $\delta' = G \cdot \delta$ des Gleichungsschemas für den Fall reiner Querkraft gleich sind. Infolgedessen erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11}' + X_2 \cdot \delta_{12}' &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot F_1 \\ X_1 \cdot \delta_{21}' + X_2 \cdot \delta_{22}' + X_3 \cdot \delta_{23}' &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot F_2 \end{aligned}$$

usw.

Da die Flächeninhalte F der Zellen bekannt sind, beträgt der Rechnungsaufwand, wenn man die δ'-Werte von der Rechnung für reine Querkraft übernehmen kann, nur die Auflösung der vorstehenden Gleichungen, aus denen man das zunächst noch unbekannte Glied $2\,G\,\vartheta$ durch folgende Umformung entfernt:

$$\frac{X_1}{2G\vartheta} = X_1'; \quad \frac{X_2}{2G\vartheta} = X_2'; \quad \frac{X_3}{2G\vartheta} = X_3' \text{ usw.}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} X_1' \cdot \delta_{11}' + X_2' \cdot \delta_{12}' &= F_1 \\ X_1' \cdot \delta_{21}' + X_2' \cdot \delta_{22}' + X_3' \cdot \delta_{23}' &= F_2 \end{aligned}$$

usw.

Hieraus werden X_1', X_2', X_3' usw. ermittelt.

Aus der Bedingung, daß das gesamte Verdrehmoment gleich der Summe der n Zellenmomente ist, ergibt sich:

$$M_d = 2 \cdot (X_1 \cdot F_1 + X_2 \cdot F_2 + X_3 \cdot F_3 + \ldots\ldots)$$

oder auch:

$$M_d = 2 \cdot (X_1' \cdot F_1 + X_2' \cdot F_2 + X_3' \cdot F_3 + \ldots.) \cdot 2\,G\,\vartheta.$$

Aus der bekannten Beziehung für den Verdrehwinkel

$$\vartheta = \frac{M_d}{G \cdot I_d} \text{ ergibt sich } I_d = \frac{M_d}{G \cdot \vartheta}.$$

Setzt man für M_d den obigen Ausdruck ein, so folgt der Drillungswiderstand des mehrzelligen Hohlquerschnitts:

$$I_d = 4 \cdot (X_1' \cdot F_1 + X_2' \cdot F_2 + X_3' \cdot F_3 + \ldots\ldots)$$

und die Schubflüsse um die einzelnen Zellen herum werden:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1' \cdot 2\,G\,\vartheta = 2 \cdot \frac{M_d}{I_d} \cdot X_1', \\ X_2 &= \quad\; = 2 \cdot \frac{M_d}{I_d} \cdot X_2' \text{ usw.} \end{aligned}$$

In den Stegen zwischen zwei Zellen ziehen sich die Schubflüsse der angrenzenden Zellen voneinander ab.

Wie gezeigt, läßt sich der Fall reiner Verdrehung eines n-zelligen Hohlquerschnitts auf das Rechenschema eines n-fach stat. unbest. Rechnung mit dreigliedrigen Elastizitätsgleichungen bringen, deren Aufbau ähnlich ist wie beim durchlaufenden Balken auf mehreren Stützen, wobei die beiden Fälle: 1. drillfreie Querkraftbiegung und 2. reine Verdrehung als zwei Einheitslastfälle angesehen werden können.

In Abschnitt IV folgt ein Zahlenbeispiel für beide Fälle.

Digitized by Google

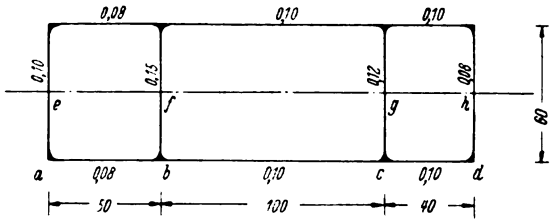


Bild 5a. Querschnittsabmessungen in cm.

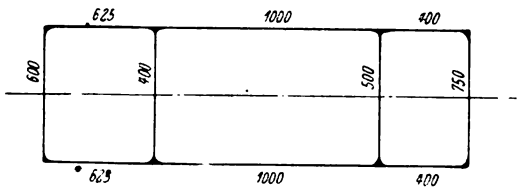


Bild 5b. Werte s/δ für die Abschnitte.

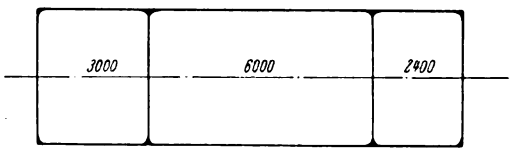


Bild 5c. Werte F_i in cm².

IV. Zahlenbeispiel.

Siehe Bild 5: Querschnittsabmessungen, Werte $\frac{s}{\delta}$ für die Abschnitte und Werte F_i.

Bild 6: $\frac{I}{Q}$-facher Schubfluß infolge reiner Querkraft,

Bild 7: $\frac{I_d}{2M_d}$-facher Schubfluß infolge reiner Verdrehung.

Trägheitsmoment der gesamten Querschnittsfläche (s. Bild 5a):

$$I = {}^1/_{12} \cdot 60^3 \cdot (0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}08) + 2 \cdot 30^2 \cdot (0{,}08 \cdot 50 + 0{,}1 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 40)$$
$$= {}^1/_{12} \cdot 60^3 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 30^2 \cdot 18 = 8100 + 32400 = 40500 \text{ cm}^4.$$

Die Nullstellen im stat. best. Hauptsystem des Schubflusses t_0 werden in den Mitten der drei Zellen angenommen. Dann sind die statischen Momente (s. Bild 6a) in den Punkten

a: $S = 25 \cdot 0{,}08 \cdot 30 = 60$ cm³, desgl. in b_{links},
d: $S = 20 \cdot 0{,}10 \cdot 30 = 60$ cm³, desgl. in c_{rechts},
b_{rechts} u. c_{links}: $S = 50 \cdot 0{,}1 \cdot 30 = 150$ cm³.

In den Holmen bei

b: $S = 60 + 150 = 210$ cm³, c: $S = 60 + 150 = 210$ cm³,
e: $S = 60 + {}^1/_8 \cdot 60^2 \cdot 0{,}10 = 60 + 45 = 105$ cm³,
f: $S = 210 + {}^1/_8 \cdot 60^2 \cdot 0{,}15 = 210 + 67{,}5 = 277{,}5$ cm³,
g: $S = 210 + {}^1/_8 \cdot 60^2 \cdot 0{,}12 = 210 + 54 = 264$ cm³,
h: $S = 60 + {}^1/_8 \cdot 60^2 \cdot 0{,}08 = 60 + 36 = 96$ cm³.

Verschiebungswerte für reine Querkraft und reine Verdrehung (s. Bild 5b)

$\delta_{11}' = 600 + 2 \cdot 625 + 400 = +2250$
$\delta_{22}' = 400 + 2 \cdot 1000 + 500 = +2900$ $\quad \delta_{12}' = -400$,
$\delta_{33}' = 500 + 2 \cdot 400 + 750 = +2050$ $\quad \delta_{23}' = -500$.

1. Reine Querkraft: Verschiebungswerte nach Bild 5b u. 6a

$\delta_{10}' = +(60 + {}^2/_3 \cdot 45) \cdot 600 - (210 + {}^2/_3 \cdot 67{,}5) \cdot 400 = -48000$,
$\delta_{20}' = +(210 + {}^2/_3 \cdot 67{,}5) \cdot 400 - (210 + {}^2/_3 \cdot 54) \cdot 500 = -21000$,
$\delta_{30}' = +(210 + {}^2/_3 \cdot 54) \cdot 500 - (60 + {}^2/_3 \cdot 36) \cdot 750 = +60000$.

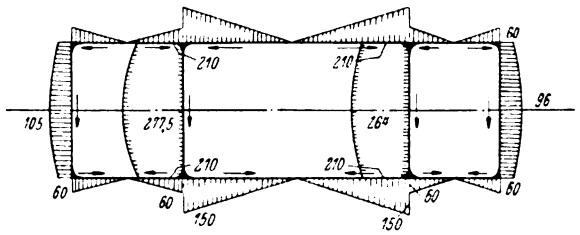


Bild 6a. Schubfluß $t_0' = \frac{I}{Q} \cdot t_0 = S$ (stat. Mom.).

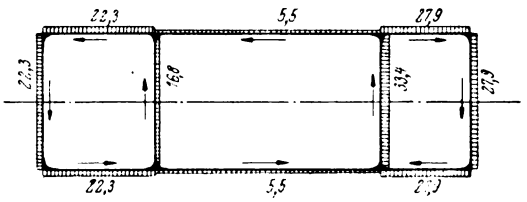


Bild 6b. Schubfluß der stat. Unbestimmten $\frac{I}{Q} \cdot (-t_1 \cdot X_1 - t_2 \cdot X_2 - t_3 \cdot X_3)$.

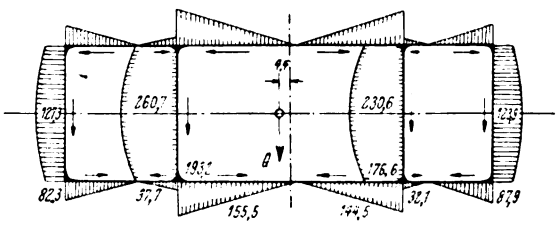


Bild 6c. Schubfluß infolge reiner Querkraft $\left(\frac{I}{Q}\text{-fache Werte!}\right)$ und Lage des Schubmittelpunktes.

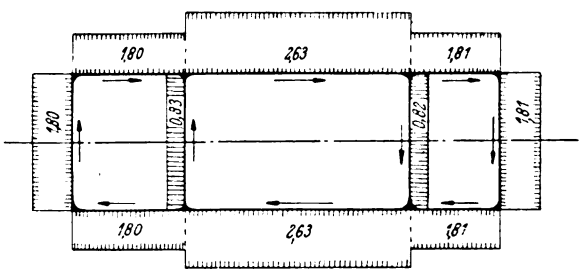


Bild 7. Schubfluß infolge reiner Verdrehung $\left(\frac{I_d}{2M_d}\text{-fache Werte!}\right)$

Die drei Gleichungen lauten dann

$$X_1 \cdot 2250 - X_2 \cdot 400 = -48000,$$
$$-X_1 \cdot 400 + X_2 \cdot 2900 - X_3 \cdot 500 = -21000,$$
$$-X_2 \cdot 500 + X_3 \cdot 2050 = +60000$$

und ihre Lösung ergibt

$X_1 = -22{,}3$, $X_2 = -5{,}5$, $X_3 = +27{,}9$ (s. Bild 6b).

Der endgültige Schubflußverlauf infolge reiner Querkraft

$$t = t_0 - t_1 \cdot X_1 - t_2 \cdot X_2 - t_3 \cdot X_3$$

ist in Bild 6c dargestellt.

Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes:

Die Lage des Schubmittelpunktes ist gegeben durch die Resultierende des Schubflusses t. Es wird das Moment des Schubflusses t auf die Mitte des mittleren Feldes bestimmt:

$M = -(60 + {}^2/_3 \cdot 45) \cdot 60 \cdot (50 + 50)$,
$-(210 + {}^2/_3 \cdot 67{,}5) \cdot 60 \cdot (50)$,
$+(210 + {}^2/_3 \cdot 54) \cdot 60 \cdot (50)$,
$+(60 + {}^2/_3 \cdot 36) \cdot 60 \cdot (50 + 40)$,
$-22{,}3 \cdot 2 \cdot 3000 - 5{,}5 \cdot 2 \cdot 6000 + 27{,}9 \cdot 2 \cdot 2400$
$= -179000$.

Die Resultierende des Schubflusses t ergibt sich zu:

$Q = 60 \cdot (60 + {}^2/_3 \cdot 45 + 210 + {}^2/_3 \cdot 67{,}5 + 210 + {}^2/_3 \cdot 54 + 60 + {}^2/_3 \cdot 36) = 40500$.

Digitized by Google

Exzentrizität aus der Mitte des mittleren Feldes: $e = \frac{179000}{40500}$ = 4,4 cm links der Mitte (s. Bild 6c).

Probe für die Richtigkeit des Schubmittelpunktes mittels der Bedingung

$$\int t \frac{ds}{\delta} = 0!$$

$$210 \cdot \frac{60}{0{,}15} + \frac{2}{3} \cdot 67{,}5 \cdot \frac{60}{0{,}15} - 210 \cdot \frac{60}{0{,}12} - 54 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{60}{0{,}12} + 2 \cdot 5{,}5 \cdot \frac{100}{0{,}10} + 33{,}4 \cdot \frac{60}{0{,}12} - 16{,}8 \cdot \frac{60}{0{,}15} = +129700 - 129700 = 0!$$

Der Integrationsweg erstreckt sich nur um die mittlere Zelle herum.

2. Reine Verdrehung: Auf den rechten Seiten der drei Gleichungen erscheinen die Werte F_i nach Bild 5c:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot 2250 - X_2 \cdot 400 &= 3000, \\ -X_1 \cdot 400 + X_2 \cdot 2900 - X_3 \cdot 500 &= 6000, \\ -X_2 \cdot 500 + X_3 \cdot 2050 &= 2400. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich: $X_1 = 1{,}80$, $X_2 = 2{,}63$, $X_3 = 1{,}81$. Damit ergibt sich ein Verdrillungswiderstand

$$I_d = 4 \cdot (1{,}80 \cdot 3000 + 2{,}63 \cdot 6000 + 1{,}81 \cdot 2400) = 102200 \text{ cm}^4$$

und der Schubfluß

$$t = 2 \cdot \frac{M_d}{I_d} \cdot (t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2 + t_3 \cdot X_3)$$

und es ergibt sich der in Bild 7 dargestellte Schubflußverlauf. Die Zahlen bedeuten den $I_d/2M_d$-fachen Schubfluß.

V. Gültigkeitsbereich.

Die unter II. angegebene Schubflußverteilung infolge drillfreier Querkraftbiegung gilt unter der Voraussetzung, daß die Längsspannungsverteilung mit x und z linear ist und die Querschnitte im drillfreien Zustand eben bleiben. Für den Fall der Kombination von drillfreier Querkraftbiegung und Verdrehung bleiben die Querschnitte zwar nicht eben, doch behält die Theorie ihre Gültigkeit, so daß sich die Schubflußzustände der beiden Fälle überlagern lassen. Außerdem gilt die Schubflußverteilung nur für Träger konstanten Querschnitts, d. h. also nicht für Träger mit stark veränderlichem Querschnitt wie z. B. trapezförmige Tragwerke. Für kegelförmige Schalen findet man in [3], S. 96, einen Ansatz zur Bestimmung des Querkraftteils, der von den Schubspannungen aufgenommen wird. Bei unsymmetrischen Querschnitten wie z. B. mehrzelligen Schalenflügelquerschnitten, ist darauf zu achten (vgl. [4], S. 182), daß die Schubflußermittlung für den Fall drillfreier Querkraftbiegung auf Hauptträgheitsachsen zu beziehen ist, da die Beziehung

$$t = \frac{Q_z S_x}{I_x}$$

nur für Hauptträgheitsachsen gilt. Wendet man diese Beziehung näherungsweise in bezug auf Konstruktionsachsen an, die von den Hauptträgheitsachsen abweichen, so ergibt sich, daß die Resultierende des errechneten Schubflusses t mit der Querkraft Q nach Größe und Richtung nicht übereinstimmt.

Im allgemeinen werden die Hauptträgheitsachsen von den durch die Konstruktion gegebenen Aufbaulinien nur wenig abweichen, so daß der Fehler vernachlässigbar klein wird. In den Fällen, wo die Abweichung sehr stark wird, muß man die Rechnung auf die Hauptträgheitsachsen x und z beziehen oder man behält als Rechnungsgrundlage die Aufbauachsen, die mit $\bar{x}$ und $\bar{z}$ gekennzeichnet sein sollen (s. Bild 8), bei und ermittelt den Schubfluß unter Berücksichtigung des Zentrifugalmomentes $I_{\bar{x}\bar{z}}$ mittels der Beziehung:

$$t = Q_{\bar{x}} \cdot \frac{S_{\bar{z}} \cdot I_{\bar{x}} - S_{\bar{x}} \cdot I_{\bar{x}\bar{z}}}{I_{\bar{x}} \cdot I_{\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{z}}^2} + Q_{\bar{z}} \cdot \frac{S_{\bar{x}} \cdot I_{\bar{z}} - S_{\bar{z}} \cdot I_{\bar{x}\bar{z}}}{I_{\bar{x}} \cdot I_{\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{z}}^2}.$$

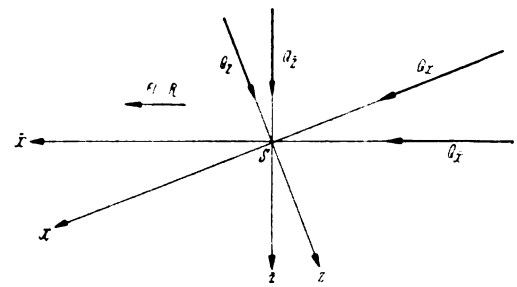


Bild 8.

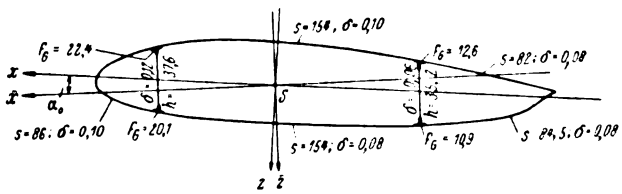


Bild 9. Querschnittsabmessungen.

Darin sind die Querkräfte, die statischen Momente, die Trägheitsmomente und das Zentrifugalmoment auf die Aufbauachsen $\bar{x}$ und $\bar{z}$ bezogen. Obige Beziehung läßt sich durch Achsendrehung aus der für Hauptträgheitsachsen gültigen Formel:

$$t = Q_z \cdot \frac{S_x}{I_x} + Q_x \cdot \frac{S_z}{I_z}$$

herleiten.

Ein Beispiel soll zeigen, daß der Schubflußverlauf infolge reiner Querkraft sich bereits wesentlich ändert, wenn der Winkel zwischen den Hauptträgheitsachsen x und z und den Konstruktionsachsen $\bar{x}$ und $\bar{z}$ den Betrag von 5° erreicht. Es werden der Einfachheit halber nicht der Rechnungsgang sondern nur die Teilergebnisse und das Endergebnis angeführt.

Gesucht ist der Schubflußverlauf infolge einer reinen Querkraft $Q_{\bar{z}}$ parallel zu den beiden Holmen des in Bild 9 dargestellten Tragwerksquerschnitts.

Die Rechnung ergab folgende Werte:

$I_{\bar{x}} = 43830 \text{ cm}^4$; $I_{\bar{z}} = 726000 \text{ cm}^4$; $I_{\bar{x}\bar{z}} = -58700 \text{ cm}^4$.

Daraus ergibt sich der Winkel der Hauptträgheitsachsen:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 58700}{726000 - 43830} = 0{,}172; \quad 2\alpha_0 = 9^0 46'; \quad \underline{\alpha_0 = 4^0 53'}.$$

Der Schubfluß ist gegeben durch:

$$t = Q_{\bar{z}} \cdot \frac{S_{\bar{x}} \cdot I_{\bar{z}} - S_{\bar{z}} \cdot I_{\bar{x}\bar{z}}}{I_{\bar{x}} \cdot I_{\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{z}}} = Q_{\bar{z}} \cdot 10^{-5} \cdot (2{,}559 \cdot S_{\bar{x}} + 0{,}207 \cdot S_{\bar{z}}).$$

Aus dem Klammerausdruck läßt sich schon ersehen, daß der Einfluß der Achsendrehung nicht zu vernachlässigen ist, wenn man zum Vergleich die falsche Beziehung unter Vernachlässigung der Hauptachsen aufschreibt:

$$t_f = Q_{\bar{z}} \cdot \frac{S_{\bar{x}}}{I_{\bar{x}}} = Q_{\bar{z}} \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}282 \cdot S_{\bar{x}}.$$

Der vernachlässigte Anteil ist die Differenz der beiden Werte:

$$t - t_f = \Delta t = Q_{\bar{z}} \cdot 10^{-5} \cdot (0{,}277 \cdot S_{\bar{x}} + 0{,}207 \cdot S_{\bar{z}}).$$

Darin gibt das letzte Glied $0{,}207 \cdot S_{\bar{z}}$ den Ausschlag, da der Querschnitt um die $\bar{z}$-Achse ein mehrfach größeres statisches Moment hat als um die $\bar{x}$-Achse.

In Bild 10a, b, c sind die Schubflüsse t_f, Δt und t aufgetragen. Sie zeigen deutlich, daß die Vernachlässigung besonders für die Teile der Haut zwischen den Holmen den Schubflußverlauf vollkommen ändert.

VI. Der längsversteifte Hohlträger.

Während der Schubflußverlauf infolge eines reinen Momentes unabhängig ist von Anzahl und Größe der zwischen den Stegen liegenden Längsprofile (Bild 11), beeinflussen diese den Schubflußverlauf für den Fall drillfreier Querkraftbiegung durch ihren Anteil zum statischen Moment und zum Trägheitsmoment. Der Schubfluß an einem

Digitized by Google

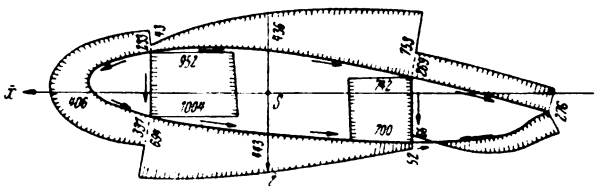


Bild 10a. Schubfluß t_r.

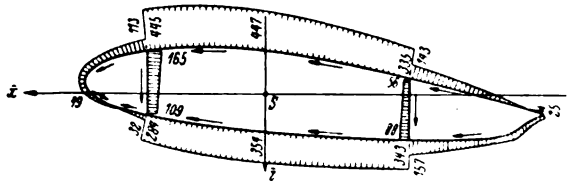


Bild 10b. Schubfluß Δt.

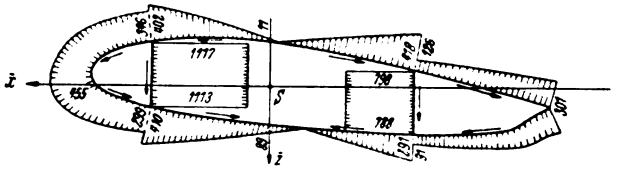


Bild 10c. Schubfluß t.

Bild 10a bis c. Die Zahlen geben den Schubfluß in kg/cm für eine Querkraft $Q_z = 100000$ kg.

Längsprofilanschluß in der Haut ist in Bild 12 zu sehen. In der Haut erhält der Schubfluß aus einem Längsprofil den Zuwachs

$$\Delta t = \frac{Q}{I_{ges}} \cdot F_{prof} \cdot z_{prof} = \frac{Q}{I_{ges}} \cdot S_{prof},$$

so daß der Schubfluß in der Haut sich sprungweise ändert. Zur Vereinfachung des Rechnungsganges empfiehlt es sich, diesen sprungweisen Verlauf durch einen stetigen zu ersetzen, indem man das statische Moment unter Fortlassung der Längsprofile mittels der Ersatzwandstärke für die Haut von

$$\delta' = \delta + \frac{F_{prof} \cdot z_{prof}}{b \cdot z_0}$$

bestimmt. Dies gilt zunächst nur bei gleicher Teilung b zwischen den Längsprofilen. Bei verschiedenen Abständen b kann mit genügender Genauigkeit das Mittel über den ganzen Bereich zwischen zwei Stegen genommen werden. Die Ersatzwandstärke wird dann

$$\delta' = \delta \cdot \left(1 + \frac{\sum (F_{prof} \cdot z_{prof})}{\int z_0 \cdot \delta \cdot ds}\right),$$

darin sind Summe und Integral von Steg zu Steg zu nehmen, so daß die Werte des statischen Momentes für die Stellen an den Stegen richtig sind.

Bei der Rechnung mit der Ersatzwandstärke δ' ist darauf zu achten, daß man es nur bei der Ermittlung des Schubflusses t_0 im Integral für das statische Moment verwenden darf, also

$$t_0 = \frac{Q}{I} \int \delta' \cdot z_0 \cdot ds.$$

In den Integralen der statisch unbestimmten Rechnung, wie z. B.

$$\delta_{10}' = \int t_1 \cdot t_0 \cdot \frac{ds}{\delta}$$

ist für die Wandstärke δ im Nenner unter dem Integralzeichen die tatsächliche Wandstärke δ der Haut und nicht etwa die Ersatzwandstärke δ' einzusetzen, da die Verschiebung von der wirklichen Wandstärke der Haut abhängig ist.

VII. Der einzellige Hohlquerschnitt.

Es sei die Aufgabe gestellt, den Schubflußverlauf in einem einzelligen Hohlquerschnitt infolge einer gegebenen exzentrischen Querkraft Q_y im Abstande a vom Systempunkt

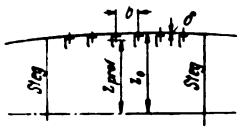


Bild 11. Der längsversteifte Hohlträger.

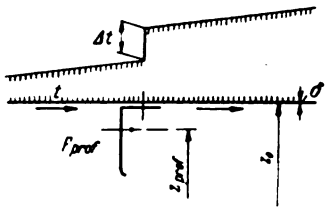


Bild 12. Schubfluß am Längsprofilanschluß.

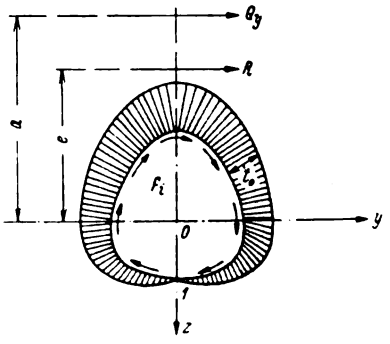


Bild 13. Schubfluß t_s im einzelligen Hohlquerschnitt.

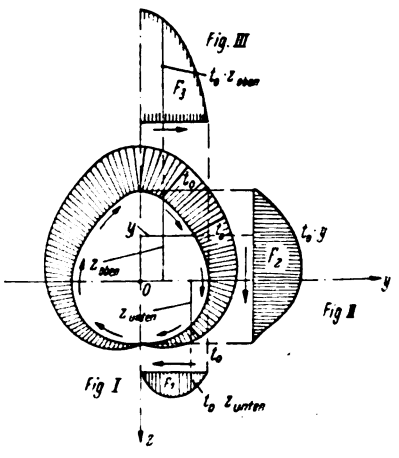


Bild 14. Zeichn. Ermittlung des Momentes von t_s um Punkt 0.

0 des Querschnitts zu bestimmen. Die Achsen y und z seien Aufbaulinien der Konstruktion und parallel den Hauptträgheitsachsen des Querschnitts (Bild 13).

Diese Aufgabe läßt sich ohne die in Abschnitt II und III angegebenen Formänderungsbedingungen lösen und ist daher statisch bestimmt, sofern nur nach dem Schubflußverlauf und nicht nach dem Schubmittelpunkt und dem Verdrehwinkel gefragt ist.

Zunächst bestimmt man für die Annahme, daß der Schubfluß an der Stelle 1 Null sei, den Schubfluß

$$t_0 = \frac{Q_y}{I_x} \int ds \cdot \delta \cdot y = \frac{Q_y}{I_x} \cdot S_x.$$

Dieser soll den in Bild 13 dargestellten Verlauf und als Resultierende $R = Q_y$ im Abstande e vom Punkt 0 haben. Für die Ermittlung von e folgt weiter unten eine graphische Lösungsmethode. Der wirkliche Schubfluß infolge der Querkraft Q_y im Abstande a ergibt sich dann zu:

$$t = t_0 - \frac{Q_y \cdot (a - e)}{2 \cdot F_i}.$$

Die graphische Lösung von e kann wie folgt geschehen (s. Bild 14). Man zeichnet die Figuren I, II und III mit den

Digitized by Google

Ordinaten $t_0 \cdot z_{\text{unten}}$, $t_0 \cdot y$ und $t_0 \cdot z_{\text{oben}}$. Dann sind die Flächen F_1, F_2 und F_3 gleich dem Moment des halben Schubflusses t_0 um Punkt 0, wie sich aus der folgenden Gleichung erkennen läßt:

$$1/2 \cdot M_{(0)} = F_1 + F_2 + F_3 = \int t_0 \cdot y \cdot dz + \int t_0 \cdot z \cdot dy.$$

Der Abstand der Resultierenden $R = Q_y$ vom Punkte 0 ist dann

$$e = \frac{M_{(0)}}{Q_y}.$$

Die Flächen F_1, F_2 und F_3 lassen sich bei günstiger Wahl des Maßstabes bequem und genügend genau planimetrieren. Der Querschnitt in Bild 14 ist zur z-Achse symmetrisch angenommen, daher genügt die Bestimmung des Momentes $M_{(0)}$ für die eine Hälfte des Querschnitts. Bei unsymmetrischen Querschnitten müssen die Flächen F für den ganzen Querschnitt gezeichnet werden.

Dieses graphische Verfahren zur Bestimmung des Schubmittelpunktes läßt sich in entsprechender Weise auch bei mehrzelligen Hohlquerschnitten anwenden. Zugleich sei als Ersatz für die graphische Lösung die rechnerische Ermittlung erwähnt, bei der die Integrale zu Summen werden, also allgemein:

$$R = Q_y = \sum (t \cdot \Delta y)$$
$$M = \sum (t \cdot y \cdot \Delta z) + \sum (t \cdot z \cdot \Delta y).$$

VIII. Schrifttum.

[1] W. J. Goodey, Shear Stresses in Hollow Sections. Aircraft Engng. (1936) Nr. 86 April S. 93.

[2] A. Pflüger, Beitrag zur Ermittlung der Schubspannungen in mehrzelligen Hohlquerschnitten. Ing.-Arch. Bd. 8 (1937) S. 25.

[3] H. Ebner, Theorie und Versuche zur Festigkeit von Schalenrümpfen. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 93.

[4] H. Ebner, Zur Festigkeit von Schalen- und Rohrholmflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 179.

[5] W. Lücker, Arbeitsblätter des Inst. für Festigkeit der DVL.

Digitized by Google

Über Kippversuche mit einem Holm-Rippenrost.

Von Josef Weinhold, Berlin-Adlershof.

Im Anschluß an frühere Arbeiten über Kipplasten eines Holm-Rippenrostes wird unter den gleichen Voraussetzungen wie ehedem — insbesondere, daß die Holme sehr schmal sind und daß die Rippen unendlich dicht gestellt gedacht werden können — eine Kippbedingung für eine Belastung durch Endbiegemomente, Enddruckkräfte und Eigengewicht hergeleitet. Weiters wird eine Versuchsanordnung beschrieben, mit welcher Kontrollversuche durchgeführt wurden und worüber berichtet wird.

Gliederung.

1. Bezeichnungen.
2. Einleitung.
3. Beschreibung der Versuchseinrichtung.
4. Herleitung der Auswertungsformel.
5. Über die Durchführung der Kippversuche.
6. Bestimmung der Holm-Steifigkeiten A_1, C_1, A_2, C_2.
7. Bestimmung der Steifigkeitsziffern $a\zeta_3$, $b\zeta_3$ und $b\zeta_4$.
8. Gegenüberstellung der rechnerischen und der Versuchswerte.
9. Zusammenfassung und Schluß.
10. Schrifttum.

1. Bezeichnungen.

Zeichen	Dimension	Bedeutung
M_1, M_2[1])	mkg	Biegemoment in den Holmenden.
S_1, S_2	kg	Druckkraft in der Verbindungslinie der Auflager.
G_1, G_2	kg	Eigengewicht der Holme, in der Holmachse wirkend.
A_1, A_2	kgm²	Steifigkeit der Querbiegung.
C_1, C_2	kgm²	Torsionssteifigkeit der Holme.
Ar	kgm²	Summe der Steifigkeiten aller Rippen für eine Verbiegung in der Rostebene.
Br	kgm²	Summe der Steifigkeiten aller Rippen für eine Verbiegung senkrecht zur Rostebene.
A_{Ar}	kgm/m	Formänderungsarbeit der Rippen für die Holmlänge eins bei einer Verbiegung in der Rostebene.
B_{Br}	kgm/m	Formänderungsarbeit der Rippen für die Holmlänge eins bei einer Verbiegung senkrecht zur Rostebene.
$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$	Null	Dimensionslose Freiwerte.
h	m	Halbe Entfernung der Holmachsen.
l	m	Entfernung der Holm-Auflager (Holmlänge).
m_1 m_2	kgm/m	Endmomente einer Rippe für die Holmlänge eins.
n	Null	Halbwellenzahl im Verlauf von η, β_1 und β_2 (s. weiter unten).
c_1, c_2 ...	Null	Ziffernwerte von Teilintegralen in der Energiegleichung.
x	m	Längskoordinate, gezählt von einem Auflager.
y	m	Seitliche Auslenkung der Holmachsen im Abstand x vom Auflager.
β_1, β_2	Null	Kippwinkel (Drehwinkel der Holmquerschnitte senkrecht zur Rostebene).
α_1, α_2 ...	Null	Einflußzahlen.
$\xi = x/l$	Null	Dimensionslose Längskoordinate.
$\eta = y/l\sqrt{\frac{A_1+A_2}{C_1+C_2}}$	Null	Dimensionslose seitliche Auslenkung.

Dimensionslose Größen in der Energiegleichung.

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{2\,M_1\,l}{\sqrt{(A_1+A_2)\,(C_1+C_2)}},\quad \mathfrak{m}_2 = \frac{2\,M_2\,l}{\sqrt{A_1+A_2)\,(C_1+C_2)}},$$

$$\mathfrak{s} = \frac{(S_1+S_2)\,l^2}{A_1+A_2},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{G_1\,l^2}{\sqrt{(A_1+A_2)\,(C_1+C_2)}},\quad \mathfrak{g}_2 = \frac{G_2\,l^2}{\sqrt{(A_1+A_2)\,(C_1+C_2)}},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2\,A_r\,l}{(A_1+A_2)\,h},\quad \mathfrak{b} = \frac{2\,B_r\,l}{(C_1+C_2)\,h},$$

$$\mu_1 = \frac{2\,C_1}{C_1+C_2},\quad \mu_2 = \frac{2\,C_2}{C_1+C_2},$$

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2-\alpha_2^2},\quad \zeta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2-\alpha_2^2},\quad \zeta_3 = \frac{1}{\alpha_3-\alpha_4}.$$

[1]) Die Zeiger 1 und 2 weisen — wenn diese allein verwendet werden — darauf hin, daß die betreffende Größe dem Holm 1 bzw. dem Holm 2 zukommt. Ohne Zeiger gelten die Größen für beide Holme, wenn nichts anderes festgesetzt ist.

2. Einleitung.

In früheren Arbeiten wurden Kipplasten angegeben, die unter gewissen vereinfachenden Annahmen und Voraussetzungen hergeleitet worden waren [1] [2]. Insbesondere sind die Holme als schmale Schienen mit verschwindender Dicke und gleichbleibendem, für beide Holme gleichem Querschnitt vorausgesetzt. Weiters ist angenommen, daß die Rippensteifigkeit konstant ist und gleichmäßig auf die Holmlänge aufgeteilt werden kann. (Unendlich dicht gestellte Rippen als Ersatz einer endlichen Rippenzahl.) Als Belastung der Holme waren Endbiegemomente und Enddruckkräfte angenommen.

Im Folgenden wird über eine Untersuchung berichtet, die einen Vergleich errechneter Kipplasten mit den versuchsmäßig bestimmten eines Holm-Rippenrost-Modells ermöglicht. Der Versuchsrost hat voneinander verschiedene Holme, die nicht mehr »sehr schmal« sind (8/100 mm), die Rippenzahl ist mit acht verhältnismäßig niedrig. Die Steifigkeit der Rippen ist längs ihrer Achse nicht mehr konstant, jedoch noch symmetrisch zur Rippenmitte verteilt. In der Auswertungsformel, die ansonsten unter den gleichen allgemeinen Voraussetzungen wie früher [2] aus der Energiegleichung hergeleitet wird, ist die Verschiedenheit der Holme, der erwähnte Verlauf der Rippensteifigkeit und das Eigengewicht der Holme mitberücksichtigt.

3. Beschreibung der Versuchseinrichtung.

Die Versuchseinrichtung ist in Bild 1 schematisch dargestellt. Die Holme des Versuchsrostes sind zwei auf Gleichmäßigkeit, Astfreiheit, Feinjährigkeit und Geradfaserigkeit ausgesuchte Kieferbretter 8/100/3250 mm, die Rippen ebensolche Kieferleisten 7/7/1000 mm, die an den Enden Verbreiterungen angeleimt haben, Bild 2. Holm und Rippenende sind über einen Winkel aus Hartmessing 12/12/0,5 mm mit je fünf 3-mm-Mutterschrauben miteinander verbunden. Die Entfernung der Holmachsen voneinander beträgt 2 h = 1025 mm. Als Auflager der Holmenden ist ein von beiden Seiten kegelig ausgebohrter ge-

Digitized by Google

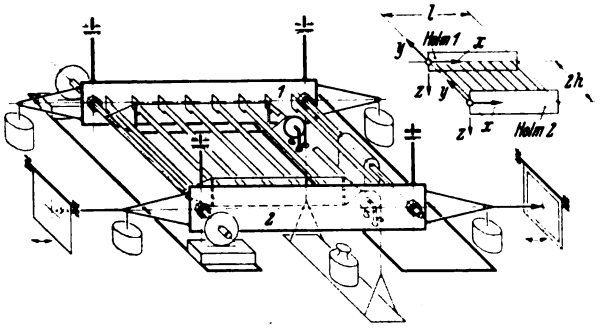


Bild 1. Schema der Versuchseinrichtung.

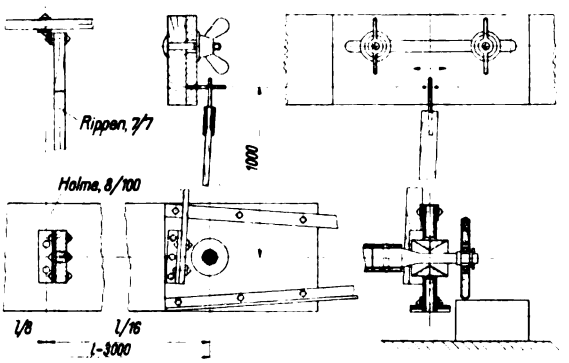


Bild 2. Holmlagerung, Rippenanschluß und Verstellung der Endkippwinkel.

härteter Stahlzylinder vorgesehen, der in dem durch Sperrholzbeilagen verstärktem Holmende stramm verschieblich steckt. Die Ringschneide im Inneren des Zylinders hat 8 mm Dmr und stützt sich gegen einen gehärteten Stahlrundstab von 7 mm Dmr. Dieser wieder ist an einem Rostende auf der Unterlage festgemacht, am anderen Holmende ist die in Bild 1 u. 2 gezeichnete Verschieblichkeit parallel zur Verbindungslinie der Auflager vorgesehen. Diese haben eine gegenseitige Entfernung von $l = 3$ m. Die Endmomente werden über feste Endhebel übertragen, welche aus 10/1 mm Flachmessing und 10/10/1 mm Winkelmessing aufgebaut sind und die bis zum Lastangriff 560 mm auskragen. Um die axiale Druckkraft aufbringen zu können, sitzen am festen Auflager nahe den Holmen zwei kugelgelagerte Umlenkrollen, über die der Zug der Belastungsgewichte parallel zur Verbindungslinie der Auflager zum verschieblichen Auflager geleitet wird. Zur Aufzeichnung der Tangentenneigung der elastischen Linie in den Auflagern sitzen an den Endhebeln des Holmes 2 Holzstäbe mit einer Stahlspitze. Gegen diese kann ein Brettchen, auf welches ein Blatt Papier aufgespannt ist, aus etwa 2 mm Entfernung herangeschwenkt werden. Die Länge der Einstechhebel vom Auflager bis zur Spitze ist 1020 mm. Das durch das Gewicht der Endhebel und des überkragenden Holmteiles am Holm 1 vorhandene Endmoment beträgt 0,082 mkg, am Holm 2 wegen der dort sitzenden Einstechhebel 0,100 mkg. Das zwischen den Auflagern wirksame Eigengewicht (Holmgewicht plus Rippengewicht) ist für jeden Holm auf 1,21 kg abgeglichen worden. Um den Kippwinkel in den Auflagern festzuhalten, laufen von den Holmenden leichte, 1 m lange Holzhebel senkrecht nach oben, an deren Ende ein Stift parallel zur Verbindungslinie der Auflager lose geführt ist. Die Führung ist senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager verstellbar. Alle Holzteile des Rostes sind vor dem Zusammenbau mit einem zweifachen Schellaküberzug versehen worden. Bild 4 zeigt die erste Versuchsanordnung, bei welcher das Eigengewicht durch Züge nach oben ausgeglichen war. Der Eigengewichtsausgleich mußte aufgegeben und eine kompliziertere Auswertungsformel in Kauf genommen werden, weil die Schwingungen des Rostes nach Belastungsänderungen nicht rasch genug zur Ruhe gebracht werden konnten. Bild 4 und ebenso Bild 3 zeigen noch nicht die endgültige Holm-Rippenbefestigung und Kippwinkelverstellung[2]).

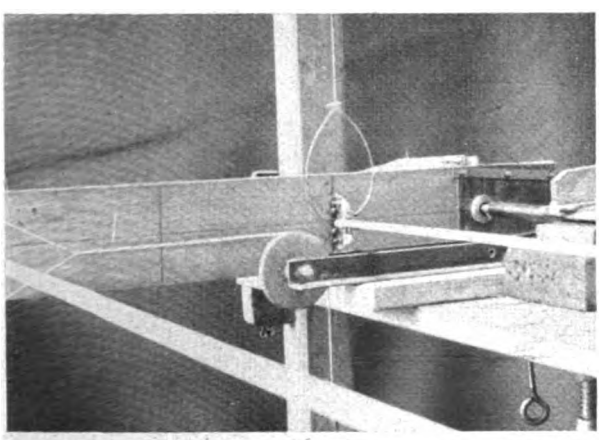


Bild 3. Umlenkrolle am festen Auflager.

4. Die Herleitung der Auswertungsformel.

Für elastisch gleiche Holme mit einer Belastung durch M_1, M_2 und S_1, S_2 und Rippen mit konstantem Querschnitt lautet die Energiegleichung [2]

$$J = \int_0^l \Big\{ (M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2)\, y'' - \Big(\frac{S_1 + S_2}{2} - 3\,\frac{A r}{l h} \Big) y'^2 + \frac{B r}{l h} (\beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2) + \frac{1}{2} C (\beta_1'^2 + \beta_2'^2) + A\, y''^2 \Big\} dx \quad (1)$$

in dimensionslosen Koordinaten und Koeffizienten

$$\mathfrak{J} = \int_0^1 \Big\{ \mathfrak{m}_1 \beta_1 + \mathfrak{m}_2 \beta_2)\, \eta'' - (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\, \eta'^2 + \mathfrak{b}\, (\beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2) + \frac{1}{2} (\beta_1'^2 + \beta_2'^2) + \eta''^2 \Big\} d\xi \quad (2)$$

Wie man sich überzeugt, ist M_1 und M_2 ganz allgemein das Moment der Hauptbiegung an der Stelle x. Demnach ist laut nebenstehendem Belastungsschema M_1 bzw. M_2 durch

[2]) Die Versuche wurden in der Deutschen Techn. Hochschule Brünn durchgeführt und mußten bei der Besetzung der Hochschule im Zuge der Mobilisierung im September 1938 abgebrochen werden. In diesem Zusammenhange war es nicht mehr möglich, die endgültige Versuchseinrichtung im Lichtbild festzuhalten. Die Mittel für die Versuche wurden vom szt. tschechoslowakischen nationalen Forschungsrat beigestellt.

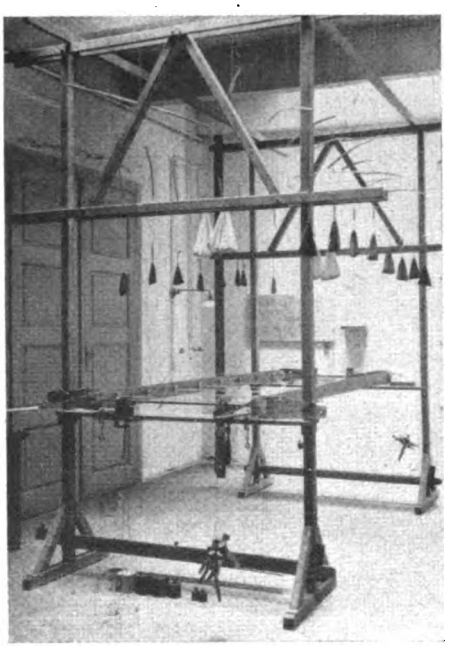


Bild 4. Erste Versuchsanordnung.

Digitized by Google

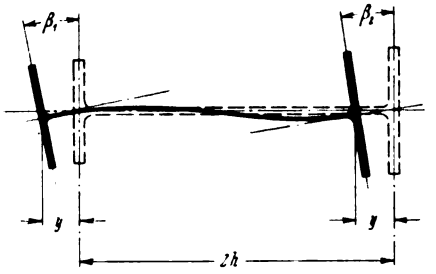


Bild 5. Schnitt im Abstand x vom Auflager.

$$M_1 - \frac{G_1}{2\,l}\,(x\,l - x^2) \quad \text{bzw.} \quad M_2 - \frac{G_2}{2\,l}\,(x\,l - x^2)$$

zu ersetzen. Zur Herleitung der Anteile mit Ar und Br setzen wir nach Bild 7 für die Verbiegung einer Rippe senkrecht zur Rostebene, hervorgerufen durch die an den Verbindungsstellen übertragenen Reaktionsanteile

$$\beta_1 = \frac{h\,l}{Br}\,(m_1\,\alpha_1 - m_2\,\alpha_2), \qquad \beta_2 = \frac{h\,l}{Br}\,(m_2\,\alpha_1 - m_1\,\alpha_2) \quad (3)$$

(Als Rippensteifigkeit ist Br/l eingesetzt, die Steifigkeit, die der Holmlänge eins zukommt.) Damit ist der Arbeitsinhalt der Rippe

$$A_{Br} = \frac{Br}{2\,h\,l\,(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}\,(\alpha_1\,(\beta_1^2 + \beta_2^2) + 2\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2) \quad (4)$$

Für die Verbiegung in der Rostebene erhält man in der gleichen Weise, wenn statt β_1 und β_2 y' [2] und statt α_1 und α_2 α_3 und α_4 gesetzt wird

$$A_{Ar} = \frac{Ar}{h\,l\,(\alpha_3 - \alpha_4)}\,y'^2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

In Summe wird also jetzt

$$J = \int_0^l \Big[\Big\{\Big(M_1 - \frac{G_1}{2\,l}\,(x\,l - x^2)\Big)\beta_1 + \Big(M_2 - \frac{G_2}{2\,l}\,(x\,l - x^2)\Big)\beta_2\Big\}\,y'' - \Big(\frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{Ar}{h\,l\,(\alpha_3 - \alpha_4)}\Big)\,y'^2 + \frac{Br\,(\alpha_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) + 2\,\alpha_2\beta_1\,\beta_2}{2\,h\,l\,(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} + \frac{1}{2}\,C_1\,\beta_1'^2 + \frac{1}{2}\,C_2\,\beta_2'^2 + \frac{1}{2}\,(A_1 + A_2)\,y''^2\Big]\,dx \quad \ldots \quad (6)$$

Erweitern wir mit $\frac{2\,l^2}{C_1 + C_2}$, so ergibt sich nach Einführung der dimensionslosen Koordinaten und Abkürzungen

$$\mathfrak{J} = \int_0^1 \Big[\Big\{\Big(m_1 - g_1\,(\xi - \xi^2)\Big)\beta_1 + (m_2 - g_2\,(\xi - \xi^2))\,\beta^2\Big\}\,\eta'' - (\mathfrak{z} - \zeta_3\,\mathfrak{a})\,\eta'^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{b}\,(\zeta_1\,(\beta_1^2 + \beta_2^2) + 2\,\zeta_2\,\beta_1\,\beta_2) + \frac{1}{2}\,\mu_1\,\beta_1'^2 + \frac{1}{2}\,\mu_2\,\beta_2'^2 + \eta''^2\Big]\,d\,\xi \quad \ldots \quad (7)$$

Die der beschriebenen Versuchsanordnung angepaßten Grenzbedingungen lauten (Fall I [2])

$$\left.\begin{aligned} \eta\,(0) = \eta\,(1) = \eta''\,(0) = \eta''\,(1) = 0, \\ \beta_1\,(0) = \beta_1\,(1) = \beta_2\,(0) = \beta_2\,(1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Diese sind versuchsmäßig leichter als andere einzuhalten und ergeben gleichzeitig im Verhältnis zu eingespannten Holmen niedrigere Kipplasten.

Zunächst seien noch die zugehörigen Differentialgleichungen angeschrieben, die sich aus dem Verschwinden der ersten Variation von Gl. (7) ergeben:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{d\,\xi^2}\Big\{(m_1 - g_1\,(\xi - \xi^2))\,\beta_1 + (m_2 - g_2\,(\xi - \xi^2))\,\beta_2\Big\} + \eta^{IV} + (\mathfrak{z} - \zeta_3\,\mathfrak{a})\,\eta'' = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} (m_1 - g_1\,(\xi - \xi^2))\,\eta'' - \mu_1\,\beta_1'' + \mathfrak{b}\,(\zeta_1\,\beta_1 + \zeta_2\,\beta_2) = 0 \\ (m_2 - g_2\,(\xi - \xi^2))\,\eta'' - \mu_2\,\beta_2'' + \mathfrak{b}\,(\zeta_2\,\beta_1 + \zeta_1\,\beta_2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Integriert man die Gl. (9) zweimal, so verschwinden zufolge der gewählten Grenzbedingungen die beiden Integrationskonstanten und es gilt die einfachere Beziehung

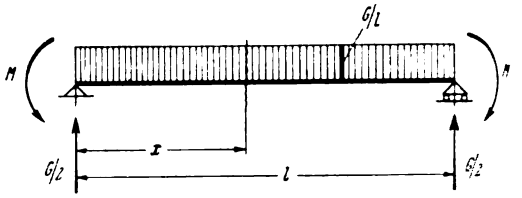


Bild 6. Holm-Biegelasten, schematisch.

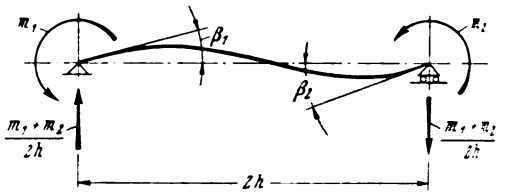


Bild 7. Verformung der Rippen durch Biegekräfte senkrecht zur Rostebene.

$$\frac{1}{2}\,(m_1 - g_1\,(\xi - \xi^2))\,\beta_1 + \frac{1}{2}\,(m_2 - g_2\,(\xi - \xi^2))\,\beta_2 + \eta'' + (\mathfrak{z} - \zeta_3\,\mathfrak{a})\,\eta = 0 \quad \ldots \quad (9a)$$

Für verschwindendes Eigengewicht sind die Differentialgleichungen (9a) und (10) durch die Ansätze

$$\beta_1 = \varkappa_1 \sin n\,\pi\,\xi, \quad \beta_2 = \varkappa_2 \sin n\,\pi\,\xi, \quad \eta = \varkappa_3 \sin n\,\pi\,\xi \quad (11)$$

erfüllt. Die nach dem Einsetzen der Lösungen (11) verbleibende Koeffizientendeterminate liefert die Kippbedingung

$$\frac{1}{2}\,\frac{m_1^2}{(n\,\pi)^2}\,(\mu_2\,(n\,\pi)^2 + \zeta_1\,\mathfrak{b}) + \frac{1}{2}\,\frac{m_2^2}{(n\,\pi)^2}\,(\mu_1\,(n\,\pi)^2 - \zeta_1\,\mathfrak{b}) - \frac{m_1\,m_2}{(n\,\pi)^2}\,\zeta_2\,\mathfrak{b} + \Big(\frac{\mathfrak{z} - \zeta_3\,\mathfrak{a}}{(n\,\pi)^2} - 1\Big)\Big\{\mu_1\,\mu_2\,(n\,\pi)^2 + 2\,\zeta_1\,\mathfrak{b} + (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\,\mathfrak{b}^2/(n\,\pi)^2\Big\} = 0 \quad (12)$$

Auf die Gewinnung der exakten Lösung der vollständigen Differentialgleichungen muß aus Gründen des Rechenaufwandes verzichtet werden. Die Auswertungsformel wird deshalb durch Einführung passend gewählter Näherungsansätze in die Energiegleichung hergeleitet. Als solche werden gewählt:

$$\text{I.}\quad \beta_1 = \frac{1}{\varkappa_1}\,(\xi - \xi^2), \quad \beta_2 = \frac{1}{\varkappa_2}\,(\xi - \xi^2), \quad \eta'' = \frac{1}{\varkappa_3}\,(\xi - \xi^2) \quad (13)$$

$$\text{II.}\quad \beta_1 = \frac{1}{\varkappa_1}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4), \quad \beta_2 = \frac{1}{\varkappa_2}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4),$$
$$\eta'' = \frac{1}{\varkappa_3}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Um einen Überblick über die gegenseitigen Beziehungen der Koeffizienten in der Kippbedingung zu haben, werden die Ziffernwerte der Teilintegrale in der Energiegleichung zunächst allgemein ausgedrückt:

$$\frac{1}{\varkappa_1^2}\int_0^1 \beta_1^2\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_2^2}\int_0^1 \beta_2^2\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_1\,\varkappa_2}\int_0^1 \beta_1\,\beta_2\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_3^2}\int_0^1 \eta''^2\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_1\,\varkappa_3}\int_0^1 \beta_1\,\eta''\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_2\,\varkappa_3}\int_0^1 \beta_2\,\eta''\,d\,\xi = c_1, \quad \ldots \quad (15)$$

$$\frac{1}{\varkappa_1^2}\int_0^1 \beta_1'^2\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_2^2}\int_0^1 \beta_2'^2\,d\,\xi = c_2. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\frac{1}{\varkappa_3^2}\int_0^1 \eta'^2\,d\,\xi = c_3 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\frac{1}{\varkappa_1\,\varkappa_3}\int_0^1 \eta''\,\beta_1\,(\xi - \xi^2)\,d\,\xi = \frac{1}{\varkappa_2\,\varkappa_3}\int_0^1 \eta''\,\beta_2\,(\xi - \xi^2)\,d\,\xi = c_4 \quad (18)$$

Mit diesen Festsetzungen liefert die Energiegleichung als Kippbedingung

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\mu_2\frac{c_2}{c_1}+\zeta_1 b\right)\left[\frac{c_1}{c_2}m_1^2-2\frac{c_4}{c_2}m_1\vartheta_1+\vartheta_1^2\frac{c_4^2}{c_1c_2}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left(\mu_1\frac{c_2}{c_1}+\zeta_1 b\right)\left[\frac{c_1}{c_2}m_2^2-2\frac{c_4}{c_2}m_1\vartheta_1+\vartheta_2^2\frac{c_4^2}{c_1c_2}\right]\\
&-b\,\zeta_2\left[\frac{c_1}{c_2}m_1m_2-\frac{c_4}{c_2}(m_1\vartheta_1+m_2\vartheta_2)+\vartheta_1\vartheta_2\cdot\frac{c_4^2}{c_1c_2}\right]\\
&+\left(\frac{c_3}{c_1}(\vartheta-\zeta_3 a)-1\right)\\
&\qquad\left\{\mu_1\mu_2\frac{c_2}{c_1}+2\zeta_1 b+)\zeta_1^2-\zeta_2^2)\,b^2\frac{c_1}{c_2}\right\}=0
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Die Ziffernwerte von c_1, c_2... und deren Verbindungen sind für die Näherungen I und II in der zweiten und dritten Zeile der Zahlentafel 1 angegeben.

tätsgrenze am geringsten waren. Als Auslenkungskomponente wurde wie schon im Punkt 3 erwähnt die Neigung der elastischen Linie an den Holmenden festgehalten, indem nach Ausschwingen der Versuchseinrichtung die mit Papier bespannten Brettchen kurz gegen die Einstechhebel gedrückt und neben dem Einstich die Last angeschrieben wurde. Die Verstellhebel für die Endkippwinkel lagen hiebei lose in den Führungen. Mit dieser Einstellung wurde der Rost für weitere Versuche mit Endhebellasten von 7 kg am Holm 1, am Holm 1 und 2, dann noch am Holm 2 versehen. Der Lastangriffspunkt auf den Endhebeln konnte quer zur Holmachse verschoben werden, und zwar so weit, daß nach Aufbringen der Endhebellast die Verstellhebel über den Auflagern wieder lose in den Führungen waren. Sodann erfolgte die Aufbringung der Axialkraft in immer

Zahlentafel 1.

Näherung	c_1	c_2	c_3	c_4	$\frac{c_2}{c_1}$	$\frac{c_2}{c_4}$	$\frac{c_1 c_2}{c_4^2}$	$\frac{c_1}{c_3}$
I	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{35\cdot 144}$	$\frac{1}{140}$	10	46,6̇	217,7̇	9,88235..
II	$\frac{31}{18\cdot 35}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{691}{99\cdot 1400}$	$\frac{37}{3465}$	9,870968..	45,486..	209,607..	9,86975..
III	—	—	—	—	π^2	44,4535	200,223	π^2

Ein Vergleich der Formel (19) mit der exakten Lösung (12) läßt erkennen, daß $\frac{c_2}{c_1}$ und $\frac{c_1}{c_3}$ für π^2 steht. Weiters liefert die für die hier in Betracht gezogenen Grenzbedingungen für Eigengewichtsbelastung von Timoshenko [3] angegebene genaue Kippziffer

$$G l^2/\sqrt{A C}=28{,}3 \quad\ldots\ldots\ldots\quad(20)$$

für $\frac{c_1 c_2}{c_4^2}$ den wirklichen Wert $\frac{1}{4}\,28{,}3^2=200{,}22_3$. Es wird nun als Näherung III und endgültige Auswertungsformel die verwendet, in welcher für $\frac{c_2}{c_1}$, $\frac{c_1}{c_3}$ und $\frac{c_1 c_2}{c_4^2}$ die genauen Werte gesetzt werden und für $\frac{c_2}{c_4}$ der Wert 44,4535, welch letzterer aus $\frac{c_2}{c_1}=\pi^2$ und $\frac{c_1 c_2}{c_4^2}=200{,}22_3$ folgt und der sich nur mehr ganz wenig und unwesentlich vom wahren Wert unterscheiden dürfte:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\mu_2\pi^2+\zeta_1 b)\left[\frac{m_1^2}{\pi^2}-\frac{m_1\vartheta_1}{22{,}23}+\frac{\vartheta_1^2}{200{,}22}\right]\\
&+\frac{1}{2}(\mu_1\pi^2+\zeta_1 b)\left[\frac{m_2^2}{\pi^2}-\frac{m_2\vartheta_2}{22{,}23}+\frac{\vartheta_2^2}{200{,}22}\right]\\
&-\zeta_2 b\left[\frac{m_1 m_2}{\pi^2}-\frac{m_1\vartheta_1+m_2\vartheta_2}{44{,}45}+\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{200{,}22}\right]\\
&+\left(\frac{\vartheta-\zeta_3 a}{\pi^2}-1\right)\left\{\mu_1\mu_2\pi^2+2\zeta_1 b+(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\frac{b^2}{\pi^2}\right\}=0
\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\quad(21)$$

Zur Bestimmung von A_1, C_1, A_2, C_2 wurden Kippversuche mit je einem Holm allein, ohne angeschlossene Rippen durchgeführt. Die zugehörige Auswertungsformel ergibt sich aus der obigen durch die Festsetzungen $M_1=M_2=M$, $S_1=S_2=S$, $a=0$, $b=0$ und Einsetzen der Ausdrücke für ϑ, m_1 und m_2 in der Form

$$\frac{M^2 l^2}{\pi^2}-\frac{G l^2 M l}{44{,}45}+\frac{G^2 l^4}{800{,}89}+\frac{C S l^2}{\pi^2}=A C \quad\ldots\quad(22)$$

5. Über die Durchführung der Kippversuche.

Zuerst wurden Versuche ohne an die Endhebel angehängte Gewichte durchgeführt, und zwar so, daß einmal der eine, dann der andere waagrechte Schnurzug den Hauptanteil der Last zu übertragen hatte. Durch längeres Probieren konnten schließlich die Lagen der in die Holmenden eingeschobenen Auflagerzylinder gefunden werden, für welche die Auslenkungen bei gleicher Last nahe der Stabilikleiner werdenden Stufen, bis die seitliche Auslenkung in Holmmitte etwa 100 mm erreichte. Größere Auslenkungen führten zu merkbaren bleibenden Verformungen. Bis 100 mm seitlicher Auslenkung in Holmmitte war die nach Abbringen der Axialkraft verbleibende Auslenkung an der Zeigerspitze höchstens 1,5 mm. Aus den gleichen Gründen mußte die Aufnahme eines überkritischen Zweiges des Kraft-Verformungsschaubildes, wie bei Prandtl [4], unterbleiben. Die Höhe der kritischen Axialkraft mußte daher als Hyperbelasymptotenhöhe bei bekannten Asymptotenrichtungen und drei gegebenen Hyperbelpunkten bestimmt werden [5]. Die an beiden Enden des Holmes 2 aufgenommenen Kraftauslenkungsschaubilder unterscheiden sich nur geringfügig, was auf symmetrischen Verlauf der Auslenkungen schließen läßt. Versuche mit einer Endhebellast von 10 kg ergaben schon merkbare bleibende Verformungen, besonders in den Holm-Rippenverbindungen und zeigten keinen symmetrischen Verlauf der Auslenkungen mehr. Die Auswertungsformel ergäbe also schon zu hohe Vergleichswerte. Versuche und Vergleiche in dieser Richtung mit einer verfeinerten Versuchseinrichtung sind vorgesehen. — In der Zahlentafel 2 sind die auf den Rost aufgebrachten Endmomente M_1, M_2 und die zugehörigen, aus den Kraft-

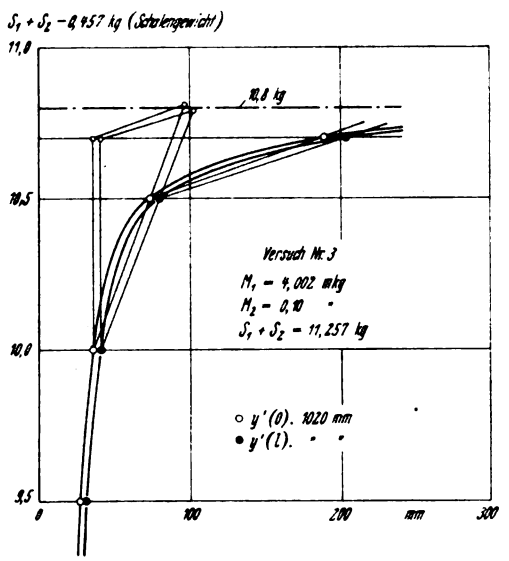


Bild 8. Kraft-Auslenkungsschaubild für den Versuch Nr. 3.

Digitized by Google

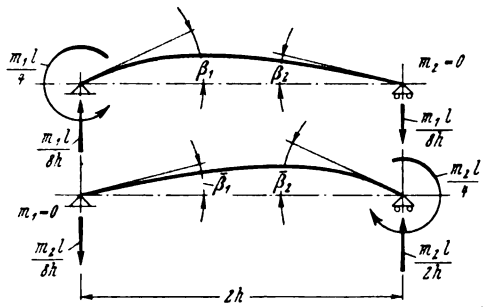


Bild 9. Versuchsanordnung zur Bestimmung von B_r.

Auslenkungsschaubildern ermittelten kritischen Enddruckkräfte eingetragen. In Bild 8 ist das Schaubild angegeben, welches die verhältnismäßig größte Abweichung von der vorausgesetzten Symmetrie der Auslenkung aufweist und dessen Gleichgewichtskurven den verhältnismäßig größten Abstand von den Asymptoten haben. $S_1 + S_2 = 11{,}26$ kg ist dort die Summe aus der durch die Asymtotenkonstruktion ermittelten »Schalenbelastung« von 10,8 kg und dem für alle Versuche gleichen »Schalengewicht« von 0,457 kg.

Zahlentafel 2. Kritische Außenlasten des Rostes.

Versuch Nr.	M_1 mkg	M_2 mkg	S_1+S_2 kg$_{\text{Versuch}}$	S_1+S_2 kg$_{\text{Rechnung}}$	F %*)
1	0,082	4,02	12,29	11,95	2,8
2	4,002	4,02	11,56	11,82	—2,2
3	4,002	0,10	11,26	12,01	—6,2
4	0,082	0,10	16,52	16,52	—

*) Unterschied zwischen Versuchswert und rechnerischem Wert in Hundertteilen des rechnerischen Wertes.

6. Bestimmung der Holmsteifigkeiten A_1, C_1, A_2, C_2.

Nach Beendigung der Kippversuche mit dem Rostmodell wurden die Rippen durch Lösen der Schrauben zwischen Rippe und Verbindungswinkel entfernt. Jeder Holm wurde sodann über den neben ihn laufenden waagrechten Zug bei drei verschiedenen Endmomenten belastet. Das wirksame Eigengewicht war für jeden Holm 0,980 kg. Die drei Lastsysteme sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Mit Hilfe der Gl. 22 ergeben sich für A_1, C_1, A_2, C_2, je drei Gleichungen, die untereinander kombiniert wieder je drei Paare von Steifigkeiten A und C liefern. Deren Mittelwerte werden den weiteren Rechnungen zugrunde gelegt und lauten

$$\underline{A_1 = 4{,}961 \text{ m}^2\text{kg}}, \qquad \underline{C_1 = 0{,}605 \text{ m}^2\text{kg}},$$
$$\underline{A_2 = 4{,}978 \text{ m}^2\text{kg}}, \qquad \underline{C_2 = 0{,}633 \text{ m}^2\text{kg}}.$$

Zahlentafel 3. Kipplasten für die freien Holme.

Holm 1		Holm 2	
M mkg	S kg	M mkg	S kg
0,10	5,35	0,10	5,38
1,21	4,14	1,21	4,22
1,78	1,95	1,78	2,115

7. Bestimmung der Steifigkeitsziffern $\zeta_1 b$, $\zeta_2 b$ und $\zeta_3 a$.

Je zwei von den acht Rippen wurden in 15 cm Entfernung voneinander an einem 20 cm langen Holmstück in der gleichen Art wie am Rost befestigt und dann wie nebenstehend schematisch dargestellt gelagert und belastet. Die über den Auflagern sich einstellenden Verdrehungswinkel wurden mittels Spiegelablesung bestimmt. Sie sind in Zahlentafel 4 eingetragen. Daraus ist auch zu entnehmen, inwieweit die Symmetrievoraussetzung für den Verlauf der Rippensteifigkeit längs der Rippenachse erfüllt ist. — Aus den Gl. (3) und den Definitionsgleichungen für b, ζ_1 und ζ_2 ergibt sich für

$$b\,\zeta_1 = \frac{2\,m_1\,l^2\,\beta_1}{(C_1+C_2)(\beta_1^2-\beta_2^2)} \quad \text{und} \quad b\,\zeta_2 = \frac{2\,m_1\,l^2\,\beta_2}{(C_1+C_2)(\beta_1^2-\beta_2^2)} \tag{23}$$

im vorliegenden Fall für die Mittelwerte von β_1, $\bar{\beta}_2$ bzw. β_2, $\bar{\beta}_1$ in Ziffern

$$\underline{\zeta_1 b = 50{,}6, \quad \zeta_2 b = 26{,}5}$$

Zahlentafel 4. Rippenverdrehungswinkel für $m_1 \frac{l}{4}$ bzw. $m_2 \frac{l}{4} = 0{,}0813$ mkg.

Rippe	β_1	β_2	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$
1 2	0,0435	—0,0225	0,0228	—0,0438
3 4	0,0431	—0,0222	0,0218	—0,0427
5 6	0,0419	—0,0214	0,0215	—0,0416
7 8	0,0409	—0,0212	0,0210	—0,0409
Mittel	0,04235	—0,021825	0,021775	—0,04225

$$\frac{1}{2}\,\beta_1 + \frac{1}{2}\,\bar{\beta}_2 = 0{,}0423, \quad \frac{1}{2}\,\beta_2 + \frac{1}{2}\,\bar{\beta}_1 = 0{,}0218$$

$\zeta_3 a$ wird aus dem Versuch Nr. 4, ohne Endhebelbelastung, der $S_1 + S_2 = 16{,}52$ kg ergibt, bestimmt. Die Auswertungsformel 21 liefert damit

$$\underline{\zeta_3 a = 5{,}14}.$$

Nach der Definition von $\zeta_3 a$, $\zeta_1 b$ und $\zeta_2 b$ müßte — gleiche Steifigkeit der Rippen und ihrer Anschlüsse in und senkrecht zur Rostebene vorausgesetzt —

$$\zeta_3 a = (\zeta_1 + \zeta_2)\,b\,\frac{C_1+C_2}{A_1+A_2} = 77{,}1\,\frac{1{,}238}{9{,}949} = 9{,}6$$

sein. Der tatsächlich vorhandene viel kleinere Wert 5,14 rührt davon her, daß die Rippenanschlüsse gegenüber einer Verbiegung in der Rostebene viel nachgiebiger sind als für eine Verbiegung senkrecht zur Rostebene. — Bemerkt wird noch, daß die 8 Rippen aus ungefähr 80 Rippenstäben im Hinblick auf möglichste Gleichheit und auf Symmetrie im elastischen Verhalten ausgewählt wurden. Die Reihenfolge der Anordnung am Holm ist die in der Zahlentafel 4. Es liegen also die dem Mittelwert nächsten Rippenpaare in Holmmitte, wo die größte Verdrehung auftritt.

8. Gegenüberstellung der rechnerischen und der Versuchswerte.

In Zahlentafel 2 unter Punkt 5 sind die Endmomente, die aus den Kraft-Auslenkungsschaubildern gefundenen kritischen Druckkräfte, dann die rechnerischen Druckkräfte und der Unterschied zwischen den Druckkräften in Hundertteilen angegeben. Mit Hinblick auf die mit Unsicherheit behaftete Bestimmung der kritischen Druckkräfte aus den Kraft-Auslenkungsschaubildern und insbesondere wegen der Ungleichheit der Rippen muß die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch eine befriedigende genannt werden. Da die Auswertungsformel für die schmale Schiene exakt gilt, müßte die versuchsmäßigen kritischen Druckkräften durchwegs über den rechnerischen liegen, was nur beim Versuch Nr. 1 der Fall ist. Beim vorliegenden Holm-Seitenverhältnis 8 : 100 würde sich bei reiner Momentenbelastung durch M_1 und M_2 mit und ohne Berücksichtigung des endlichen Seitenverhältnisses ein Unterschied von rund 1% ergeben. Dieser wird aber durch die Unsicherheit der Zuordnung überdeckt. Beim Versuch Nr. 3 ist der Unterschied zwischen der rechnerischen und der versuchsmäßigen kritischen Druckkraft mit — 6,2% im Verhältnis zu den zwei vorhergehenden am größten. Das kann mit der im Punkt 5 hervorgehobenen größten Abweichung von der Symmetrievoraussetzung für die Verformung und diese wieder mit der Ungleichheit der Rippen in Zusammenhang gebracht werden.

9. Zusammenfassung und Schluß.

Im vorliegenden Bericht werden versuchsmäßig bestimmten Kipplasten eines Holm-Rippenrostes rechnerisch bestimmte gegenübergestellt. Die Holme sind mit gleich-

Digitized by Google

bleibendem Querschnitt, die Rippen mit symmetrisch zur Rostmitte verlaufender Steifigkeit und unendlich dicht gestellt vorausgesetzt. Als Lasten wirken an beiden Holmenden gleiche Biegemomente, Druckkräfte in der Verbindungslinie der Auflager und in der Holmmittellinie angreifend gedacht das gleichmäßig verteilte Eigengewicht. Die Auswertungsformel gilt für eine Auslenkung nach einer Halbwelle. Sie wird durch die Versuche in einem für die Praxis ausreichendem Maße bestätigt. Die Formel gilt mit Sicherheit in dem durch die Versuche begrenzten Verhältnis zwischen den Endmomenten und der Druckkraft bzw. zwischen den Koeffizienten $\hat{s}$, m_1 und m_2. Ein Einfluß des endlichen Seitenverhältnisses der Versuchsholme (8 : 100) ist praktisch noch nicht merkbar. Für kleinere Druckkräfte und größere Endmomente müßten die Koeffizienten der Auswertungsformel für weitere Auslenkungsformen neu berechnet werden, um weitere Kippbedingungen zu finden, die allenfalls niedrigere Lasten an der Stabilitätsgrenze liefern. Für kleines Eigengewicht kann eine für verschwindendes Eigengewicht exakte Kippbedingung, die für beliebige Wellenzahl der Auslenkung angeschrieben ist, zum ersten Vergleich herangezogen werden, welche Wellenzahl die niedrigste Kipplast liefert. Eine Erweiterung der Energiegleichung und damit die Gewinnung einer Kippbedingung für beliebigen Verlauf der Rippensteifigkeit längs der Rippenachse und andere Lastverteilung ist an Hand der gegebenen Theorie leicht möglich.

10. Schrifttum.

[1] J. Weinhold, Über die Kippstabilität von Holm-Rippenrosten. Z. Angew. Math. Mechn. (1937).

[2] J. Weinhold, Über die Kippstabilität der Holme im Rippenverband. Z. Angew. Math. Mechn. (1938).

[3] S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability.

[4] L. Prandtl, Kipperscheinungen. Inaugural-Diss. München 1899.

[5] Th. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitt. über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 81.

Auflösung der Prandtlschen Zirkulationsgleichung durch trigonometrische Reihen.

Ergänzung.

Nachträglich stelle ich fest, daß meine Bemerkung auf S. 47 dieser Schriftenreihe Bd. 17 (1940) Lfg. 2, linke Spalte unten, wonach die vorliegenden Ansätze auf eine »offenbar bisher übersehene Darstellung der Lösung der Zirkulationsgleichung« führen, nicht zutreffend ist. In ihrer Arbeit Z. Flugtechn. (1931) »Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel«, die mir leider entgangen ist, hat Frau Dr.-Ing. Flügge-Lotz bereits dieselben Ansätze verwendet. Die in meiner Arbeit erzielten Ergebnisse sind daher in gleicher Weise auf das Lotzsche Verfahren anwendbar und sichern nun dessen Gültigkeit in allen praktisch vorkommenden Fällen. K. Jaeckel.

Digitized by Google

Untersuchungen über die Wirkungsweise des Gleichrichters.

Von F. Schultz-Grunow und K. Wieghardt.

Bericht aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.

Es wird über Messungen an Gleichrichtern in kleinem Maßstab mit verschiedener Tiefe berichtet. Die Untersuchung gibt Aufschluß über das günstigste Tiefenverhältnis, den Strömungszustand hinter dem Gleichrichter und den Druckwiderstand.

Gliederung.

I. Grundsätzliches.
II. Aufgabe der Versuche.
III. Versuchsanordnung.
IV. Versuchsdurchführung:
a) Winkelmessungen.
b) Geschwindigkeitsmessungen hinter dem Gleichrichter.
c) Druckverlustmessungen.
V. Schlußfolgerung.
VI. Schrifttum.

I. Grundsätzliches.

Bei der Entwicklung einer neuen Versuchsstrecke für Grenzschichtvorgänge zeigte es sich, daß die bisherigen Kenntnisse über die Wirkung von Gleichrichtern unzureichend sind. Obwohl jeder Windkanal einen Gleichrichter besitzt, sind systematische Untersuchungen über ihre günstigsten Abmessungen nicht bekannt geworden. Der Grund liegt wohl darin, daß Gleichrichter üblicher Größe und Bauart zu einer Messung, die Winkelablenkungen der Strömungsrichtung von Bruchteilen eines Grades noch mit Sicherheit feststellen soll, sich nicht genau genug herstellen lassen; auch sind sie zu unhandlich für systematische Änderungen.

Dies führte zwangsweise zu Versuchen in verkleinertem Maßstab, die einen wesentlichen Vorteil für die Herstellung mit sich brachten. Der Gleichrichter konnte aus dem Vollen gebohrt werden, und man erreichte damit die höchste überhaupt mögliche Genauigkeit in der Herstellung. Im ganzen wurden 7 Gleichrichter aus planparallelen Elektronplatten verschiedener Tiefe nach der in Bild 1 gezeigten Lochanordnung hergestellt. Der Lochdurchmesser beträgt 3 mm, die vertikalen Lochabstände betragen 3,5 mm, die horizontalen jedoch nur 2,8 mm, um möglichst hohe Lochdichte zu erreichen. Kleinere Lochabstände ließen sich nicht verwirklichen. Die Anordnung entspricht einem Verhältnis des freien Querschnitts zum gesamten von $\varphi = \frac{Q_F}{Q_G} = 0{,}721$, während bei den üblichen Ausführungen der Verhältniswert in der Regel zwischen 0,85 und 0,95 liegen dürfte. Das Verhältnis $\frac{t}{d}$ der Tiefe t zur Lochweite d ist für die verschiedenen untersuchten Gleichrichter in nachfolgender Zahlentafel zusammengestellt:

Gleichrichter	I	II	III	IV	V	VI	VII
Verhältnis $\frac{t}{d}$	8,33	5	3	1	2:3	1:2	1:6

VI und VII sind eigentlich nicht mehr als Gleichrichter zu bezeichnen, sondern eher als Siebbleche.

II. Aufgabe der Versuche.

Der Zweck eines Gleichrichters ist, das Geschwindigkeitsfeld parallel zu richten. Grundsätzlich kam es bei der vorliegenden Untersuchung darauf an, festzustellen, wie eine Strömung, die schräg auf den Gleichrichter auftrifft, durch ihn abgelenkt wird. Daneben wurde der Durchflußwiderstand

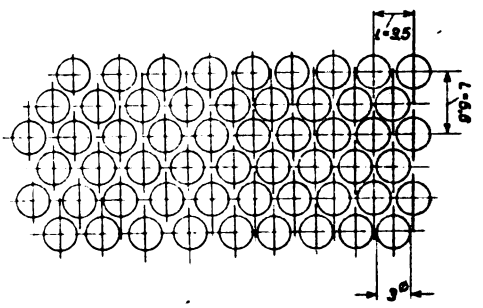


Bild 1. Lochmuster der Gleichrichter.

gemessen und untersucht, wie sich die aus den Gleichrichterlöchern austretenden Einzelstrahlen zu einem homogenen Geschwindigkeitsfeld vermischen.

III. Versuchsanordnung.

Zur systematischen Untersuchung ihrer ablenkenden Wirkung wurden die Gleichrichter unter gewissen Winkeln schräg in den Luftstrom eines Zentrifugalgebläses gestellt und die Strömungsrichtung hinter den Gleichrichtern bestimmt.

Die Versuchsanordnung ist aus Bild 2 ersichtlich. Die von dem Gebläse geförderte Luft strömt horizontal aus der Druckkammer *Ka* (400 · 400 mm²) in eine quadratische Düse *D*. An die Düse (100 · 100 mm²) war ein Sieb *S* und ein 200 mm langes Ansatzstück *A* zum Ausgleichen der Geschwindigkeiten angeschlossen. Der Flansch des Ansatzrohres war durch einen Rahmen *R* versteift, damit er eine feste Bezugsebene für die Winkelmessungen bildete. Daran schloß sich ein keilförmiger Rahmen *K* an, auf welchen der Gleichrichter *GR* aufgeschraubt wurde. Aus dem Gleichrichter trat die Luft ins Freie. Durch Einbau verschiedener Keilrahmen konnte die Anströmrichtung geändert werden.

Die Austrittsrichtung der Luft aus dem Gleichrichter wurde mit der unten beschriebenen Winkelsonde *W* gemessen. Damit die Richtung an verschiedenen Orten des austretenden Strahles festgestellt werden konnte, war die Sonde an einem Verschiebegerät befestigt, das eine vertikale Verschiebung ermöglichte; das Verschiebegerät selbst befand sich auf einer horizontalen optischen Bank. Die Meßstellen lagen in zwei Entfernungen vom Gleichrichter (100 und 200 mm) an je 5 verschiedenen Punkten.

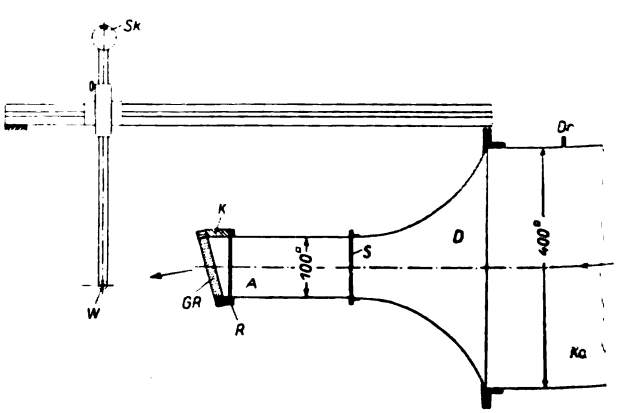
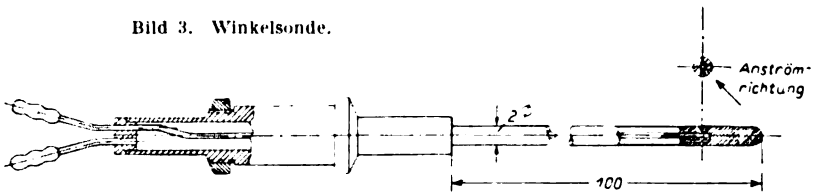


Bild 2. Versuchseinrichtung.

Digitized by Google

Bild 3. Winkelsonde.



Die Winkelsonde (s. Bild 3) bestand im wesentlichen aus einer zylindrischen Messinghülse von 2 mm Dmr. und 100 mm Länge, die um ihre Achse gedreht werden konnte und senkrecht zur Strömungsrichtung angeordnet war. In ihrem vollen Ende befanden sich zwei Bohrungen mit 0,2 mm Dmr., die einen Winkel von 90° miteinander bildeten und durch getrennte Leitungen an ein Manometer angeschlossen werden konnten. War die Messinghülse so gedreht, daß beide Druckanbohrungen den gleichen Druck anzeigten, so wurde sie symmetrisch zu den beiden Anbohrungen angeströmt, womit die Strömungsrichtung zum Drehwinkel in Beziehung gesetzt war. Die Winkelstellung dieser sog. Zweilochsonde wurde mit der Winkelskala (*Sk*), zu der ein Drahtzug führte, auf ¼° genau abgelesen. Die Sonde entstammt einem früheren Vorschlag von Prandtl und ist in ähnlicher Ausführung bereits von Gruschwitz [1] verwendet worden.

IV. Versuchsdurchführung.

a) Winkelmessungen.

Hatte man mit der Winkelsonde die Strömungsrichtung bestimmt, so war damit ihre Lage weder zur Gleichrichterebene noch zur Einströmrichtung bekannt, denn in die Austrittsrichtung gehen Herstellungsungenauigkeiten ein, z. B. nicht genau senkrecht gebohrte Löcher, auch hängt sie davon ab, um welchen Winkel die Ebene des Endflansches *R* von der Senkrechten zur Eintrittsrichtung abweicht. Die Ungenauigkeiten der Versuchsanordnung fielen aber dadurch heraus, daß man nach einer Winkelmessung den Keil allein um 180° drehte, so daß dann der Luftstrom nach oben statt wie vorher nach unten abgelenkt wurde, eine zweite Messung ausführte und daraufhin die beiden Messungen mittelte.

Der Winkel, unter dem der Gleichrichter angeströmt wird, d. h. der Winkel zwischen Einströmrichtung und Achse der Bohrungen (kurz »Anstellwinkel«) setzt sich zusammen:

1. aus dem Keilwinkel α_K und
2. aus einem Korrekturwinkel $\Delta\alpha$, der sich aus der Abweichung des Endflansches von der Senkrechten zur Einströmrichtung und aus der Abweichung der Gleichrichterbohrungen von der Senkrechten zur Gleichrichterebene ergibt.

Demnach ist der Anstellwinkel bei dem einen Versuch

$$\alpha_1 = \alpha_K + \Delta\alpha.$$

Beim anderen Versuch ist α_K wegen der Keildrehung um 180° negativ zu zählen, somit

$$\alpha_2 = -\alpha_K + \Delta\alpha.$$

Aus diesen beiden Beziehungen erhält man durch Differenzbildung der mittleren Anstellwinkel α

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_K.$$

Zu diesem gemittelten Anstellwinkel, der sich also gleich dem Keilwinkel erweist, mußte der aus den beiden Versuchen erhaltene mittlere Ablenkungswinkel β in Beziehung gesetzt werden. Man erhält diesen Mittelwert ebenfalls durch Differenzbildung der Winkelmessungen β_1 und β_2:

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2).$$

Dieser Mittelwert entspricht dem Mittelwert α exakt, wenn eine lineare Beziehung

$$\beta = \frac{\alpha}{c}$$

besteht, und sonst angenähert, wenn der Korrekturwinkel $\Delta\alpha$ klein ist. Daß dem so ist, läßt sich folgendermaßen leicht erkennen. Man hat unter Voraussetzung der Linearität aus den beiden Versuchen

$$\alpha_K + \Delta\alpha = c\,\beta_1$$
$$-\alpha_K + \Delta\alpha = c\,\beta_2,$$

woraus folgt

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{\alpha_K}{c}$$

und somit

$$\beta = \frac{\alpha}{c}.$$

Da nun die lineare Beziehung sich im Versuch fast durchweg bestätigt hat, ist die obige einfache Mittelbildung gerechtfertigt.

Die Meßergebnisse sind in Bild 4 wiedergegeben. Dort ist nicht der Ablenkungswinkel β sondern $\gamma = \alpha - \beta$, also der Ablenkungswinkel gegen die Achsen der Gleichrichterbohrungen über dem Anstellwinkel α aufgetragen. Jeder Meßpunkt stellt das Mittel aus 20 Einzelmessungen an verschiedenen Orten dar. Die ausgezogenen Kurven entsprechen einer Reynoldsschen Zahl $Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} = 4540$. $\bar{u}$ ist die mittlere Durchflußgeschwindigkeit im Gleichrichter, ν die kinematische Zähigkeit und d der Lochdurchmesser. Die Reynoldssche Zahl wurde aus einer Geschwindigkeits-

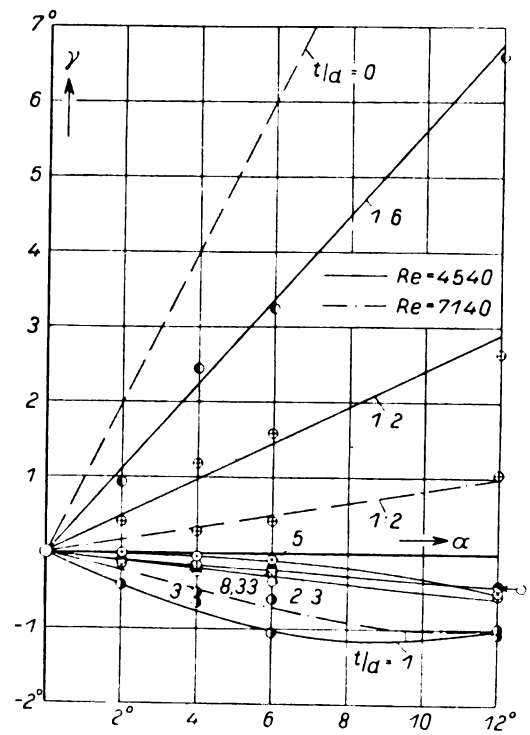


Bild 4. Ablenkung γ abhängig vom Anstellwinkel α.

Zahlentafel. Ablenkung γ abhängig vom Anstellwinkel α.

1. $Re = 4540$							2. $Re = 7140$		
α	$\frac{t}{d} = 8{,}33$	5	3	1	2:3	1:2	1:6	α	1	1:2
2°	−0,10	0	−0,14	−0,44	−0,10	+0,40	+0,96	4°	−0,53	+0,20
4°	−0,25	−0,065	−0,15	−0,64	−0,165	+1,185	+2,46	6°	−0,60	+0,42
6°	−0,19	−0,10	−0,255	−1,065	−0,375	+1,595	+3,235	12°	−1,03	+1,06
12°	−0,44	−0,50	−0,565	−1,025	−0,45	+2,65	+6,61			

Digitized by Google

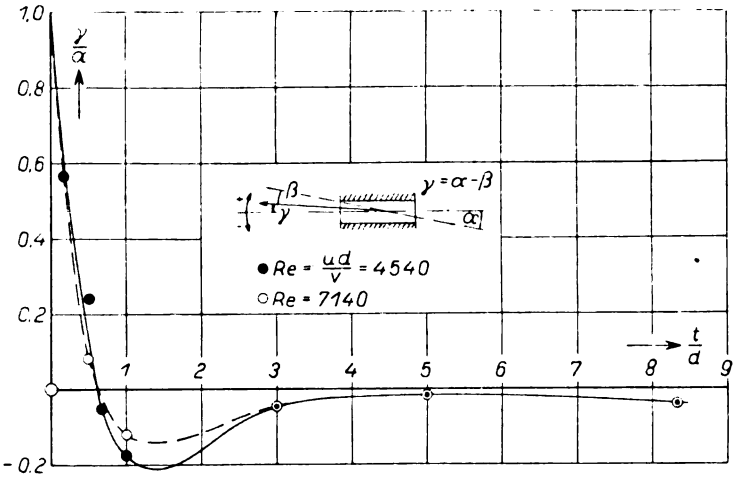


Bild 5 (links). Ablenkung $\frac{\gamma}{\alpha}$ abhängig vom Tiefenverhältnis $\frac{t}{d}$.

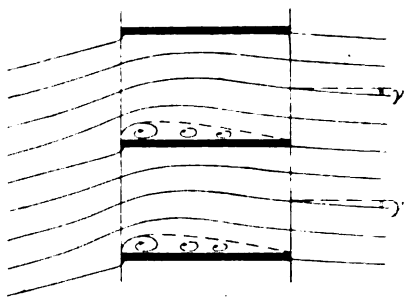


Bild 6. Erläuterungsskizze zur Überablenkung.

messung weit hinter dem Gleichrichter bestimmt, indem die dort erhaltene Geschwindigkeit durch das oben angegebene Querschnittsverhältnis φ dividiert wurde. Die strichpunktierten Kurven wurden bei $Re = 7140$ mit den Gleichrichtern IV und VI gemessen. Bei den übrigen Gleichrichtern ergab sich im Meßbereich keine Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

Da die Meßpunkte im allgemeinen die lineare Abhängigkeit bestätigen, kann man auch eine andere Darstellung benutzen, die γ in Abhängigkeit von der Tiefe des Gleichrichters erkennen läßt. Trägt man die Neigungen $\frac{\gamma}{\alpha}$, und soweit die Linearität nicht genau erfüllt ist, die Anfangsneigungen über dem Tiefenverhältnis $\frac{t}{d}$ auf, so erhält man die Kurven in Bild 5. $\frac{t}{d} = 0$ entspricht dem Wert $\frac{\gamma}{\alpha} = 1$. Die Kurven fallen mit wachsendem $\frac{t}{d}$ rasch ab, haben bei $\frac{t}{d} = 0{,}62$ eine Nullstelle, erreichen im Gebiet $1 < \frac{t}{d} < 2$ Minimalwerte und nähern sich dann bis $\frac{t}{d} = 5$ der Abszisse, um sich endlich wieder von ihr etwas zu entfernen. Ein asymptotischer Wert wurde also im Versuchsbereich nicht erreicht. Für die höhere *Re*-Zahl ist der Minimalwert geringer.

Es ist interessant, daß die Kurven von dem Wert $\frac{t}{d} = 0{,}62$ ab negativ sind. Ein negativer Winkel γ bedeutet, daß die ablenkende Wirkung des Gleichrichters zu stark ist, d. h., daß z. B. eine nach oben gerichtete Eintrittsgeschwindigkeit von einem horizontal angeordneten Gleichrichter nicht horizontal gerichtet wird, sondern darüber hinaus nach unten abgelenkt wird. Diese zu starke Ablenkung wird der Kürze halber weiterhin als »Überablenkung« bezeichnet.

Eine Erklärung für die vermutliche Entstehung der Überablenkung läßt sich an Hand der Skizze in Bild 6 geben. Ist der Winkel, unter dem die Luft in einen Gleichrichterkanal eintritt, groß genug, so tritt an der Eintrittskante der unteren Wand Ablösung auf. Nach erfolgter Ablösung scheint der Luftstrom von der unteren Kanalwand wieder angesaugt zu werden, wodurch eine nach unten gerichtete Geschwindigkeitskomponente entsteht. Endet der Gleichrichterkanal in diesem Bereich, so wird demnach die Geschwindigkeit mit einer nach unten gerichteten Komponente austreten und sich Überablenkung ergeben. Immerhin ist es auffallend, daß auch bei den größten untersuchten Tiefenverhältnissen noch Überablenkung auftritt; man würde eher vermuten, daß bei langen Gleichrichterkanälen das Ansaugen der Luft an der unteren Kanalwand eine Ablösung von der oberen Wand zur Folge hätte. Man muß aber berücksichtigen, daß diese Erklärung sowohl die durch die Ablösung ausgelöste Sekundärströmung als auch das Druckfeld am Gleichrichteraustritt, welches nicht untersucht worden ist, außer acht läßt.

Ein Einfluß der Reynoldsschen Zahl auf die Ablenkung zeigt sich (Bild 5) nur im Gebiet $\frac{t}{d} < 3$. Dieser Sachverhalt ist insofern von Bedeutung, als er zeigt, daß man sich erst bei den tieferen Gleichrichtern im überkritischen Gebiet, d. h. im Gebiet der ausgebildeten Turbulenz, befindet, worauf auch die weiter unten mitgeteilten Widerstandsmessungen deuten. Der Grund dafür, daß hier die Gleichrichtertiefe eine Rolle spielt, ist darin zu suchen, daß man es nicht mit einer ausgebildeten Rohrströmung zu tun hat, bei der der Strömungszustand durch die mit dem Rohrdurchmesser gebildete *Re*-Zahl charakterisiert ist, sondern mit einer Anlaufströmung, für welche die mit der Anlauflänge gebildete *Re*-Zahl maßgebend ist.

Schließlich ist zu diesen Ergebnissen zu bemerken, daß sie weder einen Einblick in den Einfluß des Öffnungsverhältnisses φ noch in den des Verhältnisses der Maschenweite zum Kanaldurchmesser[1]) auf die Gleichrichtung geben.

b) Geschwindigkeitsmessungen hinter dem Gleichrichter.

Im Zusammenhang mit den neueren Forschungen über die Turbulenzerzeugung durch Gitter oder Siebe hat auch das Geschwindigkeitsfeld hinter diesen Einbauten eine gewisse Bedeutung erlangt. Die Gitterstäbe unterteilen das homogene Geschwindigkeitsfeld in einzelne Strahlen mit dazwischen liegenden Windschattengebieten. Durch die Wirkung der Reibung und der Turbulenz gleicht sich die unstetige Verteilung allmählich aus, und es bildet sich wieder ein homogenes Geschwindigkeitsfeld. Dieser Übergang

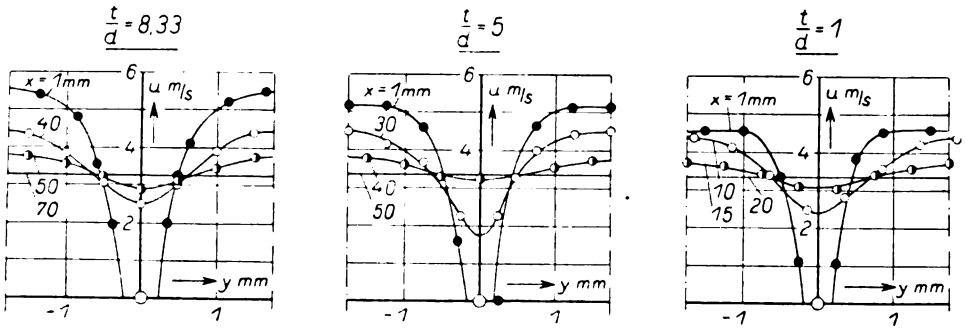


Bild 7. Geschwindigkeitsprofile hinter den Gleichrichtern. ($Re = 700$.)

[1]) Bei den Versuchsgleichrichtern und ebenfalls bei Gebläsen hat dieses Verhältnis den Wert 0,03; bei Windkanälen beträgt es ungefähr den dritten Teil.

Digitized by Google

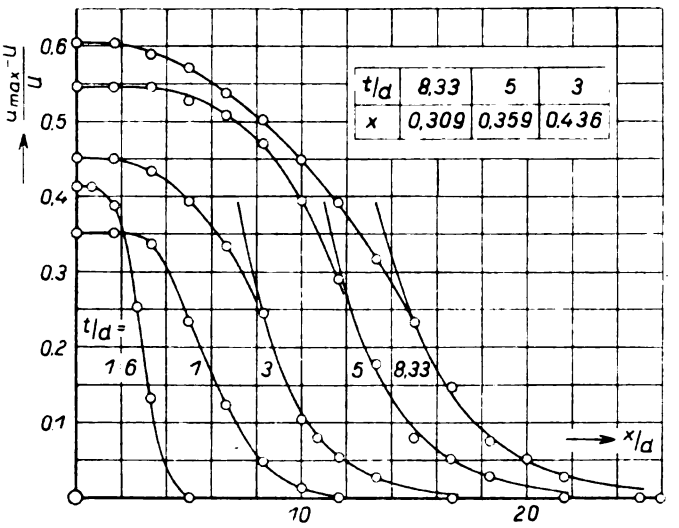


Bild 8. Amplitude der räumlichen Geschwindigkeitsschwankungen abhängig von der Entfernung vom Gleichrichter bei $Re = 1000$.

war Gegenstand zweier Arbeiten [2], [3], welche u. a. Aufschlüsse darüber geliefert haben, nach welchem Gesetz die Amplituden der räumlichen Geschwindigkeitsverteilung mit zunehmender Entfernung vom Gitter abnehmen. Beide Autoren fanden, daß die Amplitude in einem gewissen Entfernungsbereich mit $1/x$ (x = Entfernung vom Gleichrichter) abnimmt, was mit dem Prandtlschen Mischungswegansatz in Übereinstimmung steht. Während sich diese Untersuchungen auf Gitter bezogen, ist nun das Abnehmen der Geschwindigkeitsschwankungen hinter Gleichrichtern untersucht worden.

Es ist die Geschwindigkeitsverteilung in mehreren Abständen hinter dem Gleichrichter über einer vertikalen Lochreihe (s. Bild 1) bei einer möglichst geringen Durchflußgeschwindigkeit $\bar{u} = 4{,}4$ m/s ($Re = 724$) gemessen worden, um in den Gleichrichterkanälen laminare Strömung zu haben. Das Ergebnis ist in Bild 7 dargestellt. Bei dem tiefsten Gleichrichter I erkennt man am Austritt aus dem Gleichrichterkanal eine nahezu ausgebildete laminare Rohrströmung, bei den anderen beiden Gleichrichtern dagegen einen Kern mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung; hier befindet man sich also noch im Anlaufgebiet. Der tiefere Gleichrichter hat folglich am Austritt einen geringeren Geschwindigkeitsanstieg quer zur Strömungsrichtung als der weniger tiefe. Dieser Unterschied hat zur Folge, daß sich beim tieferen Gleichrichter erst weiter stromabwärts wieder ein homogenes Geschwindigkeitsprofil bildet als bei einem weniger tiefen, da der Impulstransport, der die Vergleichmäßigung bewirkt, im laminaren Fall proportional dem Geschwindigkeitsanstieg quer zur Strömungsrichtung bzw. im turbulenten proportional zu dessen Quadrat ist.

In Bild 8 ist die gemessene Amplitudenverminderung wiedergegeben. Aufgetragen ist $\frac{u_{max} - U}{U}$ über $\frac{x}{d}$, wobei U der stationäre Wert der Geschwindigkeit nach der Durchmischung der Einzelstrahlen ist. Die Re-Zahl $\left(Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu}\right)$ betrug hierbei etwa 1000. Da die kritische Re-Zahl eines Rohres bei scharfkantigem Einfluß 2800 beträgt, ist anzunehmen, daß die Strömung im Gleichrichter laminar ist. Die Kurven verlaufen zunächst horizontal, weil hier der Impulstransport noch nicht in den Strahlkern eingedrungen ist. Je tiefer der Gleichrichter ist, desto langsamer fallen dann, wie gesagt, die Kurven ab.

Über die Art des Abklingens gibt die folgende Näherungsrechnung einen Hinweis. Setzt man

$$u = U + u_1,$$
$$v = v_1,$$
$$w = w_1,$$

wo U die Geschwindigkeit weit hinter dem Gleichrichter ist, so kann man die Navier-Stokessche Gleichung linearisieren, da die Störgeschwindigkeiten u_1, v_1 und w_1 von einer gewissen Entfernung hinter dem Gleichrichter ab klein gegen U sind:

$$U \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \Delta u_1.$$

Nach den Geschwindigkeitsprofilen in Bild 7 liegt es nahe, für u_1 von einem gewissen $\frac{x}{d}$ ab folgenden Ansatz zu machen:

$$u_1 = f(x) \cos \frac{2\pi}{l} y \cos \frac{2\pi}{L} z.$$

l und L bedeuten die Lochabstände in horizontaler und vertikaler Richtung (s. Bild 1). Man erhält dann nach kurzer Rechnung

$$f(x) = c\, e^{-\lambda \frac{x}{d}}, \text{ mit } \lambda = \frac{4\pi^2 \nu d}{U}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{L^2}\right);$$

die doppelte Amplitude $\frac{2 f(x)}{U}$ entspricht $\frac{u_{max} - U}{U}$ in Bild 8. Zur Prüfung dieser Formel sind die Abklingungskurven in Bild 8 durch Kurven $e^{-\lambda \frac{x}{d}}$ angenähert. Es zeigt sich, daß diese Art des Abklingens von denjenigen $\frac{x}{d}$ ab, wo die Geschwindigkeitsverteilung sinusförmig ist, gut bestätigt wird, während der zahlenmäßige Wert von λ durch die obige Näherung nicht richtig wiedergegeben wird.

Des weiteren wurde versucht, bei höheren Re-Zahlen die entsprechenden Geschwindigkeitsprofile aufzunehmen. Der Geschwindigkeitsanstieg quer zur Strömungsrichtung erwies sich jedoch als zu steil, um bei den kleinen Abmessungen eine genaue Ortsbestimmung vornehmen zu können. Es wurde daher nur der Maximalwert der Geschwindigkeit in seiner Abhängigkeit von $\frac{x}{d}$ gemessen. Bei dieser Versuchsreihe betrug die Re-Zahl 7700, so daß die Strömung turbulent war. Diese Messungen sind in Bild 9 wiedergegeben. Bemerkenswert im Vergleich zu Bild 8 ist, daß die Kur-

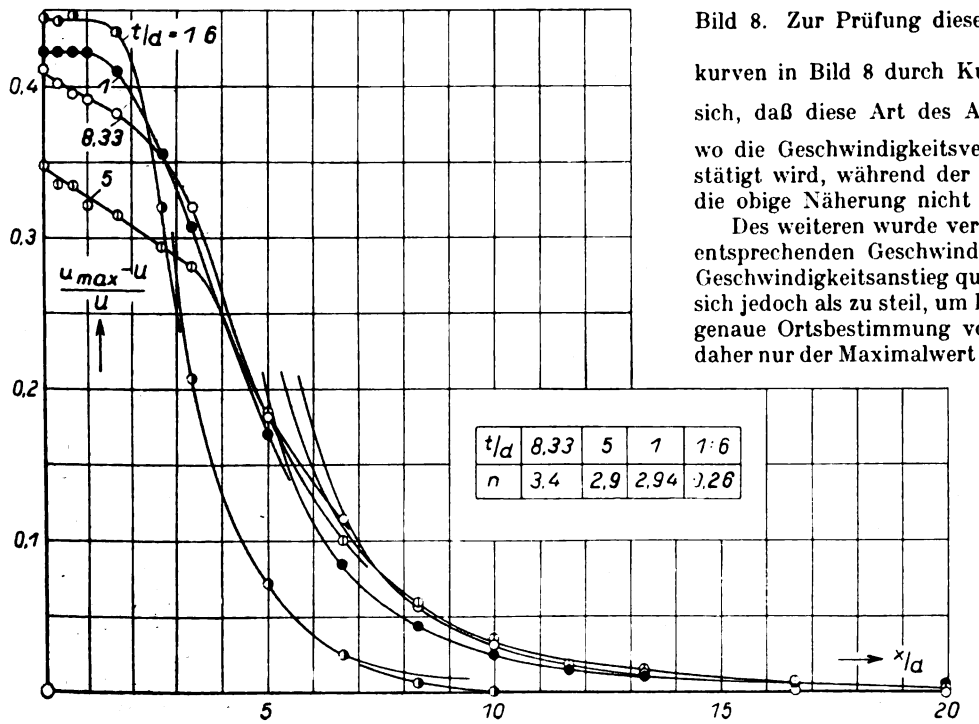


Bild 9. Amplitude der räumlichen Geschwindigkeitsschwankungen abhängig von der Entfernung vom Gleichrichter bei $Re = 7500$.

Digitized by Google

ven hier fast zusammenfallen, wenn man das kleinste Tiefenverhältnis 1:6, das praktisch einem Sieb entspricht, außer acht läßt. Von einer Entfernung $x = 7d$ ab fallen die Kurven nahezu wie $\left(\frac{x}{d}\right)^{-3}$. Ein Abklingen mit $\left(\frac{x}{d}\right)^{-n}$ bei größeren $\frac{x}{d}$ wurde auch schon bei Gittern beobachtet. Eine theoretische Erklärung gibt ein Schubspannungsansatz für isotrope Turbulenz von Prandtl [4]. Die genauen Potenzen n für die einzelnen Gleichrichter, die durch logarithmische Auftragung gewonnen wurden, sind im Bild angegeben und außerdem die Kurven $\left(\frac{x}{d}\right)^{-n}$. Das Herausfallen des kleinsten Tiefenverhältnisses ist wieder mit der wesentlich kürzeren Anlaufstrecke zu erklären. Es zeigt sich also, daß bei Gleichrichtern sehr geringer Tiefe die Amplituden viel schneller abnehmen als bei den tieferen, und daß man bei letzteren von einem nahezu gleichen Abklingungsgesetz sprechen kann. Es wäre daher von Interesse gewesen, auch den Turbulenzgrad zu messen, doch mußte darauf wegen der kleinen Abmessungen der Versuchseinrichtung verzichtet werden.

c) Druckverlustmessungen.

Schließlich wurden noch die Widerstandsziffern für die verschiedenen Gleichrichter bestimmt, um einen Anhaltspunkt für den Druckverlust zu bekommen. Die Widerstandsziffer sei definiert durch die Formel:

$$\xi = \frac{p_1 - p_2 + \frac{\varrho}{2}(u_1^2 - u_2^2)}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2}.$$

Sie stellt den Gesamtdruckverlust mit dem mittleren Staudruck im Gleichrichter in Beziehung. p bedeutet den statischen Druck, u die Geschwindigkeit, ϱ die Dichte der Luft, der Index 1 bezieht sich auf einen Querschnitt vor dem Gleichrichter, Index 2 auf einen stromabwärts gelegenen Querschnitt. Der erste Querschnitt wurde beim Versuch in den Kasten *Ka* (s. Bild 1) des Gebläses gelegt, wo eine statische Druckanbohrung *Dr* vorhanden war. Wegen des großen Querschnittsverhältnisses des Kastens zum Gleichrichter kann u_1 gegenüber u_2 vernachlässigt werden ($(u_1:u_2)^2 = 0{,}004$). Der Querschnitt 2 lag 200 mm hinter dem Gleichrichter, wo das Geschwindigkeitsfeld wieder homogen ist. In der Widerstandsmessung ist somit auch der mit der Vermischung der Einzelstrahlen bedingte Energieverlust enthalten. Im Querschnitt 2 wurde nur der Staudruck gemessen; der statische Druck konnte gleich dem Außendruck gesetzt werden. Damit vereinfacht sich die Formel für ξ zu:

$$\xi = \frac{p_1 - \frac{\varrho}{2}u_2^2}{\frac{\varrho}{2}\left(\frac{u_2}{\varphi}\right)^2}.$$

Es ist zu bemerken, daß die Formel auch den Druckverlust in der Düse *D* und im Ansatzrohr *A* enthält. Er hat sich aber praktisch gleich Null ergeben, so daß also ξ als Widerstandsziffer des Gleichrichters angesehen werden darf. Das Sieb *S* war selbstverständlich zu diesen Messungen entfernt worden, wobei gesondert festgestellt wurde, daß eine etwaige Änderung des Zustroms durch die Entfernung des Siebs keinen Einfluß auf die Widerstandsziffer hatte.

Die Widerstandsziffern sind in Bild 10 für die verschiedenen Gleichrichter über der *Re*-Zahl aufgetragen. Es zeigt sich darin im allgemeinen eine schwache Abnahme mit der *Re*-Zahl. Die Gleichrichter V, VI und VII mit den kleinsten Tiefenverhältnissen bilden eine Ausnahme, indem ihre Widerstandsziffern zunehmen, was darauf hindeutet, daß sie im unterkritischen Gebiet, die tieferen Gleichrichter dagegen, wenigstens bei den hohen *Re*-Zahlen, im überkritischen Gebiet liegen. Einen guten Einblick gibt auch die Auftragung in Bild 11, wo die Widerstandsziffern für verschiedene *Re*-Zahlen über $\frac{t}{d}$ aufgetragen sind. Auch hier läßt sich deutlich bei kleinem $\frac{t}{d}$ das Übergangsgebiet zum überkritischen Bereich erkennen. Im überkritischen Gebiet gilt für Tiefenverhältnisse größer als 3 die lineare Abhängigkeit

$$\xi = 0{,}045\,\frac{t}{d} + 0{,}31.$$

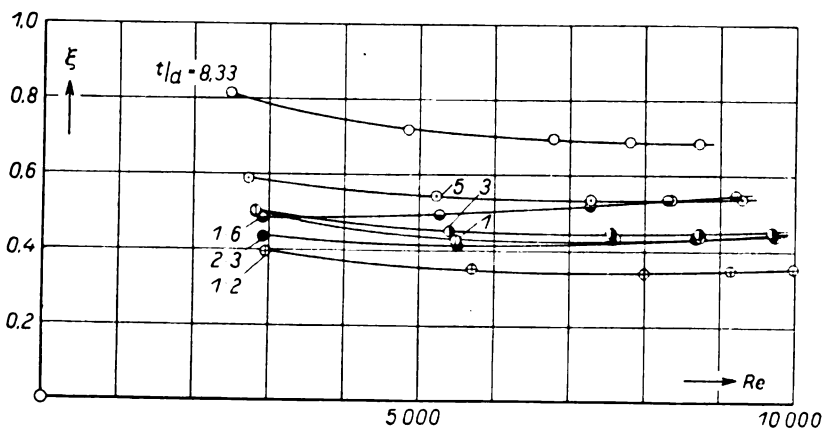


Bild 10. Widerstandsziffer ξ abhängig von der *Re*-Zahl.

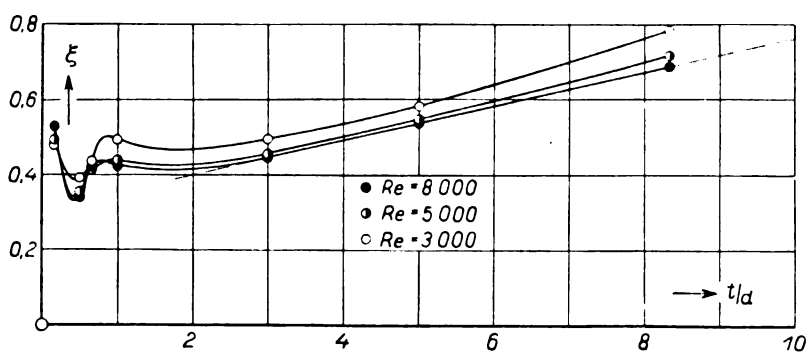


Bild 11. Widerstandsziffer ξ abhängig von dem Tiefenverhältnis $\frac{t}{d}$.

V. Schlußfolgerung.

Die Untersuchung der ablenkenden Wirkung eines Gleichrichters ergab, daß das günstigste Tiefenverhältnis zwischen 5 und 6 liegt. Die Geschwindigkeitsmessungen im Abstrom gaben Aufschluß über das Abklingungsgesetz der räumlichen Geschwindigkeitsschwankungen und die Widerstandsmessungen über die Abhängigkeit des Widerstandes vom Tiefenverhältnis und der *Re*-Zahl.

VI Schrifttum.

[1] E. Gruschwitz, Turbulente Reibungsschichten mit Sekundärströmung. Ing.-Archiv Bd. 6 (1935), S. 355.

[2] R. Gran Olsson, Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulenter Strömung. Z. angew. Math. Mechn. Bd. 16 (1936), S. 257.

[3] G. Cordes, Untersuchungen zur statischen Druckmessung in turbulenter Strömung. Ing.-Archiv Bd. 8 (1937), S. 245.

[4] L. Prandtl, Beitrag zum Turbulenz-Symposium. Proceedings of the fifth international congress for applied mechanics (1938) S. 340.

Abgeschlossen Mai 1939.

Digitized by Google

Zur harmonischen Analyse von Nockenkurven.

Von K. Schlaefke, Dessau.

Durch ein neues Verfahren lassen sich die harmonischen Beiwerte für Nockenkurven rasch, übersichtlich und in den meisten Fällen mit mathematischer Strenge bestimmen. Man erhält Reihen, deren einzelne Glieder im wesentlichen von den Unstetigkeiten der Funktion abhängen, so daß nur diese bekannt sein müssen. Ein Beispiel zeigt, daß die Ausrechnung sehr einfach ist.

Um die Ventilfedern raschlaufender Verbrennungsmotoren einwandfrei berechnen zu können, muß man die harmonische Analyse der Nockenkurven durchgeführt haben[1]). Hierfür wird meist das Schemaverfahren von Runge[2]) angewandt, das aber den Überblick über die sachlichen Zusammenhänge verlorengehen läßt und deshalb meist recht langweilig ist. Im Gegensatz hierzu lassen sich durch das im folgenden beschriebene Verfahren die harmonischen Beiwerte für Ventilerhebungskurven rasch, übersichtlich und in den meisten Fällen mit mathematischer Strenge ermitteln.

Die Ventilerhebungskurve, Bild 1, ist eine gerade Funktion, d. h. es ist

$$f(x) = f(2\pi - x) = f(-x) \quad \ldots\ldots (1).$$

Die Kurve setzt sich aus einer Anzahl von Abschnitten zusammen, von denen jeder einem bestimmten mathematischen Gesetz folgt. An der gemeinsamen Grenze zweier Abschnitte muß sowohl die Funktion als auch ihre erste Ableitung von beiden Seiten her den gleichen Wert annehmen; es ist also

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

und

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Außerdem ist noch

$$f_1'(0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$

$$f_n(x_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

und

$$f_n'(x_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Für jede harmonische Analyse sind die Integrale $\int f(x) \cos \mu x \cdot dx$ und $\int f(x) \sin \mu x \cdot dx$ zu lösen. Die bisher wenig beachteten Lösungen lauten

$$\int f(x) \cos \mu x \cdot dx = \frac{\sin \mu x}{\mu} f(x) + \frac{\cos \mu x}{\mu^2} f'(x) - \frac{\sin \mu x}{\mu^3} f''(x) - \frac{\cos \mu x}{\mu^4} f'''(x) + \frac{\sin \mu x}{\mu^5} f^{(4)}(x) + \frac{\cos \mu x}{\mu^6} f^{(5)}(x) - \ldots + c \quad \ldots (7)$$

und

$$\int f(x) \sin \mu x \cdot dx = -\frac{\cos \mu x}{\mu} f(x) + \frac{\sin \mu x}{\mu^2} f'(x) + \frac{\cos \mu x}{\mu^3} f''(x) - \frac{\sin \mu x}{\mu^4} f'''(x) - \frac{\cos \mu x}{\mu^5} f^{(4)}(x) + \frac{\sin \mu x}{\mu^6} f^{(5)}(x) + \ldots + c \quad \ldots (8).$$

[1]) A. Hußmann, Schwingungen in schraubenförmigen Ventilfedern. Jahrb. 1938 deutsch. Luftfahrtforschg. S. II 119.

[2]) A. Hußmann, Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese. Berlin, J. Springer 1938.

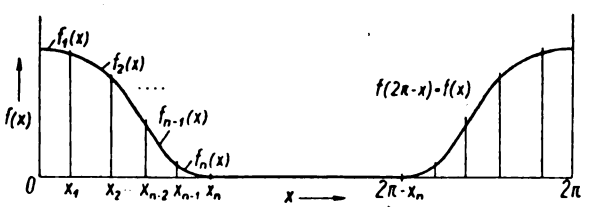


Bild 1. Verlauf einer Ventilerhebungskurve.

Die Vorzeichen in den Reihen springen jeweils vor den Sinusgliedern um. Über weitere Einzelheiten der Gl. (7) und (8) sowie über die Geschichte ihrer Entdeckung haben G. Koehler und A. Walther[3]) ausführlich berichtet.

Bei der harmonischen Analyse gerader Funktionen fallen die Sinusbeiwerte fort. Für die Kosinusbeiwerte a_μ lautet die allgemeine Gleichung

$$a_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_1} f_1(x) \cos \mu x \cdot dx + \frac{2}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \cos \mu x \cdot dx + \ldots + \frac{2}{\pi}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x) \cos \mu x \cdot dx \quad \ldots (9).$$

Diese Gleichung zusammen mit Gl. (2) bis (7) liefert das Ergebnis der bisherigen Überlegungen in der Form

$$\begin{aligned} a_\mu = \frac{2}{\pi}\Big[& \frac{f_1'''(0)}{\mu^4} - \frac{f_1^{(5)}(0)}{\mu^6} + \frac{f_1^{(7)}(0)}{\mu^8} - \ldots\ldots \\ & - \frac{\sin \mu x_1}{\mu^3}(f_1''(x_1) - f_2''(x_1)) - \frac{\cos \mu x_1}{\mu^4}(f_1'''(x_1) - f_2'''(x_1)) + \ldots \\ & - \frac{\sin \mu x_2}{\mu^3}(f_2''(x_2) - f_3''(x_2)) - \frac{\cos \mu x_2}{\mu^4}(f_2'''(x_2) - f_3'''(x_2)) + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \frac{\sin \mu x_{n-1}}{\mu^3}(f_{n-1}''(x_{n-1}) - f_n''(x_{n-1})) \\ & \quad - \frac{\cos \mu x_{n-1}}{\mu^4}(f_{n-1}'''(x_{n-1}) - f_n'''(x_{n-1})) + \ldots \\ & - \frac{\sin \mu x_n}{\mu^3} f_n''(x_n) - \frac{\cos \mu x_n}{\mu^4} f_n'''(x_n) \\ & \quad + \frac{\sin \mu x_n}{\mu^5} f_n^{(4)}(x_n) + \ldots \Big] \quad \ldots\ldots (10). \end{aligned}$$

Wenn die Ableitungen von einem bestimmten Grad ab verschwinden, läßt sich Gl. (10) mathematisch streng auswerten. Dies trifft für viele praktisch verwendete Nockenformen zu, z. B. für solche, deren Beschleunigungsverlauf aus geradlinigen Abschnitten zusammengesetzt ist. Diese Nockenkurven werden häufig bevorzugt, weil sich bei ihnen die Ventilgeschwindigkeits- und -erhebungskurven, d. h. die Funktionen $f'(x)$ und $f(x)$, aus dem Beschleunigungsverlauf $f''(x)$ in besonders einfacher Weise ermitteln lassen.

[3]) G. Koehler und A. Walther, Fouriersche Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besonderheiten. Arch. Elektrotechn. Bd. 25 (1931), S. 747. A. Walther, Stellungnahme zu der Bemerkung von Herrn Feinberg und geschichtliche Ergänzung zur Fourierschen Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besonderheiten. Arch. Elektrotechn. Bd. 27 (1933), S. 19.

Digitized by Google

Zahlentafel 1.

	Dim.	$f_1(0)$	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_2(x_2)$
$s = f(x)$	mm	18	4,783		0
$\frac{ds}{dx} = \frac{v}{\omega} = f'(x)$	mm	0	−29,361		0
$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{b}{\omega^2} = f''(x)$	mm	−42,897	−27,197	120,163	0
$\frac{d^3s}{dx^3} = \frac{db}{dt} \cdot \frac{1}{\omega^3} = f'''(x)$	mm	18,742	18,742	−245,882	−245,882
höhere Ableitungen	mm	0	0	0	0

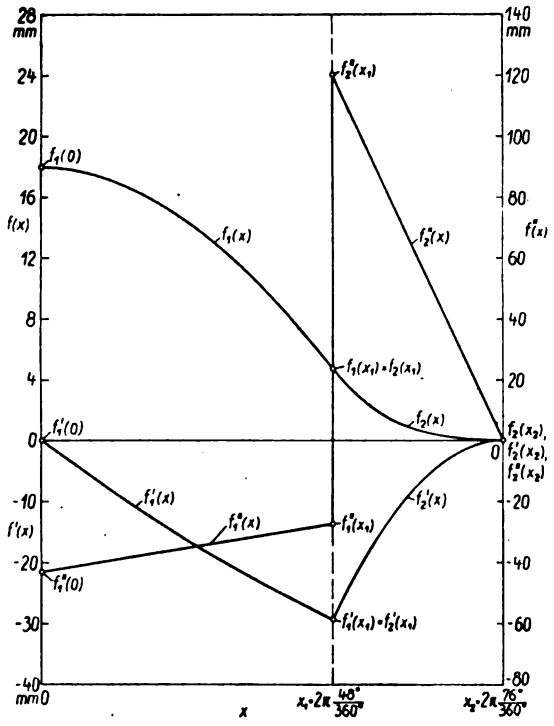


Bild 2. Beispiel einer Ventilerhebungskurve.

Als Beispiel sei die harmonische Analyse einer Ventilerhebungskurve nach Bild 2 durchgeführt. Für die einzelnen Funktionswerte und ihre Ableitungen gilt Zahlentafel 1. Mit den Werten der Zahlentafel 1 erhält man aus Gl. (10)

$$a_{\mu} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{18{,}742}{\mu^4} - \frac{\sin \mu \cdot 48^0}{\mu^3}(-27{,}197 - 120{,}163) - \frac{\cos \mu \cdot 48^0}{\mu^4}(18{,}742 + 245{,}882) - \frac{\sin \mu \cdot 76^0}{\mu^3} \cdot 0 - \frac{\cos \mu \cdot 76^0}{\mu^4}(-245{,}882)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{147{,}360 \sin \mu \cdot 48^0}{\mu^3} + \frac{18{,}742 - 264{,}624 \cos \mu \cdot 48^0 + 245{,}882 \cos \mu \cdot 76^0}{\mu^4}\right] \quad (11).$$

Man sieht, daß a_{μ} hauptsächlich vom ersten Glied in der Klammer, d. h. vom Beschleunigungssprung bei x_1 bestimmt wird. Die Ausrechnung der Gl. (11) ist sehr einfach; ihre Ergebnisse sind in Zahlentafel 2 und in Bild 3 dargestellt. Der harmonische Beiwert für $\mu = 0$, der sich in bekannter Weise als Mittelwert der Funktion zu $a_0 = 3{,}910$ mm ergibt, ist ebenfalls eingetragen.

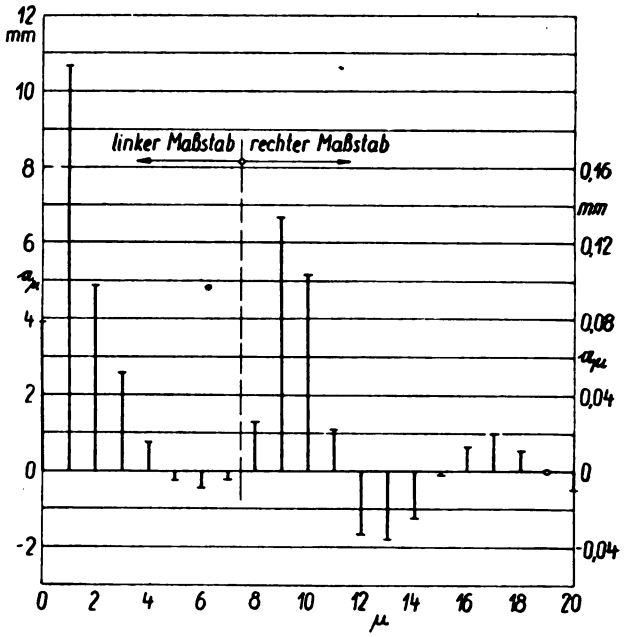


Bild 3. Harmonische Beiwerte nach Gl. (11).

Zahlentafel 2.

μ	a_{μ} mm	μ	a_{μ} mm
1	10,67	11	0,022
2	4,870	12	−0,033
3	2,580	13	−0,036
4	0,728	14	−0,025
5	−0,261	15	−0,002
6	−0,457	16	0,013
7	−0,235	17	0,020
8	0,026	18	0,011
9	0,135	19	0
10	0,103	20	−0,010

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß für die harmonische Analyse der gesamte Verlauf der Funktionen $f_i(x)$ und ihrer Ableitungen nicht ermittelt werden muß. Es genügt vielmehr, die Werte der Funktionen und ihrer Ableitungen an den Grenzen der einzelnen Abschnitte zu kennen. Diese Werte müssen aber bis zur zweiten Ableitung sowieso für den Entwurf der Steuerung berechnet werden, so daß sich die Arbeit der harmonischen Analyse auf das Aufstellen und Auswerten einer der Gl. (11) ähnlichen Gleichung beschränkt.

Digitized by Google

Über Maßnahmen zur Verminderung des Luftschraubenschalls.

Von Dipl.-Ing. G. Weymann[1]).

Nach einem kurzen Überblick über die vorzunehmenden Versuche und die diesen Versuchen zugrundeliegenden Ideen werden die Meßeinrichtungen beschrieben, die für diese Untersuchungen neu erstellt wurden. Hierzu gehört vor allem ein Suchtonanalysator mit neuartigen Verwendungsmöglichkeiten. Es folgen dann die Vorversuche an kleinen Modellschrauben und die Beschreibung der Versuchsschraube, die hieraus entwickelt wurde. Das Resultat ist eine vorwiegend in der Rotationsebene erzielte Schalldruckverminderung ohne Beeinflussung der aerodynamischen Leistungen. Im letzten Teil wird die Anordnung zweier Schrauben besprochen, die auf Grund mathematischer Überlegungen eine Schalldruckverminderung in einer gewollten Richtung ergibt.

I.

Die Luftschraube erzeugt neben dem durch unregelmäßige Wirbelablösungen bedingten Geräusch einen reinen Klang, den sog. Drehklang. Dieser akustische Effekt ist mit den aerodynamischen Vorgängen unmittelbar verknüpft, denn die mit dem Schraubenblatt umlaufende Druck- und Sogwelle erzeugt die periodischen Störungen, die ihrerseits Schallwellen aussenden. Es erscheint demnach nicht ohne weiteres möglich zu sein, die Schallerzeugung zu mindern, ohne die aerodynamischen Verhältnisse zu stören. Tatsächlich bestehen aber zwei Möglichkeiten hierzu. Man kann Eingriffe vornehmen an Teilen des Schraubenblattes, die aerodynamisch wenig, akustisch aber in hohem Maße wirksam sind, z. B. am Blattende. Man kann aber auch Verhältnisse schaffen, die dem Blatt als akustischem Strahler einen kleinen Wirkungsgrad verleihen, seine Schubkraft jedoch bei gleicher zugeführter Leistung gar nicht oder verhältnismäßig weniger ändern. Hierzu gehört die Erhöhung der Strahlerordnung, wie später gezeigt werden wird. Eine Verbindung beider Maßnahmen endlich verspricht besonders wirksam zu sein. Um nun die Wirkung solcher Beeinflussungen zu untersuchen, erschien es zunächst zweckmäßig, Luft aus Bohrungen oder Schlitzen der Schraube auszublasen, um mit geringen oder keinen Profiländerungen die Druckverhältnisse am Blatt in einem gewollten Sinne zu verändern. Zur Untersuchung der Strömungsverhältnisse und der akustischen Vorgänge wurden dabei besondere Meßeinrichtungen entwickelt, die zunächst besprochen werden sollen.

Zur Beobachtung der Amplitude eines bestimmten Tons, etwa des Drehklanggrundtons, bei den verschiedenen Maßnahmen (Versuch ohne und mit Luftzufuhr) wurde ein Analysiergerät aufgebaut, das erstmalig nach dem sog. Summentonverfahren arbeitet und an anderer Stelle vom Verf. beschrieben worden ist [1]. Diese Apparatur wurde inzwischen weiter verbessert und ist nun nach Bild 1 geschaltet. Die Arbeitsweise des Suchtonanalysators ist bekanntlich so, daß das zu analysierende Klanggemisch die Schwingung eines Röhrengenerators moduliert. Die entstehenden Seitenbänder werden einem Filter zugeführt, das — bei dem Summentonverfahren — immer dann anspricht, wenn die Summe der entsprechend einzustellenden Oszillatorfrequenz und der Geräuschfrequenz gleich der Filterfrequenz ist. Die gefilterte Frequenz wird verstärkt und nach der Gleichrichtung

[1]) Dissertation an der Technischen Hochschule Karlsruhe [D 90].

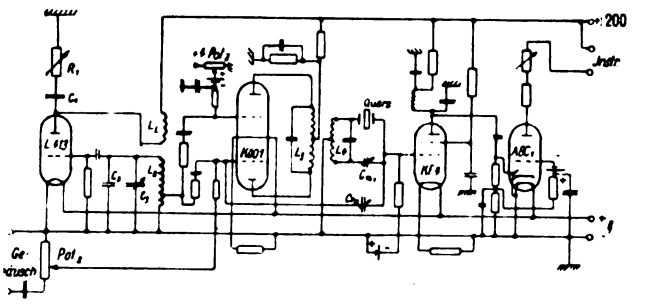


Bild 1. Schaltung des Suchtonanalysators.

gemessen. Ihre Amplitude ist proportional der Amplitude der betreffenden Geräuschfrequenz. Man hat damit also deren Größe und entsprechend der Beziehung:

$$f_g = f_F - f_s$$

f_g = Geräuschfrequenz,
f_s = Suchtongeneratorfrequenz,
f_F = Filterfrequenz.

auch die Frequenz der im Geräusch enthaltenen Schwingung. Indem man nun die »Such«frequenz f_s langsam verändert, erhält man nacheinander die Geräuschfrequenzen. Ebenso kann man auf eine bestimmte Geräuschfrequenz einstellen und deren Amplitude beobachten.

In der angegebenen Schaltung erzeugt die Röhre *L 413* den »Suchton« im Bereich von 35000 bis 45000 Hz. Die Amplitude, die an sich mit kleiner werdender Frequenz bei diesem Generator abnimmt, wird dadurch konstant gehalten, daß der Anodenkreis von einem auf etwa 35000 Hz. abgestimmten Schwingkreis mit einstellbarer Dämpfung gebildet wird. Hierdurch wird im unteren Frequenzbereich die Anodenwechselspannung erhöht und bei geeigneter Bemessung der Werte R_1, C_1 und L_2 eine über den ganzen Frequenzbereich gleichbleibende Amplitude erzeugt. Ein Teil der Suchtonspannung gelangt an beide Gitter der Röhre *KDD 1* und wird dort anodenseitig kompensiert. Der Grad der Kompensation kann durch Pot. 2 beliebig eingestellt werden. Dadurch wird der störende sog. »Nulldurchgang« der früher beschriebenen Apparatur beseitigt bis auf einen kleinen Rest, der als Marke für 0 Hz. von Wert ist. Eine Änderung des Kompensationsgrades hat im Gegensatz zu anderen Verfahren keinen Einfluß auf die richtige Anzeige der Teiltöne. Am Gitter eines der beiden Systeme der *KDD 1* wird die Geräuschspannung der Suchtonspannung additiv überlagert. Die infolge der parabelförmigen Charakteristik des unteren Kennlinienteils entstehenden Kombinationsfrequenzen, die anodenseitig nicht kompensiert werden, gelangen an den Quarz, der die Summenfrequenz 45000 Hz herausfiltert. Da der Quarz infolge seiner Halterungskapazität auch alle anderen Frequenzen in geringem Maße durchlassen würde, muß seine Wirkung als reine Kapazität durch die Gegenkopplung über C_{n1} neutralisiert werden. Die geringe kapazitive Kopplung der Spulen L_3 und L_4 würde noch die Oszillatorfrequenz etwas durchlassen; sie ist durch die kapazitive Gegenkopplung C_{n2} ebenfalls unwirksam ge-

Digitized by Google

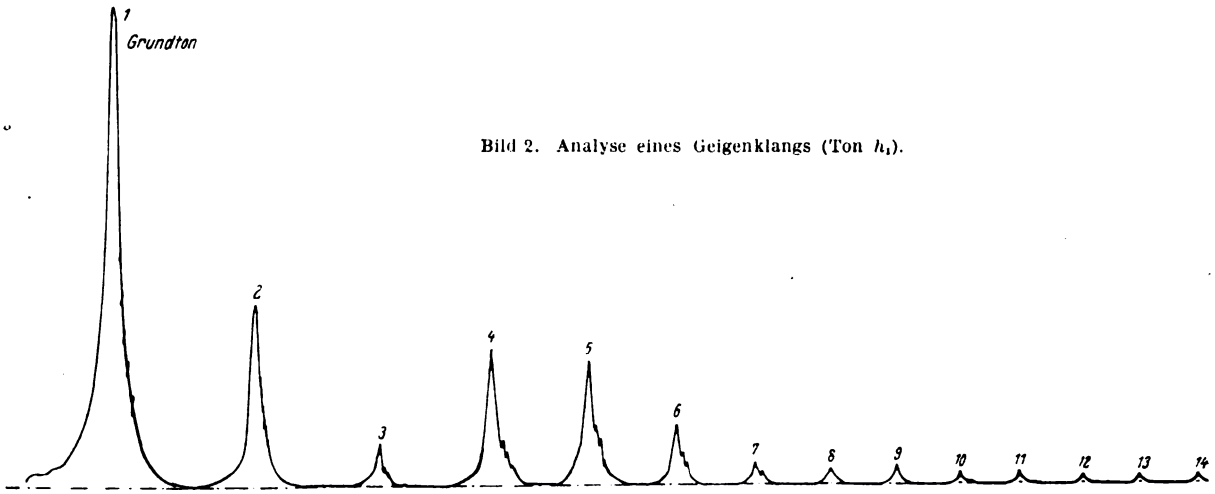


Bild 2. Analyse eines Geigenklangs (Ton h_1).

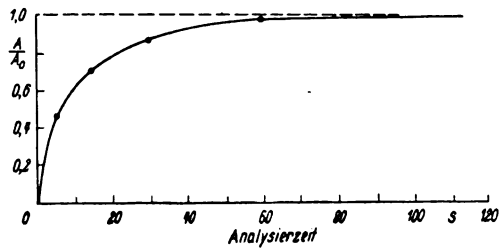


Bild 3. Analysierzeit und relative Amplitude.

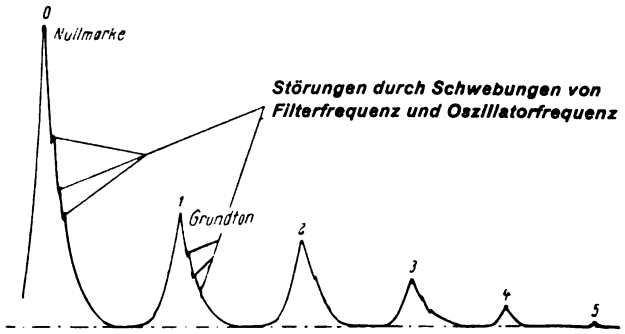


Bild 4. Analyse eines Stimmgabelsummers. Analysierzeit 4 sec.

macht. Die Filterfrequenz wird nun in einer Resonanz- und einer R.C.-Stufe verstärkt und möglichst linear gleichgerichtet. (Die R.C.-Stufe wurde im Schaltbild weggelassen, da sie entbehrt werden kann.) Die Richtspannung steuert das Dreipolsystem der *ABC 1*, um die zur Aussteuerung einer Oszillographenschleife notwendigen Ströme zu erhalten bzw. die Amplituden an einem Milliamperemeter ablesen zu können. Ein Vorteil der Apparatur besteht darin, daß die Analysiergeschwindigkeit infolge der hochliegenden Filterfrequenz groß sein kann. Man kann daher den Drehkondensator des Generators mit der Papiertrommel eines normalen Oszillographen kuppeln und deren Ablaufgeschwindigkeit so einstellen, daß die gesamte Analyse etwa 10 s dauert. Das ist eine Zeit, während der z. B. ein Vokal gesungen oder ein Instrument angeblasen oder angestrichen werden kann. Auf diese Weise wurde die Aufnahme Bild 2 — Ton h_1 einer Geige — erhalten. Noch kürzere Analysierzeiten ergeben Unzuträglichkeiten wegen der Ein- und Ausschwingvorgänge des Filters. Vor allem werden die angezeigten Amplituden kleiner wie Bild 3 zeigt, und die Analysierschärfe leidet wegen der schleifenden Übergänge der einzelnen angezeigten Teiltöne. (Bild 4 Analyse eines Stimmgabelsummers, Analysierzeit 4 s.)

II.

Die Druckverteilung um ein Tragflügelprofil kann experimentell nur an größeren Flächen und theoretisch nur dann gefunden werden, wenn — wie bei dem Joukowsky-Profil — ein einfaches Abbildungsgesetz zugrunde gelegt werden kann und demnach die mathematische Behandlung erleichtert wird. Eine andere Möglichkeit ist dadurch gegeben, daß mit Mikrofon, Verstärker und Oszillograph der zeitliche Druckverlauf einer Stelle der Schraubenebene aufgenommen wird, und diese so erhaltene Druckstörung als Quelle des abgestrahlten Schalls aufgefaßt wird. Die Verwendung der üblichen Eingangsschaltung für das Kondensatormikrofon bietet hier jedoch die Schwierigkeit, daß selbst kleine Phasenverschiebungen z. B. des Mikrofonkreises eine entstellte Wiedergabe des Druckverlaufs zur Folge haben. Eine momentan einsetzende Drucksteigerung würde ebenso wiedergegeben wie eine plötzlich an die Anzupfelektrode angelegte Gleichspannung, also wie in dem gezeigten Oszillogramm Bild 5, das zur Ermittlung der Zeitkonstante aufgenommen wurde ($t = 10^{-3}$ s). Eine nachfolgende Druckverminderung ergäbe den entgegengesetzten Ausschlag, und eine aus solchen periodischen Druckstößen zusammengesetzte Rechteckkurve (Bild 6a) zeigt die verzerrte Wiedergabe

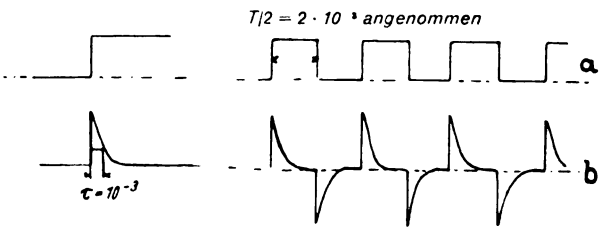


Bild 5. Wiedergabe eines Drucksprunges.

Bild 6. Verzerrte Wiedergabe eines gegebenen Druckverlaufs.

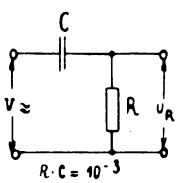


Bild 7. Ersatzschaltung zur Bestimmung der Verzerrungen des Mikrofonkreises.

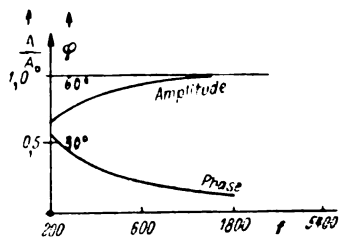


Bild 8. Amplituden und Phasenverlauf der Schaltung Bild 7.

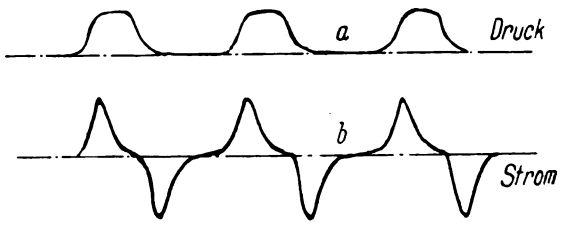


Bild 9. Oszillogramm eines Druckverlaufs.

Digitized by Google

nach Bild 6b. Analysiert man zur Bestätigung des Gesagten die Kurve Bild 6b, so findet man, daß die Teilwellen der Größe und Phasenlage nach mit denen der am Widerstand Bild 7 abgegriffenen Spannung u_r übereinstimmen, wenn die eingeprägte Spannung die rechteckige Kurvenform nach Bild 6a hat und die Zeitkonstante des Kreises die gleiche ist wie oben.

Aus dem in Bild 8 gezeigten Amplitudenverlauf und Phasenverlauf geht hervor, daß für eine akustische Wiedergabe die Verzerrungen noch vernachlässigbar sind, obwohl eine bildlich getreue Wiedergabe von Druckvorgängen niederer Frequenz nach obigen Ausführungen unmöglich ist. Danach erscheint aber auch bei den Versuchsberichten von »Obata« [2] die Übereinstimmung von Aufnahme und tatsächlichen Druckschwankungen fraglich, denn während des Vorbeigehens des Schraubenblattes — bei dicht davorstehendem Mikrofon — zeichnet der Oszillograph die Kurve nach Bild 9b. Das ist dann aber nicht zugleich der Druckverlauf, sondern — vgl. Bild 6 — die Wiedergabe einer Druckstörung etwa nach Bild 9a. Die erwähnten Schwierigkeiten treten nun bei einer Hochfrequenzmikrofonschaltung nicht auf. Hierzu gehört z. B. die bekannte Rieggersche Anordnung, wie sie zur Abtastung schwingender Körper mit Vorteil verwandt wird. In Verbindung mit einem kleinen und verhältnismäßig unempfindlichen Kondensatormikrofon jedoch ist sie ungeeignet. Der Erhöhung der Empfindlichkeit durch das Arbeiten mit unterdrücktem Nullpunkt [3] ist ebenfalls eine Grenze gesetzt. Die Erhöhung des Modulationsgrades, die hierdurch erreicht wird, wurde vielmehr durch eine Brückenschaltung erzielt, die die Hochfrequenzschwingung soweit kompensiert, daß der Modulationsgrad einen in bezug auf nachfolgende Verstärkung und auf Verzerrungen günstigen Wert erhält. Die Wirkungsweise der in Bild 10 gezeigten Schaltung ist folgende: Die im Oszillator *a* erzeugte Hochfrequenz wird in einer Penthode verstärkt und gleichzeitig gegenüber den folgenden Kreisen genügend entkoppelt. In der H.F.-Brücke liegt ein Resonanzkreis mit dem bekannten Verlauf von Wirk- und Blindwiderstand nach Bild 11. Durch die Anzapfung wird sein max. Wirkwiderstand R auf den Wert transformiert, auf den auch der variable Widerstand R_1 bequem eingestellt werden kann; dann ist die Brücke abgeglichen.

Durch die periodischen Verstimmungen wird nun nicht in erster Linie Z_w sondern Z_b geändert (Punkt *1* und *2* von Bild 11a). Die Hochfrequenzamplitude hat demnach in Abhängigkeit von $u = \operatorname{tg} \varphi$ einen Verlauf nach Bild 11b. Die Steilheit der Kurve $Z_b = f(u)$ ist übrigens im Punkte $u = 0$ gleich 1,54 mal der Steilheit der Kurve $Z_w(u)$ im Wendepunkt bei $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Entscheidend ist aber, daß die mittlere Hochfrequenz-Amplitude sehr viel kleiner ist als beim Arbeiten »auf der halben Resonanzhöhe« (Punkt *1'* und *2'* in Bild 11a). Die nachfolgende Röhre kann daher, ohne übersteuert zu sein, die modulierte Hochfrequenz-Schwingung verstärken. Der Vorteil der Anordnung besteht daher in der Möglichkeit der Hochfrequenzverstärkung, die einen Gleichstromverstärker erspart und nach der Demodulation direkt eine genügend große und phasenrichtige Wiedergabe im Oszillograph ergibt. Von den Verzerrungen, die allgemein in Kreisen mit periodisch veränderlichen Elementen auftreten, kann hier wegen ihrer Kleinheit abgesehen werden. Die Wirkungsweise der Schaltung kommt in den drei Oszillogrammen Bild 12 zum Ausdruck (Abtastung eines Geigenkörpers). Bei Einstellung auf genaue Resonanz (unteres Bild) tritt Frequenzverdopplung auf, und zwar viel ausgeprägter wie bei der Rieggerschen Schaltung, wo sie nur bei größerer Aussteuerung auftreten kann. Der Unterschied der Wirkungsweise von Niederfrequenz- und Hochfrequenzschaltung kommt in Bild 13 zum Ausdruck. In Bild 13a (Niederfrequenzschaltung) wird der Druckverlauf beim Vorbeigehen des Schraubenblattes am Mikrofon erst bei hohen Drehzahlen wirklichkeitsgetreu wiedergegeben, bei der Hochfrequenzschaltung dagegen erhält man schon bei kleinen Drehzahlen den der Theorie entsprechenden Druckverlauf. Die Amplituden sind ungefähr gleich, weil bei den größeren Drehzahlen auch der Mikrofonabstand vergrößert wurde. Man sieht, daß dann die einzelnen Druckspitzen zu einer obertonärmeren Schwingung verlaufen. Der Vorteil der Hochfrequenzschaltung hinsichtlich der phasenrichtigen Wiedergabe beschränkt sich auf die Anzeige tiefer Frequenzen. Bei schnell verlaufenden Vorgängen tritt auch hier eine Phasenverschiebung ein, die eine Korrektur notwendig macht. Ebenso ergibt sich bei höheren Frequenzen eine Amplitudenverzerrung, die durch die geringe Dämpfung der Schwingungskreise verursacht wird.

Die beschriebene Anordnung wurde in Verbindung mit einem kleinen Kugelmikrofon von 3,4 cm Dmr. benutzt [4].

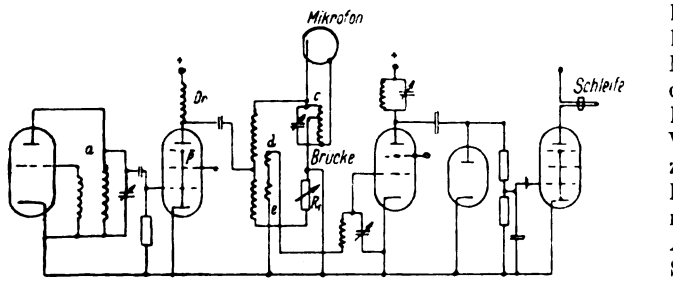


Bild 10. Schaltung der Hochfrequenzmikrofonanordnung.

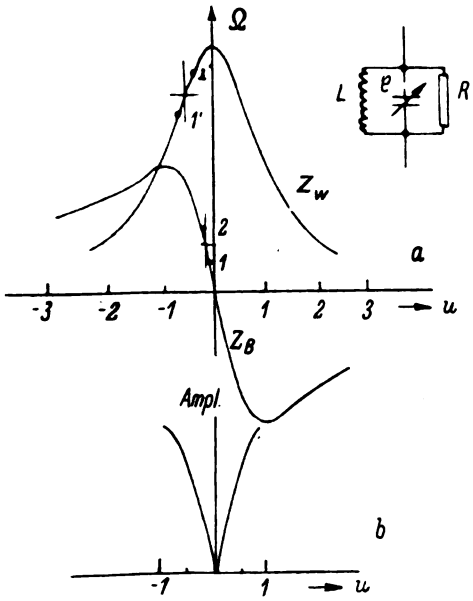


Bild 11. Verlauf von Blind- und Scheinwiderstand.

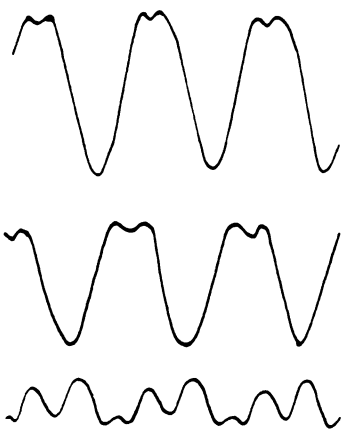


Bild 12. Abtastung eines Geigenkörpers. Verschiedene Einstellungen der Oszillatorfrequenz.

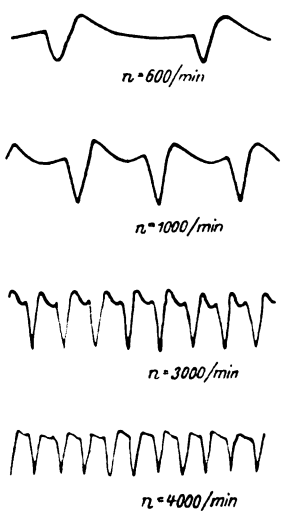


Bild 13a. Druckverlauf des Schraubenblatts. NF.-Schaltung.

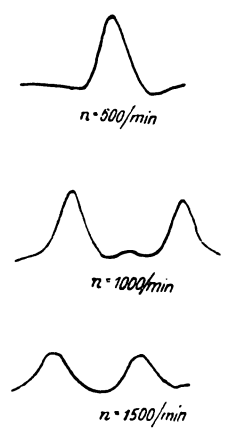


Bild 13b. Druckverlauf des Schraubenblatts. HF.-Schaltung.

Digitized by Google

Hierdurch wird eine minimale Störung des Schallfeldes bzw. eine annähernd punktförmige Erfassung der Druckverteilung gewährleistet.

III.

Die Entstehung des Drehklangs kann man sich so vorstellen, daß das umlaufende Schraubenblatt in Punkten, die der Schraubenkreisebene benachbart sind, periodische Druckänderungen — wie etwa in Bild 13b — hervorruft, die dann zur Quelle von Schallwellen werden. Diese Druckstörung, die zur Ermittlung der Teilwellen niederer Ordnung als rechteckig angenommen und zur mathematischen Behandlung durch eine Fourierreihe angenähert werden kann, muß offenbar in ihrem Verlauf sehr stark verändert werden, wenn die Amplituden der niederen Teilwellen, die hier allein von Bedeutung sind, kleiner werden sollen. Änderungen am Profil werden in dieser Hinsicht weniger wirksam sein; dagegen kann ein Luftstrom, der an geeigneten Stellen vom Schraubenblatt aus in das Sogfeld geleitet wird, die Form der Störung sehr stark ändern und z. B. eine Einsattelung der in Bild 13b gezeigten Kurve und damit eine Amplitudenverkleinerung der niederen Teilwellen herbeiführen. Aerodynamisch wird sich eine solche Maßnahme ungünstig auswirken; es kann aber u. U. von Vorteil sein, eine Schubverminderung zuzulassen, wenn die Schalldruckminderung relativ größer ist.

Zur Ausführung solcher Versuche wurde zunächst ein kleines Versuchsmodell nach Bild 14 benutzt. Auf einer Scheibe sitzen vier geteilte Flügelstummel, die an der Stelle *1* einen Schlitz haben, durch den die Luft ausgeblasen wird. Die Luft wird einer Preßluftflasche entnommen und über ein Reduzierventil und einen Druckschlauch der hohlen Antriebswelle zugeführt, von wo sie durch vier radiale Bohrungen in der Scheibe den ebenfalls durchbohrten Flügeln zugeführt wird. Die zweiteiligen Flügel können durch dünne Bleche abgedeckt werden, um vergleichsweise an einem unveränderten Profil Messungen ausführen zu können. Die Versuche ergaben folgendes:

1. Der abgedeckte Flügel ergab den größten Drehklang-schalldruck; nach Abnahme der Bleche sank dieser um 25%.
2. Erst bei Luftzufuhr ergab sich eine wesentliche Verminderung des Drehklangs. Der Schalldruck sinkt — gemessen mit dem Analysator — auf etwa $^1/_3$ des Wertes, den er ohne Luftzufuhr, aber auch mit abgenommenen Deckblechen, hat.
3. Für jede Drehzahl gibt es einen bestimmten Luftdruck — gemessen am Reduzierventil der Flasche —, der den Drehklang auf ein Minimum bringt. Das ist verständlich, wenn man bedenkt, daß die geförderte Luftmenge ebenfalls prop. der Drehzahl wächst.

Die in folgender Zahlentafel wiedergegebenen Werte beziehen sich auf eine Stellung des Mikrofons, in der eine bestmögliche Wirkung festgestellt wurde (Bild 15).

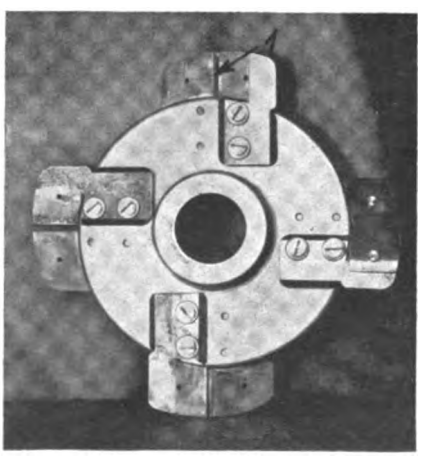


Bild 14. Foto des ersten Versuchsmodells.

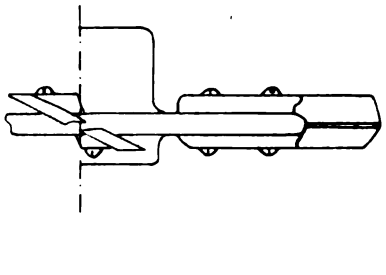


Bild 15. Anordnung des Mikrofons bei dem ersten Modellversuch.

Luftdruck	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5 atü
rel. Schalldruck . . .	100	100	70	35	50	90
Luftgeschw. im Spalt	120 m/s				220 m/s	

Bei diesem kleinen Modell ist der Drehklang so schwach, daß nur in unmittelbarer Nähe der Schraube gemessen werden konnte. Hiernach ist die Verteilung des abgestrahlten Klangs in größerer Entfernung noch nicht geklärt; man kann aber erwarten, daß eine so beträchtliche Schalldruckverminderung am Entstehungsort des Klangs auch im weiteren Schallfeld eine entsprechende Wirkung erzeugen muß.

Die aerodynamische Verschlechterung wurde zunächst absichtlich nicht berücksichtigt. Es sollten vielmehr nur die akustischen Vorgänge bei der Vornahme bestimmter Druckunterteilungen am Blatt untersucht werden. Man kann nun annehmen — und diese Annahmen wurden durch die Messungen an einem größeren Modell bestätigt —, daß der Schub solcher Schrauben in einem Maße kleiner wird, daß eine Nutzanwendung auch dann nicht in Frage kommt, wenn die relative Schalldruckverminderung größer bleibt als die relative Schubabnahme.

Die weiteren Versuche wurden daher mit Modellschrauben von 400 mm Dmr. ausgeführt, bei denen die Luft radial aus der Blattspitze, die in einen kleinen Schlitz endete, ausgeblasen wurde. Das ist insofern erfolgversprechend, als der Schub in unmittelbarer Nähe der Blattspitze rasch abnimmt, während das Blattende zur Drehklangerzeugung einen erheblichen Beitrag liefert. Druckmessungen zeigen, daß auf der Sogseite des Blattes der Unterdruck nach der Spitze hin abnimmt, dort — d. h. in der Rotationsebene — einen gewissen kleineren Wert hat, um dann — nach dem Herumgehen um die Spitze — auf der Druckseite positiv zu werden. Bläst man demnach Luft aus der Spitze aus, so wird der dort herrschende Unterdruck kompensiert. Bläst man etwas schräg — nach der Sogseite hin — aus, dann wird ebenfalls an einer Stelle, wo an sich Unterdruck herrscht, ein zusätzlicher Druck geschaffen. Während also vorher — ähnlich wie bei einem Strahler erster Ordnung — die ganze Sogseite, ebenso wie die ganze Druckseite, eine gleichphasige Auslenkung der Luftteilchen im Augenblick des Vorbeistreichens des Blattes bewirkte, ist nun im Soggebiet eine Zone vorhanden, wo Teilchen im gleichen Zeitpunkt eine entgegengesetzte Bewegung machen. Das hat einen ähnlichen Effekt zur Folge wie die Erhöhung der Strahlerordnung einer Schallquelle; es wird also die abgestrahlte Schalleistung wesentlich vermindert.

Die Meßergebnisse sind in Bild 16 zusammengestellt. Als Abszisse ist die Drehzahl bzw. die Umfangsgeschwindigkeit, als Ordinate der Luftdruck bzw. die Luftaustrittsgeschwindigkeit aufgetragen. Punkte gleicher relativer Schalldruckminderung liegen auf Geraden, die um so höher liegen, je größer die verlangte Drehklangverminderung ist. Dabei beziehen sich die Werte auf eine Stellung des Mikrofons in der Gegend größter Schallminderung (Punkt *P* in Bild 17; die Länge der Strahlen ist ein Maß für die in der betr. Richtung erzielte Drehklangverminderung). Je nach Spaltgröße ergibt sich eine Grenzkurve, jenseits der der Effekt ganz rasch abnimmt. Der größere Spalt bietet hier einen Vorteil, der jedoch für höhere Umfangsgeschwindigkeit ohne Be-

Digitized by Google

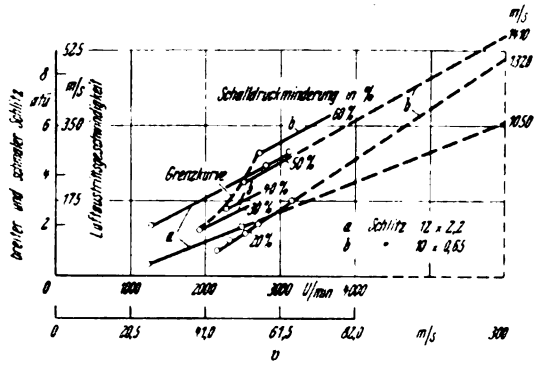


Bild 16. Schalldruckminderung der Modellschraube I.

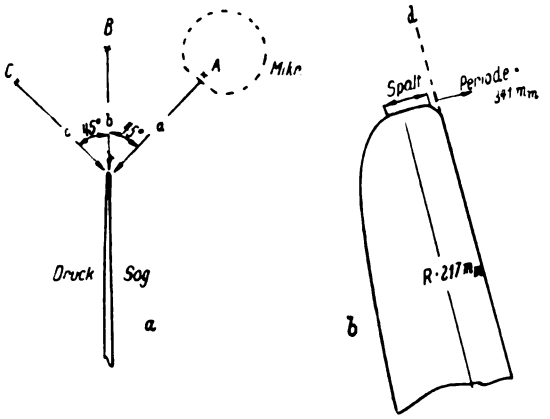


Bild 18. Benutzte Mikrofonstellungen und Spaltanordnung.

deutung ist und den Nachteil größeren Luftbedarfs nicht aufwiegt.

Da man bei der Extrapolation der erhaltenen Kurven für Umfangsgeschwindigkeit von 300 m/s auf unzulässig hohe Werte der erforderlichen Luftaustrittsgeschwindigkeit kommt, mußte versucht werden, die Luft an geeigneteren Stellen, eventuell aus mehreren kleinen Öffnungen in der Gegend der Blattspitze auszublasen. Die erforderliche Blasrichtung kann nur auf Grund genauer Kenntnis der Druckverteilung in der Nähe des Schraubenendes bestimmt werden. Mit der beschriebenen Hochfrequenzmikrofonschaltung wurden daher zunächst in den nach Bild 18 gekennzeichneten Mikrofonstellungen Aufnahmen gemacht. Auf der Schraubenwelle wurde ferner eine Kontaktvorrichtung angebracht, die einen Stromstoß auf eine zweite Schleife gibt, wenn die verlängert gedachte Vorderkante *d* des Blattes genau durch die Membranmitte geht.

Dieser Moment ist in den folgenden Oszillogrammen durch eine Markierungslinie dargestellt. Bild 19 zeigt die in den drei Stellungen *A*, *B* und *C* gemachten Aufnahmen. Sie bekräftigen die oben gemachte Feststellung, wonach die in Stellung *A* sich ergebende Sogspitze auch in der Rotationsebene auftritt (Aufn. *B*) und erst dann — in Stellung *C* —

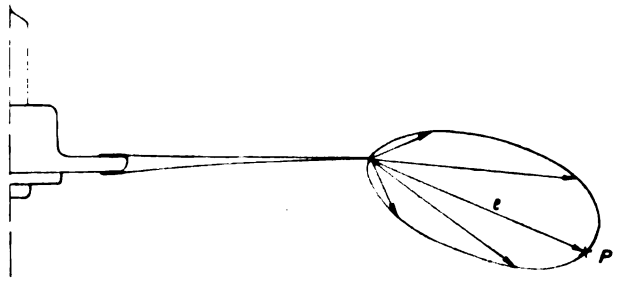


Bild 17. Die Schallminderung in Abhängigkeit von der Richtung.

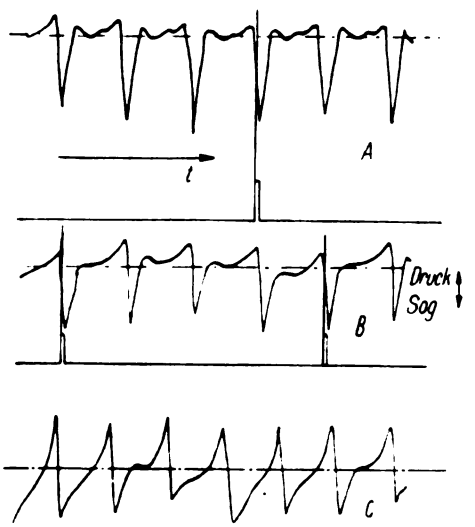


Bild 19. Aufnahmen in den drei Stellungen *A*, *B* und *C*.

eine Druckspitze vorherläuft, die bei weiterem Herumgehen vorherrschend würde. Die Drehzahl betrug $n = 1500$/min, der Abstand $a = b = c = 17$ mm.

Um nun festzustellen, ob die zugeführte Luft auch in das Gebiet ausgeblasen wird, wo das Sogmaximum herrscht, wurde die Luft unter besonders starkem Druck ausgeblasen, so daß im Oszillogramm eine Druckspitze auftreten muß, die ohne Luftzufuhr natürlich nicht vorhanden ist. An dem Abstand dieser Druckspitze *P* (Bild 20) bis zur Markierungslinie erkennt man, daß das erzeugte Druckmaximum zeitlich vor der natürlichen Sogspitze (*S* in Bild 20) liegt, denn der Abstand von *S* zur Markierungslinie ist wesentlich größer. (Mikrofon in Stellung *B*.)

Hieraus kann geschlossen werden, daß so eine völlige Kompensation nicht zu erreichen sein wird. In Mikrofonstellung *A* ist der Erfolg ebenfalls gering (Bild 21). Durch das Luftzublasen werden die Maxima etwas verschoben (P_1 und P_2), aber an der Kleinheit der Verschiebung erkennt man, daß der zusätzliche Druck später einsetzen, also P_2 weiter nach rechts rücken müßte. Immerhin ist der Effekt in dieser Stellung *A* größer als in Stellung *B*, weil das Sogmaximum diese Stelle früher passiert, wie aus Bild 19 hervorgeht, und damit zeitlich besser mit dem Druckmaximum der ausgeblasenen Luft zusammenfällt.

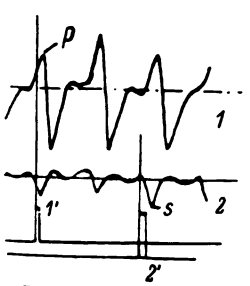


Bild 20. Lage des künstlich erzeugten Druckes und Lage der natürlichen Sogspitze
oben: starke Luftzufuhr,
unten: keine Luftzufuhr.

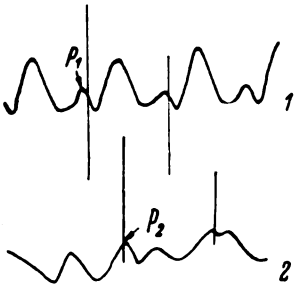


Bild 21. Wirkung besonders starker Luftzufuhr. Stellung *A*
unten: starke Luftzufuhr,
oben: keine Luftzufuhr.

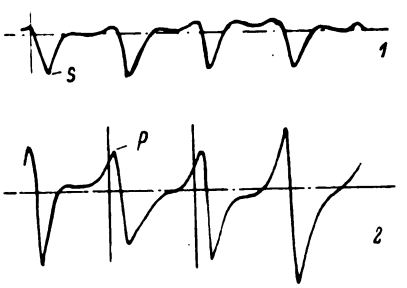


Bild 22 vgl. Bild 21. Höhere Drehzahl.

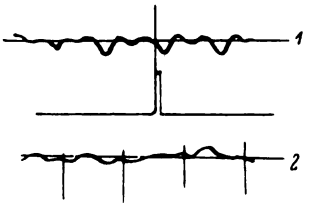


Bild 23. Schalldruckverminderung bei günstigstem Luftdruck.

Digitized by Google

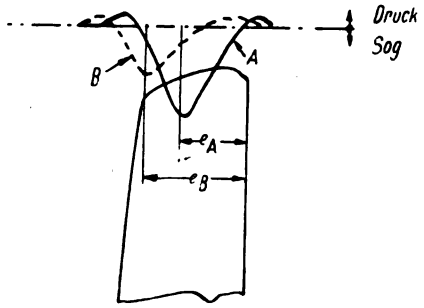


Bild 24. Lage der Sogspitze in Stellung A und B.

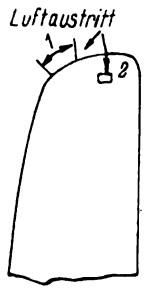


Bild 25. Lage der neuen Austrittsöffnungen.

Bild 22, mit höherer Drehzahl — $n = 2850$ U/min — aufgenommen, zeigt dasselbe Resultat. Auch hier wurde der Luftdruck zur Kenntlichmachung von P wieder sehr groß gewählt. Aus den gezeigten Aufnahmen geht also hervor, daß der Erfolg an Stelle A größer ist als an B, in beiden Fällen jedoch keine befriedigende Kompensation erreicht wird. Bild 23 zeigt die rund 40 proz. Schalldruckverminderung an der Stelle A in einer Entfernung, in der die Hochfrequenzschaltung noch hinreichende Amplituden ergibt ($a = 60$ mm, $n = 2850$ U/min). Hierbei wurde natürlich der günstigste Luftdruck gewählt.

Aus den verschiedenen Aufnahmen kann nun die Lage der bei A und B auftretenden Sogspitzen ermittelt werden. Wählt man als Bezugspunkt die Vorderkante des Blattes, so ist — s. Bild 24 — $e_b = 20$ mm, $e_a = 14$ mm. Bei höheren Drehzahlen verschiebt sich scheinbar die Lage der Spitzen im Sinne größer werdenden Abstandes e. Dieses aus der Auswertung der Oszillogramme sich ergebende Resultat ist jedoch auf die schon erwähnte Phasenverschiebung der Hochfrequenzschaltung zurückzuführen, die im Gegensatz zur Niederfrequenzschaltung eine bei tiefen Frequenzen mit Null anfangende und bis zu 90° anwachsende Phasenverschiebung aufweist. Die hierdurch erfolgende Verschiebung des Sogmaximums um $e_b = 40$ mm bei $n = 2850$ U/min ($\omega = 1250$) entspricht einer Phasendrehung von 42°. Dieser Wert wird durch folgendes bestätigt:

Wird einem Schwingkreis eine modulierte Schwingung seiner Eigenfrequenz aufgedrückt, entsprechend

$$e(t) = a_1 (1 + m \cos \omega t) \cos \Omega t,$$

so ist der entstehende Strom

$$i(t) = \frac{a_1}{Z_1} \left(1 + m \frac{Z_1}{Z_2} \cos (\omega t - \varphi)\right) \cos \Omega t.$$

Hierin bedeutet Z_1 die Impedanz für Ω, Z_2 die Impedanz für $\Omega + \omega$ bzw. die zur Vereinfachung als gleich angenommene Impedanz für $\Omega - \omega$ und φ die Phase der Impedanz Z_2, wenn die von $Z_1 = 0$ gesetzt wird. Nun ist für $\omega = 1250$ und der als normal anzusehenden Dämpfung $D = 10^{-2}$ eines Schwingkreises:

$$\operatorname{tg} \varphi = u = \frac{1}{D} \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) = 0{,}25; \quad \varphi = 14°.$$

Um diesen Betrag verschiebt sich also die Umhüllungskurve des Stromes gegenüber der der Spannung. Bei den vorhandenen drei Kreisen beträgt demnach die Gesamtverschiebung $3 \cdot 14° = 42°$, wodurch obiger Wert seine Bestätigung findet. Jedenfalls spielt die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Druckfeldes demgegenüber keine Rolle.

Nachdem nun die Lage der zu kompensierenden Sogmaxima bekannt war, wurde die Luftaustrittsöffnung weiter nach hinten verlegt. In Stellung A war dann aber die Druckverminderung sehr klein, was aus Bild 24 verständlich wird, denn die neue Öffnung lag für eine wirksame Kompensation der Sogwelle bei A nun zu weit hinten. Auf der Sogseite des Schraubenblattes wurde daher noch eine zweite kleine Öffnung angebracht (Bild 25). Diese liegt mehr in der Mitte des Blattes und leitet die Luft schräg nach außen, um den zu erwartenden Einfluß auf den Schub des Propellers klein zu halten. Mit dieser Ausführung wurden nun die in Bild 16

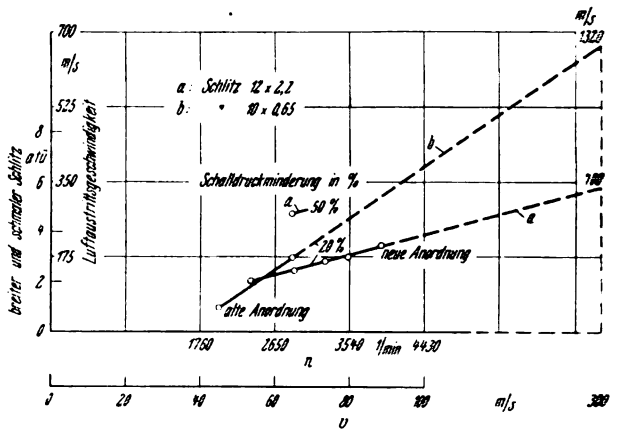


Bild 26. Schalldruckminderung der Modellschraube II.

gezeigten Versuche wiederholt, und die Ergebnisse nach Bild 26 erhalten. Die neue Kurve hat eine Neigung, die gegenüber der früheren eher eine lineare Extrapolation zuläßt; außerdem wird die gleiche Schalldruckverminderung mit derselben Luftaustrittsgeschwindigkeit jetzt bei höherer Umfangsgeschwindigkeit erzielt. Die eingezeichneten Werte beziehen sich wieder auf eine Mikrofonstellung entsprechend Bild 17; bezüglich der Richtwirkung der Schalldruckverminderung gilt ebenfalls Bild 17. Die Entfernung betrug $e =$ 9 cm. Gemessen wurde wieder der Grundton; die ohne Filterung gemessene Schalldruckverminderung ist nur etwa halb so groß. Es ist aber zu bedenken, daß die durch das Luftausblasen erzeugten Geräusche infolge stärkerer Absorption in größerer Entfernung weniger stören. Die erzielten Luftaustrittsgeschwindigkeiten wurden mit Drücken von 3 atü am Reduzierventil der Preßluftflasche erreicht. Bei Versuchen mit einer Modellschraube von 300 m Umfangsgeschwindigkeit muß also mit Drücken von 10 atü bei einer Schallminderung von 20%, und mit Luftaustrittsgeschwindigkeiten von 700 m/s gerechnet werden. Die Möglichkeit, durch Eigenförderung der Luft — Ansaugen durch die Nabe, Abschleudern durch die Blattenden — schon einen merkbaren Effekt zu erhalten, scheint hiernach nicht gegeben. Die Rechnung zeigt vielmehr, daß bei der oben verlangten Luftgeschwindigkeit die Luft schon annähernd mit dieser Geschwindigkeit in die Nabe eintreten muß, da die Schraube selbst sie nicht mehr wesentlich beschleunigt. Da man also auf fremde Luftquellen angewiesen ist, wird man die erforderliche Luftmenge klein halten, d. h. die Luft aus kleinen Öffnungen ausströmen lassen und mit entsprechenden Drücken arbeiten. Untragbar wäre es nur, mit großen Luftmengen und zugleich großen Drücken die Schallminderung erreichen zu wollen.

Anschließend an die Schalldruckmessung wurde eine Schubmessung durchgeführt, indem das ganze System — Schraube und Motor — horizontal schwenkbar an einen Stahldraht aufgehängt wurde und die Torsion mit Spiegel und Lichtzeiger gemessen wurde. Es tritt demnach kein Schubverlust auf.

IV.

Es fragt sich, ob als schallmindernde Maßnahme nicht die Anordnung von zusätzlichen Schallquellen, die den Drehklang kompensieren, in Frage kommt. Es besteht kein Zweifel, daß eine völlige Auslöschung zweier distanzierter Schallquellen nur in gewissen Flächen möglich ist. Eine zusätzliche Schallquelle, die nicht durch Schrauben sondern etwa durch bewegte Membranen, Sirenen o. dgl. dargestellt wird, ist nun aus praktischen Gründen immer in gewisser Entfernung von der primären Quelle (Schraube) angebracht und kann daher nur in einer bestimmten Richtung auslöschend wirken. Da die zweite Schallquelle die gleiche akustische Leistung aufbringen muß wie die Schraube, ist es eine Frage ihres Wirkungsgrades, ob die ihr zugeführte Leistung nicht in die Größenordnung der Schraubenleistung

Digitized by Google

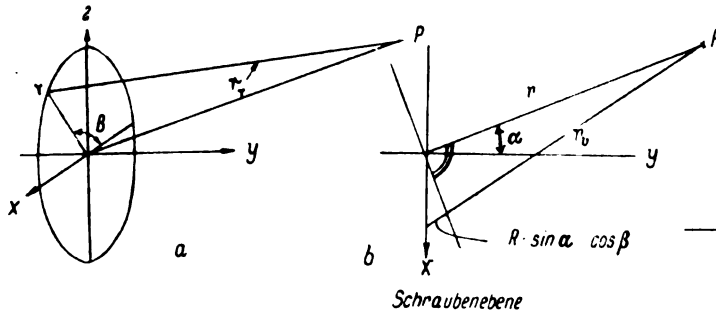


Bild 27. Zur Ableitung des Kreisgruppenstrahlers.

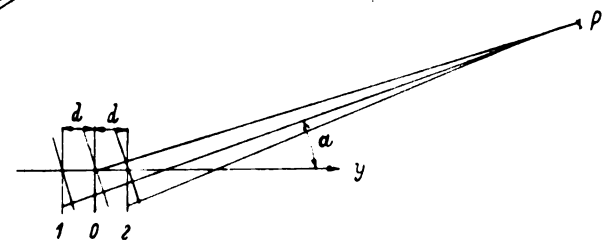


Bild 28. Anordnung zweier Kreisgruppenstrahler.

fällt, und sie damit besser durch eine zweite Schraube ersetzt wird.

Die Richtcharakteristik zweier Schrauben kann auf übersichtliche Art dadurch ermittelt werden, daß nach dem Beispiel von »Paris« [5] geeignete Kombinationen von Kreisringquellen angenommen werden, deren resultierendes Geschwindigkeitspotential man bestimmt. In jüngerer Zeit sind andere und genauere Verfahren zur Bestimmung der Schallfeldgrößen gewählt worden [6], aber da die wirklichen physikalischen Zusammenhänge zwischen der Druckverteilung im Strömungsfeld um das Profil und der durch sie erfolgenden akustischen Abstrahlung bei den hier vorkommenden außerordentlich hohen Druckamplituden weit außerhalb des linearen Bereichs liegen, so kann von einer theoretischen Berechnung unter Zugrundelegung linearer Gesetzmäßigkeiten kein in allen Punkten strenges Ergebnis erwartet werden. Für den vorliegenden Zweck mag es also genügen, von einer älteren Methode Gebrauch zu machen, deren Grundlagen außerdem in plausibler Weise verbessert werden können.

Der Vollständigkeit halber ist hier das bekannte Ergebnis einer einfachen Kreisgruppe abgeleitet, da das Resultat später gebraucht wird. Das Geschwindigkeitspotential einer Quelle ν mit der Ergiebigkeit A_ν, der Frequenz $\omega \cdot n \cdot a$, dem Winkel β_ν (Bild 27), und der Entfernung r_ν vom Aufpunkt ist

$$\psi = \frac{A_\nu}{4\pi r_\nu} \cdot \cos n a \omega \left(t - \frac{\beta_\nu}{\omega} - \frac{r_\nu}{c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$\omega = 2\pi N$ N = Drehzahl der Schraube,
n = Ordnungszahl der Teilwellen,
a = Blattzahl.

Hierbei ist angenommen, daß die Erregung der Strahler — im Hinblick auf das Problem der Schraube — zyklisch mit der Umlaufsgeschwindigkeit $\omega = 2\pi N$ erfolgt.

Nach Bild 27b ist für r_ν einzusetzen

$$r_\nu = r - R \cos\beta_\nu \cdot \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Damit ergibt sich

$$\psi_{rel} = \mathrm{Realt} \cdot e^{jna\omega\left(t - \frac{r}{c} + R\frac{\cos\beta\sin\alpha}{c} - \frac{\beta_\nu}{\omega}\right)} \quad . \quad . \quad (3)$$

und die Gesamtwirkung

$$\psi_{res\,rel} = e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \int_0^{2\pi} e^{j\left(R\frac{na\omega}{c}\sin\alpha\cos\beta - na\beta\right)} d\beta$$

$$= e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \cdot 2\pi \cdot \mathfrak{J}_{na}\left(R\frac{na\omega}{c}\cdot\sin\alpha\right) \quad . \quad . \quad (4)$$

Bei zwei Kreisgruppenstrahlern im Abstande $2d$ ist nach Bild 28 zu setzen

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r + d\cos\alpha - R\sin\alpha\cdot\cos\beta_\nu \\ r_2 &= r - d\cos\alpha - R\sin\alpha\cdot\cos\beta_\nu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Eine Kreisringdoppelquelle erhält man nun, indem man jedem Strahler der einen Gruppe eine Phasenverschiebung von 180° gegenüber dem Strahler mit gleichem β_ν der andern Kreisgruppe gibt.

Die Gesamtwirkung wird dann (vgl. Ausdruck 3)

$$\psi_{res\,rel} = \sum_i^{\nu} e^{jna\omega\left(t - \frac{r + d\cos\alpha - R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c} - \frac{\beta_\nu}{\omega}\right)} + \sum_i^{\nu} e^{jna\omega\left(t - \frac{r - d\cos\alpha - R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c} - \frac{\beta_\nu}{\omega} - \frac{\pi}{na\omega}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\psi_{res\,rel} = \sum_i^{\nu} e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \left[e^{+j\left(\frac{d\cos\alpha}{c}na\omega - \pi\right)} + e^{-j\frac{d\cos\alpha}{c}na\omega}\right] \times e^{j\left(na\omega\frac{R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c} - na\beta_\nu\right)}.$$

Das Integral führt auf denselben Ausdruck wie unter 4, jedoch mit dem zusätzlichen Faktor

$$2\sin\left(\frac{na\omega d}{c}\cdot\cos\alpha\right).$$

Unter Fortlassung des Ausdrucks $e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$ wird demnach

$$\psi_{rel} = 4\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{dna\omega}{c}\cos\alpha\right)\cdot\mathfrak{J}_{na}\left(\frac{Rna\omega\sin\alpha}{c}\right) \quad . \quad . \quad (7)$$

Nach demselben Schema läßt sich nun noch eine Einfachquelle zu der Doppelquelle fügen. Setzt man die relative Amplitude der durch jeden Kreisring der Doppelquelle erzeugten Störung gleich 1, die der Einfachquelle gleich $-jm$, so erhält man den von »Paris« angegebenen Ausdruck

$$\psi_{res\,rel} = \left[m + 2\sin\left(\frac{dna\omega}{c}\cdot\cos\alpha\right)\right]\cdot 2\pi\,\mathfrak{J}_{na}\left(\frac{Rna\omega}{c}\cdot\sin\alpha\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

»Paris« nimmt die verfügbaren Werte m und d derart an, daß die experimentell gefundene Richtcharakteristik möglichst angenähert wird (Bild 29). Der Abstand der Quellen und Senken wird dann $2d = 18$ m, ein Wert, der durch seine Größe den physikalischen Anschauungen widerspricht. Es wurde daher versucht, den Größen m und d Werte beizulegen, die nicht unwahrscheinlich sind und trotzdem die charakteristische Einsattelung der Richtcharakteristik (Bild 29b) ergeben, die auch »Gutin« [7] erhalten hat. Die relative Amplitude des Nullstrahlers ist mit 0,2 (in einem

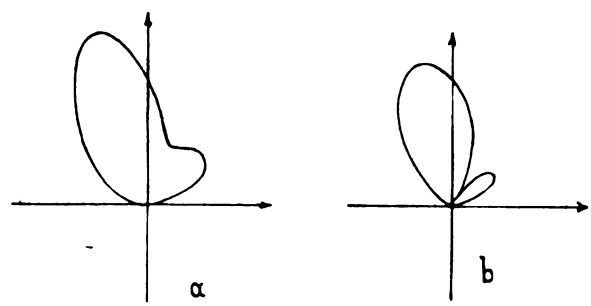


Bild 29. *a* Richtcharakteristik nach »Paris«, *b* Richtcharakteristik nach »Gutin«.

Digitized by Google

späteren Beispiel mit 0,4) angenommen, wenn die der Doppelquelle gleich eins gesetzt wird. Der Abstand der Kreisgruppen der Doppelquellen ist 0,5 m. Dieser gegenüber »Paris« erheblich kleinere Abstand mag immer noch als groß erscheinen; man muß sich aber vorstellen, daß man in die unmittelbare Nähe des Blattes keine Elementarstrahler bringen darf, da hier die Schallausbreitungsgesetze nicht gelten. Die erhaltene Richtcharakteristik zeigt Bild 30a.

Nachdem so dem Ausdruck eine neue Deutung gegeben war, wurde zu dieser Anordnung noch eine zweite Einfachquelle in einigen Metern Entfernung (entsprechend einer Schraube vor und einer hinter dem Tragflügel) angenommen. Die eine Schraube soll demnach ohne Anstellung arbeiten.

Der Ausdruck (3) bzw. (6) lautet in der entsprechend erweiterten Form

$$\psi_{res} = \sum_{\beta'} e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d\cos\alpha}{c}+\frac{R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c}-\frac{\beta'_\nu}{\omega}\right)} + \sum_{\beta'} e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}+\frac{d\cos\alpha}{c}+\frac{R\sin\alpha\cos\beta}{c}-\frac{\beta_\nu}{\omega}-\frac{\pi}{na\omega}\right)} - jm\sum_{\beta'} e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}+\frac{R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c}-\frac{\beta'_\nu}{\omega}\right)} + m\sum_{\beta'} e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}+\frac{b\cos\alpha}{c}+\frac{R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c}-\frac{\beta'_\nu}{\omega}\right)} \quad \ldots\ldots (9)$$

$$\psi_{res} = e^{jna\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \left[e^{+j\frac{na\omega d\cos\alpha}{c}-\pi} + e^{-j\frac{na\omega d\cos\alpha}{c}} - jm + me^{j\frac{b\cos\alpha}{c}na\omega} \right] \times \sum_{\beta'} e^{jna\omega\left(\frac{R\sin\alpha\cos\beta_\nu}{c}-\frac{\beta'_\nu}{\omega}\right)}$$

b = Abstand der beiden Schrauben.

Demnach wurde die relative Ergiebigkeit der Zusatzquelle mit m, also gleich der Einfachquelle des vorherigen Beispiels gewählt. Der Klammerausdruck wird demnach

$$\sqrt{\left[m+2\sin\left(\frac{na\omega d}{c}\cos\alpha\right)\right]^2+m^2 - 2m\left[m+2\sin\left(\frac{na\omega d}{c}\cos\alpha\right)\right]\sin\left(\frac{na\omega}{c}\cdot b\cos\alpha\right)} \quad \ldots\ldots (10)$$

Die resultierende Amplitude ist durch diesen Ausdruck, multipliziert mit $2\pi\mathfrak{J}_{na}\left(\frac{na\omega}{c}\cdot R\sin\alpha\right)$ gegeben.

Als Beispiel wurde angenommen:

$m = 0{,}4$	$R = 1{,}25$
$2d = 0{,}5$ m	$N = 2000$/min
$b = 5$ m	$a = 2$.

Die so errechnete Richtcharakteristik für den Grundton zeigt Bild 30b. Sie zeigt, daß zwei Schrauben in derartiger Anordnung die Richtcharakteristik einer Schraube durch Interferenz so aufteilen, daß in einer bestimmten Richtung ein ausgeprägtes Minimum auftritt.

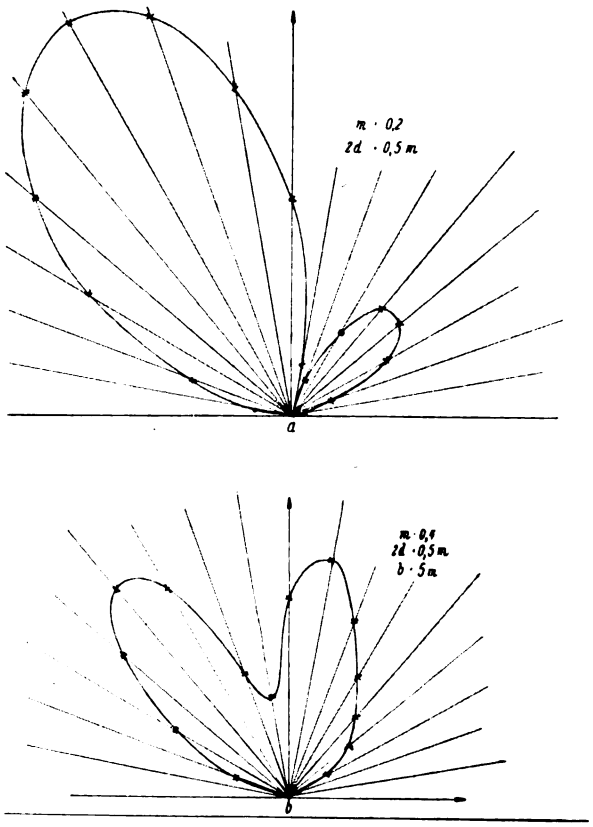


Bild 30. Richtcharakteristiken von Strahlergruppen.

Die vorliegende Arbeit wurde unternommen auf Anregung des Herrn Prof. Dr. Backhaus, dem ich für diese Anregung und für seine Anteilnahme an der Ausführung zu großem Dank verpflichtet bin. Die Arbeit wurde ausgeführt am Lehrstuhl für theoretische Elektrotechnik und Schwachstromtechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe. Ich danke der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. dafür, daß sie die Mittel zur Durchführung dieser Arbeit zur Verfügung gestellt hat.

Schrifttum.

[1] G. Weymann, Über den Aufbau von Suchtonanalysatoren. Hochfr. u. Elektroak. Bd. 49 (1937) S. 182.
[2] J. Obata, Investigations on the origin of the sound emitted by airscrews. Rep. of the aeron. res. inst. Tokyo Imp. Univ. Bd. 10 (1937) Nr. 132.
[3] Kozma, Diss. Karlsruhe 1934.
[4] W. Ernsthausen, Untersuchungen über das Luftschraubengeräusch. Akust. Z. S. Bd. 3 (1938) S. 141.
[5] E. T. Paris, A note on the sound generated by rotating airscrews. Phil. Mag. Bd. 13 (1932) 99.
[6] W. Ernsthausen und W. Willms, Über die Berechnung des Schallfeldes einer Luftschraube. Ak. Z. S. Bd. 4 (1939) S. 20.
W. Ernsthausen, Strahlergruppen mit umlaufender Phase. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 374.
[7] Gutin, Über das Schallfeld einer rotierenden Luftschraube. Phys. Z. S. der Sowjet-Union Bd. 9 (1936).

Digitized by Google

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 4 enthält Arbeiten von: J. Müller S. 97—105, H. J. Rautenberg S. 106—122, O. Lutz S. 123—128

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 4 SEITE 97 BIS 128 | MÜNCHEN, 20. 4. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Über die Ursache der Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen. Von J. Müller . . . . . Seite 97

Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze. Von H. J. Rautenberg . . . . . Seite 106

Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren. Von O. Lutz . . . . . Seite 123

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. April 1940 Lfg. 4

Über die Ursache der Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen.

Von J. Müller, Bremen.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen-Flughafen, Versuchsabteilung.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Gasschmelzschweißung von dünnwandigen Teilen bis zu etwa 3 mm Dicke.

Nachdem im deutschen Flugzeugbau seit dem Jahre 1928 unlegierter Stahl mit Kohlenstoffgehalten bis zu 0,3% und seit 1930 auch CrMo-Stahl der Art 1452 ohne Mißerfolge verschweißt worden waren, trat im Jahre 1933 und den folgenden, der Zeit einer etwas stärkeren Wiederbelebung des deutschen Flugzeugbaues, an solchen Stählen eine neuartige Fehlererscheinung, die Schweißrissigkeit[1]), auf, und zwar in so starkem Maße, daß die Flugzeugsicherheit und -fabrikation dadurch gefährdet war. Dabei war die Ursache der Schweißrisse völlig unklar. Sie erschienen an den eingangs genannten, bereits erprobten Stahlarten, an bewährten Schweißkonstruktionen wie an neuartigen. Die Risse wurden an den Arbeiten der altbewährten geübten Schweißer festgestellt, wie auch an solchen von Neulingen im Schweißhandwerk. Auch von einer Änderung der Schweißbedingungen war nichts bekannt. Und doch mußte sich irgendetwas gegenüber vorher, als man den Begriff »Schweißrissigkeit« noch nicht kannte, geändert haben, wodurch die Erscheinung hervorgerufen worden war. Diese veränderten Verhältnisse, die Ursache der Schweißrissigkeit, mußte so schnell wie möglich gefunden werden, um den Fehler wieder auszuschalten. Es kam dafür eine große Zahl von Umständen schweißtechnischer, konstruktiver und werkstofftechnischer Art in Betracht.

Über den Einfluß dieser mannigfachen Umstände auf die Schweißrissigkeit haben die in den Jahren 1933/34 in der Versuchsabteilung der Focke-Wulf-Flugzeugbau G. m. b. H. durchgeführten Untersuchungen [4][2]) weitgehend Klarheit gebracht. Das wesentliche Ergebnis war, daß ins Gewicht fallende Ursachen schweißtechnischer Art nicht vorlagen; daß Schweißspannungen die notwendige Voraussetzung für das Entstehen von Schweißrissen sind und daß die Größe dieser Spannungen an den Konstruktionen des Flugzeugbaues nicht berechenbar und damit kaum beeinflußbar ist; weiter daß Schweißspannungen allein aber keineswegs eine hinreichende Bedingung für das Entstehen von Schweißrissen sind, sondern daß noch eine gewisse Eigenart des Stahles wesentlich dafür maßgebend ist, ob beim Verschweißen unter Spannung Risse entstehen oder nicht.

Ein wesentliches Hilfsmittel für diese Untersuchungen war die von mir entwickelte Einspannschweißprüfung, die sich als geeignet erwiesen hat, diese Stahleigenschaft auch zahlenmäßig zu bestimmen. Als Schweißrissigkeitsgrad wurde der an der herausgebrochenen Schweißraupe festgestellte prozentuale Anteil der oxydierten Bruchfläche definiert, wobei die Raupenseite mit den stärksten Fehlstellen maßgebend ist. Inzwischen hat sich bei der sehr umfangreichen praktischen Anwendung der neuen Prüfart im Flugzeugbau herausgestellt, daß die Angabe der prozentualen Rißlänge bzw. der Summe derselben zweckmäßiger ist. Denn bei den geringen Wanddicken ist einmal durch die Schätzung der Rißtiefe eine größere Unsicherheit bedingt als bei der Angabe der Rißlänge und zweitens ist es das Wesentliche, ob und wie weit die Oberfläche, von der die Schweißrisse erfahrungsgemäß immer ausgehen, gesund ist oder nicht. Diese Auswertung der Schweißrissigkeit ist deshalb nach Anordnung des Reichsluftfahrtministeriums vom 4. Februar 1936 im Flugzeugbau allgemein üblich.

Als hauptsächliches Kriterium dafür, ob ein Stahl die Schweißverformungen ohne Risse ertragen kann oder nicht, wurden die Gehalte des zu verschweißenden Stahles an Kohlenstoff, Schwefel und Phosphor festgestellt, und zwar so, daß eine Erhöhung des C-Gehaltes eine Erniedrigung des (P + S)-Gehaltes bedingt, wenn Schweißrisse vermieden werden sollen. Welcher von den beiden Eisenbegleitern den größeren Einfluß besitzt, blieb zunächst noch ungeklärt. Der bis dahin für zu schweißende Flugzeugstähle allgemein gültige [3, S. 426] Reinheitsgrad nach DIN 1661 ((P + S) = 0,07%) wurde für gute Schweißeigenschaften von Stählen mit höherem Kohlenstoffgehalt als nicht hinreichend erkannt. Kalt- oder Warmverfestigung des Stahles wurden als einflußlos auf die Schweißrißneigung gefunden. Auch die Schweißhärte, d. h. Härtesteigerung in der neben der Schweißnaht liegenden überhitzten Zone, war Gegenstand der Untersuchungen, und es ergab sich, daß Schweißhärte und Schweißrissigkeit nicht in ursächlichem Zusammenhang stehen.

Diese Erkenntnisse waren im wesentlichen an unlegierten Stählen gewonnen worden. Sie haben sich aber auch an dem CrMo-Stahl 1452 in vollem Umfange bestätigt. Eine Probe aus der Fülle der während der letzten 5 Jahre bei der Focke-Wulf-Flugzeugbau G. m. b. H. in dieser Richtung gemachten Untersuchungen und Erfahrungen liefern Bild 1 bis 3, C-, P-, S-Schaubilder, die auf Grund von 109 Chargenanalysen[3]) der zu Ende 1935 und zu Anfang 1936 von drei Stahlwerken gelieferten CrMo-Stähle und auf Grund einer sehr großen Zahl von Einspannschweißungen der Focke-Wulf-Flugzeugbau G. m. b. H. mit Stählen dieser Chargen aufgestellt wurden. Es wurden dabei sämtliche vorliegenden Prüfergebnisse des betreffenden Zeitraumes berücksichtigt, die durch genügend viele Einspannschweißungen ein sicheres Urteil gewährleisteten, ob der Stahl einwandfrei war (Schweißrissigkeitsgrad = 0%) oder nicht.

[1]) Unter Schweißrissigkeit ist Rißbildung zwischen Schweißraupe und -stahl zu verstehen, nicht in der Schweißraupe selbst.

[2]) Diese Zahlen beziehen sich auf das am Schluß aufgeführte Schrifttum.

[3]) Aus den Werksattesten der Stahlwerke, übermittelt durch die Werkstoffprüfung des Reichsverbandes der deutschen Luftfahrtindustrie.

Digitized by Google

Bild 1 bis 3. Zusammengestellt aus Stahlwerksanalysen von 109 Chargen dreier verschiedener Stahlwerke und dazugehörigen Einspannschweißprüfungen der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H.
○ Schweißrissigkeit = 0%, ● Schweißrissigkeit > 0%.

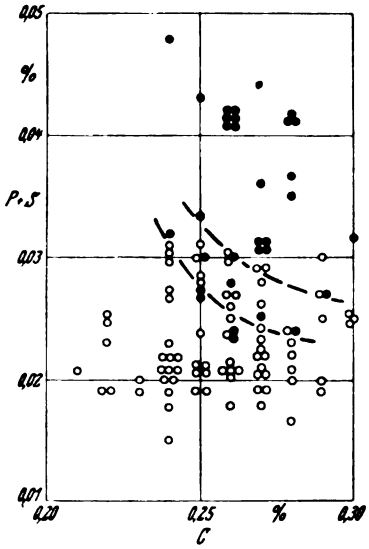


Bild 1. C-(P + S)-Schaubild.

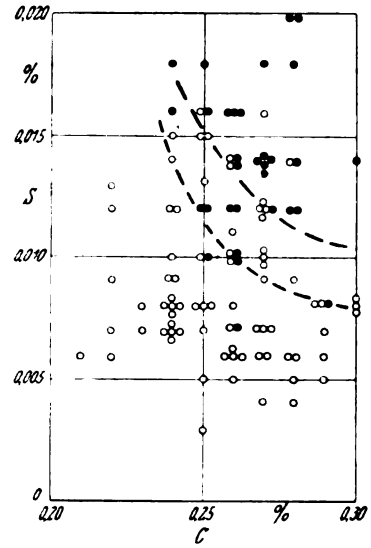


Bild 2. C-S-Schaubild.

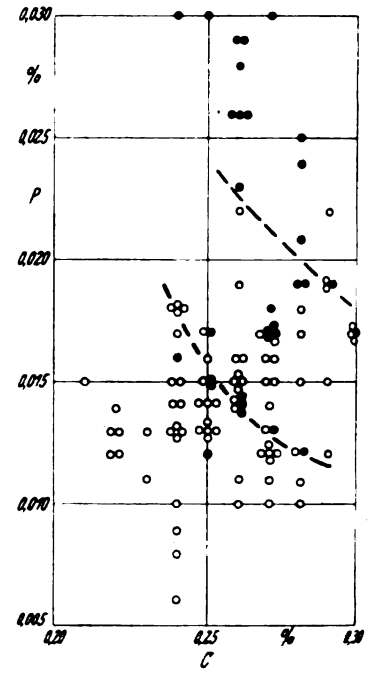


Bild 3. C-P-Schaubild.

Zahlentafel 1. Auftreten der Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen 1452, festgestellt bei der Focke-Wulf-Flugzeugbau G.m.b.H. 1936/37.

	1936				1937			
	Anzahl der eingegangenen Stücke	Anzahl der durch E-Schweißung geprüften Stücke	Anzahl der wegen Schweißrissen beanstandeten Stücke	Aufgetretene Schweißrissigk. Prozentsatz der geprüften Menge	Anzahl der eingegangenen Stücke	Anzahl der durch E-Schweißung geprüften Stücke	Anzahl der wegen Schweißrissen beanstandeten Stücke	Aufgetretene Schweißrissigk. Prozentsatz der geprüften Menge
Januar . . .	2750	616	66	10,7	5317	559	0	0
Februar . . .	2785	867	105	12,2	2287	383	0	0
März	2662	1400	151	10,8	2868	669	0	0
April	3398	962	15	1,5	2139	796	0	0
Mai	6539	1351	32	2,3	843	270	0	0
Juni	5099	1303	7	0,5	1202	353	0	0
Juli	6272	2747	100	3,6	1584	317	0	0
August . . .	3450	1184	0	0	793	218	0	0
September . .	~5000	1259	0	0	2732	169	0	0
Oktober . . .	1573	1072	33	3,0	884	71	0	0
November . .	3046	889	0	0	357	18	0	0
Dezember . .	3203	834	0	0	235	21	0	0

Von Bedeutung ist noch die Bemerkung, daß die schweißrissigen Stähle in unregelmäßiger Folge innerhalb der größtenteils guten Lieferungen lagen.

Man erkennt in Bild 1, dem C-(P + S)-Schaubild, wie auch früher an Kohlenstoffstählen gefunden, ein schräg verlaufendes Übergangsgebiet, das ein Feld der schweißrissigen Stähle von dem der nicht schweißrissigen scheidet, je nach den Gehalten an C und (P + S). Die Breite des Übergangsgebietes ist mit etwa 0,005% (P + S) erstaunlich gering, wenn man berücksichtigt, daß Chargenanalysen vorliegen, und daß innerhalb der Chargen merkliche Analysenschwankungen auftreten können. Die Mn-Gehalte der Stähle lagen fast ausnahmslos zwischen 0,50 und 0,70%, so daß die aus vielen Erfahrungen bekannte schweißrißvermindernde Wirkung höherer Mn-Gehalte (s. unten) sich nicht störend bemerkbar machte.

In ähnlicher Weise zeigt sich die Scheidung der guten und schweißrissigen Stähle im C-S-Schaubild, Bild 2, und im C-P-Diagramm, Bild 3.

Auf Grund solcher Feststellungen wurde vom Reichsluftfahrtministerium mit Wirkung ab 1. Januar 1936 eine entsprechende Analysenbeschränkung für die S-, P- und C-Gehalte des zu schweißenden CrMo-Stahles 1452 angeordnet[4]). Aus der Zahlentafel 1 ist zu ersehen, wie die Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen davon beeinflußt wurde: von da ab wurde während der ersten Hälfte des Jahres 1936 die Schweißrissigkeit an den für den Flugzeugbau gelieferten Chrommolybdänstählen immer seltener bis zum vollständigen Verschwinden. Nur hin und wieder kann seitdem im Flugzeugbau Schweißrissigkeit beobachtet werden, wobei sich die Analysenregel immer wieder bestätigt.

Von einer grundsätzlichen Neuerung in den Stahlherstellungsverfahren in der fraglichen Zeit ist nichts bekannt geworden, nur daß einzelne Stahlwerke zu Elektroverfahren und kleineren Blockgewichten übergingen, Maßnahmen, durch die im wesentlichen die Gleichmäßigkeit und der Reinheitsgrad des Stahles erhöht werden.

Nach dem, was aus der Einführungszeit der zu schweißenden Stähle höherer Festigkeit mir bekannt ist, waren für diese, wenn auch keine Vereinbarung hierüber bestand, vor Auftreten der Schweißrissigkeit folgende Reinheitsgrade kennzeichnend:

$$P = (0{,}012 \text{ bis } 0{,}024)\%;\ S = (0{,}004 \text{ bis } 0{,}010)\%.$$

Nach diesen Tatsachen besteht über die Hauptursache der im Flugzeugbau aufgetretenen Rißerscheinung in betriebstechnischer Hinsicht volle Klarheit. Wenn auch noch andere Umstände von gewissem Einfluß auf die Schweißrissigkeit grundsätzlich möglich sind, so sind sie doch offenbar hier bei weitem nicht von so entscheidendem Ein-

[4]) $S \leq 0{,}015\,\%$ und $P \leq 0{,}020\,\%$ bei $C = \max 0{,}27\,\%$.

Digitized by Google

fluß gewesen, wie die Zusammensetzung der Stähle. Diese in Betracht kommenden Einflüsse sollen nachstehend im einzelnen behandelt werden. Dabei sei zur Klarstellung der Begriffe darauf hingewiesen, daß, dem Zwecke der Schweißrißvermeidung entsprechend, zuerst und hauptsächlich die ursächlichen Zusammenhänge in betriebstechnischer Hinsicht ins Auge gefaßt werden, d. h. die veränderten betrieblichen Umstände, mit denen sich einmal Rißfreiheit und einmal Rissigkeit reproduzierbar erzielen läßt. In zweiter Linie sollen kurz die Gesichtspunkte behandelt werden, wie man die Rißentstehung im einzelnen durch physikalische oder chemische Wirkungen erklären kann.

In den letzten Jahren haben sich mehrere interessierte Stellen mit dem Problem der Schweißrissigkeit und ihrer Ursache lebhaft beschäftigt, ohne jedoch, wie das umfangreiche Schrifttum [3 bis 17] zeigt, Klarheit und Übereinstimmung erzielt zu haben. Es soll hier deshalb ein weiterer Beitrag zu diesem Ziele geliefert werden.

Gesichtspunkte schweißtechnischer Art werden im Schrifttum immer weniger erörtert, ein Zeichen dafür, daß man ihnen nur noch geringe Bedeutung für die Schweißrissigkeit beimißt. Immerhin muß erwähnt werden, daß dem öfters [5, 6] angeführten »weniger geübten« Schweißer die Schuld an den im Flugzeugbau aufgetretenen Rissen nicht nachgewiesen werden konnte, wobei die Einhaltung der für einen guten Schweißbetrieb geltenden Regeln selbstverständlich vorausgesetzt ist. Auch aus dem Schrifttum ist nichts derartiges bekannt geworden. Trotz wiederholter Bemühungen konnte kein eindeutiger, allgemein gültiger und wesentlicher Einfluß der Einstellung des Mischungsverhältnisses des Schweißgases (in den engen Grenzen, wie es praktisch vorkommt), der Flammengröße, der Brennerhaltung, der Reihenfolge bei Heftung und Schweißung und der Schweißgeschwindigkeit festgestellt werden. Ein solcher ist, falls überhaupt vorhanden, im Flugzeugbau von den jeweils vorliegenden sehr wechselnden Konstruktionsverhältnissen so stark abhängig, daß er im allgemeinen nicht vorausberechnet werden kann. Nur bei einzelnen Teilen, die in großer Anzahl herzustellen sind, kann im Laufe des Arbeitens mit schweißempfindlichem Werkstoff eine günstige Reihenfolge der Arbeitsgänge empirisch gefunden werden. Jedoch wird ein solcher Weg die berechtigten Forderungen nach Sicherheit und nach wirtschaftlicher Fertigung im Flugzeugbau niemals befriedigen. Erwähnt sei, daß bei verhältnismäßig kleiner Schweißflamme, wohl infolge geringerer Schweißverformungen, und bei Nachrechts- oder Rückwärtsschweißung wegen des damit verbundenen Nachglühens in einzelnen Fällen eine günstige Wirkung beobachtet werden konnte. Die Angaben hierüber sind jedoch nicht einheitlich, so daß diese Einflüsse als zweifelhaft und nicht entscheidend gelten müssen.

Auch die Art des Schweißgases und seiner Zusammensetzung ist auf Grund von Versuchen des Kohle- und Eisenforschungsinstituts in Dortmund als Ursache der Schweißrisse in Betracht gezogen worden [8]. Nach Bearbeitung dieser Fragen an mehreren Stellen, der Focke-Wulf- und Ernst Heinkel-Flugzeugwerke, der Fr. Krupp A.-G., Essen, und des Staatlichen Materialprüfungsamtes, Berlin-Dahlem, worüber in dem in Aussicht genommenen Kongreßbuch des XIII. Azetylenkongresses in Kürze berichtet werden wird, liegen folgende eindeutigen Ergebnisse fest:

Eine Beeinflussung der Schweißrissigkeit von legierten und unlegierten Flugzeugbaustählen durch die im Schweißgas vorkommenden Schwefel- und Phosphorwasserstoffgehalte ist praktisch nicht vorhanden. Möglichst gute Reinigung des Gases ist trotzdem zu empfehlen, da nach den Untersuchungen die Wahrscheinlichkeit besteht, daß mit erhöhtem Reinheitsgrad des Gases die Schweißrißgefahr eher ab- als zunimmt. Der Einfluß ist so gering, daß er nicht direkt nachweisbar ist; er wird vermutet auf Grund der Wirkung von so starken Verunreinigungen an H_2S und PH_3, wie sie nur durch beabsichtigte Zusätze erreicht worden sind.

Die Frage, ob und wie weit die Konstruktion an den aufgetretenen Schweißrissen ursächlich beteiligt ist, läuft auf folgendes hinaus:

1. Wie weit kann der Flugzeugkonstrukteur Schweißverformungen und -spannungen grundsätzlich vermeiden?
2. Welche Bedeutung haben Schweißzugverformungen für entstehende Schweißrisse? (möglichst quantitativ zu beantworten).

Jene Frage ist in meinem ersten Aufsatz über die Schweißrissigkeit [4] ausgiebig behandelt worden. Es wurde gezeigt, daß die Zugverformungen oder -spannungen, die an irgendeiner Stelle der Schweißnaht senkrecht zur Nahtrichtung in der Blechebene entstehen, sich zusammensetzen können aus 1. einer mehr oder weniger starren Einspannwirkung allein, so wie es in der Einspannschweißung der Fall ist (unmittelbare Schweißverformungen), daß aber außerdem 2. schon an einfachen Schweißkonstruktionen, z. B. der T- und Einbrennprobe, noch zusätzliche Verformungen auftreten können, so daß zur Nachahmung dieser Verhältnisse in der Einspannschweißung die beiden Einspannbacken in dem kritischen Zeitpunkt der Einspannschweißung noch voneinander entfernt werden müßten (mittelbare Schweißverformungen). Damit, daß diese Spannungsverhältnisse uns bisher nicht nur ihrer Größe nach, sondern auch qualitativ in keinem Falle zugänglich sind, ist die erste der beiden Fragen negativ zu beantworten.

Zur zweiten Frage, ob und wie stark verschieden große Schweiß-Zugverformungen sich auf die Schweißrißbildung verschiedener Stähle auswirken, können hier folgende Versuchsarbeiten mitgeteilt werden:

Vier 1 mm dicke CrMo-Stahlbleche, deren Schweißrissigkeitsgrade durch je 20 Einspannschweißungen zu 0, 0,9, 7,4 und 13,1% festgestellt worden waren, wurden in derselben Vorrichtung weiter geprüft, nur mit dem Unterschied, daß eine der beiden Einspannproben durch ein anderes, nicht schweißrissiges Blech von größerer Wandstärke, 3, 5 und 8 mm, ersetzt wurde. In der Praxis des Schweißens werden zwar solche Wanddickenverhältnisse von zu verschweißenden Stücken möglichst vermieden. Hier wurde damit erreicht, daß die Schweißverformungen senkrecht zur Naht, die sich bei der normalen Einspannschweißung gleichmäßig auf die beiden Blechproben verteilen, je nach dem geänderten Querschnittsverhältnis der beiden miteinander verschweißten Proben zum größeren Teil auf die zu untersuchende schwächere Blechprobe entfielen[5]). Und zwar errechnet sich gegenüber der Reckung bei normaler Einspannschweißung die auf das schwächere Blech entfallende Schweißverformung beim Wanddickenverhältnis 1:3 zum 1,5fachen, bei 1:5 zum 1,67fachen und bei 1:8 zum 1,78fachen Betrag, wenn man die gleiche Gesamtreckung für alle Wanddickenverhältnisse vereinfachend voraussetzt.

Die an den vier Versuchsblechen so erzeugten Schweißrißlängen, bezogen auf die Nahtlänge, sind in Bild 4 über

[5]) Für die Abnahmeprüfung hat sich die normale Prüfung (1 : 1) mit der Forderung Schweißrissigkeit = 0 vollständig bewährt.

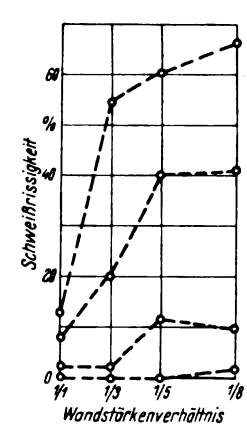


Bild 4. Schweißrissigkeit von 4 verschiedenen Stählen bei verschärfter Einspannschweißung. Jeder Punkt ist ein Mittelwert von 10 Einspannschweißungen.

Digitized by Google

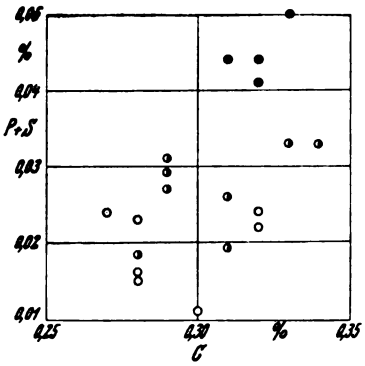


Bild 5. Schweißrißverhalten von Cr Mo V-Stählen 1456.
○ 0% schweißrissig, ◑ 0—4% schweißrissig,
● 5—25% schweißrissig.

dem Wanddickenverhältnis aufgetragen. Jeder Punkt ist der Mittelwert aus je zehn Einspannschweißungen. Während der gute Stahl bis zum Wanddickenverhältnis 1:5 noch keine Spur von Schweißrissen zeigt und erst mit achtfacher Blechdicke eingespannt verschweißt etwa 1%, verhalten sich die von vornherein auch nur wenig schweißrissigen Stähle bei einer Erhöhung der Schweißverformung um ein Vielfaches schlechter als bei normaler Einspannschweißung.

Die zweite Frage ist demnach so zu beantworten: Vergrößerung der Schweiß-Zugverformungen oder -spannungen bewirkt schon bei schwach schweißrissigem Stahl erhebliche Verschlimmerung der Schweißrissigkeit um ein Vielfaches, bei einwandfreien Stählen dagegen nicht. Erst bei praktisch nicht zu erwartender Größe der Schweißverformungen zeigen sich hier Risse in ganz geringem Maße.

Man sieht, daß der Konstrukteur von Flugzeug-Schweißkonstruktionen in allen Fällen, in denen nach 1. unübersehbare Schweißspannungen auftreten, nicht dafür verantwortlich gemacht werden kann, wenn Schweißrisse entstehen; er braucht deshalb, wenn er überhaupt schweißen will, einen Stahl, der diese Spannungen rißfrei auszugleichen vermag. Zu hohe Schweißspannungen oder zu schwierige Schweißkonstruktionen können nicht grundsätzlich als Ursache der Schweißrisse bezeichnet werden.

Wir sind somit auf die werkstofftechnischen Gesichtspunkte gekommen, wo demnach die wesentliche Ursache der Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen zu suchen ist.

Bezüglich der Schweißhärte, der Martensitbildung in der überhitzten Zone, geht aus Untersuchungen von Bardenheuer und Bottenberg [12] hervor, daß ein Zusammenhang zwischen dieser Eigenschaft und der Schweißempfindlichkeit nicht besteht. An anderen Stellen des Schrifttums [10, 13] wird gesagt, daß mit Zunahme der härtenden Elemente C, Cr, Mo und Mn auch die Schweißrissigkeit verstärkt werde. Nach sicheren Erfahrungen des Flugzeugbaues ist die Feststellung von Bardenheuer und Bottenberg richtig. Als Beispiel hierfür sei erwähnt, daß der CrMoV-Stahl 1456 trotz der hohen Schweißhärte von H_B (2,5/187,5/30) = 400 — 480 kg/mm² in folgender Zusammensetzung z. B. absolut nicht schweißrissig ist: 0,32% C, 2,46% Cr, Mo nicht festgestellt, 0,10% V, 0,69% Mn, 0,013% P und 0,009% S. Dieser Stahl wird für bestimmte Einzelteile im Flugzeugbau bereits betriebsmäßig ohne Mißerfolge geschweißt und nachher vergütet. Auch an ihm hat sich die Analysenregel als gültig erwiesen, wie das in Bild 5 auf Grund von 163 Einspannschweißversuchen aufgestellte Schaubild zeigt.

Daß höhere Mn-Gehalte direkt schweißrißvermindernd wirken, ist im Flugzeugbau bereits eine alte Erfahrungstatsache ([16], Erörterungsbeitrag Cornelius). So wurde schon vor Jahren von den Ernst Heinkel-Flugzeugwerken ein CrMo-Stahl mit erhöhtem Mn-Gehalt vorgeschlagen, um so die Analysenbeschränkung betr. des S-Gehaltes lockern zu können. Solche Stähle wurden damals vom Verfasser untersucht, z. B.[6]):

[6]) Von Herrn Dr. Matthaes, Ernst Heinkel-Flugzeugwerke freundlichst zur Verfügung gestellt.

0,23% C, 0,92% Mn, 0,20% Si, 0,013% P, 0,038% S, 0,74% Cr, 0,35% Mo.

Da es sich um einen normal erschmolzenen Elektrostahl handelt, kann der Schweißrissigkeitsgrad von 0% bei diesen C- und S-Gehalten nach allen vorliegenden Erfahrungen nur durch den erhöhten Mn-Gehalt erklärt werden.

Auch für die Erhöhung der Schweißrissigkeitsgrenze im C-S-Schaubild, die O. Werner an mit Mn-Reduktion erschmolzenen Stählen feststellte [16] liegt diese Erklärung nahe (vgl. 16, Diskussionsbeitrag Cornelius).

Zur Bedeutung der übrigen Stahlzusammensetzung sei zunächst auf den von einem Stahlwerk durchgeführten Betriebsversuch hingewiesen, über den Scherer als Erörterungsbeitrag zu [13] berichtet:

Chrommolybdänstahlbleche wurden aus 12-t-Schmelzungen mit dem gleichen metallurgischen Elektroverfahren, nur mit verschiedenen Schwefelgehalten, hergestellt. Ihre Schweißrißprüfung ermöglichte so eine vollkommen einwandfreie Ermittlung des Schwefeleinflusses. Auf Grund dessen, daß es sich um betriebsmäßig hergestellte Stähle eines Werkes handelt, das sich zu jeder Zeit betr. einwandfreier Schweißeigenschaften des Stahles 1452 vollkommen bewährt hat, und daß alle Verhältnisse außer dem S-Gehalt ganz gleich gehalten wurden, sind diese Versuche besonders wertvoll und schwerwiegend. Das Ergebnis war:

CrMo-Stahl 1452	P %	S %	Schweißrissigkeit %
C immer 0,25%, sonstige Gehalte in sehr engen Grenzen	0,012	0,008	0
	0,013	0,021	1,4
	0,011	0,048	46

Aus diesen Ergebnissen wird geschlossen, daß der Schwefelgehalt in den üblichen Grenzen bei metallurgisch einwandfrei hergestellten Schmelzen keinen Einfluß auf die Schweißrissigkeit habe. Erst ein Schwefelgehalt, der weit über das übliche im Betrieb vorkommende Maß hinausgehe, führe zu Schweißrissigkeit ([13], Diskussionsbeitrag).

Mit Rücksicht darauf, daß betr. Brauchbarkeit für Schweißzwecke ein wesentlicher Unterschied nur zwischen dem ersten und den beiden letzten Stählen besteht, und angesichts der Tatsache, daß vor der Zeit der Analysenvorschrift Stähle mit Schwefelgehalten über 0,21% mangels jeder Vereinbarung geliefert werden konnten und in der Praxis auch in großem Umfange geliefert wurden und zu Schweißrissigkeit führten (vgl. Bild 1), kann dieser Schlußfolgerung nicht zugestimmt werden. Vielmehr liefern die Versuche den klaren Beweis dafür, daß bei normalem, einwandfreiem Herstellungsverfahren erhöhter Schwefelgehalt allein die Ursache von Schweißrissen sein kann; sie berechtigen sogar folgerichtig zu dem Schluß, daß der erhöhte Schwefelgehalt nicht nur Indikator für eine andere, Schweißrissigkeit hervorrufende Stahleigenschaft, sondern selbst unmittelbar und maßgebend an der Ursache beteiligt ist.

Weiter verdienen folgende Angaben von Cornelius [15] Beachtung und berechtigen zu dieser Schlußfolgerung:

	C%	S%	P%	Schweißrissigkeit %
CrMo-Stahl 1452	0,23	0,005	0,02	0
Sonstige Zusammensetzung fast gleich	0,26	0,017	0,011	0,7
	0,26	0,029	0,013	3
	0,26	0,033	0,034	57
	0,26	0,043	0,034	58
	0,25	0,048	0,011	46

Auf Grund ihrer Untersuchungen kommen Bollenrath und Cornelius zu dem Ergebnis [9], daß die Schweißrissigkeit im deutschen Flugzeugbau vor allem aus folgenden Gründen eine verhältnismäßig seltene Erscheinung geworden sei:

1. Herstellung des Stahles im Elektroofen und Herabsetzung der Blockgröße in einzelnen Werken,
2. Erniedrigung des C-Gehaltes auf < 0,28%,
3. Erniedrigung des S-Gehaltes auf max. 0,015%.

Digitized by Google

Endlich wird noch durch Angaben von O. Werner [16] die Analysenregel an einer Reihe von untersuchten Stählen in einem C-S-Schaubild grundsätzlich bestätigt.

Auf die schon erwähnte, Schweißrissigkeit hervorrufende Wirkung von sehr hohen H_2S-Gehalten des Schweißgases sei hingewiesen. Ebenso sei kurz erwähnt, daß Verfasser ganz einwandfreie Stähle durch dreistündiges Glühen bei 1000° in einem schwefelabgebenden Gas, wahrscheinlich infolge Reaktionsdiffusion, bis zu 100% schweißrissig machen konnte, falls es nicht Mn-legierte Stähle waren.

Ungünstiger Einfluß von hohen Phosphorgehalten wurde verschiedentlich festgestellt, so von Bardenheuer und Bottenberg [12], wie auch in den soeben angeführten Untersuchungen aus [15]. Es liegen aber genügend Anhaltspunkte für die Annahme vor (z. B. [12] u. [16]), daß der Schwefelgehalt jedoch weit stärker an der Ursache beteiligt ist als eine gleich große Menge Phosphor. Dies läßt sich auch mit großer Wahrscheinlichkeit aus den Großzahl-Betriebsbeobachtungen schließen, die in Bild 1 bis 3 dargestellt sind; und zwar aus der Breite der Übergangsgebiete im Verhältnis zu den Streugebieten der S- und P-Gehalte, und insbesondere aus der Anzahl der innerhalb der Streugebiete liegenden Stähle. Im C-S-Schaubild sind es innerhalb der in Bild 2 eingezeichneten Streugrenzen etwa 30, im C-P-Diagramm, Bild 3, dagegen 48 Punkte.

Eine wesentliche Erhöhung oder Erniedrigung der Schweißrissigkeit durch die Si-, Cr-, Ni-, Mo- und V-Gehalte des Stahles konnte, soweit bekannt geworden ist, an keiner Stelle nachgewiesen werden.

Über den Einfluß der üblichen Wärmebehandlungen sagen Bardenheuer und Bottenberg [12] auf Grund überzeugender Versuche, es sei für die Schweißrissigkeit bedeutungslos, ob der Werkstoff in geglühtem oder walzhartem Zustand verschweißt werde. Dasselbe gelte für Normalglühung und Vergütung. Nach sicheren Erfahrungen des Flugzeugbaues muß dem zugestimmt werden.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden: Das Gewicht der beschriebenen betrieblichen und Laboratoriumsuntersuchungen von verschiedenen Stellen für die Klärung der Ursache vom betriebstechnischen wie auch vom physikalischen Standpunkte aus ist unverkennbar. Bei den bisher allgemein üblichen Methoden der Stahlerzeugung ist die Schweißrissigkeit der Flugzeugbaustähle im wesentlichen durch erhöhte S-, C- und P-Gehalte begründet. Die Vereinbarung hierüber zwischen Erzeuger und Verbraucher ist deshalb sehr zweckmäßig und die öfters aufgetauchten Zweifel über die Richtigkeit der Höhe der zugelassenen Gehalte sind nach den zahlenmäßigen Feststellungen durchaus unbegründet (vgl. Bild 1).

Aus neuerer Zeit liegen nun Untersuchungen darüber vor, ob und welche Wirkungen auf die Schweißrißneigung von der Stahlerzeugung aus durch besondere Schmelzführung und Schmelzbehandlung erreicht werden können. An einer Reihe von Chrommolybdänstahl-Versuchsschmelzen untersuchten Bardenheuer und Bottenberg hauptsächlich den Einfluß von verschiedenen metallurgischen Schmelzverfahren, insbesondere der Schmelzüberhitzung, und gleichzeitig den Einfluß der in Betracht kommenden Stahlkomponenten und -verunreinigungen [12]. Die ersten Schmelzungen wurden in Schmelz- und Gießtemperatur besonders niedrig gehalten und jede zu mehreren Blöcken vergossen, und zwar die erste Schmelze zu mehreren Blöcken mit steigenden Kohlenstoffgehalten, die zweite mit steigenden Phosphor- und eine dritte zu Blöcken mit steigenden Schwefelgehalten. So brachten die zu Blechen verwalzten Stähle bei den vorliegenden übrigen Zusammensetzungen, die innerhalb jeder Schmelzung ziemlich gleichmäßig war, durch die Einspannschweißprüfung im wesentlichen folgende Ergebnisse (von den im geglühten und im ungeglühten Zustand gefundenen Rissigkeitsgraden wurde, da kein grundsätzlicher Unterschied vorliegt, immer das Mittel gebildet):

Schmelze 1 bei C-Gehalten zwischen 0,28 und 0,36% Schweißrissigkeit 0 bis 13%,
Schmelze 2 bei P-Gehalten zwischen 0,013 bis 0,048% Schweißrissigkeit 11 bis 60%,
» 3 » S-Gehalten zwischen 0,013 und 0,065% Schweißrissigkeit 0 bis 60%.

In derselben Art wurden weitere Schmelzen und Blöcke hergestellt mit dem Unterschied, daß hierbei die Schmelz- und Gießtemperaturen absichtlich meist höher als üblich gehalten wurden, so daß die Schmelzen eine gewisse Zeit gekocht haben.

Diese mit Schmelzüberhitzung hergestellten Stähle ergaben:

Schmelze 8 bei P-Gehalten zwischen 0,018 und 0,102% Schweißrissigkeit 0 bis 42%,
» 9 » S-Gehalten zwischen 0,011 und 0,035% Schweißrissigkeit 0 bis 1%,
» 10 » P + S-Gehalten zwischen 0,026 und 0,075% Schweißrissigkeit 0 bis 5%,
» 11 » P + S-Gehalten von 0,066% Schweißrissigkeit 0 und 3%.

Eine besondere Stahlreihe mit Kohlenstoffvariation wurde hier nicht angefertigt.

Auch diese Untersuchungen ergaben allgemein mit steigenden Gehalten an C, P und S eindeutig ein Ansteigen der Schweißrissigkeit. Aus dem Vergleich der beiden Schmelzgruppen wird geschlossen, daß dieser Einfluß jedoch hinter den der Schmelzbehandlung weit zurücktrete. Als wichtigste Voraussetzung für geringe Schweißempfindlichkeit wird ein ausreichend langes und kräftiges Durchkochen des Stahles angegeben [12].

Zu dieser Schlußfolgerung ist zu bemerken, daß die aus den nicht gekochten Schmelzen hergestellten Stähle mit 3 Ausnahmen Kohlenstoffgehalte von 0,29—0,36% haben, während die gekochten Stähle außer Schmelze 5, 11 und Stahl 13/1 (s. unten) niedriger im C-Gehalt (0,23 bis 0,27) liegen. Dieser Unterschied, durch den die Ergebnisse der beiden Schmelzgruppen nicht so ohne weiteres vergleichbar sind, darf zur Bewertung des Einflusses der Schmelzüberhitzung nicht übersehen werden.

Die vorliegenden Verhältnisse gehen am besten aus dem C-(P + S)-Schaubild der Stähle hervor, das in Bild 6 gezeichnet ist. Da die nicht gekochten Stähle (unterstrichene Werte in Bild 6) durchweg im Gebiet der höheren C-(P + S)-Gehalte, die gekochten und meist rißfreien Stähle dagegen im Gebiet der niederen Gehalte liegen, so ist nicht sicher, wie weit das unterschiedliche Schweißverhalten der beiden Schmelzgruppen auf den bereits erwiesenen Einfluß dieser Gehalte oder auf die verschiedenartige Schmelzbehandlung zurückzuführen ist. Allenfalls kann durch Vergleich der

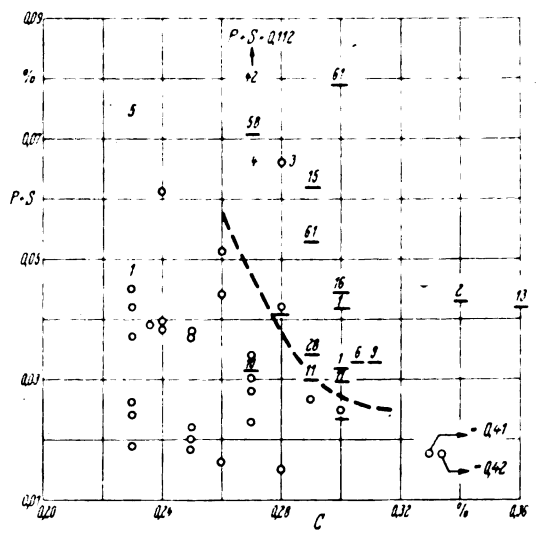


Bild 6. Schweißrissigkeit in Beziehung zur Schmelzführung und zur Analyse (*C*, *P*, *S*) der vom KWI für Eisenforschung untersuchten Stähle.
Die Zahlen geben den Schweißrissigkeitsgrad an (o bedeutet 0%). Die Werte der nicht gekochten Stähle sind unterstrichen.

Digitized by Google

Ergebnisse (Bild 6) mit den bisherigen sonstigen Erfahrungen z. B. des Bild 1, im Bereich der niederen Kohlenstoffgehalte auf eine verbessernde Wirkung der Schmelzüberhitzung geschlossen werden, wenn man einmal niedrigere Schmelztemperaturen dieser Stähle und zum anderen die Anwendung derselben Schwefelbestimmungsverfahren voraussetzt. Dies letztere ist insofern von Bedeutung, als durch das in der Praxis damals vielfach noch übliche Lösungsverfahren bei Molybdänstahl nicht der gesamte Schwefelgehalt erfaßt wird. Im Bereich bei 0,3% C-Gehalt können die Versuche bei der vorliegenden Zusammensetzung keinesfalls zu der angegebenen Schlußfolgerung überzeugen, auch nicht in Verbindung mit den bisherigen Erfahrungen, da in Bild 6 und 1 bei 0,3% C die Grenze beginnender Schweißrissigkeit übereinstimmend bei 0,025% (P + S) liegt.

Im einzelnen muß erwähnt werden: Die Schmelze 5 mit erhöhtem C-Gehalt (0,42%) hat dafür einen so hohen Reinheitsgrad (P = 0,010%; S = 0,008%), daß hieraus nach der Analysenregel ohne weiteres Rißfreiheit zu erwarten ist, ebenso wie bei Stahl 13/1 (C = 0,28%, P = 0,010%, S = 0,005%). Das Schweißverhalten (Schweißrissigkeit = 0) der Stähle 11/1 (C = 0,28%, P + S = 0,066%) und 14/3 (C = 0,25%, P + S = 0,072%) läßt sich mit der Analysenregel nicht erklären, wozu bemerkt werden muß, daß die Rißfreiheit des letzten Stahles bei einer späteren Nachprüfung nicht bestätigt werden konnte[7]), und daß der mit 11/1 in der Zusammensetzung vollständig übereinstimmende Stahl 11/2 schweißrissig ist, hier also offenbar schon der Grenzfall vorliegt.

Bei Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte und hauptsächlich auf Grund der Tatsache, daß durch geeignete Zusammensetzung betr. der C-, P- und S-Gehalte allein auch bei den besonders niedrig erschmolzenen und vergossenen Stählen Schweißrißfreiheit erzielt werden konnte, während bei gewissen Gehalten der genannten Bestandteile auch die besonders behandelten Stähle trotz der Schmelzüberhitzung nicht rißfrei gemacht werden konnten (8/5 und 6, 9/1, 10/6 und 11/2), ist aus den Versuchsergebnissen die Folgerung zu ziehen: Die Schweißrissigkeit an CrMo-Flugzeugbaustählen ist im wesentlichen in der Zusammensetzung, den erhöhten S-, C- und P-Gehalten, begründet. Sie kann, wie die Ergebnisse, zusammen mit den Erfahrungen der Praxis, erkennen lassen, durch besondere metallurgische Behandlung infolge Verringerung der Einschlüsse und der Kristallseigerung bis zu gewissem Grade verringert, jedoch nicht unabhängig von der Zusammensetzung beseitigt werden; auf richtige Zusammensetzung kommt es in erster Linie an, wenn man Schweißrissigkeit vermeiden will.

Als innere Ursache der Schweißrisse werden örtliche Spannungen in Erwägung gezogen, die durch nebeneinanderliegende Perlit- und Martensitbildung infolge Kristallseigerung und durch Wasserstoff-Sprengwirkung entstehen, für die wiederum oxydische und sulfidische Einschlüsse an den Korngrenzen von Bedeutung sind. Die Behandlung der Schmelze 13 mit Wasserstoff hat sich zwar nicht durch Schweißrisse ausgewirkt, jedoch konnte ein an sich gutes Blech durch vorhergehende Wasserstoffbehandlung in steigendem Maße schweißrissig gemacht werden. Gegen eine entscheidende Bedeutung dieser Gesichtspunkte spricht allerdings die bekannte Tatsache, daß auch kohlenstoffarme, verhältnismäßig weiche Stähle bei genügend hohen P- und S-Gehalten schweißrissig sind, und zwar in demselben Maße wie höher gekohlte und legierte Stähle; ferner die von Cornelius [15] und von Bollenrath und Cornelius [11] erwiesene Erscheinung, daß bei Arkatomschweißung trotz des Schweißvorganges im Wasserstoffstrom die Schweißrissigkeit der Stähle erheblich niedriger wird als bei Autogenschweißung.

Von Interesse sind ferner die Untersuchungen, die Bardenheuer und Bottenberg über die schweißrißverhindernde Wirkung von höher mit Nickel legierten Schweißdrähten mitteilen [14]. Leider sind diese Erkenntnisse infolge der Rohstofflage nicht unmittelbar von praktischer Bedeutung.

Weitere Untersuchungen über die Anwendung von Schmelzüberhitzung und besonderen Desoxydationsmitteln und -verfahren liegen von Eilender und Pribyl vor [13], die von der Entstehungstemperatur der Schweißrisse ausgehen. Diese wurde durch Feststellung mit Augenschein bei 650° C gefunden, im Gegensatz zu verschiedenen anderen Angaben des Schrifttums, die sämtlich höher liegen (s. unten). Durch Glühversuche wird dann festgestellt, daß zwischen Schweißrissigkeit und Sekundärkorngröße kein Zusammenhang besteht. Weiter wird gesagt, daß die Rißbildung vom Formänderungsvermögen des Werkstoffes im Temperaturgebiet der Entstehung der Risse bei etwa 650° C abhängt. Auf Grund von Beobachtungen wird die durch Kristallseigerung hervorgerufene Verminderung des Formänderungsvermögens bei 600 bis 700° als Ursache der Schweißrissigkeit angegeben. Dies wird durch ein 24stündiges Diffusionsglühen bei 1270° belegt, wodurch ein schweißrissiges Blech schweißunempfindlich wurde, ohne daß Randentkohlung dabei wesentlich mitgewirkt habe. Weiter wurden mit besonderem Schmelzverfahren mehrere Versuchsstähle hergestellt, die trotz hoher Gehalte an C, P und teilweise auch S sich als »praktisch rißfrei« erwiesen haben. Dies wird auf Vermeidung der Kristallseigerung infolge besonderer Schmelzverfahren zurückgeführt. Es erscheint allerdings fraglich, wie weit der bei der Mehrzahl der Stähle hohe Mn-Gehalt (bis zu 2,2%) daran teil hat. Bei anderen Versuchsstählen fällt der außergewöhnlich starke Unterschied in den beiden Gehalten auf (P:S bis 10:1 und darüber), wobei die Analysenregel infolge der unterschiedlichen Wirkung von P und S nicht ohne weiteres angewendet werden kann wie bei den Flugzeugbaustählen der Praxis, bei denen so große Unterschiede in ein und demselben Stahl nicht vorkommen. Außerdem muß auf die unbedingt nötige vollständige Rißfreiheit der zu schweißenden Stähle hingewiesen werden.

Der Erkenntnis, daß der Einführung von Stählen weit höherer Festigkeit vom Standpunkte der Schweißrissigkeit nichts im Wege steht, kann aus alter Erfahrung des Flugzeugbaues zugestimmt werden [4]. Die ungünstige Auswirkung der Schweißhärte bedingt aber ein nachträgliches Vergüten, das praktisch nicht immer möglich ist.

Der Hinweis auf die Bedeutung der Kristallseigerung ist wertvoll für die Erklärung der immer wieder beobachteten Streuungen bei der Schweißrissigkeitsprüfung wie auch für die Erkenntnis der Schweißrißursache allgemein. Daß es für diese nicht nur auf die üblich festgestellte Mittelanalyse ankommt, sondern weit mehr auf die Mikrozusammensetzung der gefährdeten Stellen, ist naheliegend. Über die Entstehung und die Bedeutung der Kristallseigerung für die Stahleigenschaften ist vieles bekannt [1, 2]. Die Entmischung, die während der Erstarrung innerhalb der Kristallite, bei Schwefel im wesentlichen zwischen diesen, entsteht, ist abhängig:

1. Von der absoluten Größe des Erstarrungsintervalls. Im Bereich der bei Baustählen praktisch vorkommenden Gehalte ist sie beim System Fe-S ein Vielfaches von den Erstarrungsbereichen der Systeme Fe-P und Fe-C, und dann folgen in weitem Abstand die übrigen gebräuchlichen Stahlbeimengungen;
2. von der Geschwindigkeit, mit der die Abkühlung insbesondere während des Erstarrungsintervalls vonstatten geht. Da in der Schweißrißzone am Rande der Schweißschmelze dieser Temperaturbereich (oder ein Teil desselben) sehr rasch durchlaufen wird, ist diese Bedingung für starke Kristallseigerung weitgehend gegeben, unabhängig von dem vorher bestehenden Kristallseigerungsgrad (bzw. Entmischung bei Schwefel);
3. von der Größe des Diffusionsvermögens der betreffenden Bestandteile innerhalb des Erstarrungsbereichs und auch nachher. Hierzu ist zu sagen, daß Schwefel, nur in Spuren im Eisen löslich, ein äußerst geringes Diffusionsvermögen besitzt. Aber auch dem Phosphor, an sich bis etwa 1,7% im α-Eisen löslich, ist ein sehr

[7]) Der Stahl wurde vom Kaiser-Wilh.-Inst. f. Eisenforschung freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

Digitized by Google

langsames Diffusionsvermögen eigen, so daß die bei der Erstarrung entstehende Anhäufung des Phosphors in den Gebieten der Restschmelze auch über die Sekundärkristallisation hinaus leicht beibehalten wird, insbesondere bei Anwesenheit von Kohlenstoff.

In Übereinstimmung mit diesen aus der Gefügelehre bekannten Grundregeln lehrt auch die Erfahrung, daß S von den zur Seigerung neigenden Elementen an erster Stelle steht, dann P und C, und daß die Kristallseigerung von Schwefel, Phosphor und Kohlenstoff in vielen Fällen sehr maßgebend für den Zusammenhang des Stahles ist. Infolge der bis zu gewissem Grade nicht zu vermeidenden Anhäufungen der Phosphor- und Schwefelgehalte an einzelnen Stellen müssen eben die absoluten Beträge dieser Eisenbegleiter so außerordentlich niedrig gehalten werden. Im anderen Falle ist für die Mikrozusammensetzung der Schweißrißzone bei den Stählen der Praxis in erster Linie die Mittelanalyse maßgebend.

Angesichts dieser Verhältnisse darf die Bedeutung der Inhomogenität des Stahles für die Schweißrissigkeit wohl nicht übersehen werden. Daß der Grad der Kristallseigerung aber, wie Eilender und Pribyl angeben [13], für die im Flugzeugbau aufgetretene Erscheinung eine größere Bedeutung als die durchschnittliche Zusammensetzung hatte, kann nach dem eindeutigen Erfolg der Analysenbeschränkung und bei der immer wieder gefundenen Bedeutung der Durchschnittsanalyse nicht angenommen werden. Die Schlußfolgerung: »Diese Ergebnisse lassen es auch als unrichtig und unzweckmäßig erkennen, in der Frage der Schweißrissigkeit der chemischen Zusammensetzung einen übertriebenen Wert beizumessen und zur Vermeidung dieser Eigenschaft bestimmte Analysenvorschriften zu erlassen« [13], kann angesichts der oben beschriebenen Tatsachen nicht aufrecht erhalten werden. Vielmehr besteht kein Zweifel darüber, daß der vom deutschen Flugzeugbau in Zusammenarbeit mit dem Reichsluftfahrtministerium in kürzester Zeit erzielte durchschlagende Erfolg auf dem Wege der »besonderen Schmelzverfahren« durch Vermeidung der Kristallseigerung nicht hätte erreicht werden können, auch wenn der 1938 gebrachte Vorschlag zu derselben Zeit schon vorgelegen hätte. Es muß vielmehr angenommen werden, daß zur Durchführung des Vorschlages in der Praxis der Stahlherstellung zum mindesten gewisse Schwierigkeiten bestehen, da bis heute noch kein Stahlhersteller von einer Möglichkeit Gebrauch gemacht hat, durch Verminderung der Kristallseigerung die an sich unerwünschte Analysenbeschränkung zu beseitigen oder zu lockern, was auch von seiten des Flugzeugbaues begrüßt würde.

Auch von anderen Gesichtspunkten aus findet die Auffassung, daß vermindertes Formänderungsvermögen bei 650° die Risse hervorrufe, keine Bestätigung: Bereits im Jahre 1936 berichten Bollenrath und Cornelius über Warmzerreißversuche [8], die im Eisenhüttenmännischen Institut der T. H. Aachen durchgeführt wurden, mit dem Ergebnis: »Die Feststellungen weiterhin, daß auch die schweißunempfindlichen Stähle Nr. 1 und 2 bei hohen Temperaturen Mindestwerte an Dehnung zeigen, spricht gegen eine grundsätzliche Bedeutung der verringerten Dehnbarkeit bei hohen Temperaturen für das Auftreten von Schweißrissigkeit.« Hierbei suchten die Berichterstatter die verringerte Dehnbarkeit zwischen 800 und 1000°. Aber gerade im Bereich von 500 bis 800° wurden dabei, ebenso an schweißrissigen wie an guten Stählen, von 20 bis 60% ansteigende Dehnungswerte gemessen (Bild 7), so daß von vermindertem Formänderungsvermögen der schweißrissigen Stähle bei 600 bis 700° nach diesen Ergebnissen keine Rede sein kann.

In neuerer Zeit konnte auch O. Werner [16] mit Versuchen derselben Art an stark schweißrissigem und an gutem Stahl bis 750° keinen Unterschied in Zugfestigkeit und Dehnung, also auch kein vermindertes Formänderungsvermögen des schweißrissigen Stahles finden.

Wenn nun mit der Beseitigung des Übels auch das wesentliche Ziel erreicht ist, so hat doch weiter auch die Erkenntnis der physikalischen Vorgänge Interesse, wie die Risse

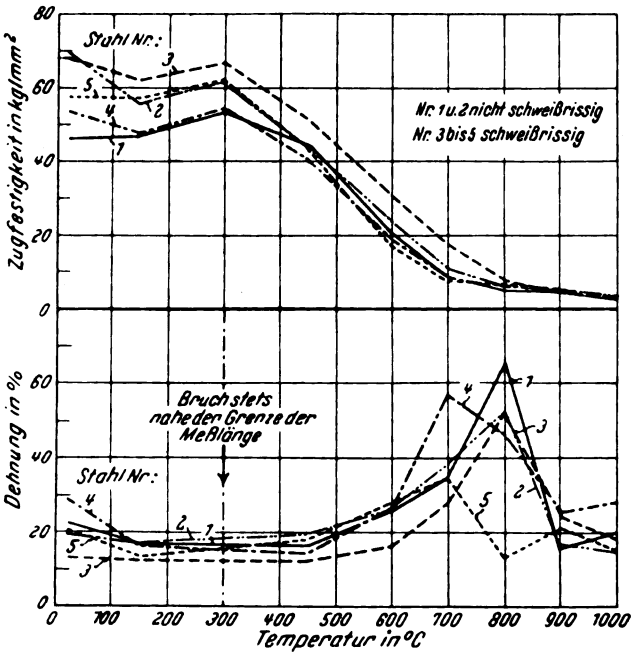


Bild 7. Zugfestigkeit und Dehnung von schweißrissigen und nicht schweißrissigen Stahlblechen in Abhängigkeit von der Temperatur nach ½ h Glühen bei 650° und Abkühlen in Luft. (Nach Bollenrath und Cornelius.)

zustande kommen. Hierfür werden im Schrifttum mehrere Erklärungen erwogen, so das bereits erwähnte verminderte Formänderungsvermögen bei 650° infolge Kristallseigerung. Verschiedentlich wird auch die Möglichkeit in Betracht gezogen, daß örtliche Spannungsunterschiede durch gleichzeitige Ferrit-Perlit- und Martensitbildung infolge Kristallseigerung Mikrorisse erzeugen könnten, die sich durch die Schweißspannungen zu den sichtbaren Rissen erweitern [12]. Ähnliche Überlegungen liegen der Vermutung zugrunde, daß dem verschieden großen Ar_3-Hysteresebereich der Stähle eine gewisse Bedeutung für die Schweißrissigkeit zukomme, was sich jedoch durch Versuche von O. Werner [16] nicht bestätigte. Bardenheuer und Bottenberg ziehen als mögliche Rißursache in Betracht, daß Wasserstoff beim Schweißen in den Stahl atomar hineindiffundieren und, an den mit Einschlüssen versehenen Korngrenzen in molekularem Zustande wieder ausgeschieden, dort hohe Drücke und Zugspannungen im Stahl erzeugen kann [12]. In Fortentwicklung dieser Gedankengänge vertritt O. Werner die Auffassung, daß die Sprengung des Gefüges durch Wasserdampf- bzw. Schwefelwasserstoffbildung unter Mitwirkung des Schwefel- und Sauerstoffgehaltes des Stahles primär zur Rißbildung führe [16].

Als wesentliche physikalische Ursache der Schweißrissigkeit können aber nur solche Gesichtspunkte in Betracht kommen, die der gefundenen betriebstechnischen Ursache (höhere S-, C- und P-Gehalte) gerecht werden und ihre Wirkung im einzelnen erklären können. Dies trifft nur für die letzte der erwähnten Hypothesen zu.

Dieser Bedingung würde auch die Erklärung genügen, daß höhere Schwefelgehalte, insbesondere bei grobem Korn und Kristallseigerung an den Korngrenzen angehäuft, in der bis kurz vor dem Schmelzpunkt des Stahles erhitzten Kerbzone neben der Schweißnaht ein Eutektikum Eisen-Eisensulfid bilden, das oberhalb 985° C flüssig ist und den Zusammenhang des Stahles genügend weit unterbricht, um den Schweißspannungen die Rißbildung zu ermöglichen. Dasselbe gilt oberhalb 1181° von dem Eutektikum FeS-MnS. Diese Richtung weisen die festgestellten grundlegenden Tatsachen, daß durch die Analyseneinschränkung allein die Schweißrissigkeit sofort beseitigt wurde, daß Erhöhung des S-Gehaltes allein einen metallurgisch einwandfrei hergestellten guten Stahl schweißrissig machen kann, ebenso wie hohe H_2S-Gehalte des Schweißgases und Glühung des

Digitized by Google

Stahles in einer schwefelabgebenden Atmosphäre; ferner die schweißrißvermindernde Wirkung erhöhten Gehaltes an Mangan, von dem bekannt ist, daß dadurch hauptsächlich infolge seiner großen Affinität zu Schwefel die schädlichen Wirkungen des Schwefels wirksam beseitigt werden können. Auch die günstige Wirkung einer besseren Homogenisierung des Stahles fügt sich folgerichtig in diese Vorstellung ein, da vom Standpunkte der Kristallseigerung gesehen auch der mittelbar wirkende Einfluß des Kohlenstoff- und Phosphorgehaltes durch Anhäufung des Schwefels an den Korngrenzen verständlich wird.

Der Einwand, daß doch die schweißrissigen Stähle beim Verarbeiten zu Blech oder Rohr keinen Rotbruch gezeigt haben [16, Diskussionsbeitrag Cornelius], kann vielleicht durch die Überlegung beseitigt werden, daß die Beanspruchungen beim Warmverarbeiten doch wesentlich verschieden sind von denen, die beim Schweißen unter Zugspannungen auftreten, und daß durch die beim Warmverarbeiten immer wieder auftretenden Drücke die Mikrorisse bei diesen geringen Schwefelmengen sofort wieder verschweißt werden können, was beim Schweißen unter Zugspannungen nicht möglich ist. In diesem Zusammenhang dürfte auch die Feststellung von Bedeutung sein [16, Diskussionsbeitrag Cornelius], daß ein Kupferüberzug des Schweißdrahtes zu Schweißrissen in derselben Erscheinungsart führen kann, wobei zweifellos Kupfer-Rotbruch vorliegt.

Für die Erklärung der inneren Rißentstehung kommen also die beiden letztgenannten Hypothesen in Betracht.

Sehr wertvoll für die Klärung der physikalischen Ursache wäre die exakte Bestimmung der Entstehungstemperatur der Risse. Bardenheuer und Bottenberg [12] haben mittels angehefteter dünner Thermoelemente 3 mm neben der Schweißnaht Entstehungstemperaturen zwischen 600° und 740° C gemessen, wobei vermutet wird, daß die Messungen etwas zu niedrig liegen. Cornelius schließt aus diesen Ergebnissen [13, Diskussionsbeitrag], daß die Risse bei bzw. über 800° entstehen, da sie erst erkennbar seien, wenn sie infolge weiterer Schrumpfung zu klaffen beginnen.

Versuche ähnlicher Art, die bei den Focke-Wulf-Werken durchgeführt wurden, können hier mitgeteilt werden. Um die subjektiven Einflüsse bei der Rißbeobachtung möglichst auszuschalten, wurden die Versuche mit 5 verschiedenen Beobachtern durchgeführt. Außerdem wurden gute und schweißrissige Stähle ohne Kenntnis der Beobachter in unregelmäßiger Reihenfolge eingespannt verschweißt, um eine gewisse Sicherheit betr. der Zuverlässigkeit der Rißbeobachtungen zu bekommen. Nach einer gewissen Übung in einem vom Tageslicht abgeschlossenen Raum kamen keine Fehlanzeigen mehr vor. Der Riß zeigt sich bei der verschärften Einspannschweißprobe mit genügend stark schweißrissigem Stahl dem dunkel adaptierten Auge sehr deutlich als rote Linie zwischen dem auf Weißglut erhitzten Werkstoff 3 bis 5 mm hinter dem Schmelzbad. An dieser Stelle wurde mit einem der Schweißung nachgeführten Thermoelement die Temperatur in dem Augenblick, den der Rißbeobachter angab, von einem zweiten Beobachter abgelesen. Dann wurde die Schweißung sofort abgebrochen, um die Angabe soweit wie möglich nachprüfen zu können.

So wurden von den verschiedenen Beobachtern Temperaturen zwischen 770 und 1060° festgestellt, im Mittel 925°. Die größte Häufigkeit lag bei rund 1000°, Bild 8. Auch hier besteht die Wahrscheinlichkeit, daß der Riß eher zu spät als zu früh bemerkt wurde, so daß die Entstehungstemperatur nach diesen Feststellungen bei mindestens 1000° C liegt.

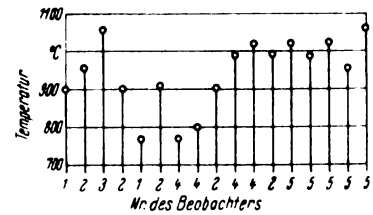


Bild 8. Gemessene Entstehungstemperaturen von Schweißrissen.

Zusammenfassung.

Ausgehend von den zeitlichen Umständen, wie die Schweißrissigkeit an Flugzeugbaustählen aufgetreten ist, werden die Untersuchungen und Maßnahmen kurz beschrieben, mit denen man im deutschen Flugzeugbau der Fehlererscheinung entgegengetreten ist. Es wird großzahlmäßig belegt, daß es durch Einengung der S-, C- und P-Gehalte und Elektroherstellung des Stahles, und zwar durch diese Maßnahmen allein gelungen ist, in kurzer Zeit den Fehler wieder zu beseitigen.

Es werden die verschiedenen im Schrifttum schwebenden Ursachenprobleme behandelt, und es ergibt sich, daß Ursachen schweißtechnischer Art nicht vorgelegen haben, daß maßgebende Umstände konstruktiver Art ebenfalls nicht für die im Flugzeugbau aufgetretene Schweißrissigkeit verantwortlich gemacht werden können, daß die wesentlichen Ursachen vielmehr werkstofftechnischer Art sind.

Die hierfür in Betracht kommenden Gesichtspunkte werden an Hand der im Schrifttum bekannt gewordenen Untersuchungen und auf Grund von weiteren Erkenntnissen des Flugzeugbaues behandelt. Dabei ergibt sich:

Schweißhärte, d. h. Martensitbildung und Härte der überhitzten Zone steht in keinem Zusammenhang mit der Schweißrissigkeit. Si-, Cr-, Mo- und V-Gehalte haben keinen merklichen Anteil an der Ursache. Erhöhter Mangan-Gehalt verringert sogar die Schweißrissigkeit.

Die ganzen großen Erfahrungen des Flugzeugbaues wie alle Untersuchungen der letzten acht Jahre haben, wie im einzelnen gezeigt wird, immer wieder das eine wesentliche Ergebnis gebracht, daß die Schweißrissigkeit an unlegierten wie an CrMo- und CrMoV-legierten Flugzeugbaustählen in betriebstechnischer wie in physikalischer Hinsicht hauptsächlich durch zu hohen Schwefelgehalt des Stahles verursacht worden ist, der mit steigendem Kohlenstoffgehalt dementsprechend enger begrenzt werden muß. In demselben Sinne machen sich hohe P-Gehalte schädigend bemerkbar. Dabei kann sich ungleichmäßige Verteilung dieser Bestandteile, Block- und Kristallseigerung, durch Anhäufung des Schwefels an den Korngrenzen ungünstig auswirken. Es muß daher für hohen Reinheitsgrad und weitgehende Homogenität des Stahles gesorgt werden. Bei der heute erreichten Gleichmäßigkeit der Flugzeugbaustähle liefert aber die Mittelanalyse betr. der C-, P-, S- und Mn-Gehalte ein gutes Kriterium für das Schweißverhalten eines Stahles.

Mit dieser Auffassung lassen sich auch die sachlichen Ergebnisse neuerer, vom Standpunkt der Stahlhersteller gemachter Untersuchungen grundsätzlich vereinbaren.

Auf Grund dieser Tatsachen werden die wichtigsten physikalischen Gesichtspunkte der Rißursache kurz behandelt. Es werden Versuche mitgeteilt, nach denen die Schweißrisse bei oder über 1000° entstehen.

Schrifttum.

[1] Oberhoffer, Das technische Eisen.
[2] Houdremont, Sonderstahlkunde.
[3] A. Rechtlich, Grundlage für konstruktive Ausbildung und Ausführung von Stahlrohrschweißungen im Flugzeugbau. DVL-Jahrbuch 1931.
[4] J. Müller, Schweißbarkeit von Stählen höherer Festigkeit nach den Erfahrungen des Flugzeugbaues mit besonderer Berücksichtigung der Schweißrissigkeit. Luftf.-Forschg. Bd. 11. (1934) Nr. 4 S. 93/103.
[5] J. B. Johnson, Welding in the Aeronautical Industry. The Welding Journal Bd. 14 (1935) Nr. 8 S. 14.
[6] L. Zeyen, Das Schweißen von Stählen großer Festigkeit. Techn. Mittlg. Krupp (1935) Heft 4 S. 176/188.
[7] L. Zeyen, Das Schweißen von Stählen höherer Festigkeit. Stahl und Eisen Bd. 55 (1935) S. 901/906.

Digitized by Google

[8] F. Bollenrath, H. Cornelius, Beitrag zur Frage der Schweißempfindlichkeit dünnwandiger Teile aus Stählen höherer Festigkeit. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) Nr. 4.

[9] F. Bollenrath, H. Cornelius, Schweißempfindlichkeit von Stählen höherer Festigkeit. Stahl und Eisen Bd. 56 (1936), S. 565/571.

[10] L. Zeyen, Zur Frage der Schweißempfindlichkeit. Techn. Mittlg. Krupp (1936) Heft 4, S. 115/122.

[11] F. Bollenrath, H. Cornelius, Zur Frage der Schweißempfindlichkeit von Flugzeugbaustählen. Archiv f. d. Eisenhüttenwesen (1937) Nr. 12, S. 563/573, Diskussion darüber: O. Werner, S. 563/576.

[12] P. Bardenheuer, W. Bottenberg, Die Schweißrissigkeit von CrMo-Stählen. Archiv f. d. Eisenhüttenwesen (1938) Nr. 8, S. 375/383.

[13] W. Eilender, R. Pribyl, Zur Frage der Schweißempfindlichkeit von CrMo-Stählen, mit Diskussionsbemerkungen. Archiv f. d. Eisenhüttenwesen (1938) Nr. 9, S. 443/448.

[14] P. Bardenheuer, W. Bottenberg, Über Schweißdrähte für die Azetylenschweißung von Stählen unter besonderer Berücksichtigung der Schweißempfindlichkeit. Mittlg. Kaiser-Wilh.-Inst. f. Eisenforschung Bd. 20 Lieferung 7, Abhandlung 348.

[15] H. Cornelius, Versuche über die Metall-Lichtbogenschweißung dünner Bleche aus CrMo-Stahl. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 133.

[16] O. Werner, Über die Ursache der Schweißrissigkeit bei Flugzeugbaustählen. Archiv f. d. Eisenhüttenwesen Bd. 12 (1939) Nr. 9.

[17] H. Cornelius, Schweißen von Chromstählen. Z. VDI. Bd. 83 (1939) Nr. 23, S. 710/11.

Digitized by Google

Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze.

Von H. J. Rautenberg.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Flugmechanik.

Die verschiedenen Möglichkeiten, die einzelnen flugmechanischen Achsenkreuze miteinander zu koppeln, werden zusammengestellt und im Hinblick auf ihre Brauchbarkeit bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben einer kritischen Betrachtung unterzogen. Auf Grund der in der Arbeit vorgenommenen eingehenden Untersuchungen werden diejenigen Achsenkreuze und Kopplungswinkel, die sich für die praktische Anwendung als die brauchbarsten erweisen, am Schluß der Arbeit in einem »Normsystem« zusammengestellt.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Allgemeine Voraussetzungen.
III. Die Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.
1. Die Zusammenstellung der drei Kopplungsmöglichkeiten zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.
2. Die *F*-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.
3. Die *E*-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.
4. Das experimentelle Achsenkreuz.
5. Die Brauchbarkeit der beiden Kopplungen zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz bei der Lösung flugmechanischer Aufgaben.
IV. Die Erweiterung der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz auf den Fall des über einer Bodenplatte angeblasenen Flugzeugs.
V. Die Kopplung zwischen dem flugwindfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz und Diskussion der Kopplung eines flugbahnfesten Achsenkreuzes mit dem erdparallelen Achsenkreuz.
VI. Die Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz.
VII. Zusammenstellung der für die flugmechanischen Anwendungen am meisten geeigneten Achsenkreuze und Kopplungswinkel zu einem »Normsystem«.
VIII. Zusammenfassung.
IX. Schrifttumsverzeichnis.

I. Einleitung.

Bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben tritt stets die Notwendigkeit auf, verschiedene räumliche Achsenkreuze einzuführen. Für die Einführung dieser Achsenkreuze und vor allem für die gegenseitige Ausrichtung dieser Achsenkreuze gibt es nun verschiedene Möglichkeiten. Die Definitionen der in der nationalen und internationalen Literatur auftretenden Bezugsachsen, ihres positiven Richtungssinnes und der gegenseitigen Bezugswinkel weichen zum Teil erheblich voneinander ab. Dadurch ist es in vielen Fällen nicht möglich, Meßergebnisse unmittelbar miteinander zu vergleichen, sondern es sind Umrechnungen vorzunehmen, die mehr oder minder umständlich sind.

Aus diesem Grunde wurden seit langem Versuche gemacht, über die wichtigsten flugmechanischen Achsenkreuze und Bezugswinkel eine Übereinstimmung zwischen allen Ländern, die Luftfahrtforschung treiben, zu erreichen. Die Verhandlungen über diese Vereinheitlichung gestaltete sich bisher stets insofern schwierig, als dazu eine eingehende Zusammenstellung aller Bezugsachsenkreuze der Flugmechanik und ihrer gegenseitigen Bezugswinkel notwendig ist, die vor allem die Vorteile und Nachteile ihrer Anwendung bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben erkennen läßt. Eine derartige Zusammenstellung der möglichen und brauchbaren Bezugsachsen und Bezugswinkel war jedoch bisher nicht vorhanden.

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Möglichkeiten, die einzelnen flugmechanischen Achsenkreuze gegenseitig zu koppeln, zusammengestellt und ihre Brauchbarkeit für die Behandlung flugmechanischer Fragen kritisch untersucht. Auf Grund dieser Untersuchungen wird zum Schluß der Aufbau eines »Normsystems« von Achsenkreuzen und Kopplungswinkeln vorgenommen. Durch Erfüllung einiger weniger Grundforderungen ist ein durchgehend logischer Aufbau dieses Normsystems möglich, das durch keine an einzelnen Stellen auftretende Ausnahmedefinition durchbrochen zu werden braucht. Dabei wird gezeigt werden, daß ein derartiger logischer Aufbau mit den Erfordernissen der praktischen Anwendungen trotzdem in keinerlei Widerspruch steht.

Die allgemeinen Grundgesetze, die bei der Ausrichtung zweier räumlicher Achsenkreuze angewendet werden, sind in der im Schrifttumsverzeichnis unter [9][1]) angeführten Arbeit eingehend in einer Form dargestellt worden, die es ermöglicht, diese Gesetze in übersichtlicher Weise auf die in der Flugmechanik benötigten Achsenkreuze und deren gegenseitige Kopplung anzuwenden. In derselben Arbeit ist auch eine genaue Erklärung der flugmechanischen Achsenkreuze gegeben.

Die Ergebnisse der angeführten Arbeit [9] werden in der vorliegenden Arbeit vorausgesetzt.

Die Ergebnisse der in der vorliegenden Arbeit angestellten Untersuchungen sind bei der Aufstellung des vom Fachnormenausschuß für Luftfahrt (Falu) herausgegebenen Normblattes DIN L 100, Bezeichnungen der Flugmechanik, hinsichtlich der dort aufgeführten Achsenkreuze und Winkel richtunggebend gewesen.

II. Allgemeine Voraussetzungen.

Einer der wesentlichsten Punkte bei dem Aufbau eines Systems von Achsenkreuzen, mit deren Hilfe flugmechanische Rechnungen in möglichst einfacher Weise durchgeführt werden können, ist eine geeignete Definition der Bezugswinkel, auch Kopplungswinkel genannt, durch die die einzelnen Achsenkreuze gegeneinander ausgerichtet oder »gekoppelt« werden. Die Festsetzung des positiven Richtungssinnes der einzelnen Bezugsachsen in der einen oder anderen Weise ist für die Durchführung von praktischen flugmechanischen Rechnungen lange nicht von der Bedeutung, wie es eine günstige Festsetzung der Kopplungswinkel ist.

Für alle Kopplungswinkel der flugmechanischen Achsenkreuze sollen folgende Grundforderungen erfüllt sein:

1. Die einzelnen Kopplungswinkel müssen voneinander unabhängig sein.

Diese Forderung ist erfüllt, wenn zwei Achsenkreuze durch drei Eulersche Winkel miteinander gekoppelt werden. Eine genaue Definition der Eulerschen Winkel ist in der Arbeit [9] gegeben. Dort findet sich auch eine eingehende Beschreibung der modellmäßigen Darstellung der Eulerschen Winkel durch ein Kardansystem.

[1]) Die [ ] Klammern beziehen sich auf das Schrifttum in Abschnitt IX.

Digitized by Google

2. Ein Kopplungswinkel ist positiv, wenn die Drehung um die Drehachse des betreffenden Winkels in Richtung der positiven Drehachse gesehen im Uhrzeigersinn erfolgt (Rechtsschraubung). Als »Drehachse« eines Winkels ist diejenige Achse zu verstehen, um welche die Drehung erfolgt, die durch den betreffenden Winkel gemessen wird.

Es sollen in der vorliegenden Arbeit des klaren Verständnisses wegen stets außer den Definitionen auch die Drehachsen der Winkel angegeben werden, ferner die Ebenen, in denen die Winkel gemessen werden.

Allgemein gilt für die Drehachsen der Eulerschen Winkel, durch die zwei Achsenkreuze K_1 und K_2 gegeneinander ausgerichtet sind, folgendes Gesetz:

Die Drehachse eines der drei Kopplungswinkel ist eine Achse des Achsenkreuzes K_1, die Drehachse eines zweiten Kopplungswinkels ist eine Achse des Achsenkreuzes K_2, und die Drehachse des dritten Kopplungswinkels ist die Knotenlinie zwischen K_1 und K_2 (vgl. Bild 1).

Die beiden Achsenkreuze denkt man sich zunächst in Übereinstimmung, so daß entsprechende Achsen zusammenfallen (x_1 mit x_2, y_1 mit y_2, z_1 mit z_2). Zur Betrachtung einer bestimmten gegenseitigen Lage der beiden Achsenkreuze dreht man eins der beiden Achsenkreuze (das auszurichtende Achsenkreuz) gegenüber dem zweiten, das man sich festgehalten denkt und das Richtachsenkreuz genannt werden soll, aus der Nullstellung heraus. Erfolgt diese Drehung im positiven Sinne um die vorher festgelegten Drehachsen, so entstehen definitionsgemäß positive Kopplungswinkel. Diejenige Achse des Richtachsenkreuzes, die für einen der Eulerschen Winkel Drehachse ist, wird im folgenden »Hauptdrehachse« des Richtachsenkreuzes genannt, während diejenige Achse des gegenüber dem Richtachsenkreuz auszurichtenden Achsenkreuzes, die für einen der Eulerschen Winkel Drehachse ist, »ausgezeichnete Drehachse« des auszurichtenden Achsenkreuzes genannt werden soll.

Aus den Überlegungen der Arbeit [9] geht hervor, daß die Kopplung eines Achsenkreuzes mit einem zweiten Achsenkreuz durch drei Eulersche Winkel zunächst nicht in einer einzigen bestimmten Weise vorgenommen werden kann, sondern daß es mehrere Kopplungsmöglichkeiten gibt. Denn wenn von den beiden gegeneinander auszurichtenden Achsenkreuzen eins zum Richtachsenkreuz bestimmt und die Hauptdrehachse dieses Richtachsenkreuzes festgelegt worden ist, erhält man je nach Wahl einer der drei Achsen des gegenüber dem Richtachsenkreuz auszurichtenden Achsenkreuzes zur ausgezeichneten Drehachse drei verschiedene Möglichkeiten, die Kopplungswinkel zu definieren. Dabei handelt es sich in allen drei Fällen um Eulersche Winkel.

Es wird nun im folgenden die Aufgabe sein, die für die Zwecke der flugmechanischen Rechnung am meisten geeignete Kopplungsmöglichkeit zwischen den einzelnen Achsenkreuzen zu bestimmen. Dabei werden zu untersuchen sein:

1. die Kopplung zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem flugwindfesten Achsenkreuz,
2. die Kopplung zwischen dem flugwindfesten Achsenkreuz und dem erdparallelen Achsenkreuz,
3. die Kopplung zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem erdparallelen Achsenkreuz.

Bei der gegenseitigen Kopplung der einzelnen Achsenkreuze sollen allgemein folgende Regeln gelten:

1. das erdparallele Achsenkreuz ist in allen Fällen Richtachsenkreuz. Es drehen sich also sowohl das flugzeugfeste als auch das flugwindfeste Achsenkreuz gegenüber dem festgehalten gedachten erdparallelen Achsenkreuz,
2. bei der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz soll das flugwindfeste Achsenkreuz das Richtachsenkreuz sein. Es dreht sich also das flugzeugfeste Achsenkreuz gegenüber dem festgehalten gedachten flugwindfesten Achsenkreuz.

III. Die Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.

1. Die drei Kopplungsmöglichkeiten zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.

Bei der Ausrichtung eines flugzeugfesten Achsenkreuzes x, y, z gegenüber einem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_a, z_a[2]) liegt der in der Arbeit [9] eingehend beschriebene Sonderfall vor, bei dem einer der drei Kopplungswinkel stets Null ist. Da von einem flugwindfesten Achsenkreuz zunächst nur eine einzige Achse — die Flugwindachse x_a[3]) — physikalisch gegeben ist, erfolgt die Ausrichtung zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz nur durch zwei veränderliche Winkel, die aerodynamische Winkel genannt werden, während der dritte zu einer vollständigen Ausrichtung erforderliche Winkel Null ist. Es wurde gezeigt (vgl. [9]), daß derjenige von den Eulerschen Winkeln Null ist, der als Drehachse die einzige von Anfang an gegebene Achse des zunächst unvollständigen Richtachsenkreuzes besitzt. Die Einführung der Achsen y_a und z_a, durch die erst ein vollständiges flugwindfestes Achsenkreuz definiert wird, ist zur Darstellung der Luftkräfte und Luftkraftmomente notwendig. Es sollen jetzt die allgemeinen Gesetze auf den vorliegenden Fall angewendet werden.

Als Richtachsenkreuz ist entsprechend den angegebenen Regeln das flugwindfeste Achsenkreuz zu wählen, von dem zunächst jedoch nur die Flugwindachse x_a gegeben ist. Diese einzige vollständig gegebene Achse muß als Hauptdrehachse gewählt werden. Von y_a und z_a ist lediglich vorausgesetzt, daß sie rechtwinklig zueinander und zu x_a sind, und daß sie mit x_a ein rechtshändiges Achsenkreuz bilden. Um die Lage der beiden Achsen y_a und z_a festzulegen, muß eine von ihnen durch eine bestimmte Vorschrift an das flugzeugfeste Achsenkreuz x, y, z gefesselt werden. Damit ist aber eine Drehung des Achsenkreuzes x, y, z gegenüber dem Achsenkreuz x_a, y_a, z_a um die Hauptdrehachse x_a nicht mehr möglich. Der Hauptdrehachsenwinkel ist also Null und die vollständige Ausrichtung zwischen x_a, y_a, z_a und x, y, z kann durch zwei Winkel vorgenommen werden. Man kann diese Verhältnisse auch in der Weise erklären, daß die gegebene Flugwindachse x_a gegen das flugzeugfeste Achsenkreuz ausgerichtet wird, wozu zwei Winkel genügen.

Wenn eben erwähnt wurde, daß durch die Fesselung einer der Achsen y_a und z_a an das flugzeugfeste Achsenkreuz keine Drehung des flugzeugfesten Achsenkreuzes bezüglich des Achsenkreuzes x_a, y_a, z_a um die x_a-Achse möglich sei, so darf hiermit nicht die selbstverständliche Tatsache verwechselt werden, daß das gesamte aus x, y, z und x_a, y_a, z_a bestehende Kardansystem um die x_a-Achse bezüglich eines raumfesten Achsenkreuzes beliebig gedreht werden kann. Physikalisch besagt diese Tatsache, daß der durch die beiden aerodynamischen Winkel beschriebene Anblasezustand bei einer Drehung des Flugzeuges (und damit des an das Flugzeug gefesselten flugwindfesten Achsenkreuzes) um die Flugwindachse nicht geändert wird.

An einem Kardanmodell (Bild 1) können die beiden Winkel, die das flugzeugfeste Achsenkreuz gegen das flugwindfeste Achsenkreuz ausrichten, durch die Drehung des inneren Ringes R_2 um die Achse A_2 (Knotenlinie) und durch die Drehung des Körpers K (in diesem Falle des Flugzeugs) um seine ausgezeichnete Drehachse AK beschrieben werden. Dabei ändert sich, wie in der Arbeit [9] eingehend beschrieben wurde, die Nullstellung des Ringes R_1 bei gleicher

[2]) Eine Definition der Achsen x_a, y_a, z_a ist in [10] gegeben.

[3]) Unter Flugwindachse versteht man eine Achse in Richtung der auf das Flugzeug einwirkenden Anströmung, die hierbei als Parallelströmung angenommen wird.

Im allgemeinen kann man voraussetzen, daß die Flugwindachse mit der Tangente der räumlichen Flugbahn praktisch zusammenfällt. Bei Vorhandensein und Berücksichtigung von Windversetzung und Aufwind stimmt die Richtung der Flugwindachse jedoch nicht mehr mit der Richtung der räumlichen Flugbahntangente überein.

Digitized by Google

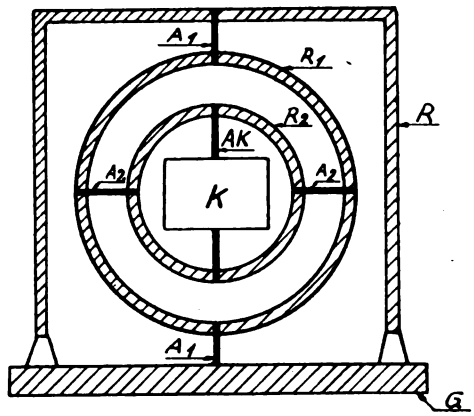


Bild 1. Kardanmodell zur Veranschaulichung der Eulerschen Winkel.

Lage des Flugzeugs im Raum je nach Wahl einer der drei flugzeugfesten Achsen als ausgezeichneter Drehachse. Die entsprechenden Kardansysteme werden später bei der Betrachtung der verschiedenen Kopplungsmöglichkeiten im Bilde gezeigt.

Die einzige Ebene des flugwindfesten Achsenkreuzes, die von Anfang an durch die Flugwindachse gegeben ist, ist die zur Flugwindachse senkrechte Quertriebsebene $y_a z_a$. Die Lage des rechtwinkligen ebenen Achsenkreuzes y_a, z_a in dieser Ebene ist zunächst nicht bestimmt. Der Schnitt zwischen der Ebene $y_a z_a$ und den Ebenen $x y$, $y z$ und $z x$ des flugzeugfesten Achsenkreuzes liefert je eine Spurgerade, die in jedem der drei Fälle die Lage einer der beiden zu x_a rechtwinkligen Achsen festlegt. Diese drei Schnittmöglichkeiten entsprechen den Möglichkeiten, je eine der drei flugzeugfesten Achsen zur ausgezeichneten Drehachse zu wählen (Bild 2, 3 und 5). Die ausgezeichnete Drehachse ist stets rechtwinklig zu der jeweiligen Spurgeraden und trägt diejenige Bezeichnung, die beim Schnitt der Ebene $y_a z_a$ mit einer der drei flugzeugfesten Ebenen in der Bezeichnung dieser flugzeugfesten Ebene nicht enthalten ist. Die Spurgerade selbst ist identisch mit der Knotenlinie und wird im Kardanmodell durch die Achse A_2 (Bild 2) dargestellt. Die nachstehende Tafel gibt eine Übersicht über die drei Kopplungsmöglichkeiten.

Tafel 1.

Benennung	Schnitt der Ebene $y_a z_a$ mit der Ebene	Durch die Spurgerade definierte Achse	Ausgezeichnete Körperachse	Lage der Kardanringe bei Nullstellung der Achsenkreuze
F-Kopplung	$x y$	y_a	z	Gekreuzt
E-Kopplung	$z x$	z_a	y	Gekreuzt
unbenannt	$y z$	y_a	x	Parallel

Zunächst soll die in der Tafel 1 an dritter Stelle aufgeführte Kopplungsmöglichkeit näher untersucht und gezeigt werden, daß sie für flugmechanische Anwendungen nicht geeignet ist.

Betrachtet man die Nullstellung, in der die x-Achse des Flugzeugs mit der Flugwindachse x_a zusammenfällt, so ergibt sich, daß die Ebene $y_a z_a$ nur die beiden flugzeugfesten Ebenen $x y$ und $z x$ schneidet, während sie mit der Ebene $y z$ zusammenfällt.

Es gibt in diesem eben erwähnten Falle keine Spurgerade zwischen den Ebenen $y_a z_a$ und $y z$, und die Lage einer der beiden Achsen y_a und z_a kann nicht eindeutig festgelegt werden, sie bleibt weiter unbestimmt. Fällt die flugzeugfeste x-Achse mit der Flugwindachse x_a nicht zusammen, so schneiden sich die beiden Ebenen $y_a z_a$ und $y z$. Die Spurgerade legt dabei die Querkraftachse y_a fest. Die ausgezeichnete Körperachse, die stets rechtwinklig zur jeweiligen Spurgeraden liegt, ist hierbei die x-Achse. Es ist nun durchaus möglich daß bei Betrachtung der Bewegung eines Flugzeuges gegenüber der umgebenden Luft bei normalen Anblaseverhältnissen die beiden Achsenkreuze in Nullstellung zueinander stehen, in der die flugzeugfeste x-Achse mit der Flugwindachse x_a zusammenfällt. Am zugehörigen Kardansystem, das Bild 2 zeigt, wirken sich diese Verhältnisse folgendermaßen aus: Die zu den beiden Kopplungswinkeln gehörigen Drehachsen sind $A_2 = y_a$ und die ausgezeichnete Körperachse $AK = x$. Durch die Achse A_1 des Kardanmodells wird die Flugwindachse x_a dargestellt. In der Nullstellung ist der innere Ring R_2 parallel zum äußeren Ring R_1. Stellt man jetzt durch eine Drehung um die ausgezeichnete Körperachse x einen Eigendrehungswinkel ein, während der Winkel, der eine Drehung um A_2 mißt, Null bleiben soll, so beschreibt dieser Eigendrehungswinkel (Rollwinkel) überhaupt nicht die Lage der Kardanachse A_1 (Flugwindachse x_a) bezüglich des flugzeugfesten Achsenkreuzes, sondern er beschreibt eine Drehung um die Kardanachse A_1 (Flugwindachse x_a), mit der ja die flugzeugfeste x-Achse zusammenfällt. Physikalisch gesehen kann eine beliebige Drehung des flugzeugfesten Achsenkreuzes um die Achse x_a stattfinden, ohne daß dadurch der Anblasezustand gegenüber dem Flugzeug geändert wird. Der Eigendrehungswinkel kann also bei Übereinstimmung der Flugwindachse x_a mit der flugzeugfesten x-Achse jeden beliebigen Wert haben, ohne daß der Anblasezustand geändert wird; er ist daher zur Beschreibung eines Anblasezustandes, das heißt mit anderen Worten zur Kopplung des flugzeugfesten Achsenkreuzes mit dem flugwindfesten Achsenkreuz ungeeignet.

Es soll besonders darauf hingewiesen werden, daß z. B. bei Wahl der Hauptträgheitsachsen als flugzeugfeste Achsen der hier angeführte Fall, in dem die x-Achse mit der x_a-Achse zusammenfällt, bei durchaus normalen Fluglagen und Anblaseverhältnissen jederzeit praktisch eintreten kann.

Aus diesen Gründen kommt die Kopplungsmöglichkeit zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz, bei der die x-Achse des flugzeugfesten Achsenkreuzes die ausgezeichnete Drehachse ist, von vornherein für die weiteren Untersuchungen nicht in Frage, und es bleiben nur die beiden Lösungsmöglichkeiten, die in der Tafel 1 als F-Kopplung und als E-Kopplung bezeichnet sind, für eine weitere Untersuchung übrig.

2. Die F-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.

Betrachtet man den Schnitt der zur Flugwindachse senkrechten Ebene $y_a z_a$ mit der Grundrißebene $x y$ des Flugzeuges, so wird durch die Spurgerade zwischen den beiden Ebenen die Querkraftachse y_a eindeutig festgelegt.

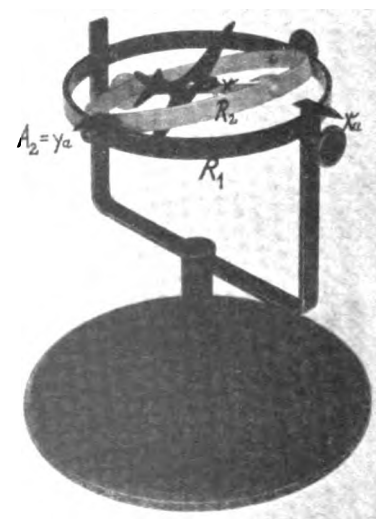


Bild 2. Kardanmodell der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_a, z_a für den Fall, daß die x-Achse die ausgezeichnete Drehachse des flugzeugfesten Achsenkreuzes ist.

Digitized by Google

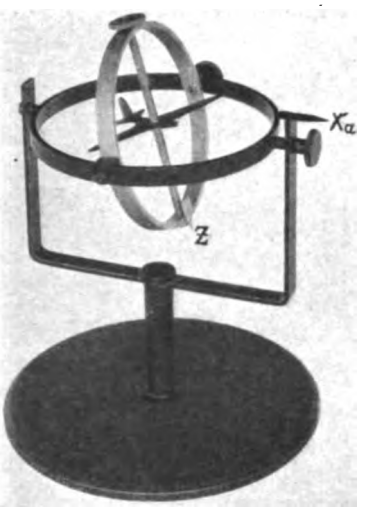


Bild 3. Kardanmodell der F-Kopplung. Anstellwinkel α_F und Schiebewinkel β_F sind im Modell positiv eingestellt.

Damit ist die eine der beiden zur Flugwindachse rechtwinkligen Achsen in ganz bestimmter Weise an das flugzeugfeste Achsenkreuz gefesselt; denn y_a liegt stets in der $x\,y$-Ebene des flugzeugfesten Achsenkreuzes. Durch die nunmehr gegebene Lage der beiden Achsen x_a und y_a ist auch die dritte Achse z_a, die Auftriebsachse, bestimmt. Sie liegt stets in der Ebene $z\,x_a$. Der Richtungssinn der positiven Flugwindachsen soll entsprechend den in der Arbeit [9] angestellten Überlegungen folgendermaßen festgesetzt werden: Die x_a-Achse ist entgegen der Anblaserichtung des Flugwindes positiv gerichtet. Die positive y_a-Achse zeigt, entgegen dem Flugwind gesehen, beim normalen Fluge nach rechts, die positive z_a-Achse unter denselben Bedingungen nach unten.

Bei der vorliegenden Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und flugwindfesten Achsenkreuz, die im folgenden F-Kopplung[4]) genannt werden soll, und die durch die Festlegung der Querkraftachse als Spurgerade zwischen den Ebenen $x\,y$ und $y_a\,z_a$ gekennzeichnet ist, stellt die z-Achse die ausgezeichnete Drehachse des flugzeugfesten Achsenkreuzes dar.

Die beiden Kopplungswinkel der F-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz sind in der folgenden Tafel 2 erklärt.

Tafel 2.

Benennung des Winkels	Bezeichnung des Winkels	Definition des Winkels	Meßebene des Winkels	Drehachse des Winkels
Anstellwinkel	α_F	$x\,y$-Ebene gegen x_a oder z gegen z_a	$z_a\,x_a$	Knotenlinie, das heißt y_a-Achse
Schiebewinkel	β_F	x gegen $z_a\,x_a$-Ebene oder y gegen y_a	$x\,y$	Ausgezeichnete Körperachse, das heißt z-Achse

Die Spurgerade zwischen den Ebenen $y_a\,z_a$ und $x\,y$ ist bei $\alpha_F = 90^0$ nicht mehr definiert, da die beiden Ebenen dann zusammenfallen. In diesem Falle wird die Lage von y_a und z_a unbestimmt.

Bild 3 zeigt das Kardanmodell der F-Kopplung.

Die beiden aerodynamischen Winkel α_F und β_F lassen sich auch sehr anschaulich mit Hilfe der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z des Flugzeugs in Richtung der flugzeugfesten Achsen und der resultierenden Fluggeschwindigkeit v_{x_a} erklären. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\sin \varkappa_F = \frac{v_z}{v_{x_a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

$$\cos \alpha_F = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_{x_a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_F = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

$$\sin \beta_F = \frac{v_y}{v_{x_a} \cos \alpha_F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV)$$

$$\cos \beta_F = \frac{v_x}{v_{x_a} \cos \varkappa_F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

$$\operatorname{tg} \beta_F = \frac{v_y}{v_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VI)$$

Die Zusammenhänge zwischen den Richtungskosinus und den Kopplungswinkeln α_F und β_F, die das flugzeugfeste Achsenkreuz gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz ausrichten, sollen jetzt mit Hilfe von Bild 4 hergeleitet werden.

Die Anwendung des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie ergibt folgende Beziehungen:

Aus Dreieck $x\,x_a\,P$: 1. $\cos(x\,x_a) = \cos\alpha_F \cos\beta_F$,
2. $\cos(x\,y_a) = \sin\beta_F$,
aus Dreieck $x\,z_a\,P$: 3. $\cos(x\,z_a) = -\sin\alpha_F \cos\beta_F$,
aus Dreieck $y\,x_a\,P$: 4. $\cos(y\,x_a) = -\cos\alpha_F \sin\beta_F$,
5. $\cos(y\,y_a) = \cos\beta_F$,
aus Dreieck $y\,z_a\,P$: 6. $\cos(y\,z_a) = \sin\alpha_F \sin\beta_F$,
7. $\cos(z\,x_a) = \sin\varkappa_F$,
aus Dreieck $z\,y_a\,P$: 8. $\cos(z\,y_a) = 0$,
9. $\cos(z\,z_a) = \cos\varkappa_F$.

Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem flugwindfesten Achsenkreuz hat daher bei Zugrundelegung der F-Kopplung die in Tafel 3 angegebene Form:

Flugzeugfestes Achsenkreuz \ Flugwindfestes Achsenkreuz		x_a	y_{a_F}	z_{a_F}
	x	$+\cos\alpha_F \cdot \cos\beta_F$	$+\sin\beta_F$	$-\sin\alpha_F \cdot \cos\beta_F$
	y	$-\cos\alpha_F \cdot \sin\beta_F$	$+\cos\beta_F$	$+\sin\alpha_F \cdot \sin\beta_F$
	z	$+\sin\alpha_F$	0	$+\cos\alpha_F$

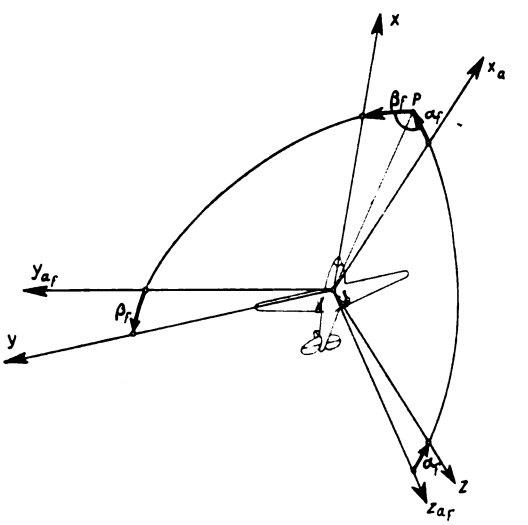


Bild 4. Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes x, y, z gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_{a_F}, z_{a_F} durch die aerodynamischen Winkel der F-Kopplung α_F und β_F.

[4]) Die Bezeichnung F wurde hier gewählt, weil diese Kopplung früher vom Falu (Fachnormenausschuß für Luftfahrt) im Normblatt über Bezeichnungen in der Flugmechanik eingeführt war und weil sie bisher hauptsächlich in Frankreich üblich war. In der 2. Ausgabe des vom Falu herausgegebenen Normblattes DIN L 100 ist die weiter unten beschriebene E-Kopplung zugrunde gelegt.

Digitized by Google

Es soll an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Achsen y_a und z_a für jede der beiden Kopplungen F und E anders definiert sind und infolgedessen nicht übereinstimmen, wenn bei Betrachtung eines bestimmten Anblasezustandes beispielsweise zunächst die F-Kopplung und dann die E-Kopplung zugrunde gelegt wird. Die Flugwindachse x_a ist unabhängig von der Wahl der Kopplung. Es müssen daher bei Betrachtungen, bei denen Gegenüberstellungen beider Kopplungen vorgenommen werden, auch die Achsen y_a und z_a mit den Indizes E und F versehen werden, ebenso wie die aerodynamischen Winkel α und β. Von dieser Bezeichnungsweise ist erstmalig in Bild 4 und in der Tafel 3 Gebrauch gemacht worden.

3. Die E-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.

Der Schnitt der Quertriebsebene $y_a z_a$ mit der Ebene $z x$ des flugzeugfesten Achsenkreuzes legt eine zur Flugwindachse rechtwinklige Achse fest, die stets in der Symmetrieebene $z x$ des Flugzeuges liegt. In Richtung dieser Achse wird der Auftrieb gemessen, sie wird daher Auftriebsachse genannt. Durch die Lage der Flugwindachse und der Auftriebsachse ist auch die Lage der zu beiden rechtwinkligen Querkraftachse zwangsläufig bestimmt. Bezüglich des positiven Richtungssinnes der flugwindfesten Achsen gilt das unter 2 Gesagte.

Die vorliegende Kopplung zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz soll E-Kopplung[5]) genannt werden. Ausgezeichnete Drehachse des flugzeugfesten Achsenkreuzes ist bei dieser Kopplung die y-Achse. Die beiden Kopplungswinkel der E-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und flugwindfesten Achsenkreuz sind in Tafel 4 erklärt.

Tafel 4.

Benennung des Winkels	Bezeichnung des Winkels	Definition des Winkels	Meßebene des Winkels	Drehachse des Winkels
Anstellwinkel	a_E	x gegen $x_a y_a$-Ebene oder z gegen z_a	$z x$	Ausgezeichnete Körperachse, das heißt y-Achse
Schiebewinkel	β_E	$z x$-Ebene gegen x_a oder y gegen y_a	$x_a y_a$	Knotenlinie, das heißt z_a-Achse

[5]) Die Bezeichnung E wurde gewählt, um anzudeuten, daß diese Kopplung von jeher bei den im Windkanal unternommenen experimentellen Untersuchungen üblich ist, und daß sie mit der im englischen Schrifttum gebräuchlichen Kopplung übereinstimmt.

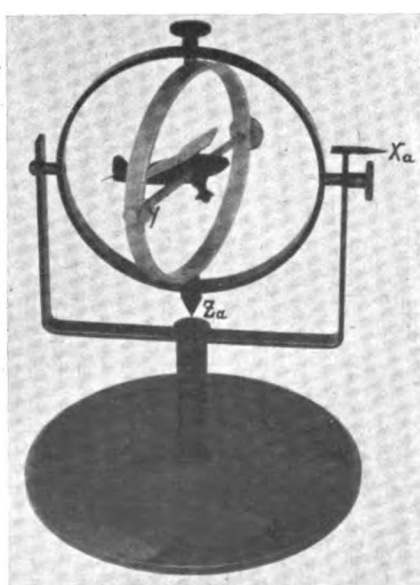


Bild 5. Kardanmodell der E-Kopplung. Anstellwinkel a_E und Schiebewinkel β_E sind im Modell positiv eingestellt.

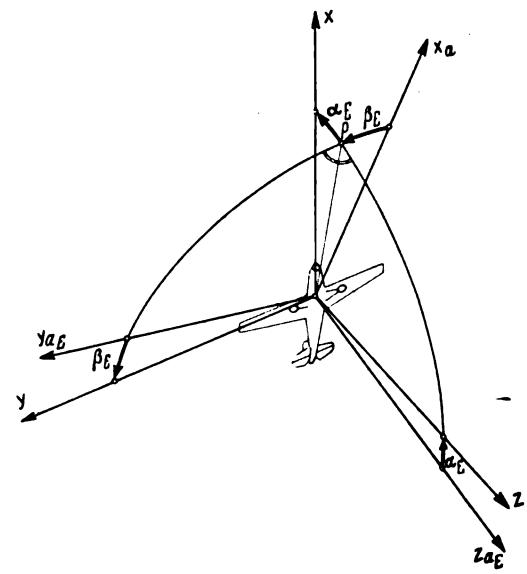


Bild 6. Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes x, y, z gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_{a_E}, z_{a_E} durch die aerodynamischen Winkel der E-Kopplung α_E und β_E.

Die Spurgerade zwischen den Ebenen $y_a z_a$ und zx, durch welche die Festlegung der Auftriebsachse erfolgt, ist bei $\beta_E = 90^0$ nicht mehr definiert. Dadurch wird die Lage von y_a und z_a in diesem Falle unbestimmt.

Bild 5 zeigt das Kardanmodell der E-Kopplung.

Die beiden aerodynamischen Winkel können in ähnlicher Weise, wie es schon bei der Beschreibung der F-Kopplung gezeigt wurde, mit Hilfe der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z des Flugzeuges und der resultierenden Fluggeschwindigkeit v_{x_a} erklärt werden. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\sin \alpha_E = \frac{v_z}{v_{x_a} \cos \beta_E} \quad \ldots\ldots \text{(VII)}$$

$$\cos \alpha_E = \frac{v_x}{v_{x_a} \cos \beta_E} \quad \ldots\ldots \text{(VIII)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_E = \frac{v_z}{v_x} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IX)}$$

$$\sin \beta_E = \frac{v_y}{v_{x_a}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(X)}$$

$$\cos \beta_E = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}}{v_{x_a}} \quad \ldots\ldots \text{(XI)}$$

$$\operatorname{tg} \beta_E = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \quad \ldots\ldots \text{(XII)}$$

Unter Zugrundelegung von Bild 6 sollen jetzt die Zusammenhänge zwischen den Richtungskosinus und den Kopplungswinkeln α_E und β_E abgeleitet werden.

Durch Anwendung des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie ergeben sich folgende Beziehungen:

Aus Dreieck $x\, x_a\, P$: 1. $\cos(x\, x_a) = \cos \alpha_E \cos \beta_E$,
aus Dreieck $x\, y_a\, P$: 2. $\cos(x\, y_a) = \sin \beta_E \cos \alpha_E$,
3. $\cos(x\, z_a) = -\sin \alpha_E$,
4. $\cos(y\, x_a) = -\sin \beta_E$,
5. $\cos(y\, y_a) = \cos \beta_E$,
aus Dreieck $y\, z_a\, P$: 6. $\cos(y\, z_a) = 0$,
aus Dreieck $z\, x_a\, P$: 7. $\cos(z\, x_a) = \sin \alpha_E \cos \beta_E$,
aus Dreieck $z\, y_a\, P$: 8. $\cos(z\, y_a) = \sin \alpha_E \sin \beta_E$,
9. $\cos(z\, z_a) = \cos \alpha_E$.

Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem flugwindfesten Achsenkreuz hat bei Zugrundelegung der E-Kopplung die in Tafel 5 angegebene Form.

Digitized by Google

Tafel 5.

Flugzeugfestes Achsenkreuz	Flugwindfestes Achsenkreuz	x_a	y_{a_E}	z_{a_E}
x		$+\cos\alpha_E \cdot \cos\beta_E$	$\cos\alpha_E \cdot \sin\beta_E$	$-\sin\alpha_E$
y		$-\sin\beta_E$	$+\cos\beta_E$	0
z		$+\sin\alpha_E \cdot \cos\beta_E$	$+\sin\alpha_E \cdot \sin\beta_E$	$+\cos\alpha_E$

Ein Vergleich mit Tafel 3 zeigt, daß Tafel 5 durch Spiegelung der einzelnen Ausdrücke an der gestrichelten Diagonalen aus Tafel 3 erhalten wird. Dabei sind die Vorzeichen der gespiegelten Ausdrücke umzukehren.

4. Das experimentelle Achsenkreuz.

Die E-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz führt zwanglos zu einem weiteren Achsenkreuz, dessen Bedeutung sich erst bei den späteren eingehenden Überlegungen über Vorzüge und Nachteile der beiden zur Auswahl stehenden Kopplungen voll erweisen wird.

Da der Anstellwinkel α_E bei der E-Kopplung als Drehachse die y-Achse des flugzeugfesten Achsenkreuzes besitzt und daher in der Symmetrieebene des Flugzeuges gemessen wird, läßt sich folgendes Achsenkreuz x_e, y_e, z_e definieren:

1. Die Spurgerade des Schnittes der Symmetrieebene mit der Ebene $x_a\, y_{a_E}$ liefert eine Achse $x_e = OP$ (Bild 6). Diese Achse x_e liegt also stets in der Symmetrie- ebene $z\,x$ des Flugzeuges (Bild 7).
2. Da x_e in der Symmetrieebene, also rechtwinklig zur flugzeugfesten Querachse y liegt, ist die flugzeugfeste Querachse eine weitere Achse dieses Achsenkreuzes. Es ist also $y_e = y$.
3. Die dritte Achse z_e, die rechtwinklig zu x_e und y_e sein muß, liegt also ebenfalls in der Symmetrieebene des Flugzeuges. Die Lage von z_e wird auch durch die Schnittgerade der Symmetrieebene mit der Quertriebsebene $y_{a_E}\, z_{a_E}$ bestimmt. Da bei Anwendung der E-Kopplung durch diese Spurgerade andererseits die Auftriebsachse z_{a_E} definiert wird, ist $z_e = z_{a_E}$. Das Achsenkreuz $x_e\, y_e\, z_e$ wird »experimentelles Achsenkreuz« genannt, weil dieses Achsenkreuz insbesondere im Windkanal zur Darstellung von Meßergebnissen gebräuchlich ist. Die Achsen x_e und z_e bilden ein an die Symmetrieebene gebundenes ebenes Achsenkreuz, das sich um y in der Symmetrieebene drehen kann.

Die Achse x_e kann auch auf folgende Weise erklärt werden; x_e entsteht einmal dadurch, daß man sich die um den Winkel α_E gegenüber der Ebene $x_a\, y_{a_E}$ geneigte flugzeugfeste x-Achse um eben diesen Winkel α_e in der Symmetrieebene zurückgedreht denkt. Diese Rückdrehung hat als Drehachse die y-Achse des flugzeugfesten Achsenkreuzes.

Andererseits entsteht die x_e-Achse dadurch, daß man sich die Flugwindachse x_a, die um den Winkel β_E gegenüber der Symmetrieebene $z\,x$ des Flugzeuges geneigt ist, um eben diesen Winkel β_E in der Ebene $x_a\, y_{a_E}$ zurückgedreht denkt. Diese Rückdrehung hat als Drehachse die Auftriebsachse z_{a_E}.

Von den drei Achsen des experimentellen Achsenkreuzes gehört also eine Achse dem flugzeugfesten Achsenkreuz an ($y_e = y$), eine Achse gehört dem durch die E-Kopplung definierten flugwindfesten Achsenkreuz an ($z_e = z_{a_E}$), und die dritte Achse ist die Spurgerade zwischen einer Ebene des flugzeugfesten Achsenkreuzes ($z\,x$) und einer Ebene des flugwindfesten Achsenkreuzes ($x_a\, y_a$). Weiterhin ist diejenige Achse des experimentellen Achsenkreuzes, die dem flugwindfesten Achsenkreuz angehört ($z_e = z_{a_E}$), gleichzeitig eine Spurgerade zwischen einer flugzeugfesten Ebene ($z\,x$) und einer flugwindfesten Ebene ($y_{a_E}\, z_{a_E}$); ebenso ist diejenige Achse des experimentellen Achsenkreuzes, die dem flugzeugfesten Achsenkreuz angehört ($y_e = y$), gleichzeitig die Spurgerade zwischen einer Ebene des flugzeugfesten Achsenkreuzes ($y\,z$) und einer Ebene des flugwindfesten Achsenkreuzes ($x_a\, y_{a_E}$).

Wegen dieser eben geschilderten Zusammenhänge kann das experimentelle Achsenkreuz sowohl als eine Art flugzeugfestes Achsenkreuz als auch eine Art flugwindfestes Achsenkreuz aufgefaßt werden. Es stellt gewissermaßen eine Kombination beider Achsenkreuze dar und ist eine ausgezeichnete Brücke zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz $x\,y\,z$ und dem durch die E-Kopplung definierten flugwindfesten Achsenkreuz $x_a\, y_{a_E}\, z_{a_E}$, die es ermöglicht, den Übergang zwischen diesen beiden Achsenkreuzen in einfacher Weise vorzunehmen. Es ist ohne weiteres zu erkennen, welche ausgezeichnete Stellung hierbei die Symmetrieebene des Flugzeugs und damit die zu ihr rechtwinklige flugzeugfeste y-Achse einnimmt. Die Symmetrieebene ist bei Anwendung der E-Kopplung der natürliche Mittler zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz.

Besonders bei Windkanalmessungen hat das experimentelle Achsenkreuz eine große Bedeutung. Es wurde bereits früher (vgl. [9]) darauf hingewiesen, daß Flugwindachse und Kanalströmungsachse nur als zwei verschiedene Ausdrücke für ein und denselben physikalischen Begriff zu betrachten sind; es ist also $x_{a_K} = x_a$. Bei der üblichen Aufhängung im Windkanal erfolgt die Einstellung eines Schiebewinkels durch Drehung des Modells um die zur Strömungsachse rechtwinklige Vertikalachse, die gleichzeitig die Auftriebsachse ist. Die gesamte Wägeeinrichtung wird um diese Vertikalachse bei Einstellung eines Schiebewinkels mitgedreht. Daher ergeben sich als Bezugsachsen für die Momente in den weitaus meisten deutschen Windkanälen die folgenden Achsen:

Für das Giermoment: Die vertikale Auftriebsachse $z_{a_K} = z_{a_E}$;

für das Rollmoment: Eine in der horizontalen Widerstands-Querkraftebene $x_{a_K}\, y_{a_K}$ liegende Achse, die gegenüber x_{a_K} um den Schiebewinkel β_E gedreht ist. Diese Achse kann auch erklärt werden als Spurgerade zwischen der Formsymmetrieebene des Modells und der Widerstands-Querkraftebene;

für das Längs-Kippmoment: Eine in der horizontalen Widerstands-Querkraftebene $x_{a_K}\, y_{a_K}$ liegende Achse, die gegenüber y_{a_K} um den Schiebewinkel β_E gedreht ist, und die mit der y-Achse des Modells identisch ist.

Es ist leicht zu erkennen, daß diese Bezugsachsen für die Momente mit den Achsen x_e, y_e, z_e des experimentellen Achsenkreuzes übereinstimmen.

Daher kann das experimentelle Achsenkreuz auch als ausgezeichnete Brücke zwischen Windkanalmessungen und flugtechnischen Anwendungen dienen. Es muß jedoch noch einmal betont werden, daß das experimentelle Achsenkreuz nur in Verbindung mit der E-Kopplung zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz die erwähnte Bedeutung hat, da bei dieser Kopplung einer der beiden aerodynamischen Winkel, nämlich der Anstellwinkel α_E als Drehachse die auf der Symmetrieebene senkrechte y-Achse hat, also in der Symmetrieebene gemessen wird.

Es soll zum Schluß noch darauf hingewiesen werden, daß die Achsen x_e, y_e, z_e mit den Achsen übereinstimmen, die im anglo-amerikanischen Schrifttum als »wind axes« eingeführt sind.

Die Zusammenhänge zwischen den Richtungskosinus und dem Winkel α_E, der das flugzeugfeste Achsenkreuz $x, y\,z$ gegenüber dem experimentellen Achsenkreuz x_e, y_e, z_e ausrichtet, sind aus Bild 7 leicht abzuleiten.

Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem experimentellen Achsenkreuz, die aus der Tafel 5 erhalten werden kann, wenn dort $\beta_E = 0$ gesetzt wird, hat die in Tafel 6 angegebene Form:

Digitized by Google

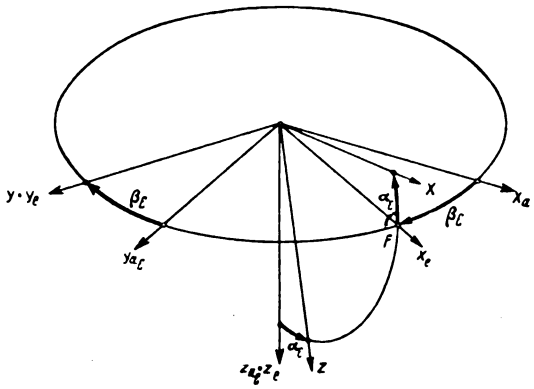


Bild 7. Ausrichtung des experimentellen Achsenkreuzes x_e, y_e, z_e gegenüber dem durch die E-Kopplung definierten flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_{a_E}, z_{a_E}.

Tafel 6.

Flugzeugfestes Achsenkreuz	Experimentelles Achsenkreuz		
	x_e	y_e	z_e
x	$\cos\alpha_E$	0	$-\sin\alpha_E$
y	0	1	0
z	$\sin\alpha_E$	0	$\cos\alpha_E$

Ebenso sind die Zusammenhänge zwischen den Richtungskosinus und dem Winkel β_E, der das flugwindfeste Achsenkreuz gegenüber dem experimentellen Achsenkreuz ausrichtet, aus Bild 11 ohne weiteres zu ersehen. Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugwindfesten Achsenkreuz und dem experimentellen Achsenkreuz, die ebenfalls aus der Tafel 5 erhalten werden kann, wenn dort $\alpha_E = 0$ gesetzt wird, hat die in Tafel 7 angegebene Form:

Tafel 7.

Experimentelles Achsenkreuz	Flugwindfestes Achsenkreuz		
	x_a	y_{a_E}	z_{a_E}
x_e	$\cos\beta_E$	$\sin\beta_E$	0
y_e	$-\sin\beta_E$	$\cos\beta_E$	0
z_e	0	0	1

5. Die Brauchbarkeit der beiden Kopplungen zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz bei der Lösung flugmechanischer Aufgaben.

Es soll jetzt im einzelnen untersucht werden, welche der beiden zur Wahl stehenden Kopplungen zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz sich bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben als die vorteilhaftere erweist.

Bei allen Erwägungen der Vorzüge und der Nachteile der beiden Kopplungen muß die Darstellung der aerodynamischen Unterlagen theoretischer und meßtechnischer Art, die bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben in Stabilitäts- und Bewegungsgleichungen Verwendung finden, den Ausgangspunkt bilden. Es ist daher von diesem Standpunkt aus als äußerst vorteilhaft anzusehen, wenn bei der Darstellung aerodynamischer Unterlagen und bei flugmechanischen Rechnungen die gleiche Winkelkopplung zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz zugrunde gelegt werden kann. Es wird zu untersuchen sein, ob sich diese Übereinstimmung, ohne Nachteile anderer Art im Gefolge zu haben, verwirklichen läßt.

Es soll im folgenden die Windkanalmessung näher betrachtet werden, durch die ein großer Teil der aerodynamischen Unterlagen beschafft wird. Die Ausrichtung des Modells gegen die Anströmung erfolgt im Windkanal durch die Winkel α_E und β_E der E-Kopplung. Daß sich bei den Kanalmessungen als die natürliche Kopplung zwischen einem mit dem Modell fest verbundenen Achsenkreuz und der Anströmung ohne weiteres die E-Kopplung ergibt, ist leicht verständlich. Es ist schon in der Arbeit [9] darauf hingewiesen worden, daß bei Untersuchung eines Flügelmodells im Windkanal eine bestimmte flugzeugfeste, in diesem Fall modellfeste Längsachse x und damit auch eine bestimmte Hochachse z nicht gegeben ist. Dagegen liegt eine Achse, die senkrecht auf der Formsymmetrieebene der zu untersuchenden Tragwerksteile steht, stets eindeutig fest. Diese zur Formsymmetrieebene rechtwinklige Achse ist die flugzeugfeste y-Achse (Querachse). Aus diesem Grunde wird die y-Achse zwangsläufig als einzige von vornherein bekannte Achse eines flugzeugfesten Achsenkreuzes zur ausgezeichneten Drehachse. Die Wahl der y-Achse zur ausgezeichneten Drehachse bedeutet jedoch, wie aus der Tafel 1 zu ersehen ist, daß zur Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber der Anströmung im Kanal die Winkel der E-Kopplung benutzt werden. Hieraus ergibt sich der übliche Aufbau der Kanalwaagen der horizontalen Windkanäle, bei dem eine auf der Strömungsachse senkrechte Vertikalachse die Drehachse für den Schiebewinkel β_E und damit für das Momenten-Bezugsachsenkreuz x_e, y_e ist. Das durch die E-Kopplung definierte flugwindfeste Achsenkreuz x_a, y_{a_E}, z_{a_E} ist also identisch mit dem strömungsfesten Achsenkreuz des Kanals x_{a_K}, y_{a_K}, z_{a_K}. Es ist bei dieser Anwendung der E-Kopplung sehr einfach, Momentenbeiwerte, die zunächst auf e-Achsen bezogen sind, auf irgendwelche flugzeugfesten Achsen mit Hilfe des Anstellwinkels α_E umzurechnen. Da $y = y_e$ ist, erübrigt sich für das Längsmoment M_e eine Umrechnung. Das Kanalrollmoment L_e und das Kanalgiermoment N_e werden entsprechend der Transformationstafel 6 auf flugzeugfeste Achsen x, z folgendermaßen umgerechnet:

$$L_{\text{flgz.}} = L_e \cos\alpha_E - N_e \sin\alpha_E \quad \text{(I)}$$

$$N_{\text{flgz.}} = N_e \cos\alpha_E + L_e \sin\alpha_E \quad \text{(II)}$$

Hierin bedeuten $L_{\text{flgz.}}$ und $N_{\text{flgz.}}$ Momente, die auf eine beliebig gewählte flugzeugfeste x-Achse bzw. z-Achse bezogen sind. Der Anstellwinkel α_E ist dabei als Winkel zwischen der gewählten x-Achse, auf die auch $L_{\text{flgz.}}$ bezogen ist, und der Widerstands-Querkraftebene $x_{a_K} y_{a_K}$ definiert.

Ist die flugzeugfeste Bezugsachse für den Winkel α_E eine andere als die flugzeugfeste Momentenbezugsachse x, so ist eine Umrechnung sehr einfach, da α_E in der Symmetrieebene gemessen wird. Es soll dies an einem Beispiel erläutert werden:

Der Anstellwinkel α_{E_0} sei als Winkel zwischen der Nullauftriebsachse x_0 und der Widerstands-Querkraftebene $x_{a_K} y_{a_K}$ definiert. Die Momente L_e, M_e, N_e sollen auf ein flugzeugfestes Achsenkreuz x, y, z zerlegt werden, dessen x-Achse durch die Schnittgerade zwischen Symmetrieebene und Sehnenebene des Tragflügels (Sehnenachse) gegeben ist, der hier ungeschränkt angenommen wird.

Der Anstellwinkel α_E zwischen der flugzeugfesten Momentenbezugsachse x (Sehnenachse) und der Widerstands-Querkraftebene $x_{a_K} y_{a_K}$ setzt sich zusammen aus dem Winkel α_{E_0} und dem konstanten Winkel α_k zwischen der Nullauftriebsachse und der Sehnenachse x. Es ist also:

$$\alpha_E = \alpha_{E_0} + \alpha_k$$

Daher gilt:

$$L_{\text{flgz.}} = L_e \cos(\alpha_{E_0} + \alpha_k) - N_e \sin(\alpha_{E_0} + \alpha_k) \quad \text{(III)}$$

$$N_{\text{flgz.}} = N_e \cos(\alpha_{E_0} + \alpha_k) + L_e \sin(\alpha_{E_0} + \alpha_k) \quad \text{(IV)}$$

Der Übergang von einem flugzeugfesten Achsenkreuz x_1, y_1, z_1 auf ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz x_2, y_2, z_2 läßt sich also mit Hilfe der E-Kopplung in einfacher Weise vornehmen, da eine Drehung der flugzeugfesten Achsen

Digitized by Google

in der Symmetrieebene eine Änderung des Anstellwinkels α_E bedingt, die lediglich aus der Addition eines konstanten Winkels α_k zu dem auf x_1 bezogenen Anstellwinkel α_{E1} besteht. Dabei ist α_k der Winkel zwischen x_2 und x_1 bzw. zwischen z_2 und z_1. Diese Verhältnisse sollen kurz an einer Weiterführung des obigen Beispiels erläutert werden:

Die Komponenten P_x, P_y, P_z einer gerichteten Größe P (Moment, Winkelgeschwindigkeit u. a.) seien zunächst auf ein flugzeugfestes Achsenkreuz x_1, y_1, z_1 bezogen. Sollen sie jetzt auf ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz x_2, y_2, z_2 bezogen werden, so gelten folgende Umrechnungen:

$$P_{x_2} = P_{x_1} \cos \alpha_k - P_{z_1} \sin \alpha_k \quad \ldots\ldots \quad (V)$$

$$P_{z_2} = P_{z_1} \cos \alpha_k + P_{x_1} \sin \alpha_k \quad \ldots\ldots \quad (VI)$$

$$P_{y_2} = P_{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (VII)$$

oder, da

$$\alpha_k = \alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}$$

ist:

$$P_{x_2} = P_{x_1} \cos (\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) - P_{z_1} \sin (\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) \quad (VIII)$$

$$P_{z_2} = P_{z_1} \cos (\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) + P_{x_1} \sin (\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) \quad (IX)$$

$$P_{y_2} = P_{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (X)$$

Für die flugtechnischen Anwendungen bedeutet dieser einfache Übergang von einem flugzeugfesten Achsenkreuz auf ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz einen wesentlichen Vorteil. Das flugzeugtechnisch vorliegende Problem ist folgendes:

Durch Kanalmessungen werden an einem Flügelmodell oder auch an einem vollständigen Flugzeugmodell Kräfte- und Momentenbeiwerte gemessen. Diese gemessenen Beiwerte sollen dann zur rechnerischen Verfolgung flugmechanischer Probleme in die Bewegungs- und Stabilitäts-Gleichungen eingeführt werden. Während die Beiwerte bei der Kanalmessung auf irgendein Achsenkreuz bezogen werden, das z. B. durch die besonderen Bedingungen der Waage als Bezugssystem geeignet erscheint, schreibt man bei der flugtechnischen Anwendung im allgemeinen die Momentengleichungen bezüglich der Hauptträgheitsachsen des Flugzeugs an, um das Auftreten von Deviationsmomenten in den Momentengleichungen zu vermeiden. Die Momentenbeiwerte schon bei der Kanalmessung auf Hauptträgheitsachsen zu beziehen, scheitert meist daran, daß man bei der Untersuchung eines Modells im Kanal die wirkliche Lage der Hauptträgheitsachsen der späteren Großausführung des Flugzeugs gar nicht kennt.

Es liegt also die Aufgabe vor, die Beiwerte, die bei der Kanalmessung auf bestimmte Achsen, beispielsweise auf e-Achsen bezogen sind, auf ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz umzurechnen. Ebenso wird es sich bei Änderung der Lage der Hauptträgheitsachsen ein und desselben Flugzeugs, die z. B. durch nachträgliche bauliche Veränderungen bedingt sein kann, als nötig erweisen, die auf ein Hauptträgheitsachsenkreuz x_1, y, z_1 bezogenen Beiwerte oder Winkelgeschwindigkeiten auf ein Hauptträgheitsachsenkreuz, x_2, y, z_2 umzurechnen, dessen Achsen x_2, z_2 gegenüber x_1, z_1 um den Winkel α_k in der Symmetrieebene gedreht sind.

Es zeigt sich also, daß eine Einführung der im Kanal durch Messung gewonnenen Beiwerte in flugmechanische Gleichungen mit Hilfe der Winkel der E-Kopplung besonders einfach vorzunehmen ist, so daß von diesem Gesichtspunkt aus die Wahl der E-Kopplung bei der rechnerischen Behandlung flugmechanischer Aufgaben nur als Vorteil anzusehen ist. Dazu kommt der weitere Vorteil, den die E-Kopplung dadurch bietet, daß man wegen des einfachen Überganges von einem flugzeugfesten Achsenkreuz auf ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz sich nicht von vornherein auf bestimmte flugzeugfeste Achsen x, z festzulegen braucht. Dieser letztere Vorteil hat sich vor allem bei einer verallgemeinerten Darstellung der Seitenstabilitätstheorie gezeigt. Werden hierbei die Gleichungen in der Weise angeschrieben, daß die Derivativa der Momente L und N auf e-Achsen bezogen werden, so läßt sich die Darstellung weitgehend unabhängig von der Größe des Anstellwinkels formulieren. Es ist dann lediglich eine einfache ebene Transformation der Derivativa von e-Achsen auf flugzeugfeste Achsen auszuführen; der Übergang von den Achsen x_e, z_e auf das Hauptträgheitsachsenkreuz x, z läßt sich, wie oben gezeigt wurde, mit Hilfe des Winkels α_E zwischen x_e und x in äußerst einfacher Weise vornehmen. Bei der Vornahme dieser Transformation ist die Größe des Winkels α_E selbstverständlich unbeschränkt. Dies ist ein wesentlicher Vorteil besonders bei der Aufstellung der Seitenstabilitätsgleichung. Er äußert sich dadurch, daß die getroffenen Vernachlässigungen in keiner Weise von der Größe des Anstellwinkels abhängen. Die Anwendung der E-Kopplung auf die Darstellung der Seitenstabilitätstheorie hat auch anderweitig entgegen früheren Annahmen keinerlei Nachteile, sondern nur Vorteile gezeitigt.

Eine Wahl der F-Kopplung zwischen flugzeugfestem und flugwindfestem Achsenkreuz bietet für die flugtechnischen Anwendungen bei weitem nicht die Vorteile, wie sie oben bei Zugrundelegung der E-Kopplung geschildert wurden. Die Winkel, durch die ein Modell und damit ein mit diesem Modell fest verbundenes Achsenkreuz x, y, z gegenüber dem strömungsfesten Achsenkreuz des Kanals ausgerichtet wird, sind die Winkel α_E und β_E der E-Kopplung. Werden jetzt bei der rechnerischen Behandlung flugmechanischer Gleichungen die Winkel der F-Kopplung α_F und β_F benutzt, so muß bei Übertragung der Kanalmeßergebnisse auf die flugtechnischen Anwendungen eine Umrechnung der im Kanal gemessenen Größen vorgenommen werden, die, wie im folgenden gezeigt werden soll, recht kompliziert ist.

Aus den im Abschnitt III, 2 und 3 angegebenen Gleichungen (I) bis (XII) lassen sich folgende Zusammenhangsgleichungen zwischen den Winkeln der F-Kopplung und denen der E-Kopplung herleiten:

$$\sin \alpha_F = \sin \alpha_E \cos \beta_E \quad \ldots\ldots \quad (XI)$$

$$\sin \beta_E = \sin \beta_F \cos \alpha_F \quad \ldots\ldots \quad (XII)$$

$$\operatorname{tg} \beta_F = \frac{\operatorname{tg} \beta_E}{\cos \alpha_E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (XIII)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_E = \frac{\operatorname{tg} \alpha_F}{\cos \beta_F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (XIV)$$

Ferner folgt aus (XI) und (XIV) oder aus den im Abschnitt III, 2 und 3 angegebenen Gl. (V) und (VIII)

$$\cos \alpha_E \cos \beta_E = \cos \alpha_F \cos \beta_F \quad \ldots\ldots \quad (XV)$$

Außerdem muß eine Transformationstafel aufgestellt werden, die es gestattet, gerichtete Größen aus dem mit Hilfe der E-Kopplung definierten flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_{a_E}, z_{a_E} in das mit Hilfe der F-Kopplung definierte flugwindfeste Achsenkreuz x_a, y_{a_F}, z_{a_F} umzurechnen.

Bei der Aufstellung dieser Transformationstafel wird folgendermaßen vorgegangen:

Denkt man sich Bild 4 und 6 zusammengezeichnet und berücksichtigt man die Tatsache, daß die vier Achsen $y_{a_E}, y_{a_F}, z_{a_F}, z_{a_E}$ in derselben Ebene, nämlich in der zu x_a senkrechten Quertriebsebene liegen, so gelten folgende Beziehungen:

$$y_{a_E} = y_{a_F} \cos \delta + z_{a_F} \sin \delta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$z_{a_E} = z_{a_F} \cos \delta - y_{a_F} \sin \delta \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

In diesen Gleichungen bedeutet δ den Winkel zwischen z_{a_E} und z_{a_F} bzw. zwischen y_{a_E} und y_{a_F}.

Aus dem Dreieck $z\, z_{a_E}\, z_{a_F}$ ergibt sich, da die Ebene $z_{a_E}\, z_{a_F}$ auf der Ebene $z\, x_a$, in der α_F gemessen wird, senkrecht steht, für $\cos \delta$:

$$\cos \delta = \frac{\cos \alpha_E}{\cos \alpha_F}$$

Ferner folgt aus dem Dreieck $y\, y_{a_F}\, y_{a_E}$, da sich die beiden Ebenen $x\, y$ und $x_a\, y_{a_E}$ unter dem Winkel α_E schneiden, für $\sin \delta$:

$$\sin \delta = \sin \alpha_E \sin \beta_F$$

Digitized by Google

Die vollständige Transformationstafel zur Umrechnung zwischen x_a, y_{a_F}, z_{a_F} und x_a, y_{a_E}, z_{a_E} hat daher die in Tafel 8 angegebene Form.

Tafel 8.

Flugwindfestes Achsenkreuz (E-Kopplung)	Flugwindfestes Achsenkreuz (F-Kopplung)		
	x_a	y_{a_F}	z_{a_F}
x_a	1	0	0
y_{a_E}	0	$\frac{\cos\alpha_E}{\cos\alpha_F}$	$\sin\alpha_E \cdot \sin\beta_F$
z_{a_E}	0	$-\sin\alpha_E \cdot \sin\beta_F$	$\frac{\cos\alpha_E}{\cos\alpha_F}$

Aus den Formeln (XI) bis (XV) ergibt sich weiterhin:

$$\frac{\cos\alpha_E}{\cos\alpha_F} = \frac{\cos\beta_F}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_F\sin^2\alpha_F}} \quad \ldots \quad \text{(XVI)}$$

$$\sin\alpha_E \sin\beta_F = \frac{\sin\alpha_F \sin\beta_F}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_F\sin^2\beta_F}} \quad \ldots \quad \text{(XVII)}$$

$$\frac{\cos\alpha_E}{\cos\alpha_F} = \frac{\cos\alpha_E}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_E\cos^2\beta_E}} \quad \ldots \quad \text{(XVIII)}$$

$$\sin\alpha_E \sin\beta_F = \frac{\sin\alpha_E \sin\beta_E}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_E\cos^2\beta_E}} \quad \ldots \quad \text{(XIX)}$$

Durch diese Formeln läßt sich die Transformationstafel 8 auch allein mit den Winkeln der *E*-Kopplung oder allein mit den Winkeln der *F*-Kopplung schreiben.

Es wird jetzt folgender Fall betrachtet: Im Windkanal seien Beiwerte $c_{x_e}, c_{y_e}, c_{z_e}$ gemessen worden, die auf *e*-Achsen — wie meist bei Kanalmessungen üblich — bezogen sind. In den flugmechanischen Gleichungen soll mit den Winkeln der *F*-Kopplung α_F und β_F und mit Hauptträgheitsachsen gerechnet werden. Bei der Einführung der Beiwerte $c_{x_e}, c_{y_e}, c_{z_e}$ in die flugmechanischen Gleichungen müssen diese auf Hauptträgheitsachsen x, y, z umgerechnet werden.

Unter Zugrundelegung der Winkel α_E und β_E ergeben sich für die auf Hauptträgheitsachsen bezogenen Beiwerte c_x, c_y, c_z folgende Umrechnungsgleichungen:

$$c_x = c_{x_e}\cos\alpha_E - c_{z_e}\sin\alpha_E \quad \ldots \quad \text{(XX)}$$

$$c_y = c_{y_e} \quad \ldots \quad \text{(XXI)}$$

$$c_z = c_{z_e}\cos\alpha_E + c_{x_e}\sin\alpha_E \quad \ldots \quad \text{(XXII)}$$

Werden jetzt aus Gl. (XVI) und (XVII) statt α_E die Winkel α_F und β_F eingeführt, so lauten die drei Umrechnungsgleichungen explizit folgendermaßen:

$$c_x = c_{x_e}\frac{\cos\alpha_F\cos\beta_F}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_F\sin^2\beta_F}} - c_{z_e}\frac{\sin\alpha_F}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_F\sin^2\beta_F}} \quad \text{(XXa)}$$

$$c_y = c_{y_e} \quad \ldots \quad \text{(XXIa)}$$

$$c_z = c_{z_e}\frac{\cos\alpha_F\cos\beta_F}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_F\sin^2\beta_F}} + c_{x_e}\frac{\sin\alpha_F}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_F\sin^2\beta_F}} \quad \text{(XXIIa)}$$

Es ist ohne weiteres zu sehen, daß die Benutzung der *F*-Kopplung bei der Behandlung der flugmechanischen Gleichungen eine Menge Umrechnungsarbeit bei der Einführung der auf *e*-Achsen bezogenen Beiwerte in die Gleichungen mit sich bringt. Ebenso läßt sich die Überlegenheit der *E*-Kopplung hinsichtlich einfacher Umrechnungsmöglichkeiten beim Übergang von einem flugzeugfesten Achsenkreuz x_1, y_1, z_1 auf ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz x_2, y_2, z_2 ohne weiteres einsehen. Hierbei ist es von vornherein klar, daß ein derartiger Übergang bei Anwendung der *E*-Kopplung einfacher auszuführen ist, weil eine Drehung des Achsenkreuzes x, z in der Symmetrieebene des Flugzeugs nur einen der beiden aerodynamischen Winkel ändert (α_E), während bei Anwendung der *F*-Kopplung eine Drehung des Achsenkreuzes x, z in der Symmetrieebene eine Änderung der Größe beider aerodynamischer Winkel (α_F, β_F) hervorruft. Es ist dies dadurch bedingt, daß im Falle der *E*-Kopplung, die zur Definition der aerodynamischen Winkel benutzte flugzeugfeste Ebene die Symmetrieebene $z\,x$ ist, die durch eine Drehung des ebenen Achsenkreuzes z, x ihre Lage nicht ändert, während die bei der *F*-Kopplung zur Definition der aerodynamischen Winkel benutzte flugzeugfeste $x\,y$-Ebene durch Drehung des Kreuzes x, z ihre Lage ändern muß.

Es treten also bei der Umrechnung gerichteter Größen von einem flugzeugfesten Achsenkreuz in ein anderes flugzeugfestes Achsenkreuz bei Anwendung der *F*-Kopplung die beiden aerodynamischen Winkel α_F und β_F in den Umrechnungsgleichungen auf, wodurch sich diese nur recht verwickelt explizit darstellen lassen.

Zur Ableitung dieser Umrechnungsgleichungen sollen zunächst noch einmal die entsprechenden Gleichungen für die *E*-Kopplung angeschrieben werden, die beim Übergang von x_1, z_1 auf x_2, z_2 gelten:

$$x_2 = x_1\cos(\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) - z_1\sin(\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) \quad \ldots \quad \text{(XXIII)}$$

$$z_2 = z_1\cos(\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) + x_1\sin(\alpha_{E_2} - \alpha_{E_1}) \quad \ldots \quad \text{(XXIV)}$$

oder

$$x_2 = x_1(\cos\alpha_{E_2}\cos\alpha_{E_1} + \sin\alpha_{E_2}\sin\alpha_{E_1}) - z_1(\sin\alpha_{E_2}\cos\alpha_{E_1} - \cos\alpha_{E_2}\sin\alpha_{E_1}) \quad \ldots \quad \text{(XXIIIa)}$$

$$z_2 = z_1(\cos\alpha_{E_2}\cos\alpha_{E_1} + \sin\alpha_{E_2}\sin\alpha_{E_1}) + x_1(\sin\alpha_{E_2}\cos\alpha_{E_1} - \cos\alpha_{E_2}\sin\alpha_{E_1}) \quad \ldots \quad \text{(XXIVa)}$$

Die Umrechnung der Winkel $\alpha_{E_1}, \alpha_{E_2}$ in die Winkel $\alpha_{F_1}, \alpha_{F_2}$ wird durch die Formeln (XVI) und (XVII) vorgenommen. Es ergibt sich

$$\cos\alpha_{E_1} = \frac{\cos\alpha_{F_1}\cos\beta_{F_1}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_{F_1}\sin^2\beta_{F_1}}} \quad \ldots \quad \text{(XVIa)}$$

$$\sin\alpha_{E_1} = \frac{\sin\alpha_{F_1}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_{F_1}\sin^2\beta_{F_1}}} \quad \ldots \quad \text{(XVIIa)}$$

Entsprechende Formeln können für α_{E_2} angeschrieben werden.

Werden jetzt die Ausdrücke für $\sin\alpha_{E_1}, \cos\alpha_{E_1}, \sin\alpha_{E_2}, \cos\alpha_{E_2}$ in die Gl. (XXIII) und (XXIV) eingesetzt so lauten diese Gleichungen:

$$x_2 = x_1\cdot\frac{\cos\alpha_{F_1}\cos\alpha_{F_2}\cos\beta_{F_1}\cos\beta_{F_2} + \sin\alpha_{F_1}\sin\alpha_{F_2}}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha_{F_1}\sin^2\beta_{F_1})\,(1-\cos^2\alpha_{F_2}\sin^2\beta_{F_2})}} - z_1\cdot\frac{\cos\alpha_{F_1}\cos\beta_{F_1}\sin\alpha_{F_2} - \sin\alpha_{F_1}\cos\alpha_{F_2}\cos\beta_{F_2}}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha_{F_1}\sin^2\beta_{F_1})\,(1-\cos^2\alpha_{F_2}\sin^2\beta_{F_2})}} \quad \text{(XXV)}$$

$$z_2 = z_1\cdot\frac{\cos\alpha_{F_1}\cos\alpha_{F_2}\cos\beta_{F_1}\cos\beta_{F_2} + \sin\alpha_{F_1}\sin\alpha_{F_2}}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha_{F_1}\sin^2\beta_{F_1})\,(1-\cos^2\alpha_{F_2}\sin^2\beta_{F_2})}} + x_1\cdot\frac{\cos\alpha_{F_1}\cos\beta_{F_1}\sin\alpha_{F_2} - \sin\alpha_{F_1}\cos\alpha_{F_2}\cos\beta_{F_2}}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha_{F_1}\sin^2\beta_{F_1})\,(1-\cos^2\alpha_{F_2}\sin^2\beta_{F_2})}} \quad \text{(XXVI)}$$

Diese Umrechnungsformeln zeigen deutlich, daß die Einführung der *E*-Kopplung gegenüber der *F*-Kopplung bei flugmechanischen Rechnungen ganz wesentliche Vorteile mit sich bringt, indem sie einen bequemen Übergang von einem flugzeugfesten Achsenkreuz auf ein anderes mit Hilfe eines einzigen, in der Symmetrieebene gemessenen Winkels gestattet.

Als Vorteil der *F*-Kopplung gegenüber der *E*-Kopplung wird von L. Hopf[6]) angegeben, daß die resultierende Luftkraft bei Zugrundelegung der *F*-Kopplung im wesentlichen nur vom Anstellwinkel α abhängig und durch kleine Schiebewinkel nicht verändert werde. Als Beispiel wird an der angegebenen Stelle eine angeblasene Kreisscheibe betrachtet. Erfolgt eine Drehung der Scheibe um die im Mittelpunkt der Scheibe errichtete, auf der Scheiben-

[6]) Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik. 2. Aufl., Bd. I, S. 260.

Digitized by Google

fläche senkrechte Achse, so ändert sich an der Lage der Scheibe gegenüber der Anströmung, und damit an den Anblaseverhältnissen, nichts. Dieser Einwand gegen die E-Kopplung soll jetzt vom Standpunkt der praktischen Anwendungen aus untersucht werden.

Da es sich bei einem Flugzeug nicht um einen rotationssymmetrischen Körper handelt, wie bei der erwähnten Kreisscheibe, wird man erwarten können, daß die Unabhängigkeit der resultierenden Luftkraft bzw. des in erster Linie interessierenden Auftriebs von einem Schiebewinkel β_F nur in einem sehr beschränkten Bereich dieses Winkels β_F wirklich vorhanden ist. Es wird naturgemäß für einen bestimmten Tragflügel im Anstellwinkelbereich des normalen, nicht überzogenen Fluges, stets eine Achse (Optimumachse) geben, die die Eigenschaft hat, daß bei einer Drehung des Tragflügels um diese Achse der Auftriebsbeiwert c_a ein Minimum an Abhängigkeit von dieser Drehung aufweist. Eine völlige Unabhängigkeit des Auftriebes vom Schiebewinkel ist bei unsymmetrischer Anblasung, wie an Hand von Meßergebnissen gezeigt werden wird, selbst bei Wahl der erwähnten Optimumachse als Drehachse für den Schiebewinkel, auch in einem kleinen Bereich des Schiebewinkels nicht vorhanden, solange die Werte von c_a nicht mehr klein sind. Für einen unverwundenen Tragflügel mit üblichen Umrissen ist diese Optimumachse annähernd mit der auf der Sehnenebene des Flügels senkrechten Achse, die durch den Schwerpunkt geht, in Übereinstimmung.

An Hand dreier Beispiele von Messungen, die in der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen durchgeführt wurden, soll gezeigt werden, wie weit der Auftrieb vom Schiebewinkel abhängig ist, wenn die eine oder andere Winkelkopplung zugrunde gelegt wird.

Die erste Messung wurde an dem Gesamtmodell eines Hochdecker-Landflugzeuges vorgenommen. Es sollen im vorliegenden Zusammenhang die Messungen der Beiwerte c_a, c_q, c_w bei verschiedenen Anstellwinkeln in Abhängigkeit vom Schiebewinkel herangezogen werden. Der Schiebewinkel wurde zwischen 0° und 45° variiert.

Die zweite Messung wurde an dem Gesamtmodell eines Hochdecker-Flugbootes durchgeführt. Auch hier wurden c_a, c_q, c_w in Abhängigkeit vom Schiebewinkel bei verschiedenen Anstellwinkeln gemessen. Der Schiebewinkel wurde zwischen 0° und 15° variiert.

Die dritte Messung wurde in derselben Weise wie bei dem Hochdecker-Flugboot an dem Modell eines Tiefdecker-Landflugzeuges durchgeführt.

Die Winkel, die bei den Messungen in Göttingen zur Ausrichtung des Modells gegenüber der Anströmung benutzt wurden, sind α_E und β_E. Der gemessene Beiwert des Auftriebs ist c_{a_E}.

Um nun von c_{a_E} auf c_{a_F} überzugehen, werden zunächst die Winkel α_E und β_E, die einen bestimmten Anblasezustand beschreiben, mit Hilfe der Formeln (XI) bis (XV) in α_F und β_F transformiert. Sodann wird vermittels der Transformationstafel 8 c_{a_F} aus c_{a_E} und c_{q_E} berechnet. Durch diese vollständige Transformation der Winkel und der Kräfte läßt sich der betrachtete Anblasezustand nunmehr durch die Winkel der F-Kopplung und durch das mittels der F-Kopplung definierte flugwindfeste Achsenkreuz x_a, y_{a_F}, z_{a_F} beschreiben.

Es läßt sich auf diese Weise ein klares Bild gewinnen, wie weit bei einer Reihe zu betrachtender Anblasezustände eine Abhängigkeit $c_{a_E} = f(\beta_E)$ bzw. $c_{a_F} = f(\beta_F)$ vorhanden ist.

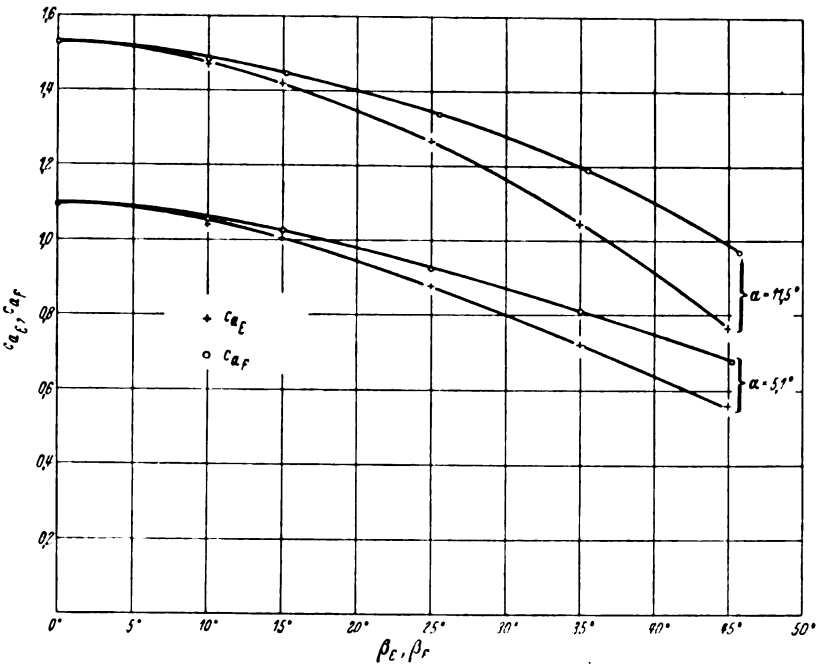


Bild 8. Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_{a_E} bzw. c_{a_F} vom Schiebewinkel β_E bzw. β_F bei einem Hochdecker-Landflugzeug.

Ein Vergleich der Verläufe $c_{a_E} = f(\beta_E)$ und $c_{a_F} = f(\beta_F)$ läßt sich jedoch auch nach der Umrechnung der Winkel und Kräfte nicht ohne weiteres vornehmen. Während bei der Messung α_E konstant ist und β_E verändert wird, ergibt sich bei der Umrechnung, daß außer β_F auch α_F veränderlich ist, so daß ein zunächst durch Umrechnung erhaltenes $c^*_{a_F} = f(\beta_F)$ infolge des variablen α_F korrigiert werden muß. c_{a_F} wird nicht nur infolge des wachsenden Schiebewinkels kleiner sondern auch infolge der aus der Umrechnung herrührenden Verminderung des Anstellwinkels α_F. Die wegen dieser Verminderung des Anstellwinkels α_F vorzunehmende Korrektur von c_{a_F} wurde mit Hilfe des Verlaufs $c_{a_E} = f(\alpha_E)$ für $\beta_E = 0$ vorgenommen, da im Falle der symmetrischen Anblasung, also bei Fehlen eines Schiebewinkels, $c_{a_E} = c_{a_F}$ ist.

Bild 8 gibt für ein Hochdecker-Landflugzeug den Verlauf $c_{a_E} = f(\beta_E)$, der im Kanal gemessen wurde, und den Verlauf $c_{a_F} = f(\beta_F)$, der durch Umrechnung in der erläuterten Weise erhalten und korrigiert wurde, wieder. Die flugzeugfeste Bezugsachse für α_E ist die Sehnenachse.

Aus diesen Kurven ist folgendes zu ersehen:

1. Eine völlige Unabhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_{a_F} vom Schiebewinkel β_F ist auch im Bereich kleiner Schiebewinkel nicht vorhanden.
2. Die Verläufe $c_{a_E} = f(\beta_E)$ und $c_{a_F} = f(\beta_F)$ sind im Bereich kleiner Schiebewinkel nicht wesentlich voneinander verschieden. Bei einem Anstellwinkel von 11,5° und einem Schiebewinkel von 20° ist c_{a_E} auf 88,2% des bei $\beta = 0$ gemessenen Wertes gefallen, c_{a_F} jedoch auch bereits auf 91,5% des bei $\beta = 0$ gemessenen Wertes.
3. Bei größeren Schiebewinkeln fällt c_{a_E} zwar in stärkerer Weise ab als c_{a_F}, jedoch ist der absolute Abfall sowohl bei c_{a_E} als auch bei c_{a_F} beträchtlich. Demgemäß bietet die Wahl von c_{a_F} bei größeren Schiebewinkeln ($\beta_F > 20°$) keinen wesentlichen Vorteil gegenüber c_{a_E}.

Bei diesen Ergebnissen ist zu berücksichtigen, daß als flugzeugfeste Bezugsachse für den Anstellwinkel α_E die Sehnenachse benutzt wurde. Eine Umrechnung auf die Winkel der F-Kopplung ergibt daher einen Winkel β_F, der als Drehachse eine auf der Sehnenebene senkrechte flugzeugfeste Hochachse hat. Damit sind die Messungen aber auf die bereits erwähnte angenäherte Optimumachse bezogen, und die dargestellte Abhängigkeit $c_{a_F} = f(\beta_F)$ stellt annähernd den günstigsten Fall dar.

Digitized by Google

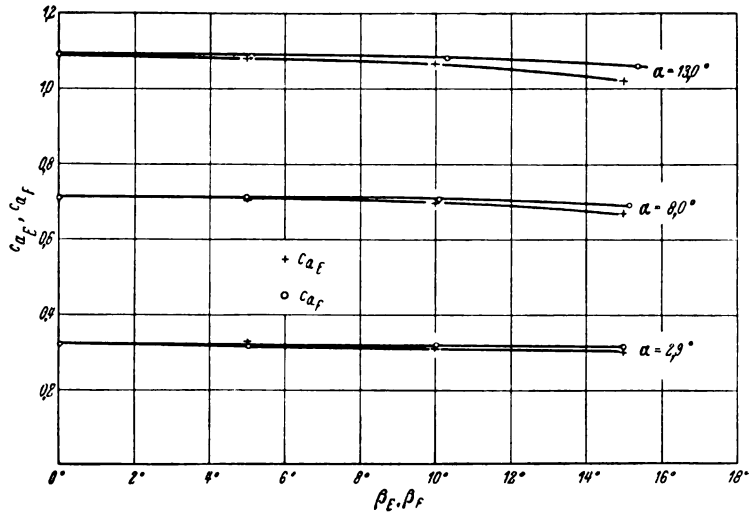


Bild 9. Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_{a_E} bzw. c_{a_F} vom Schiebewinkel β_E bzw. β_F bei einem Hochdecker-Wasserflugzeug.

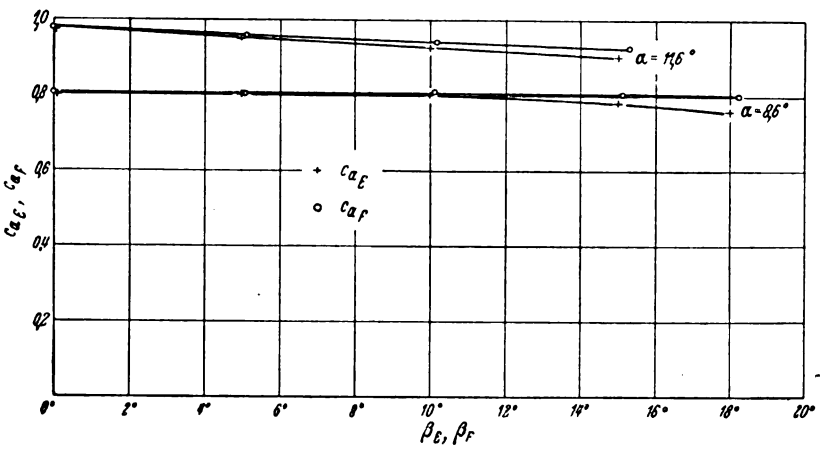


Bild 10. Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes c_{a_E} bzw. c_{a_F} vom Schiebewinkel β_E bzw. β_F bei einem Tiefdecker-Landflugzeug.

Bild 9 und 10 zeigen Messungen an den Modellen eines Hochdecker-Wasserflugzeuges und eines Tiefdeckers-Landflugzeuges, die bei verschiedenen Anstellwinkeln vorgenommen wurden.

Aus diesen Meßergebnissen geht hervor, daß die Verläufe $c_{a_E} = f(\beta_E)$ und $c_{a_F} = f(\beta_F)$ bei den verschiedensten Flugzeugmustern (Hochdecker-Landflugzeug, Hochdecker-Wasserflugzeug, Tiefdecker-Landflugzeug) in ihren Grundzügen ähnlich sind. Es ist zu erkennen, daß die Abhängigkeit des Auftriebs vom Schiebewinkel in einem Bereich des Schiebewinkels zwischen 0° und 20° auch größenordnungsmäßig bei den als Beispielen angeführten Messungen an verschiedenen Flugzeugmustern ähnlich ist. Man wird aus diesen Messungen vor allem unbedenklich die Verallgemeinerung vornehmen können, daß auch bei Wahl der *F*-Kopplung eine völlige Unabhängigkeit des Auftriebs vom Schiebewinkel selbst bei kleinen Schiebewinkeln bis zu etwa 20°, mit deren Auftreten durch die bei praktisch angewendeten Flugbewegungen vorliegenden Anblaseverhältnissen im allgemeinen zu rechnen ist, nicht besteht, wenn nicht kleine c_a-Werte vorliegen. In diesem Fall ist jedoch praktisch c_{a_E} genau so wenig wie c_{a_F} im Bereich kleiner β veränderlich. Infolgedessen ist in diesem Bereich des Schiebewinkels durch die Wahl der *F*-Kopplung ein fühlbarer Vorteil gegenüber der *E*-Kopplung nicht gegeben.

In diesem Zusammenhang muß jedoch noch der einzige praktisch vorkommende Fall behandelt werden, bei dem große Schiebewinkel auftreten. Es ist dies der Fall des auf dem Wasser schwimmenden Wasserflugzeuges, das unter jedem beliebigen Schiebewinkel angeblasen werden kann. Im Bereich großer Schiebewinkel kann man nun gegen die Anwendung der *E*-Kopplung zwei Einwände geltend machen:

1. Die Lage der Auftriebsachse z_{a_E} ist bei $\beta_E = 90°$ nicht mehr eindeutig bestimmt.
2. Der Auftrieb c_{a_E} hängt im Bereich großer Schiebewinkel sehr stark vom Schiebewinkel ab und wird bei $\beta_E = 90°$ vom Anstellwinkel überhaupt unabhängig, da in diesem Fall die Drehachse des Winkels α_E (y-Achse) mit der Flugwindachse zusammenfällt.

Zu diesen beiden Einwänden ist folgendes zu bemerken:

1. Die Lage der Auftriebsachse z_{a_F} wird nur dann unbestimmt, wenn der Wert des Schiebewinkels β_F tatsächlich genau 90° beträgt. Schon bei der geringsten Abweichung von diesem Wert liegt z_{a_F} bereits eindeutig fest. z_{a_F} ist ganz unabhängig von der Größe des Schiebewinkels in Übereinstimmung mit z_e, d. h. mit der Drehachse des Winkels β_E, deren Lage praktisch stets bestimmt ist. Im übrigen liegen bei der *F*-Kopplung für die Achse y_{a_F} ganz ähnliche Verhältnisse vor, wenn $\alpha_F = 90°$ wird. Dabei ist zu beachten, daß $\alpha_A = 90°$ in der praktischen flugmechanischen Anwendung beim flachen Trudeln durchaus erreicht werden kann. Von diesem Gesichtspunkt aus ist also die *F*-Kopplung keineswegs günstiger als die *E*-Kopplung.
2. Bild 8, 9 und 10 zeigen, daß eine leidliche Unabhängigkeit sowohl des Auftriebsbeiwertes c_{a_F} wie auch des Auftriebsbeiwertes c_{a_E} vom Schiebewinkel nur im Bereich sehr kleiner Schiebewinkel vorhanden ist. Im Bereich großer Schiebewinkel muß daher die Abhängigkeit des Auftriebs vom Schiebewinkel, ganz gleich welche Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz gewählt werden, für die verschiedenen Werte des Anstellwinkels stets experimentell bestimmt werden.

Im übrigen können die beiden gegen die Zweckmäßigkeit der *E*-Kopplung bei großen Schiebewinkeln angeführten Einwände aus einem viel tiefer liegenden Grunde von vornherein außer acht gelassen werden. Wie schon erwähnt, treten die großen Schiebewinkel praktisch lediglich bei auf dem Wasser schwimmenden Wasserflugzeugen auf. In diesem Fall kann man jedoch nicht mehr von einer rein flugmechanischen Anwendung sprechen; vielmehr handelt es sich hierbei meist um Stabilitätsprobleme des Wasserflugzeuges als Schwimmkörper. Das Wasserflugzeug wird dabei nicht gegenüber einer Achse (Flugwindachse) wie bei den früher besprochenen flugmechanischen Anwendungen ausgerichtet, sondern die Ausrichtung erfolgt gegenüber einer Ebene, die bei der praktischen Anwendung durch die Wasseroberfläche, beim Kanalversuch durch eine Bodenplatte gegeben ist. Das bedeutet aber, daß das flugzeugfeste Achsenkreuz in diesem Fall gegenüber einem zweiten vollständigen Achsenkreuz ausgerichtet werden muß, von dem zwei Achsen in der Ebene der Wasseroberfläche bzw. der Bodenplatte liegen, während die dritte Achse darauf senkrecht steht. Zu dieser Ausrichtung sind, wie in der Arbeit [9] beschrieben wurde, drei Eulersche Winkel nötig, die im allgemeinen Fall von Null verschieden sind, während

Digitized by Google

im Falle der Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber einem flugwindfesten Achsenkreuz, von dem zunächst nur die Lage einer einzigen Achse (Flugwindachse) gegeben ist, einer der drei Eulerschen Winkel durch eine bestimmte willkürliche Fesselung einer der beiden flugwindfesten Achsen y_a oder z_a an das flugzeugfeste Achsenkreuz Null ist. Dieser Sonderfall der Ausrichtung durch nur zwei Winkel ist auf die vollständige Ausrichtung eines angeblasenen Flugzeugs gegenüber einer Bodenplatte überhaupt nicht anwendbar. Denn bei der Ausrichtung eines Achsenkreuzes gegenüber einem zweiten Achsenkreuz durch drei Eulersche Winkel ist es nicht möglich, von vornherein eine bestimmte Fesselung einer Achse des Richtachsenkreuzes an eine Ebene des auszurichtenden Achsenkreuzes vorzuschreiben, wie es im Falle der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem flugwindfesten Achsenkreuz geschieht. Da die vollständige Ausrichtung durch drei Winkel erfolgt, wäre durch eine derartige Fesselungsvorschrift eine Überbestimmung gegeben, die zu Widersprüchen führen würde.

Die Ausrichtung eines auf dem Wasser schwimmenden Wasserflugzeuges erfordert die Einführung eines Winkels, der es gestattet, bei einer Anblasung unter einem Schiebewinkel von $\beta = 90^0$, die Neigung der Flügel gegenüber der Wasseroberfläche anzugeben. Es muß daher zur Erfassung dieses Falles eine Erweiterung der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz vorgenommen werden. Die Beschreibung der in diesem Fall zweckmäßigerweise zu benutzenden Kopplungswinkel wird im folgenden Abschnitt IV erfolgen.

Der Fall der praktischen Anwendungen, bei dem große Schiebewinkel auftreten, läßt sich also zur Beurteilung der Vorteile oder Nachteile einer der beiden beschriebenen Kopplungen zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz nicht heranziehen, da keine der beiden Kopplungen geeignet ist, die in diesem Falle vorliegenden Verhältnisse erschöpfend zu beschreiben. Der innere Grund ist der, daß *E*-Kopplung und *F*-Kopplung zur Beschreibung flugmechanischer Anwendungen dienen, und daß der Fall des auf dem Wasser schwimmenden seitlich angeblasenen Flugbootes keine rein flugmechanische Anwendung mehr im Sinne eines fliegenden Flugzeuges darstellt.

Wenn man die Unabhängigkeit des Auftriebs vom Schiebewinkel betrachtet, kann abschließend die Feststellung getroffen werden, daß die *F*-Kopplung bei der praktischen Anwendung in keinem Bereich des Schiebewinkels einen wesentlichen Vorteil gegenüber der *E*-Kopplung bietet. Selbst wenn jedoch in einem Einzelfalle c_{a_F} vom Schiebewinkel in geringerer Weise abhängig wäre als c_{a_E}, so bestände doch in diesem Fall wieder die Schwierigkeit des Überganges von einem flugzeugfesten Achsenkreuz, dessen Hochachse die optimale Drehachse für β_F ist, auf das Hauptträgheitsachsenkreuz. Wie schwierig sich aber dieser Übergang bei Benutzung der Winkel α_F und β_F gestaltet, zeigen eingehend die weiter oben angegebenen Formeln (XXV) und (XXVI).

Aus allen diesen Erwägungen ist für die flugmechanischen Anwendungen die *E*-Kopplung wegen der unbestreitbaren Erleichterungen, die eine Benutzung der *E*-Kopplung bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben mit sich bringt, gegenüber der *F*-Kopplung vorzuziehen.

IV. Die Erweiterung der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz auf den Fall des über einer Bodenplatte angeblasenen Flugzeuges.

Der Fall eines Flugzeugs, das über einer Bodenplatte angeblasen wird und dabei gegenüber der Anströmung und gegenüber der Bodenplatte ausgerichtet werden soll, ist praktisch durch ein auf dem Wasser schwimmendes Wasserflugzeug verwirklicht. (Da hierbei aerodynamische Fragen der Schwimmstabilität untersucht werden, ist das Vorhandensein einer Bodenplatte — im Falle des Wasserflugzeuges also der Wasserfläche — physikalisch bedingt und die Ausrichtung des Flugzeugs muß gegenüber dieser Fläche vorgenommen werden.)

Dieser Fall geht über die bereits beschriebene Kopplung zwischen einem flugzeugfesten Achsenkreuz und einem flugwindfesten Achsenkreuz, die durch zwei Winkel vorgenommen wird, hinaus. Durch die gegebene Fläche ist ein vollständiges Achsenkreuz als Richtachsenkreuz gegeben, demgegenüber das flugzeugfeste Achsenkreuz durch drei Eulersche Winkel ausgerichtet wird. Das durch die Bodenplatte bedingte Richtachsenkreuz ($x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$) ist folgendermaßen erklärt:

Der Ursprung des Achsenkreuzes $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ liegt im Schwerpunkt des Flugzeugs; man denkt sich also die Bodenplatte, ähnlich wie das erdparallele Achsenkreuz, entlang der Erdvertikalen parallel bis in den Flugzeug-Schwerpunkt verschoben.

Die Achse x_{a_p} ist übereinstimmend mit der Achse der Anströmung, die in der Plattenebene (Wasseroberflächenebene) liegt.

Die Achse y_{a_p} liegt rechtwinkelig zu x_{a_p} in der Plattenebene.

Die Achse z_{a_p} steht senkrecht auf x_{a_p} und y_{a_p}, d. h. also senkrecht auf der Plattenebene.

Da die Anströmungsachse stets in der Plattenebene liegt, steht z_{a_p} auch senkrecht auf der Anströmungsachse.

Betrachtet man jetzt Windkanalmessungen ohne Bodenplatte und mit Bodenplatte, die in der praktischen Anwendung einem freiliegenden Flugzeug und einem auf dem Wasser schwimmenden Wasserflugzeug entsprechen, so läßt sich folgendes erkennen:

Formal ist die Plattenebene $x_{a_p}\, y_{a_p}$ mit der Widerstandsquerkraftebene des Kanals $x_{a_K}\, y_{a_K}$ in Übereinstimmung, weil die Drehachse des Winkels β_E (z_{a_K}) senkrecht auf der Plattenebene steht. Bei der praktischen Anwendung würde daher bei Wahl der *E*-Kopplung, bei der das strömungsfeste Achsenkreuz des Kanals $x_{a_K}, y_{a_K}, z_{a_K}$ mit dem beim Freiflug benutzten flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_{a_E}, z_{a_E} identisch ist, die Wasserfläche der tangentialen Strömungsebene $x_a\, y_{a_K}$ entsprechen. z_{a_E} würde also mit z_{a_p} in Übereinstimmung sein. Tatsächlich besteht jedoch bei Betrachtung der im Kanal vorliegenden Verhältnisse zwischen der Plattenebene $x_{a_p}\, y_{a_p}$ und der Widerstandsquerkraftebene $x_{a_K}\, y_{a_K}$ trotz formaler Übereinstimmung ein grundlegender Unterschied. Die Lage der Achsen y_{a_K} und z_{a_K} und damit die Lage der Ebene $x_{a_K}\, y_{a_K}$ (bzw. bei flugtechnischen Anwendungen der Ebene $x_a\, y_{a_E}$) ist ursprünglich physikalisch bedeutungslos und wird erst aus Zweckmäßigkeitsgründen in der oben beschriebenen Weise durch eine der beiden Kopplungen festgelegt. Von physikalischer Bedeutung ist bei Kanalmessungen ohne Bodenplatte, die den Verhältnissen des freiliegenden Flugzeugs entsprechen, nur die Anströmungsachse x_{a_K}. Zur Ausrichtung dieser Achse gegenüber dem flugzeugfesten Achsenkreuz sind nur zwei Winkel erforderlich. Dagegen stellt die Bodenplatte $x_{a_p}\, y_{a_p}$ (bei der praktischen Anwendung auf das Wasserflugzeug die Wasserfläche) durch die besondere Art der in diesem Fall zu untersuchenden Fragen eine physikalische Gegebenheit dar, die von Anfang an eindeutig vorgegeben ist. Zur Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber dieser Plattenebene sind aber drei Winkel erforderlich.

Durch die formale Übereinstimmung zwischen der Plattenebene und der Widerstandsquerkraftebene $x_{a_K}\, y_{a_K}$ läßt sich das durch die Bodenplatte gegebene Richtachsenkreuz als eine besondere Art des strömungsfesten Achsenkreuzes des Kanals erklären. Denn es ist $x_{a_p} = x_{a_K}$, $z_{a_p} = z_{a_K}$ und damit $y_{a_p} = y_{a_K}$. Bei sinngemäßer Übertragung der *E*-Kopplung auf die hier betrachtete Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber dem durch die Bodenplatte und durch die Anströmung gegebenen Richtachsenkreuz $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ ist die Hauptdrehachse des Richtachsenkreuzes die Achse $z_{a_p} = z_{a_K}$ und die ausgezeichnete Drehachse des auszurichtenden flugzeugfesten Achsenkreuzes die Achse y. Damit sind bereits die Drehachsen für zwei der drei Kopplungswinkel bekannt. Es läßt sich ohne weiteres erkennen, daß die Winkel α_E (Drehachse y) und β_E (Dreh-

Digitized by Google

achse $z_{a_E} = z_{a_K}$) in ihrer ursprünglichen Definition auch als Kopplungswinkels zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem Achsenkreuz der Bodenplatte auftreten. Als dritter Winkel kommt ein Winkel φ_e dazu, der »Kanalrollwinkel« genannt werden soll, und dessen Drehachse ohne weiteres durch die Knotenlinie zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und dem Achsenkreuz der Bodenplatte $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ gegeben ist. Diese Knotenlinie ist in formaler Übereinstimmung mit der Achse x_e des Symmetrieebene-Achsenkreuzes.

Es ist nun zu beachten, daß die Achse z_{a_K}, in deren Richtung der Auftrieb gemessen wird, bei Vorhandensein eines Winkels φ_e nicht mehr in der Symmetrieebene des Flugzeugs liegt; vielmehr ist die Symmetrieebene um den Winkel φ_e gegenüber der Achse $z_{a_p} = z_{a_p}$ geneigt. Die Vorschrift, daß die Auftriebsachse rechtwinklig zur Anströmachse in der Symmetrieebene des Flugzeugs liegen soll, kann in diesem Fall zwangsläufig nicht mehr eingehalten werden, da bei einer Ausrichtung eines Achsenkreuzes gegenüber einem zweiten vollständigen Achsenkreuz durch drei Eulersche Winkel jede Vorschrift über die Fesselung einer Achse des Richtachsenkreuzes an eine Ebene des auszurichtenden Achsenkreuzes eine Übereinstimmung und damit einen Widerspruch darstellt. Eine derartige Fesselungsvorschrift ist nur in dem Fall angebracht und erforderlich, in dem ein Achsenkreuz gegenüber einer gegebenen Achse auszurichten ist.

Die Übertragung der bei Messungen im Windkanal an einem Modell mit Bodenplatte vorliegenden Verhältnisse auf die praktische Anwendung des auf dem Wasser liegenden, angeblasenen Wasserflugzeugs ist ohne weiteres vorzunehmen wenn, wie im Kanal, die Winkel α_E und β_E mit zwei von den insgesamt drei Kopplungswinkeln zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem Achsenkreuz der Wasseroberfläche identisch sind. In diesem Falle werden aus den Achsen $x_{a_K}, y_{a_K}, z_{a_K}$ des strömungsfesten Achsenkreuzes des Kanals die Achsen $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ des Achsenkreuzes, das die Anströmung des Wasserflugzeugs beschreibt. x_{a_p} und y_{a_p} liegen in der Ebene der Wasseroberfläche bzw. in einer zu dieser parallelen Ebene. Man wird das Achsenkreuz x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p} auch hier, wie im Kanal, am besten als »strömungsfestes Achsenkreuz für Messungen mit Bodenplatte« bezeichnen.

Die Ausrichtung des Wasserflugzeugs gegenüber der Wasseroberfläche erfolgt dann durch folgende drei Winkel:

α_E Anstellwinkel. Winkel zwischen der flugzeugfesten x-Achse und der Schnittlinie zwischen der Flugzeug-Symmetrieebene und der Ebene $x_{a_p}\, y_{a_p}$ (Parallelebene zur Wasseroberfläche durch den Schwerpunkt). Drehachse des Winkels ist die flugzeugfeste y-Achse, Meßebene die Flugzeug-Symmetrieebene.

β_E Schiebewinkel. Winkel zwischen der Achse x_{a_p} und der Schnittlinie der Ebene $x_{a_p}\, y_{a_p}$ mit der Flugzeug-Symmetrieebene. Drehachse des Winkels ist die auf der Wasserfläche senkrechte Achse z_{a_p}, Meßebene die Wasseroberfläche oder eine zu ihr parallele Ebene.

φ_e Krängwinkel (bei Windkanalmessungen: »Kanalrollwinkel«). Winkel zwischen der Achse z_{a_p} und der Symmetrieebene des Flugzeugs. Drehachse des Winkels ist die Spurgerade zwischen der Flugzeug-Symmetrieebene und der Ebene $x_{a_p}\, y_{a_p}$. Meßebene ist die Ebene $y\, z_{a_p}$.

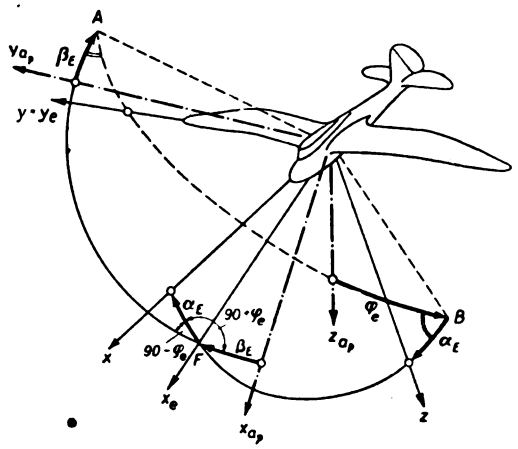


Bild 11. Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes x, y, z gegenüber dem strömungsfesten Achsenkreuz für Messungen mit Bodenplatte $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$.

Die Schnittlinie zwischen der Flugzeug-Symmetrieebene und der Plattenebene $x_{a_p}\, y_{a_p}$, die bei der Definition der beiden Kopplungswinkel α_E und β_E auftritt und die für φ_e Drehachse ist, stellt nichts anderes dar als die Achse x_e des experimentellen Achsenkreuzes.

Aus Bild 11 lassen sich die Zusammenhänge zwischen den Richtungskosinus und den Kopplungswinkeln α_E, β_E, φ_e zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und dem strömungsfesten Achsenkreuz bei Messungen mit einer Bodenplatte $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ mit Hilfe des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie ableiten. Alle in Bild 11 auftretenden Winkel sind positiv.

Im einzelnen gelten folgende Beziehungen:

Aus Dreieck $xF x_{a_p}$: 1. $\cos(x\, x_{a_p}) = \cos\alpha_E \cos\beta_E - \sin\alpha_E \sin\beta_E \sin\varphi_e$,

aus Dreieck $xF y_{a_p}$: 2. $\cos(x\, y_{a_p}) = \cos\alpha_E \sin\beta_E + \cos\beta_E \sin\alpha_E \sin\varphi_e$,

aus Dreieck $xB z_{a_p}$: 3. $\cos(x\, z_{a_p}) = -\sin\alpha_E \cos\varphi_e$,

aus Dreieck $yA x_{a_p}$: 4. $\cos(y\, x_{a_p}) = -\sin\beta_E \cos\varphi_e$,

aus Dreieck $yA y_{a_p}$: 5. $\cos(y\, y_{a_p}) = \cos\beta_E \cos\varphi_e$,

6. $\cos(y\, z_{a_p}) = \sin\varphi_e$,

aus Dreieck $zF x_{a_p}$: 7. $\cos(z\, x_{a_p}) = \sin\alpha_E \cos\beta_E + \cos\alpha_E \sin\beta_E \sin\varphi_e$,

aus Dreieck $zF y_{a_p}$: 8. $\cos(z\, y_{a_p}) = \sin\alpha_E \sin\beta_E - \cos\alpha_E \cos\beta_E \sin\varphi_e$,

aus Dreieck $zB z_{a_p}$: 9. $\cos(z\, z_{a_p}) = \cos\alpha_E \cos\varphi_e$.

Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem strömungsfesten Achsenkreuz hat daher bei Vorhandensein einer Bodenplatte und damit eines Krängwinkels φ_e die in Tafel 9 angegebenen Form.

Setzt man in dieser Tafel $\varphi_e = 0$, so geht sie in die Tafel 5 über, die die Umrechnungen zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz $x\, y\, z$ und dem beim freifliegenden Flugzeug benutzten flugwindfesten Achsenkreuz $x_a\, y_{a_E}\, z_{a_E}$ enthält.

Außer dieser eben beschriebenen Kopplungsmöglichkeit zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und einem durch eine Bodenplatte und durch die Anströmung gegebenen Achsenkreuz, bei der die E-Kopplung sinngemäß durch Einführung eines dritten Kopplungswinkels φ_e erweitert wird,

Tafel 9.

Flugzeugfestes Achsenkreuz	Strömungsfestes Achsenkreuz für Messungen mit Bodenplatte		
	x_{a_p}	y_{a_p}	z_{a_p}
x	$\cos\alpha_E \cdot \cos\beta_E - \sin\alpha_E \cdot \sin\beta_E \cdot \sin\varphi_e$	$\sin\beta_E \cdot \cos\alpha_E + \cos\beta_E \cdot \sin\alpha_E \cdot \sin\varphi_e$	$-\sin\alpha_E \cdot \cos\varphi_e$
y	$-\sin\beta_E \cdot \cos\varphi_e$	$\cos\beta_E \cdot \cos\varphi_e$	$\sin\varphi_e$
z	$\sin\alpha_E \cdot \cos\beta_E + \cos\alpha_E \cdot \sin\beta_E \cdot \sin\varphi_e$	$\sin\alpha_E \cdot \sin\beta_E - \cos\alpha_E \cdot \cos\beta_E \cdot \sin\varphi_e$	$\cos\alpha_E \cdot \cos\varphi_e$

Digitized by Google

und bei der als ausgezeichnete Drehachse die y-Achse des flugzeugfesten Achsenkreuzes auftritt, ist praktisch noch eine zweite Kopplungsmöglichkeit gegeben. Wählt man nämlich als ausgezeichnete Drehachse die x-Achse des flugzeugfesten Achsenkreuzes, so erfolgt die Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber dem durch die Bodenplatte und die Anströmung gegebenen Achsenkreuz $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ durch drei Winkel, die mit den im Abschnitt VI zu erklärenden Winkeln φ, ϑ, ψ formal übereinstimmen, durch die das flugzeugfeste Achsenkreuz gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz ausgerichtet wird. Bei dieser Kopplung denkt man sich also durch die Bodenplatte ein erdparalleles Achsenkreuz[7]) erklärt; dabei liegt die Achse x_g in der durch den Schwerpunkt gehenden Horizontalebene und ist in Übereinstimmung mit der Achse der Anströmung. Der Nachteil dieser Kopplung ist, daß als ausgezeichnete Drehachse die x-Achse auftritt, deren Lage, wie oben ausführlich auseinandergesetzt wurde, niemals von vornherein eindeutig gegeben ist, sondern von Fall zu Fall willkürlich festgesetzt wird.

Die dritte Kopplungsmöglichkeit, bei der die z-Achse des flugzeugfesten Achsenkreuzes als ausgezeichnete Drehachse gewählt wird, erweist sich praktisch als unbrauchbar. Das zu dieser Kopplung gehörende Kardanmodell würde in der Nullstellung (sämtliche drei Kopplungswinkel gleich Null) parallele Ringe aufweisen. Es wurde schon bei der Beschreibung der einzelnen Kardanmodelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei der praktischen Anwendung in der Flugtechnik nur Kopplungen benutzt werden können, die sich durch Kardanmodelle darstellen lassen, deren Ringe in der Nullstellung gekreuzt sind.

V. Die Kopplung zwischen dem flugwindfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz und Diskussion der Kopplung eines flugbahnfesten Achsenkreuzes mit dem erdparallelen Achsenkreuz.

Bei der Kopplung des flugwindfesten Achsenkreuzes x_a, y_a, z_a mit dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g soll gemäß den früher getroffenen allgemeinen Festsetzungen über die gegenseitige Ausrichtung der einzelnen flugmechanischen Achsenkreuze untereinander das erdparallele Achsenkreuz das Richtachsenkreuz für das auszurichtende flugwindfeste Achsenkreuz sein. Diejenige Achse des erdparallelen Achsenkreuzes, deren Lage von Anfang an eindeutig bestimmt ist, ist die Vertikalachse z_g. Daher stellt z_g die natürliche Hauptdrehachse des Richtachsenkreuzes x_g, y_g, z_g dar.

Die Wahl der ausgezeichneten Drehachse ist beim flugwindfesten Achsenkreuz nicht schwierig. Physikalisch bedingt und in ihrer Lage gegeben ist zunächst nur die Flugwindachse x_a. Die Lage der Achsen y_a und z_a wird erst willkürlich festgelegt, wobei durch die einzelnen Kopplungen verschiedene Möglichkeiten bestehen. Es wird also zweckmäßigerweise die Achse x_a als ausgezeichnete Drehachse gewählt. Dadurch sind die drei Kopplungswinkel zwischen dem flugwindfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz folgendermaßen erklärt:

- γ Flugwind-Längsneigungswinkel. Winkel zwischen x_a und der Ebene $x_g y_g$. Drehachse des Winkels ist die Projektion der Achse y_a auf die horizontale Ebene $x_g y_g$, d. h. also eine zu x_a rechtwinklige horizontale Achse, deren positiver Richtungssinn, entgegen der Anströmung gesehen, nach rechts gerichtet ist. Meßebene ist die Ebene $x_a z_g$.
- μ Flugwind-Querneigungswinkel. Winkel zwischen z_a und der Ebene $x_a z_g$. Drehachse des Winkels ist die Achse x_a. Meßebene ist die Quertriebsebene $y_a z_a$.
- χ Flugwind-Azimutwinkel. Winkel zwischen der Projektion von x_a auf die Ebene $x_g y_g$ und der Achse x_g. Drehachse des Winkels ist die Achse z_g. Meßebene ist die Ebene $x_g y_g$.

[7]) Vgl. [10].

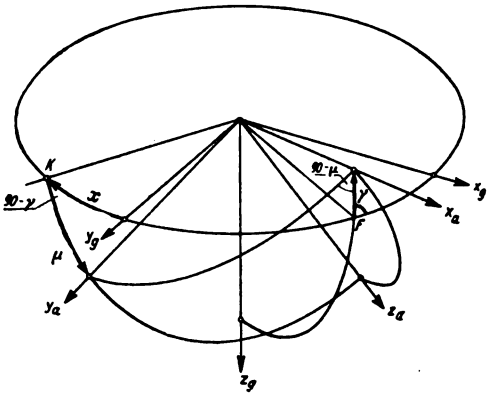


Bild 12. Ausrichtung des flugwindfesten Achsenkreuzes x_a, y_a, z_a gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g.

Die Anwendung des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie liefert, wie sich aus Bild 12 ersehen läßt, folgende Beziehungen zwischen den Richtungskosinus und den Kopplungswinkeln γ, μ, χ.

Aus Dreieck $x_a F x_g$: 1. $\cos(x_a x_g) = \cos\gamma \cos\chi$,
aus Dreieck $x_a F y_g$: 2. $\cos(x_a y_g) = \cos\gamma \sin\chi$,
3. $\cos(x_a z_g) = -\sin\gamma$,
aus Dreieck $y_a K x_g$: 4. $\cos(y_a x_g) = -\sin\chi\cos\mu + \cos\chi\sin\mu\sin\gamma$,
aus Dreieck $y_a K y_g$: 5. $\cos(y_a y_g) = \cos\chi\cos\mu + \sin\chi\sin\mu\sin\gamma$,
aus Dreieck $y_a x_a z_g$: 6. $\cos(y_a z_g) = \cos\gamma\sin\mu$,
aus Dreieck $z_a K x_g$: 7. $\cos(z_a x_g) = \sin\mu\sin\chi + \cos\mu\cos\chi\sin\gamma$,
aus Dreieck $z_a K y_g$: 8. $\cos(z_a y_g) = -\sin\mu\cos\chi + \cos\mu\sin\chi\sin\gamma$,
aus Dreieck $z_a x_a z_g$: 9. $\cos(z_a z_g) = \cos\gamma\cos\mu$.

Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_a, z_a und dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g hat daher die in Tafel 10 angegebene Form.

Tafel 10.

Flugwindfestes Achsenkreuz	Erdparalleles Achsenkreuz x_g	y_g	z_g
x_a	$+\cos\gamma\cdot\cos\chi$	$+\cos\gamma\cdot\sin\chi$	$-\sin\gamma$
y_a	$+\sin\gamma\cdot\cos\cdot\sin\mu$ $-\sin\chi\cdot\cos\mu$	$+\sin\gamma\cdot\sin\chi\cdot\sin\mu$ $+\cos\chi\cdot\cos\mu$	$+\cos\gamma\cdot\sin\mu$
z_a	$+\sin\gamma\cdot\cos\chi\cdot\cos\mu$ $+\sin\chi\cdot\sin\mu$	$+\sin\gamma\cdot\sin\chi\cdot\cos\mu$ $-\cos\chi\cdot\sin\mu$	$+\cos\gamma\cdot\cos\mu$

Wird die Windversetzung und der Aufwind vernachlässigt, so stimmt die Flugwindachse x_a mit der Tangente der Flugbahn überein. In diesem Falle ist z_a definiert als die in der Symmetrieebene des Flugzeugs gelegene Flugbahnnormale. Bei Berücksichtigung der Windversetzung ist der Neigungswinkel der Flugbahntangente gegenüber der Erde sowie der Winkel, den ihre Projektion auf die Erde mit einer bestimmten Anfangsrichtung bildet, nicht mehr mit γ und χ in Übereinstimmung. In diesem Falle muß man γ und χ mit einem Index versehen (z. B. mit B = Bahn). Man kann auch zur Beschreibung von Flugbahnbewegungen, die ohne Berücksichtigung der Kraftbeiwerte c_w, c_q, c_a vorgenommen werden sollen, ein besonderes flugbahnfestes Achsenkreuz definieren und dieses gegenüber der Erde ausrichten. Als derartiges flugbahnfestes Achsenkreuz ist von der Commission Internationale de Navigation Aérienne (CINA) das »natürliche« Achsenkreuz der Bahn vorgeschlagen worden. Die Achsen dieses flugbahnfesten Achsenkreuzes sind die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale der räumlichen Flugbahn. Die Hauptnormale ist diejenige Normale, die in der Ebene liegt, die durch zwei infinitesimal benachbarte Tangenten gebildet wird.

Digitized by Google

Die Ausrichtung dieser Achsen gegenüber den erdparallelen Achsen erfolgt formal in derselben Weise wie die Ausrichtung der flugwindfesten Achsen x_a, y_a, z_a.

In allen den Fällen, in denen bei der Behandlung flugmechanischer Gleichungen die — beispielsweise durch Kanalmessungen gewonnenen — Kraftbeiwerte c_w, c_q, c_a eingeführt werden sollen, wird zweckmäßigerweise das flugwindfeste Achsenkreuz benutzt und gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz ausgerichtet. Dabei wird man fast stets die Windversetzung außer Betracht lassen können, die Flugwindachse x_a also in Übereinstimmung mit der Flugbahntangente annehmen. Die Einführung des »natürlichen« Achsenkreuzes der Flugbahn hat zweifellos für Berechnungen, die sich hauptsächlich mit der Flugbahn befassen, gewisse Vorzüge. Zur Darstellung der Kraftgleichungen unter Einführung der Beiwerte c_w, c_q, c_a ist es jedoch nicht sehr geeignet, da hierzu ein weiterer Bezugswinkel nötig ist, der das ebene Achsenkreuz c_q, c_a gegenüber der Hauptnormalenebene auszurichten hat.

Zum Schluß soll an dieser Stelle auch noch darauf hingewiesen werden, daß die Größe des Winkels μ bei Betrachtung ein und desselben Flugzustandes von der jeweiligen Wahl der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz abhängt. Zwar ist seine formale Definition von der Kopplung unabhängig, die Lage der Auftriebsachse ist jedoch für einen bestimmten Flugzustand bei Zugrundelegung der F-Kopplung (z_{aF}) eine andere als bei Zugrundelegung der E-Kopplung (z_{aE}). Der Flugwind-Querneigungswinkel wird daher zunächst ebenfalls mit einem Index zu versehen sein (μ_E und μ_F).

VI. Die Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz.

Bei der Kopplung des flugzeugfesten Achsenkreuzes mit dem erdparallelen Achsenkreuz wird entsprechend den früher getroffenen Festsetzungen über die gegenseitige Ausrichtung der einzelnen flugmechanischen Achsenkreuze das erdparallele Achsenkreuz als Richtachsenkreuz gewählt. Hauptdrehachse des erdparallelen Achsenkreuzes ist wie bei der Ausrichtung des flugwindfesten Achsenkreuzes gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz die Lotachse z_g, deren Lage von vornherein eindeutig gegeben ist, während die Lage der zu z_g rechtwinkligen Achsen x_g und y_g zunächst nicht bestimmt ist und willkürlich gewählt werden kann.

Als ausgezeichnete Drehachse könnte grundsätzlich jede der drei flugzeugfesten Achsen gewählt werden. Dabei erweist sich jedoch die z-Achse von vornherein als wenig zweckmäßig, da in einer durchaus gewöhnlichen Lage des Flugzeugs gegenüber der Erde die z-Achse mit der z_g-Achse zusammenfällt, wobei das dazugehörige Kardanmodell in der Nullstellung parallele Ringe aufweist. Auf die Unzweckmäßigkeit von Kopplungen, deren Kardanringe in der Nullstellung parallel sind, wurde früher bereits hingewiesen.

Es bleiben also nur die x-Achse und die y-Achse zur Wahl. Eine Ausrichtung des Flugzeugs gegenüber der Erde durch drei Eulersche Winkel, von denen einer als Drehachse die flugzeugfeste y-Achse besitzt, ist ohne weiteres durchführbar. Bei der beschriebenen Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber dem durch eine Bodenplatte und durch die Anströmung gegebenen Achsenkreuz $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ (vgl. S. 118) durch die Winkel $\alpha_E, \beta_E, \varphi_e$ ist diese Kopplung praktisch angewendet. Die Wahl der x-Achse als ausgezeichnete Drehachse hat den Vorteil, daß die Kopplungswinkel zwischen dem flugzeugfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz formal in gleicher Weise definiert werden können, wie die entsprechenden Kopplungswinkel zwischen dem flugwindfesten Achsenkreuz und dem erdparallelen Achsenkreuz. Denn in beiden Fällen sind entsprechende Achsen, die in der Nullstellung in Übereinstimmung sind, ausgezeichnete Drehachsen des auszurichtenden Achsenkreuzes; es sind dies die Achsen x und x_a.

Die drei Kopplungswinkel φ, ϑ, ψ zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz und dem erdparallelen Achsenkreuz sind unter Zugrundelegung der x-Achse als ausgezeichneter Drehachse des auszurichtenden Achsenkreuzes x, y, z und der z_g-Achse als Hauptdrehachse des Richtachsenkreuzes x_g, y_g, z_g folgendermaßen erklärt:

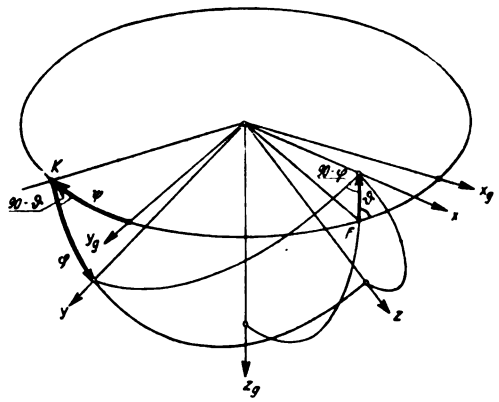


Bild 13. Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes x, y, z gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g.

ϑ Flugzeuglängsneigungswinkel. Winkel zwischen x und der Ebene $x_g y_g$. Drehachse des Winkels ist die Projektion der y-Achse auf die horizontale Ebene $x_g y_g$, d. h. also eine zu x rechtwinklige horizontale Achse, deren positiver Richtungssinn in Richtung der positiven x-Achse gesehen nach rechts gerichtet ist. Meßebene ist die Ebene $x z_g$.

φ Flugzeug-Querneigungswinkel. Winkel zwischen z und der Ebene $x z_g$. Drehachse des Winkels ist die x-Achse. Meßebene ist die Ebene $y z$.

ψ Flugzeug-Azimutwinkel. Winkel zwischen der Projektion von x auf die Ebene $x_g y_g$ und der Achse x_g. Drehachse des Winkels ist die Achse z_g, Meßebene ist die Ebene $x_g y_g$.

Es ist ohne weiteres zu erkennen, daß die Definitionen der Winkel formal mit den Definitionen der entsprechenden Kopplungswinkel zwischen dem flugwindfesten Achsenkreuz und dem erdparallelen Achsenkreuz übereinstimmen. Es ist lediglich x_a durch x, y_a durch y und z_a durch z zu ersetzen.

Aus Bild 13 lassen sich die Beziehungen zwischen den Richtungskosinus und den Kopplungswinkeln φ, ϑ, ψ mit Hilfe des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie in einfacher Weise herleiten. Sie können jedoch ebenfalls nach Ersetzung der flugwindfesten Achsen durch die flugzeugfesten Achsen aus den auf S. 119 abgeleiteten Beziehungen erhalten werden.

Im einzelnen gelten folgende Zusammenhänge:

Aus Dreieck $x F x_g$: 1. $\cos(x x_g) = \cos\vartheta \cos\psi$,
aus Dreieck $x F y_g$: 2. $\cos(x y_g) = \cos\vartheta \sin\psi$,
3. $\cos(x z_g) = -\sin\vartheta$,
aus Dreieck $y K x_g$: 4. $\cos(y x_g) = -\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \sin\vartheta$,
aus Dreieck $y K y_g$: 5. $\cos(y y_g) = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \sin\vartheta$,
aus Dreieck $y x z_g$: 6. $\cos(y z_g) = \cos\vartheta \sin\varphi$,
aus Dreieck $z K x_g$: 7. $\cos(z x_g) = \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \sin\vartheta$,
aus Dreieck $z K y_g$: 8. $\cos(z y_g) = -\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \sin\vartheta$,
aus Dreieck $z x z_g$: 9. $\cos(z z_g) = \cos\vartheta \cos\varphi$.

Die Transformationstafel für Umrechnungen zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g hat daher die in Tafel 11 angegebene Form.

Bild 14 zeigt das entsprechende Kardanmodell der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz. Im Modell sind positive Kopplungswinkel φ, ϑ, ψ eingestellt.

Digitized by Google

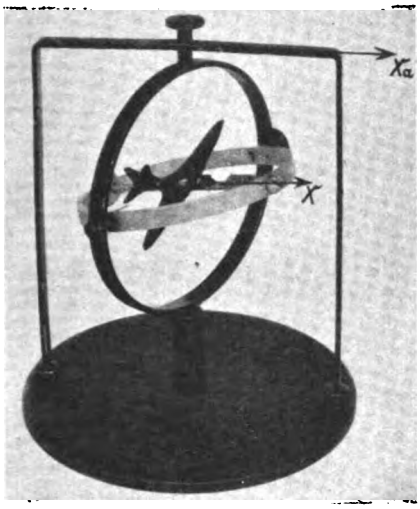


Bild 14. Kardanmodell der Kopplung zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g. Die Winkel φ, ϑ, ψ sind positiv eingestellt.

Tafel 11.

Flugzeugfestes Achsenkreuz	Erdparalleles Achsenkreuz x_g	y_g	z_g
x	$+\cos\vartheta\cdot\cos\psi$	$+\cos\vartheta\cdot\sin\psi$	$-\sin\vartheta$
y	$+\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\sin\varphi - \sin\psi\cdot\cos\varphi$	$+\sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi + \cos\psi\cdot\cos\varphi$	$+\cos\vartheta\cdot\sin\varphi$
z	$+\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\cos\varphi + \sin\psi\cdot\sin\varphi$	$+\sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cdot\sin\varphi$	$+\cos\vartheta\cdot\cos\varphi$

VII. Zusammenstellung der für die flugmechanischen Anwendungen am meisten geeigneten Achsenkreuze und Kopplungswinkel zu einem „Normsystem".

Bei den in der vorliegenden Arbeit angestellten Untersuchungen über die praktische Brauchbarkeit von verschiedenen Kopplungen flugmechanischer Achsenkreuze haben sich eine Reihe von Kopplungen als besonders geeignet für die Darstellung von aerodynamischen Unterlagen und zur Behandlung flugmechanischer Aufgaben herausgestellt, während sich andere wieder als weniger brauchbar erwiesen haben. In den einzelnen Abschnitten sind die Vorteile und Nachteile der verschiedenen Achsenkreuze und ihrer gegenseitigen Kopplungen eingehend besprochen worden. Es soll nun noch einmal eine Zusammenstellung aller Achsenkreuze und Kopplungswinkel gegeben werden, die durch die vorhergehenden Untersuchungen als die günstigsten festgestellt worden sind. Bei der nunmehr vorzunehmenden Wahl einer Anzahl von Achsenkreuzen, mit deren Hilfe flugmechanische Aufgaben zweckmäßigerweise behandelt werden, und bei der Zusammenstellung dieser Achsenkreuze und Kopplungswinkel zu einem »Normsystem« können bei der Bezeichnung von Achsen und Winkeln eine ganze Reihe von Indizes wegfallen, von denen in der vorliegenden Arbeit aus Gründen der Unterscheidung Gebrauch gemacht werden mußte. Ganz allgemein fallen als Folge der endgültigen Wahl einer bestimmten Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz, nämlich der E-Kopplung, sämtliche Indizes, die aus großen Buchstaben bestehen (E, F, K), weg. Alle Indizes, die aus kleinen Buchstaben bestehen, bleiben erhalten.

Auf Grund der Ergebnisse der angestellten Untersuchungen kann jetzt folgendes Normsystem von Achsenkreuzen und Kopplungswinkeln der Flugmechanik aufgestellt werden:

A. Achsenkreuze[8]).

1. Flugzeugfestes Achsenkreuz x, y, z.
2. Experimentelles Achsenkreuz x_e, y_e, z_e.
3a. Flugwindfestes Achsenkreuz x_a, y_a, z_a[8]).
3b. Strömungsfestes Achsenkreuz des Kanals x_a, y_a, z_a[8]).
4. Erdparalleles Achsenkreuz x_g, y_g, z_g.

Eine eingehende Erklärung der unter 1, 3a und 4 aufgeführten Achsenkreuze ist in Arbeit [9] und in [10] zu finden.

B. Kopplungswinkel.

1. Flugzeugfestes Achsenkreuz — Flugwindfestes Achsenkreuz. Die Kopplung erfolgt durch die aerodynamischen Winkel α und β. Dabei sind α und β die Winkel der E-Kopplung.
2. Flugzeugfestes Achsenkreuz — Experimentelles Achsenkreuz. Die Kopplung erfolgt durch den Anstellwinkel α.
3. Flugwindfestes Achsenkreuz — Experimentelles Achsenkreuz. Die Kopplung erfolgt durch den Schiebewinkel β.
4. Flugwindfestes Achsenkreuz — Erdparalleles Achsenkreuz. Die Kopplung erfolgt durch die Winkel μ, γ, χ.
5. Flugzeugfestes Achsenkreuz — Erdparalleles Achsenkreuz. Die Kopplung erfolgt durch die Winkel φ, ϑ, ψ.

Zwischen den einzelnen Kopplungswinkeln bestehen bei Zugrundelegung der E-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz folgende Beziehungen[9]):

$$\text{I.}\quad \cos\vartheta\sin\sigma = \sin\alpha\sin\mu + \cos\alpha\cos\mu\sin\beta,$$
$$\text{II.}\quad \cos\beta\cos\mu = \cos\varphi\cos\sigma + \sin\varphi\sin\sigma\sin\vartheta,$$
$$\text{III.}\quad \cos\gamma\cos\mu = \sin\vartheta\sin\alpha + \cos\vartheta\cos\alpha\cos\varphi,$$
$$\text{IV.}\quad \cos\gamma\sin\sigma = \sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi\sin\alpha,$$
$$\text{V.}\quad \sin\varphi\cos\alpha = \sin\mu\cos\sigma + \cos\mu\sin\sigma\sin\gamma,$$
$$\text{VI.}\quad \cos\vartheta\sin\varphi = \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma\sin\mu,$$
$$\text{VII.}\quad \cos\alpha\cos\beta = \sin\vartheta\sin\gamma + \cos\vartheta\cos\gamma\cos\sigma.$$

In diesen Gleichungen ist mit σ der Differenzwinkel $\psi - \chi$ bezeichnet.

[8]) Durch die Wahl der E-Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten bzw. dem strömungsfesten Achsenkreuz des Kanals stimmen die Achsen y_a und z_a des flugwindfesten Achsenkreuzes mit den Achsen y_{a_K} und z_{a_K} des strömungsfesten Achsenkreuzes des Kanals überein. Die Achsen x_a und x_{a_K} sind unabhängig von der Art der gewählten Kopplung stets identisch (vgl. [9]). Bei Messungen an Flugzeugen oder Modellen über einer Bodenplatte wird entweder das im Abschnitt IV beschriebene Achsenkreuz $x_{a_p}, y_{a_p}, z_{a_p}$ benutzt, das durch die Strömungsachse und durch die Bodenplatte gegeben ist, oder es wird ein erdparalleles Achsenkreuz x_g, y_g, z_g benutzt, das durch das Vorhandensein der Bodenplatte von vornherein als gegeben angesehen werden kann.

[9]) Die ausführliche Herleitung der zwischen den Kopplungswinkeln bestehenden Beziehungen wird sowohl für die E-Kopplung als auch für die F-Kopplung in einer weiteren Arbeit gegeben.

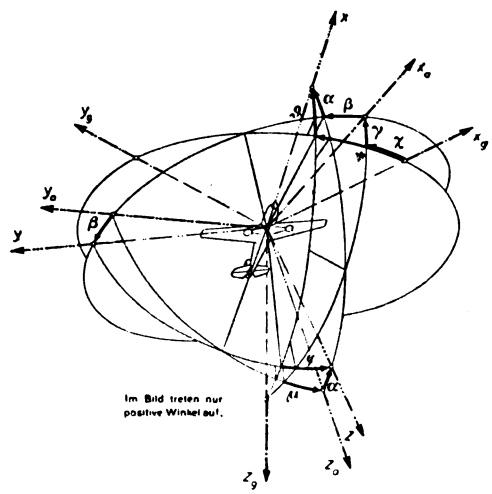


Bild 15. Gegenseitige Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes, des flugwindfesten Achsenkreuzes und des erdparallelen Achsenkreuzes. Bei der Ausrichtung des flugzeugfesten Achsenkreuzes gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz ist die E-Kopplung zugrundegelegt.

Digitized by Google

Bild 15 zeigt, in welcher Weise das flugzeugfeste Achsenkreuz gegenüber dem flugwindfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz ausgerichtet ist. Ferner sind in Bild 15 die Kopplungswinkel zwischen dem flugwindfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz eingetragen.

Es soll zum Schluß darauf hingewiesen werden, daß die bei der Aufstellung dieses Normsystems zugrunde gelegten Erwägungen, wie sie sich aus den eingehenden Untersuchungen der vorliegenden Arbeit ergeben haben, auch bei der Aufstellung des Normblattes DIN L 100, Bezeichnungen der Flugmechanik (2. Ausgabe), soweit es sich um Achsenkreuze und Kopplungswinkel handelt, richtunggebend gewesen sind. Die im Normblatt DIN L 100 auftretenden Achsen und Winkel sind in ihren Definitionen, Bezeichnungen und Vorzeichen in Übereinstimmung mit den entsprechenden Achsen und Winkeln des vorstehenden Normsystems. Über das Normblatt DIN L 100 hinausgehend enthält das vorstehende Normsystem das experimentelle Achsenkreuz x_e, y_e, z_e und den Kanalrollwinkel bzw. Krängwinkel φ_e, der bei Messungen über einer Bodenplatte eingeführt werden muß.

Die Bezeichnung der Achsen des flugzeugfesten Achsenkreuzes, des flugwindfesten Achsenkreuzes und des erdparallelen Achsenkreuzes durch die Buchstaben x, y, z in Verbindung mit den Indizes a und g ist international durch Beschlüsse der Commission Internationale de Navigation Aérienne (CINA) und der International Federation of National Standardizing Associations (ISA) vereinheitlicht. Die Achsen x_e, y_e, z_e des experimentellen Achsenkreuzes stimmen in ihrer Definition und in ihren Vorzeichen mit den Achsen überein, die im Anglo-Amerikanischen Schrifttum unter der Bezeichnung »wind axes« gebräuchlich sind.

Als Kopplung zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz ist vom ISA-Komitee 20, Luftfahrt, die E-Kopplung gewählt worden, während im »Règlement sur l'Usage International des Symboles et Termes employés en Technique Aéronautique« der CINA zur Zeit noch die F-Kopplung enthalten ist. Es ist jedoch auch von seiten der CINA in Aussicht genommen, die E-Kopplung einzuführen. Damit würden dann die Definitionen der aerodynamischen Winkel α und β in allen Ländern zur Übereinstimmung gelangen. In den anglo-amerikanischen Ländern ist die E-Kopplung seit langem üblich.

Die Definition und die Bezeichnungen für die Winkel φ, ϑ, ψ sind international einheitlich; lediglich ihre Vorzeichen sind je nach Wahl des positiven Richtungssinnes der Bezugsachsen in den einzelnen Ländern verschieden.

VIII. Zusammenfassung.

Die verschiedenen Möglichkeiten, die in der Flugmechanik gebräuchlichen Achsenkreuze gegenseitig auszurichten, werden zusammengestellt und beschrieben.

Es zeigt sich, daß für die flugmechanischen Anwendungen von den drei Kopplungsmöglichkeiten zwischen dem flugzeugfesten und dem flugwindfesten Achsenkreuz diejenige Kopplung am geeignetsten ist, bei der die y-Achse die ausgezeichnete Drehachse für einen der beiden Kopplungswinkel (Anstellwinkel α) ist. Diese Kopplung wird E-Kopplung genannt.

Im Zusammenhang mit dieser Kopplung wird ein experimentelles Achsenkreuz eingeführt, dessen Achsen x_e und z_e in der Symmetrieebene des Flugzeugs liegen und um die Flugzeugquerachse $y = y_e$ drehbar sind. Dieses Achsenkreuz gestattet die Einführung im Windkanal gemessener Größen in flugmechanische Gleichungen durch eine einfache ebene Transformation mit Hilfe des in der Symmetrieebene des Flugzeugs gemessenen Anstellwinkels α.

Die E-Kopplung wird durch Einführung eines dritten Kopplungswinkels auf den Fall eines über einer Bodenplatte angeblasenen Flugzeugs erweitert. Gleichzeitig wird ein in diesem Fall zu benutzendes besonderes »strömungsfestes Achsenkreuz für Messungen mit Bodenplatte« erklärt.

Von den drei Kopplungsmöglichkeiten zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z bzw. dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_a, z_a und dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g erweist sich die Kopplung als am günstigsten, bei der z_g-Hauptdrehachse des Richtachsenkreuzes und x bzw. x_a ausgezeichnete Drehachse des auszurichtenden Achsenkreuzes ist.

IX. Schrifttumsverzeichnis.

[1] G. H. Bryan, Die Stabilität der Flugzeuge. London 1911, Übersetzung von H. G. Bader. Verlag Julius Springer 1914.

[2] Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik. 2. Aufl. 1934. Verlag Julius Springer.

[3] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, I. u. IV. Lieferung. Verlag R. Oldenbourg.

[4] H. Blenk u. G. Mathias, Zur Vereinheitlichung der Formelzeichen der Flugmechanik im deutschen Schrifttum. Flugtechn. (1932) Nr. 22.

[5] M. Kohler, Sechskomponentenmessungen an einem Flugbootmodell über einer den Wasserspiegel darstellenden Platte. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 583.

[6] British Standard Glossary of Aeronautical Terms. Herausgegeben von der British Standards Institution, Juni 1933.

[7] Règlement sur l'usage international des symboles et termes employés en technique aéronautique. CINA 1935, 1936, 1937, 1938.

[8] Nomenclature for Aeronautics. NACA-Rep. No. 474, 1933.

[9] H.-J. Rautenberg, Allgemeine Grundgesetze und Überlegungen für die Aufstellung und gegenseitige Ausrichtung flugmechanischer Achsenkreuze. Im Druck.

[10] Bezeichnungen in der Flugmechanik. Normblatt DIN L 100. Herausgegeben vom Fachnormenausschuß für Luftfahrt (FALU), Berlin W 35.

Digitized by Google

Über Resonanzschwingungen in den Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren.

3. Teilbericht: Die Anregungsbedingungen beim Ansaugvorgang von Viertaktmotoren.

Von O. Lutz, Braunschweig.

Mitteilung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig, Motoreninstitut.

In den beiden ersten Berichten[1]) *sind Resonanzvorgänge in mehrfach angeregten Leitungen behandelt worden, wobei vorausgesetzt war, daß die Anregung durch reine Geschwindigkeitsschwankungen (die etwa beim Ansaugvorgang der Kolbenbewegung verhältig wären) bewirkt werden.*

Diese Annahme kann nur eine grobe Näherung darstellen, die wohl noch die Resonanzfrequenzen einigermaßen richtig zu berechnen gestattet (wie im 1. und 2. Teilbericht geschehen), die aber gerade bei dem für den Ansaugvorgang wichtigen Problem — Beeinflussung des Liefergrades durch Resonanzschwingungen — versagen muß. Bewirken nämlich die Schwingungen Änderungen im Liefergrad, so sind die Geschwindigkeitsschwankungen an der Anregungsstelle nicht mehr der Kolbenbewegung verhältig, sondern ihrerseits wieder eine Funktion der Schwingungen. Es ist naheliegend, daß eine Berechnungsweise, die dies nicht berücksichtigt, auch nicht zur Erklärung dieser Erscheinung herangezogen werden kann; trotzdem ist dies früher immer wieder versucht worden.

An dem Beispiel von Resonanzschwingungen, die durch eine periodisch gesteuerte Öffnung angeregt werden, hat der Verfasser seinerzeit eine Methode[2]) *entwickelt, bei der die Randbedingungen schärfer als bislang üblich angenähert wurden, und die vor allem auch die durch den Schwingungsvorgang bewirkte Änderung der Durchströmmenge zu erklären und zu berechnen imstande war.*

Im vorliegenden Teilbericht wird diese Methode auf die Vorgänge beim Ansaugvorgang eines Viertaktmotors ausgedehnt.

In Ziffer 1 wird die früher entwickelte Methode kurz dargestellt und begründet. Ziffer 2 zeigt die Anwendung der Methode auf den Ansaugvorgang, woraus sich die gesuchte Randbedingung und die Bedingung für die Liefergradänderung ergibt. In Ziffer 3 werden die gefundenen Bedingungen auf den einfachsten Fall eines Einzylindermotors angewendet, und schließlich in Ziffer 4 die Grundlagen für die Behandlung von Mehrzylinderanordnungen zusammengestellt.

Gliederung.

1. Begründung und Ableitung der Berechnungsmethode.
2. Anwendung der Methode auf den Ansaugvorgang.
3. Beispiel: Einzylindermotor.
4. Die Behandlung von Mehrzylinderanordnungen.
5. Zusammenfassung.

1. Begründung und Ableitung der Berechnungsmethode.

Die Begründung werde am Beispiel einer periodisch gesteuerten Öffnung gegeben[3]). Am Ende $x = l$ eines Rohres gehe die Strömung durch eine periodisch veränderliche Öffnung in einen Raum, wobei keine Druckrückbildung auftrete. Der engste Strömungsquerschnitt sei f, der Rohrquerschnitt f_r. Mit den in Bild 1 angegebenen Beziehungen gilt

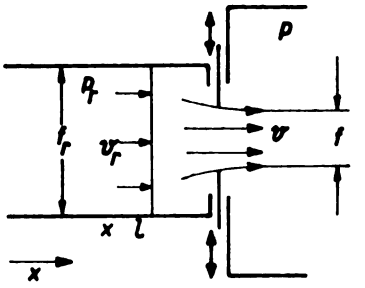


Bild 1. Zur Aufstellung der Randbedingung (8).

$$\frac{\varrho}{2}(v^2 - v_r^2) = p_r - p$$

(wobei das lokale Beschleunigungsglied vernachlässigt ist); mit der Kontinuitätsbedingung

$$f v = f_r v_r$$

wird daraus

$$v_r = \frac{f}{\sqrt{f_r^2 - f^2}} \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_r - p)} \quad \ldots\ldots (1)$$

Führt man die Mittelwerte $\bar{v}_0$, f_0, p_{r0} und p_0 durch

$$v_r = \bar{v}_0\left(1 + \frac{\Delta v}{\bar{v}_0}\right), f = f_0\left(1 + \frac{\Delta f}{f_0}\right),$$
$$p_r = p_{r0}\left(1 + \frac{\Delta p_r}{p_{r0}}\right), p = p_0\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

ein, und vernachlässigt man Produkte und Potenzen der verhältnismäßigen Abweichungen vom Mittelwert $\frac{\Delta v}{\bar{v}_0}, \frac{\Delta f}{f_0}$ usw., so kann man trennen in[4])

$$\bar{v}_0 = \frac{f_0}{\sqrt{f_r^2 - f_0^2}} \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_{r0} - p_0)} \quad \ldots\ldots (2)$$

und

$$\Delta v = \frac{\bar{v}_0 \Delta f}{f_0}\left(1 + \frac{\Delta p_r - \Delta p}{2(p_{r0} - p_0)} \ldots\right) + \bar{v}_0\left(\frac{\Delta p_r - \Delta p}{2(p_{r0} - p_0)} \ldots\right) \quad (3)$$

In der früheren Arbeit[5]) ist der Gedankengang entwickelt und durchgeführt, daß man zur Berechnung von Größe und Phase der Schwingung die linearen Glieder, zur Berechnung der Veränderung in den Mittelwerten aber die Glieder höherer Ordnung verwendet, wobei zunächst nur die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden sollen. Teilt man also die mittlere Geschwindigkeit v_0 nach

$$v_0 = \bar{v}_0 + \Delta v_0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

[1]) Luftf.-Forsch. Bd. 16 (1939) S. 139 und S. 339.

[2]) O. Lutz, Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen von Kolbenmaschinen, Heft 3 der Berichte aus dem Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der TH Stuttgart, Stuttgart 1934.

[3]) Vgl. im einzelnen die in Fußnote 2 erwähnte Arbeit.

[4]) $\sqrt{f_r^2 - f^2}$ ist zur Vereinfachung gleich $\sqrt{f_r^2 - f_0^2}$ gesetzt, da der Ventilquerschnitt f immer klein gegenüber dem Rohrquerschnitt f_r sein wird.

[5]) A. a. O. S. 61.

Digitized by Google

auf in den schon benutzten Wert $\bar{v}_0$ nach (2), der für die Anordnung ohne Schwingungen gilt, und den zusätzlichen Wert Δv_0, der die Veränderungen durch den Schwingungsvorgang wiedergibt, so kommt nacheinander:

$$\bar{v}_0 = \frac{f_0}{\sqrt{f_r^2 - f_0^2}} \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_{r0} - p_0)} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Delta v = \frac{\bar{v}_0}{f_0}\Delta f + \frac{v_0}{2(p_{r0} - p_0)}(\Delta p_r - \Delta p) \quad \ldots (5)$$

$$\Delta v_0 = \frac{\bar{v}_0}{2 f_0 (p_{r0} - p_0)}\Delta f (\Delta p_r - \Delta p) \quad \ldots\ldots (6)$$

Wie im ersten Teilbericht geschildert[6]), und in der früheren Arbeit[7]) ausführlich dargelegt ist, wird die Berechnung mittels komplexen Größen durchgeführt; es wird entsprechend gesetzt

$$\left.\begin{aligned} \Delta v &= \sum \mathfrak{V}_n e^{in\omega t} \\ \Delta f &= \frac{f_0}{\bar{v}_0} \sum \mathfrak{F}_n^* e^{in\omega t} \\ \Delta p_r &= \varrho a \sum \mathfrak{P}_{rn}^* e^{in\omega t} \\ \Delta p &= \varrho a \sum \mathfrak{P}_n^* e^{in\omega t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

(a bedeutet die Schallgeschwindigkeit; sämtliche Schwingungsvektoren sind auf die Dimension einer Geschwindigkeit zurückgeführt).

Aus (5) folgt damit die Randbedingung

$$\mathfrak{V}_n = \mathfrak{F}_n^* + \varepsilon(\mathfrak{P}_{rn}^* - \mathfrak{P}_n^*) \quad \ldots\ldots (8)$$

mit der »Öffnungsziffer«

$$\varepsilon = \frac{\varrho a \bar{v}_0}{2(p_{r0} - p_0)} = \frac{a f_0^2}{\bar{v}_0 (f_r^2 - f_0^2)} \quad \ldots\ldots (9)$$

Für die Änderung Δv_0 des Mittelwertes ergibt sich zunächst aus (6)

$$\Delta v_0 = \frac{\varepsilon}{\bar{v}_0}\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0 = \frac{2\pi}{\omega}} \left(\sum \mathfrak{F}_n^* e^{in\omega t}\right)\left[\sum (\mathfrak{P}_{rn}^* - \mathfrak{P}_n^*) e^{in\omega t}\right] dt; \quad (10)$$

in der früheren Arbeit[8]) ist nachgewiesen, daß hieraus

$$\Delta v_0 = \frac{\varepsilon}{2\bar{v}_0} \sum \mathfrak{F}_n^* (\mathfrak{P}_{rn}^* - \mathfrak{P}_n^*) \quad \ldots\ldots (10a)$$

wird (die Summe wird gebildet aus skalaren Produkten). Wenn also der Differenzvektor $\mathfrak{P}_{rn}^* - \mathfrak{P}_n^*$ gegen den Öffnungsvektor $\mathfrak{F}_n^*$ einen Phasenunterschied von weniger als einer Viertelperiode besitzt, wird durch den Schwingungsvorgang die im Mittel beförderte Gasmenge vergrößert.

In der früheren Arbeit sind Beispiele über diesen Fall der Anregung durchgeführt und die Übereinstimmung der Ergebnisse der Rechnungsmethode mit dem Versuch belegt.

2. Anwendung der Methode auf den Ansaugvorgang.

Der Ansaugvorgang bei einem Viertaktmotor läßt sich für die hier interessierenden Erscheinungen in zwei Vorgänge zerlegen, deren erster in Ziffer 1 bereits behandelt ist: in den Strömungsvorgang durch die Steueröffnung und in den Auffüllvorgang im Zylinderinneren.

Für den ersten Vorgang ist die Randbedingung bereits bekannt:

$$\mathfrak{V}_r = \mathfrak{F}^* + \varepsilon(\mathfrak{P}_r^* - \mathfrak{P}^*) \quad \ldots\ldots (8a)$$

(angeschrieben für die Grundharmonische); der zweite Vorgang ist noch näher zu untersuchen.

Bei adiabatischem Ablauf des Ausfüllvorgangs gilt mit den Bezeichnungen des Bildes 2:

$$\frac{dp}{p} = \varkappa \frac{dG}{G} - \varkappa \frac{dJ}{J}, \quad \ldots\ldots (11)$$

wobei mit G das jeweilige Gasgewicht, mit J das augenblickliche Zylindervolumen bezeichnet wird; für die zeitlichen Änderungen folgt daraus:

$$\frac{dG}{dt} = \gamma \frac{dJ}{dt} + \frac{\gamma}{\varkappa p} J \frac{dp}{dt}.$$

Rechnet man den Zylinderinhalt nach

$$s = \frac{J}{f_r}$$

in Rohrlängen um, so ergibt sich mit der einströmenden Gasmenge $\frac{dG}{dt} = \gamma f_r v_r$:

$$v_r = \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\varkappa p}\frac{dp}{dt} \quad \ldots\ldots (12)$$

Wenn keine Druckschwankungen im Zylinder auftreten würden, folgte die sonst benutzte Randbedingung (vgl. die Einleitung):

$$v_r = \frac{ds}{dt} \quad \ldots\ldots (12a)$$

Wie in Ziffer 1 werden wieder Mittelwerte und Abweichungen von diesen Mittelwerten

$$\frac{ds}{dt} = c_0\left(1 + \frac{\Delta c}{c_0}\right), \; s = s_0\left(1 + \frac{\Delta s}{s_0}\right)$$

in (12) eingeführt:

$$v_0\left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right) = c_0\left(1 + \frac{\Delta c}{c_0}\right) + \frac{s_0}{\varkappa p_0}\frac{1 + \frac{\Delta s}{s_0}}{1 + \frac{\Delta p}{p_0}} \cdot \frac{d\Delta p}{dt} \quad (12b)$$

und die Schwingungsgrößen wie in (7) in komplexer Form angesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta c &= \sum \mathfrak{C}_n e^{in\omega t} \\ \Delta s &= \sum \mathfrak{S}_n e^{in\omega t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

Die linearen Glieder führen dann zu der Randbedingung (für die $n$te Harmonische angeschrieben):

$$\mathfrak{V}_{rn} = \mathfrak{C}_n + i\frac{n\omega s_0}{a}\mathfrak{P}_n^* \quad \ldots\ldots (14)$$

Die Glieder zweiter Ordnung ergeben für die Mittelwerte zunächst:

$$v_0 = c_0 + \frac{1}{\varrho a^2}\Delta s \frac{d(\Delta p)}{dt} - \frac{s_0}{\varrho a^2 p_0}\Delta p \cdot \frac{d\Delta p}{dt}; \quad (15)$$

in der gleichen Weise wie bei (10) und (10a) wird hieraus schließlich — wenn $\Delta v_0 = v_0 - c_0$ gesetzt wird —

$$\Delta v_0 = \frac{\omega}{2a} \sum \mathfrak{S}_n \cdot in\, \mathfrak{P}_n^* \quad \ldots\ldots (15a)$$

(das letzte Glied in (15) gibt keinen Beitrag, da die erste Ableitung der Funktion selbst um eine Viertelperiode vorauseilt, das skalare Produkt beider demnach verschwindet).

Nun besteht zwischen den Harmonischen $\mathfrak{S}_n$, die den jeweiligen Zylinderinhalt schildern, und den Harmonischen $\mathfrak{C}_n$, die die augenblickliche Kolbengeschwindigkeit wiedergeben, ein bestimmter Zusammenhang.

In Bild 3 ist für einen Viertaktmotor der periodische Zusammenhang aufgezeichnet (Einfluß der endlichen Pleuelstangenverhältnisse vernachlässigt). Mit ω ist dabei die Grundfrequenz des Ansaugvorgangs bezeichnet (also die halbe Motorfrequenz).

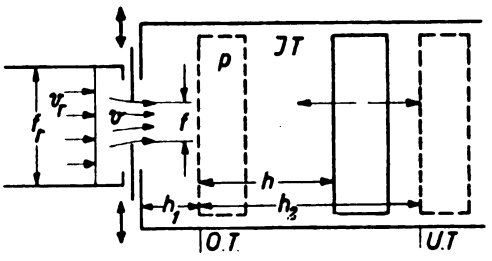


Bild 2. Zur Aufstellung der Randbedingung für den Ansaugvorgang.

[6]) Luftf.-Forsch. Bd. 16 (1939) S. 139.
[7]) A. a. O. S. 24 u. f.
[8]) A. a. O. S. 62.

Digitized by Google

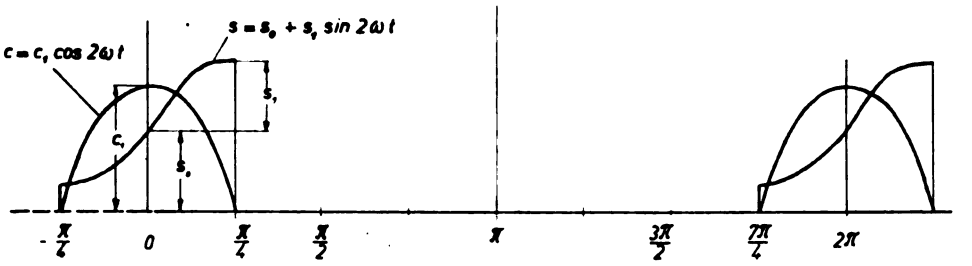


Bild 3. Kolbengeschwindigkeit und Zylinderraumgröße beim Ansaugvorgang.

Es muß gelten:

$$c = \frac{ds}{dt}, \text{ also } c_1 = 2\,\omega\, s_1 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Die harmonische Zerlegung bringt

$$\left.\begin{aligned} s = s_0 + \frac{\sqrt{2}}{3\pi} s_1 \sin\omega t + \frac{s_1}{4}\sin 2\omega t + \frac{3\sqrt{2}}{5\pi} s_1 \sin 3\omega t \\ + \frac{2}{3\pi} s_1 \sin 4\omega t \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

und

$$\left.\begin{aligned} c = \frac{1}{2\pi} c_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} c_1 \cos\omega t + \frac{c_1}{4}\cos 2\omega t \\ + \frac{2\sqrt{2}}{5\pi} c_1 \cos 3\omega t + \frac{1}{3\pi} c_1 \cos 4\omega t \ldots . \end{aligned}\right\}$$

woraus sich unter Berücksichtigung von (16) die allgemeine Beziehung

$$\frac{d\,\mathfrak{S}_n}{dt} = \frac{n^2}{4}\mathfrak{C}_n \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

oder

$$i\omega\,\mathfrak{S}_n = \frac{n}{4}\mathfrak{C}_n \quad \ldots\ldots \quad (18a)$$

ergibt.

Damit geht (15a) über

$$\Delta v_0 = -\frac{n^2}{8a}\sum \mathfrak{C}_n \mathfrak{P}_n^* \quad \ldots\ldots \quad (15b)$$

Zusammenfassend stellt man fest:

Die Randbedingung am Zylinderende der Rohrleitung wird dargestellt durch die Vektorgleichungen

$$\mathfrak{V}_{rn} = \mathfrak{F}_n^* + \varepsilon\,(\mathfrak{P}_{rn}^* - \mathfrak{P}_n^*) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

und

$$\mathfrak{V}_{rn} = \mathfrak{C}_n + i\,\frac{n\,\omega\,s_0}{a}\,\mathfrak{P}_n^* \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

während sich die durch den Schwingungsvorgang bewirkte Änderung des Liefergrades aus

$$\Delta v_0 = -\frac{n^2}{8a}\sum \mathfrak{C}_n \mathfrak{P}_n^* \quad \ldots\ldots \quad (15b)$$

ergibt.

Es soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß n die Ordnungszahl der Harmonischen angibt, nicht etwa eine Drehzahl.

Zwischen der »Öffnungsziffer« ε in (8) und der Frequenz ω besteht beim Ansaugvorgang eines Viertaktmotors ein hyperbolischer Zusammenhang. Nach (9) gilt nämlich

$$\varepsilon = \frac{a\,f_0^2}{\bar{v}_0\,(f_r^2 - f_0^2)}; \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

die mittlere Rohrgeschwindigkeit $\bar{v}_0$ (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Schwingungen) ist aber der Maschinendrehzahl, also der Grundfrequenz ω verhältig. Und zwar folgt aus (17) für $\bar{v}_0$ zunächst:

$$\bar{v}_0 = \frac{c_1}{2\pi}, \quad \ldots\ldots \quad (17a)$$

woraus mit (16)

$$\bar{v}_0 = \frac{\omega\, s_1}{\pi}$$

wird. Nach Bild 3 hängt nun die Hubamplitude s_1 und der Mittelwert s_0 durch

$$\frac{s_0 + s_1}{s_0 - s_1} = \varepsilon_v$$

zusammen

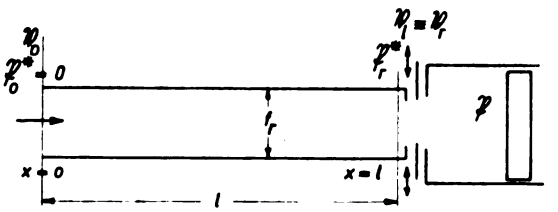


Bild 4. Schema der Ansaugleitung eines Einzylindermotors.

(ε_v Verdichtungsverhältnis), so daß schließlich

$$\bar{v}_0 = \frac{\varepsilon_v - 1}{\varepsilon_v + 1}\,\frac{\omega\, s_0}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad (17b)$$

kommt, und sich für die Öffnungsziffer ε:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\frac{\omega\, s_0}{a}} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

mit

$$\beta = \frac{\pi\,(\varepsilon_v + 1)\,f_0^2}{(\varepsilon_v - 1)\,(f_r^2 - f_0^2)} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

ergibt.

8. Beispiel: Einzylindermotor.

Der Einzylindermotor besitze eine am Anfang offene Leitung von der Länge l (Bild 4).

Wie im ersten Teilbericht geschildert[9]), bestehen bei einer offenen Leitung folgende Zusammenhänge zwischen den Schwingungsgrößen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_r^* &= -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega\, l}{a}\cdot\mathfrak{V}_r \\ \text{und} \\ \mathfrak{V}_0 &= \frac{1}{\cos\frac{\omega\, l}{a}}\cdot\mathfrak{V}_r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Mit den Randbedingungen (8) und (14) — angeschrieben für die Grundharmonische — und unter Beachtung von (19) ergibt sich nach Elimination der Schwingungsgrößen $\mathfrak{P}_r^*$, $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{V}_r$:

$$\mathfrak{V}_0\left(\cos\frac{\omega\, l}{a} - \frac{\omega\, s_0}{a}\sin\frac{\omega\, l}{a} + \frac{i}{\beta}\left(\frac{\omega\, s_0}{a}\right)^2\cos\frac{\omega\, l}{a}\right) = \mathfrak{C} + \frac{i}{\beta}\left(\frac{\omega\, s_0}{a}\right)^2\mathfrak{F}^*; \quad \ldots \quad (22)$$

für $s_0 = 0$ geht die Gleichung in die bekannte Form

$$\mathfrak{V}_0\cos\frac{\omega\, l}{a} = \mathfrak{C} \quad \ldots\ldots \quad (22a)$$

über.

Gl. (22) beschreibt die Schwingungsvorgänge in allgemeiner Form; sind die Abmessungen der Anordnung bekannt, so kann damit der Gesamtvorgang verfolgt werden[10]).

Die in der vorliegenden Arbeit zu ziehenden Schlüsse sollen an Hand eines formell vereinfachenden Beispiels gewonnen werden.

Es werde angenommen, daß

$$s_0 = \frac{l}{2} \text{ und } \beta = 1 \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

[9]) A. a. O. S. 141, Formeln (15).

[10]) Es ist beabsichtigt, in einem späteren Bericht ein Beispiel durchzuführen.

Digitized by Google

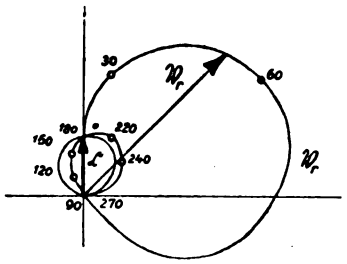


Bild 5. Zusammenhang zwischen der Kolbengeschwindigkeitsschwankung ζ und der Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_r$ (bisher übliche Annahme: $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C}$).

sei, und daß ferner der Öffnungsverlauf der Steueröffnung dem Verlauf der Kolbengeschwindigkeit in Bild 3 gleiche; da alle Schwingungsgrößen auf die Dimension einer Geschwindigkeit zurückgeführt sind, ist in diesem Fall einfach

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\,a)$$

Schließlich werde der dimensionslose Ausdruck $\frac{\omega l}{a} = \varphi$ gesetzt.

Dann gehen die Randbedingungen (8) und (14) zunächst über in (für die Grundharmonische):

$$\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C} + \frac{2}{\varphi}(\mathfrak{P}_r^* - \mathfrak{P}^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

und

$$\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C} + i\frac{\varphi}{2}\mathfrak{P}^*, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

und es folgt statt (22):

$$\mathfrak{V}_0\left(\cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi + i\frac{\varphi^2}{4}\cos\beta\right) = \mathfrak{C}\left(1 + i\frac{\varphi^2}{4}\right), \quad (22\,b)$$

woraus man mit (21) erhält:

$$\mathfrak{V}_r = \frac{1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\varphi^4}{16}}{\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)^2 + \frac{\varphi^4}{16}}\mathfrak{C} - i\frac{-\frac{\varphi^3}{8}\operatorname{tg}\varphi}{\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)^2 + \frac{\varphi^4}{16}}\mathfrak{C}. \quad (24)$$

Mit (14a) ergibt sich noch:

$$\mathfrak{P}^* = \frac{-\frac{\varphi^2}{4}\operatorname{tg}\varphi}{\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)^2 + \frac{\varphi^4}{16}}\mathfrak{C} - i\frac{\operatorname{tg}\varphi - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^2\varphi}{\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)^2 + \frac{\varphi^4}{16}}\mathfrak{C}. \quad (25)$$

Aus dem letzten Ergebnis (25) kann nach (15b) auf den Einfluß der Grundharmonischen auf die Änderung des Liefergrads geschlossen werden:

Es gilt

$$\Delta v_0 = -\frac{\mathfrak{C}\,\mathfrak{P}^*}{8a};$$

mit (25) wird daraus

$$\Delta v_0 = \frac{\frac{\varphi^2}{32a}\operatorname{tg}\varphi}{\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)^2 + \frac{\varphi^4}{16}} C_1^2,$$

wobei mit C_1 der Absolutwert der Amplitude der Grundschwingung bezeichnet wird.

Nach (17) ist

$$C_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} c_1;$$

mit (17a) folgt

$$C_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\bar{v}_0,$$

und es wird unter Berücksichtigung der Entwicklungen, die zur Formel (19) geführt haben:

$$\frac{\Delta v}{\bar{v}_0} = \frac{4}{9\pi}\frac{\varepsilon_v - 1}{\varepsilon_v + 1}\frac{\frac{\varphi^3}{8}\operatorname{tg}\varphi}{\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)^2 + \frac{\varphi^4}{16}} \quad . \quad . \quad (26)$$

Die Ergebnisse lassen sich am besten graphisch darstellen. Zunächst ist in Bild 5 der Zusammenhang nach (24) zwischen

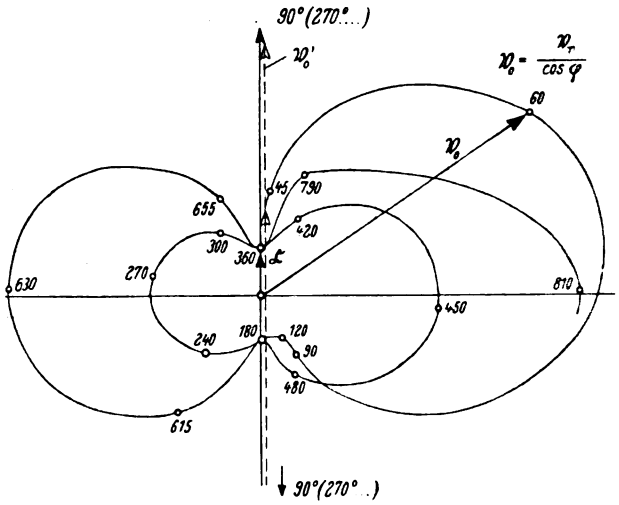


Bild 6. Verlauf der Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_0$ am Rohranfang ($\mathfrak{V}_0'$ gilt für die übliche Annahme $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C}$).

der Kolbengeschwindigkeitsschwankung und der Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_r$ aufgezeichnet.

Die Abweichung von der üblichen Annahme, daß $\mathfrak{V}_r$ gleich $\mathfrak{C}$ sei, ist bei dem gewählten Beispiel oft beträchtlich. Die Abweichungen in der Phasenlage können mehr als eine Viertelperiode betragen, und auch in der Amplitude treten beträchtliche Unterschiede auf, die besonders groß sind im Frequenzbereich vor der ersten Resonanz ($0 < \varphi < 90°$).

Weiterhin gibt Bild 6 den Verlauf der Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_0$ am Rohranfang wieder (nach 21). Es ist interessant, daß keine ausgeprägten Resonanzen mehr auftreten, obwohl keinerlei Dämpfung angenommen ist. Während bei der üblichen Annahme $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C}$ die Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_0'$ mit $\mathfrak{C}$ phasengleich (gestrichelt eingezeichnet) ist und an den Resonanzstellen (90°, 270°) unendlich groß wird, ändert sich die Phasenlage von $\mathfrak{V}_0$ kontinuierlich, wobei aber keine unendlich großen Amplituden mehr auftreten. Die den Ort der Vektorspitze von $\mathfrak{V}_0$ beschreibenden kreisähnlichen Kurven nehmen einen überraschenden Verlauf. Die erste Kurve, die den Verlauf $0 < \varphi < 180°$ beschreibt, ist groß, die zweite ($180 < \varphi < 360°$) klein; von nun ab werden aber die weiteren Kurven größer und größer. Verfolgt man die Zusammenhänge näher, so ergibt sich, daß auf dieses Anwachsen der Schwingungswerte in erster Linie die Ventilbewegung von Einfluß ist; man kann also schließen, daß jede Änderung in der Ventilbewegung sich wesentlich auf den Ablauf des Vorgangs auswirken muß. Für große Frequenzen, also große φ- oder $\frac{\omega l}{a}$-Werte überwiegen in (22) nämlich die in $\frac{\omega l}{a}$ bzw. $\frac{\omega s_0}{a}$ linearen und quadratischen Glieder, so daß (22) ersetzt werden kann durch

$$\mathfrak{V}_0\left(-\frac{\omega s_0}{a}\sin\frac{\omega l}{a} + \frac{i}{\beta}\left(\frac{\omega s_0}{\alpha}\right)^2\cos\frac{\omega l}{a}\right) = \frac{i}{\beta}\left(\frac{\omega s_0}{a}\right)^2\mathfrak{F}^*$$

oder

$$\mathfrak{V}_0\left(\cos\frac{\omega l}{a} + i\frac{\beta}{\frac{\omega s_0}{a}}\sin\frac{\omega l}{a}\right) = \mathfrak{F}^* \quad . \quad . \quad . \quad (22\,c)$$

Wie nicht im einzelnen belegt werden soll[11]), schildert eine Gleichung von der Form (22c) die Vorgänge in einer am Anfang gedrosselten Leitung (Bild 7), die am Ende durch eine Geschwindigkeitsschwankung in der Größe der Öffnungsschwankung $\mathfrak{F}^*$ angeregt wird. Der Faktor $\frac{\beta}{\frac{\omega s_0}{a}}$ entspricht der »Drosselziffer« δ_1, die an der angegebenen Stelle zu

$$\delta_1 = \frac{f_r^2}{f_1^2}\frac{v_0}{a} = \frac{v_d^2}{a\,v_0}$$

[11]) Vgl. die in Fußnote 2 erwähnte Arbeit, S. 37 u. f.

Digitized by Google

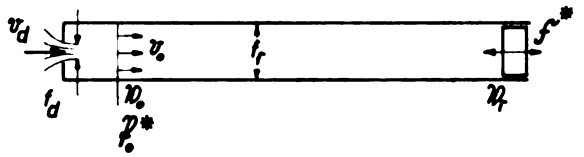


Bild 7. Ersatzschema.

abgeleitet ist. Man kann also bei den höheren Frequenzen die Anordnung ersetzt denken durch die in Bild 7 enthaltene Anordnung, wobei die Drosselung bemerkenswerterweise mit wachsenden Frequenzen immer geringer zu wählen ist.

Schließlich ist in Bild 8 die durch den Schwingungsvorgang bewirkte Änderung $-\frac{\Delta v_0}{\bar{v}_0}$ des Liefergrads in Abhängigkeit von $\varphi = \frac{\omega l}{a}$ aufgezeichnet, wobei ein Verdichtungsverhältnis $\varepsilon_v = 6$ angenommen ist. Es zeigt sich, daß der Schwingungsvorgang sowohl Verbesserungen als auch Verschlechterungen des Liefergrades mit sich bringen kann.

In das Bild sind noch die Amplitudenwerte $|\mathfrak{V}_0|$ der Geschwindigkeitsschwankungen am Rohranfang eingezeichnet (nach Bild 6). Die erste Resonanz tritt vor dem für die Annahme $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C}$ gültigen Werte (90°) auf, und zwar beträgt der Unterschied gegen 33%. Die nächsten Resonanzen liegen aber nur wenig verschieden (270°, 450°, 630° . . .). Das Bild zeigt auch deutlich das Ansteigen des Höchstwertes bei den höheren Resonanzen (geringere Drosselung). Die Liefergradverbesserungen liegen nun immer vor den Schwingungsresonanzen, werden in der Resonanz gleich Null und sind nach der Resonanz — immer im Sinne wachsender φ-Werte — negativ. Bei dem gewählten Beispiel beträgt der Bestwert der Verbesserung immerhin 30%, bei den höheren Resonanzen allerdings nicht mehr als 6 bis 7%. Berücksichtigt man, daß der Schwingungsverlauf verlustlos (reibungs- und dämpfungsfrei) angenommen ist, so wird man zumindest bei den höheren Resonanzen keine wesentlichen Auswirkungen mehr erwarten dürfen.

In einem späteren Bericht soll an Hand von Beispielen untersucht werden, wie stark der Einfluß von bestimmten Anordnungsverhältnissen, vor allem einer Zeitquerschnittsversetzung des Öffnungsorganes ist.

Zusammenfassend stellt man vorläufig fest:

1. Der Ansaugvorgang bei einem Viertaktmotor bewirkt Schwingungen, die sich erheblich anders ausbilden können als Schwingungen, die durch eine reine Geschwindigkeitsschwankung angeregt werden. Vor allem treten bei offenen Rohren keine unendlich großen Schwingungswerte auf;
2. die Frequenzen der großen Schwingungswerte (Resonanzfrequenzen) liegen bei der ersten Resonanz niedriger als im Fall der Geschwindigkeitsanregung, das Ansaugrohr scheint also verlängert; die höheren Resonanzen stimmen dagegen gut überein;
3. bei höheren Frequenzen verhält sich die Anordnung wie eine am Anfang gedrosselte Leitung, die am Ende mit einer Geschwindigkeitsschwankung gleich der Öffnungsschwankung angeregt wird, wobei die Drosselung mit steigender Frequenz abnehmend gewählt werden muß;
4. durch den Schwingungsvorgang kann der Liefergrad wesentlich beeinflußt werden;
5. eine Liefergradverbesserung tritt immer vor den Resonanzstellen ein (im Sinne wachsender $\frac{\omega l}{a}$-Werte). Sie ist am größten vor der ersten Resonanz (bei dem gewählten Beispiel 30%). Nach den Resonanzstellen wird der Liefergrad verschlechtert.

4. Die Behandlung von Mehrzylinderanordnungen.

Die Behandlung von Mehrzylindermotoren bringt keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Die Erscheinungsformen werden aber schnell so verwickelt und undurchsichtig, daß die allgemeine Behandlung wenig Ergebnisse von grundsätzlicher Bedeutung verspricht. Dagegen ist die Einzelbehandlung einer gegebenen Anordnung nicht schwierig; die für eine Zweizylinderanordnung geltenden Ansätze sollen kurz entwickelt werden.

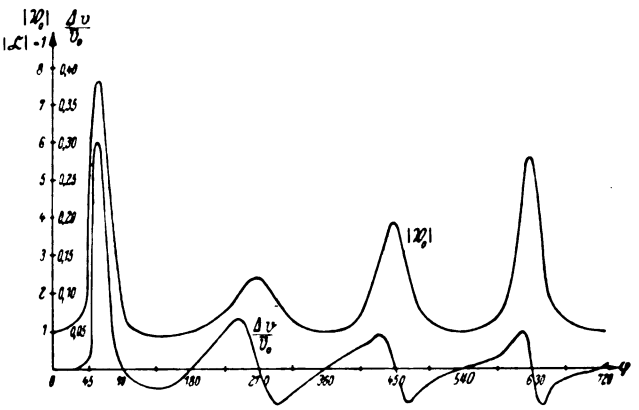


Bild 8. Durch den Schwingungsvorgang bewirkte Änderung des Liefergrads.

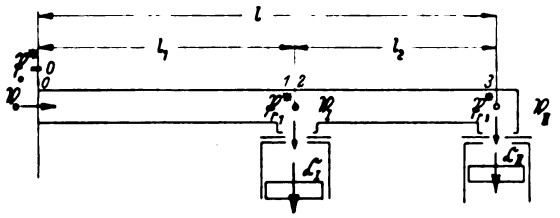


Bild 9. Zweizylinderanordnung, schematisch.

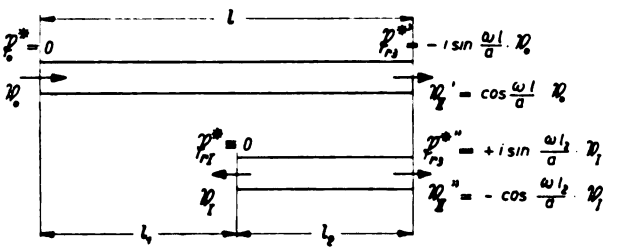


Bild 10. Aufspaltung der Anordnung nach Bild 9.

Die Ansaugleitung eines Zweizylindermotors ist in Bild 9 schematisch aufgezeichnet. Aus dem ersten Teilbericht[11]) ist bekannt, daß sich die Vorgänge dann einfach verfolgen lassen, wenn die dort begründete Aufteilung der Rohranordnung in einfache »offene« Rohrteile vorgenommen wird, wie in Bild 10 geschehen. Rohrteil 1 (Länge l) besitzt am Anfang die — gesuchte — Geschwindigkeitsschwankung $\mathfrak{V}_0$; die Druckschwankung $\mathfrak{P}_0^*$ kann gleich Null gesetzt werden (offenes Rohr). Am Ende dieses Rohres treten nach bekannten Ableitungen folgende Schwankungswerte auf:

$$\mathfrak{P}'^*_3 = -i \sin \frac{\omega l}{a} \cdot \mathfrak{V}_0,$$

$$\mathfrak{V}'_{II} = \cos \frac{\omega l}{a} \mathfrak{V}_0.$$

Rohrteil 2 (Länge l_2) ist am Anfang ebenfalls »offen«, da die an dieser Stelle dem Teil 1 zu überlagernde Druckschwankung $\mathfrak{P}^*_1 = 0$ ist; angeregt wird Teil 2 mit der (noch nicht bekannten) Geschwindigkeitsschwankung $-\mathfrak{V}_1$. Entsprechend diesen Anfangsbedingungen werden die Schwankungswerte am Ende:

$$\mathfrak{P}''_3 = +i \sin \frac{\omega l_2}{a} \cdot \mathfrak{V}_I,$$

$$\mathfrak{V}''_{II} = -\cos \frac{\omega l_2}{a} \cdot \mathfrak{V}_I.$$

Die Gesamtanordnung weist demnach am Ende die Schwankungswerte

[11]) A. a. O. S. 142.

Digitized by Google

$$\mathfrak{P}_{r3}^{*} = -i \sin \frac{\omega l}{a} \cdot \mathfrak{V}_0 + i \sin \frac{\omega l_2}{a} \cdot \mathfrak{V}_I, \quad . \quad (27\,a)$$

$$\mathfrak{V}_{II} = \cos \frac{\omega l}{a} \cdot \mathfrak{V}_0 - \cos \frac{\omega l_2}{a} \cdot \mathfrak{V}_I \quad . \quad . \quad (27\,b)$$

auf. Nun muß noch der Zusammenhang zwischen den Schwankungswerten der Geschwindigkeit, des Druckes und denen der Ansauganordnung (Kolbengeschwindigkeit und Steueröffnung) gefunden werden.

Die Randbedingungen (8) und (14) lassen sich unter Berücksichtigung des Wertes (19) für die Öffnungsziffer anschreiben (für die Grundharmonische):

$$\mathfrak{V}_r = \mathfrak{F}^* + \frac{\beta}{\frac{\omega s_0}{a}} (\mathfrak{P}_r^* - \mathfrak{P}^*) \quad . \quad . \quad . \quad : \quad (8\,b)$$

und

$$\mathfrak{V}_r = \mathfrak{C} + i \frac{\omega s_0}{a} \mathfrak{P}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,b)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{P}^*$ folgt für den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{V}_r$ und $\mathfrak{P}_r^*$:

$$\mathfrak{V}_r = \frac{\mathfrak{C} + i \frac{\omega^2 s_0^2}{\beta a^2} \mathfrak{F}^*}{1 + i \frac{\omega^2 s_0^2}{\beta a^2}} + \frac{i \frac{\omega s_0}{a}}{1 + i \frac{\omega^2 s_0^2}{\beta a^2}} \mathfrak{P}_r^*, \quad . \quad . \quad (28)$$

was sich mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{C} + i \frac{\omega^2 s_0^2}{\beta a^2} \mathfrak{F}^*}{1 + i \frac{\omega^2 s_0^2}{\beta a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und

$$\mathfrak{b} = \frac{i \frac{\omega s_0}{a}}{1 + i \frac{\omega^2 s_0^2}{\beta a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29\,a)$$

in die allgemeine Form

$$\mathfrak{V}_r = \mathfrak{a}\mathfrak{C} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{P}_r^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28\,a)$$

bringen läßt.

Setzt man bei der Anordnung nach Bild 9 gleiche Zylinder voraus, so sind die Vorwerte a und b für beide Anregungsstellen gleich und es besteht folgender Zusammenhang:

$$\mathfrak{V}_I = \mathfrak{a}\mathfrak{C}_I + \mathfrak{b}\,\mathfrak{P}_{r1}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,c)$$

und

$$\mathfrak{V}_{II} = \mathfrak{a}\mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{P}_{r3}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,d)$$

Wenn noch berücksichtigt wird, daß die Druckschwankung, die im offenen Rohrteil 1 in der Entfernung l_1 vom Rohranfang auftritt, sich zu

$$\mathfrak{P}_{r1}^* = -i \sin \frac{\omega l_1}{a} \cdot \mathfrak{V}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,e)$$

ergibt, so sind damit die 5 Ansätze (27a) bis (27e) aufgestellt, aus denen die 5 Unbekannten $\mathfrak{V}_0$, $\mathfrak{V}_I$, $\mathfrak{V}_{II}$, $\mathfrak{P}_{r1}^*$ und $\mathfrak{P}_r^*$ ermittelt werden können.

In gleicher Weise kann jede Anordnung behandelt und untersucht werden; daß allgemeine Schlüsse nur schwer zu ziehen sind, liegt formell darin begründet, daß die Vorwerte a und b einmal gerichtete Werte (von Vektorcharakter) sind, und zum anderen nicht konstant bleiben, sondern sich mit der Frequenz ändern.

5. Zusammenfassung.

Ausgehend von einer früher entwickelten Methode werden die den Ansaugvorgang von Viertaktmotoren beschreibenden Randbedingungen für Resonanzschwingungen aufgestellt. Die Ergebnisse weichen zum Teil wesentlich von den unter der Annahme abgeleiteten ab, daß die Geschwindigkeitsschwankung an der Stelle des Zylinders der Kolbenbewegung verhältig sei. Nur bei der Lage der Resonanzfrequenzen ist der Unterschied geringer.

Durch die entwickelte Methode kann auch der Einfluß von Resonanzschwingungen auf den Liefergrad nachgewiesen und begründet werden.

In einem späteren Bericht sollen die Ergebnisse auf ein bestimmtes Beispiel angewandt werden.

Digitized by Google

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 5 enthält Arbeiten von: Ergebnis des Preisausschreibens 1938/39 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung S. 129, H. Ide S. 130—144, O. Nübling S. 145—153, M. Kolscher S. 154—160

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 5 SEITE 129 BIS 160 | MÜNCHEN, 20. 5. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Ergebnis des Preisausschreibens 1938/39 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung . . . . . Seite 129

Flugmotorengetriebe und ihre Berechnung. Von H. Ide . . . . . Seite 130

Die Zahnradbeanspruchung und ihre Berechnungsweise bei Flugmotorengetrieben. Von O. Nübling . . . . . Seite 145

Unstetige Strömungen mit endlichem Totwasser. Von M. Kolscher . . Seite 154

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. Mai 1940 Lfg. 5

Ergebnis des Preisausschreibens 1938/39 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung.

Die Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung hatte anläßlich ihrer Hauptversammlung 1938 in Berlin Preisaufgaben ausgeschrieben. Auf der Grundlage des die Luftfahrtforschung behandelnden Schrifttums und sonstiger Kenntnisse und Unterlagen war für den Flugzeugbau, für das Gebiet der Flugmotoren, für das Flugfunkwesen und das Waffenwesen der Luftfahrt je eine Arbeit vorgesehen. Die Aufgabenstellung für das Gebiet des Flugmotorenbaues hatte den folgenden Wortlaut:

Flugmotorenbau.

Die Forderung geringsten Raum- und Gewichtsbedarfes bei größten Leistungen gilt besonders für Zahnradgetriebe der Flugmotoren (Luftschraubenantrieb, Laderantrieb). Die Entwicklung ist nicht abgeschlossen, um so mehr, als durch konstruktive Gestaltung, durch Werkstoffe und Werkstattherstellung Grenzen nach oben noch nicht erreicht sind.

Die im allgemeinen Maschinenbau übliche Berechnungsweise führt zu unbrauchbaren Entwürfen, während die auf Grund praktischer Erfahrungen aufgestellten brauchbaren Berechnungsunterlagen durch die Entwicklung, besonders hinsichtlich der Erfahrungsbeiwerte, Wandlungen unterworfen sind.

Aufgabe.

Es ist entweder durch eine allgemein zusammenfassende Arbeit oder aber durch eine eingehende Sonderbehandlung eines Teilgebietes (konstruktive Gestaltung, Werkstoffe, Berechnungsunterlagen u. dgl.) auf Grund von Veröffentlichungen und Erfahrungen der Stand der Entwicklung von Zahnradgetrieben in Flugmotoren und deren Entwicklungsmöglichkeit aufzuzeigen.

Preisgericht für die Aufgabe.

Triebnigg, Heinrich, Professor, Berlin (Vorsitzender);
Bollenrath, Franz, Dr.-Ing., Berlin;
Holfelder, Otto, Professor, Berlin;
Wolff, Harald, Direktor, Berlin.

Ergebnis des Preisausschreibens.

Einen Preis in Höhe von 1000 RM. erhielt die Arbeit mit dem Kennwort »10706« von Herrn Dipl.-Ing. Ernst Rossow, Dessau.

Ein weiterer Preis in Höhe von 1000 RM. wurde der unter dem Kennwort »Leistungssteigerung im Flugmotorenbau« von Herrn Dipl.-Ing. Hans Ide, Berlin-Adlershof, eingereichten Arbeit zuerkannt.

Die Arbeit mit dem Kennwort »Wärmestau«, die von Herrn Ingenieur Otto Nübling, Berlin, eingesandt worden war, wurde mit einem Preis von 500 RM. ausgezeichnet.

Im folgenden sind die Arbeiten von H. Ide und O. Nübling wiedergegeben. Die Arbeit von E. Rossow wird vorerst nicht veröffentlicht.

Digitized by Google

Flugmotorengetriebe und ihre Berechnung.

Von H. Ide, Berlin.

Die meisten Verfahren der Zahnradberechnung weisen eine für den allgemeinen Maschinenbau zwar ausreichende, für Flugmotorengetriebe jedoch zahlenmäßig nicht genau erfaßbare Sicherheit auf. Um bei Flugmotorengetrieben den Aufwand an Gewicht und Raum aufs äußerste beschränken zu können, müssen bei ihrer Berechnung unter Berücksichtigung der besonderen Betriebsverhältnisse und der tatsächlichen Spitzendrehmomente die höchstzulässigen Beanspruchungen zugrunde gelegt werden. Es müssen gleichzeitig alle Möglichkeiten der Regelung, Gestaltung, Fertigung, Werkstoffbehandlung, Fehlerprüfung und betrieblichen Wartung ausgenutzt werden, damit wesentliche Überbeanspruchungen einzelner Teile möglichst vermieden und ein Höchstmaß an Werkstoff- und Gestaltfestigkeit sowie Bearbeitungsgüte für jedes einzelne Bauteil erzwungen werden.

Gliederung.

Einleitung.
I. Allgemeines zur Dynamik des Luftschrauben- und Laderantriebes.
II. Übersicht über die Ausführungsformen von Flugmotorengetrieben,
1. Luftschraubengetriebe,
2. Ladergetriebe.
III. Über die Beanspruchung von Flugmotorengetrieben,
1. Verbessertes Verfahren der Zahnradberechnung,
2. Untersuchung von ausgeführten Flugmotorengetrieben und Rechnungsgrundlagen.
IV. Einige grundsätzliche Maßnahmen zur Herabsetzung der Spitzenbeanspruchungen in Flugmotorengetrieben.
Zusammenfassung.
Schrifttum.

Einleitung.

Die Notwendigkeit, die Flugmotoren mit Luftschrauben- und Ladergetrieben auszurüsten, trat etwa gleichzeitig ein, als man während des Weltkrieges eine Leistungssteigerung der Flugmotoren durch Erhöhung der Kurbelwellendrehzahlen [1]*) und eine Verringerung des Leistungsabfalles beim Höhenflug durch Einführung von Ladern [2] anstrebte. Inzwischen sind Luftschrauben- und Ladergetriebe zu selbstverständlichen Bestandteilen fast jedes Hochleistungsflugmotors geworden. Die Luftschraubengetriebe dienen zur Untersetzung der Kurbelwellendrehzahl auf eine geringere Luftschraubendrehzahl $\left(i = \frac{1}{1{,}3} \text{ bis } \frac{1}{4}\right)$ und die Ladergetriebe zur Übersetzung der Kurbelwellendrehzahl ins Schnelle ($i = 7$ bis 15). Für Sonderzwecke werden die Luftschraubengetriebe auch als Sammel-, Verzweigungs-, Winkel-, Schalt- und Drehmomentmeßgetriebe ausgebildet, während für das Ladergetriebe neuerdings eine Drehzahlregelung mit Geschwindigkeitsgängen oder stufenlos angestrebt wird. Anordnungsmäßig nimmt das Luftschraubengetriebe meistens ein Kurbelwellenende des Motors vollständig in Anspruch, während der Laderantrieb vorwiegend am anderen Kurbelwellenende abgezweigt wird. Auf die Verringerung der Getriebebeanspruchung bei grundsätzlich anderen Anordnungen wird später noch hingewiesen. Die übrigen zahlreichen Abtriebe am Flugmotor treten wegen ihrer geringen Leistungsübertragung als Zahnradgetriebe weniger in Erscheinung.

Über die Berechnung von Flugmotorengetrieben sind im Schrifttum nur geringe Angaben zu finden. Die Schwierigkeit besteht in der Ermittlung der tatsächlichen Kräfte und in der für Flugmotorengetriebe besonders wichtigen Wahl der zulässigen Beanspruchungen. Die aus der Vortriebsleistung bzw. Laderantriebsleistung errechneten mittleren statischen Belastungen der Zahnräder können nur in den seltensten Fällen der genauen Berechnung zugrunde gelegt werden, da sie meistens durch dynamische Belastungen der Getriebe mehrfach übertroffen werden. Auf die notwendige Berücksichtigung der dynamischen Kräfte bei der Berechnung der Luftschraubengetriebe haben bereits Kutzbach [3, 4] und Noack [1] hingewiesen.

I. Allgemeines zur Dynamik des Luftschrauben- und Laderantriebes.

Als größtes statisches Drehmoment kommt für das Luftschraubengetriebe im allgemeinen das aus der Kurzvolleistung des Motors in der Volleistungshöhe und für das Ladergetriebe das aus der Laderantriebsleistung bei höchstzulässiger Überdrehzahl sich ergebende Antriebsmoment in Betracht. Befindet sich der Kurzvolleistungspunkt bereits auf dem abfallenden Teil der Motorleistungscharakteristik, so ergibt sich das größte Abtriebsmoment für den Luftschraubenantrieb bei einer geringeren Motordrehzahl.

Die hinzukommenden dynamischen Spitzendrehmomente sind im wesentlichen durch Winkelbeschleunigungen bedingt, die vom Motor, von der Luftschraube, von den Verzahnungen oder von sonstigen Übertragungsgliedern ausgehen können. Diese Beschleunigungen können vorwiegend positiv bzw. negativ sein, wie sie beispielsweise beim Anlassen, Gasgeben, Gasnehmen, Gangwechsel und bei der Luftschraubenverstellung auftreten oder sie können mit wechselndem Vorzeichen einer mittleren Winkelgeschwindigkeit überlagert sein, wie dies bei Verzahnungsungenauigkeiten, bei ungleichförmiger Drehungsübertragung durch Gelenke (Ferntriebe), bei großer Ungleichförmigkeit der Drehkräfte (kleine Zylinderzahl, Paarzündungen, ungleiche Zündfolge) und bei kritischen Drehzahlen in stärkerem Maße der Fall ist.

Bei Luftschraube und Lader handelt es sich um zwei Kreiselradmaschinen, die ähnliche Charakteristiken aufweisen. Der wesentliche Unterschied im Antrieb besteht darin, daß die Luftschraube als Hauptabtrieb fast die gesamte Motorleistung in Anspruch nimmt, während durch den Lader der Motor nur angezapft wird. Die bei besonderen Betriebs- und Regelbereichen des Flugmotors im Laderantrieb auftretenden dynamischen Kräfte wurden in einer Arbeit von Ide [5] behandelt. Für den Luftschraubenantrieb dürften ähnliche Gesichtspunkte maßgebend sein, nur mit dem Unterschied, daß das polare Massenträgheitsmoment der Luftschraube das der übrigen Triebwerkteile erheblich übertrifft und dadurch das Beschleunigungsvermögen des gesamten Motors stark beeinflußt wird. Beim Anlassen oder bei einer plötzlichen Betätigung der Leistungsdrossel des Motors können daher im Luftschraubengetriebe

*) Die Zahlen beziehen sich auf das am Schluß der Arbeit angegebene Schrifttum.

Digitized by Google

Spitzendrehmomente auch nur im Ausmaß der Überschußdrehmomente des Motors auftreten, während beim Ladergetriebe die Motorbeschleunigung im Verhältnis der Übersetzung vervielfacht wird und das aus dem Produkt »Trägheitsmoment des Laderlaufrades × Winkelbeschleunigung« bedingte Drehmoment im Überschußdrehmoment bzw. in der kinetischen Energie des angezapften Motors meistens eine entsprechende Deckung findet. Um die Spitzendrehmomente im Laderantrieb auf ein zulässiges Maß zu beschränken, werden vorwiegend Rutschkupplungen vorgesehen, die mit Rücksicht auf große Anlaßbeschleunigungen häufig als Fliehkraft-Rutschkupplungen ausgebildet werden. Auch die Verringerung des Massenträgheitsmomentes der Laderlaufräder bringt Vorteile.

Die Beschleunigungen mit wechselndem Vorzeichen führen zu besonders ungünstigen Zahnbelastungen, wenn die Beschleunigungsdrücke größer als die statischen Zahndrücke werden und dadurch eine Flankenablösung (Stoßbelastung) oder sogar ein Eingriffswechsel zwischen Arbeits- und Rückenflanken der Zahnräder (Wechselbelastung) auftritt. Auf die bei Luftschraubengetrieben durch Verzahnungsungenauigkeiten zu erwartenden zusätzlichen Beschleunigungszahndrücke hat Kutzbach [4] hingewiesen und ihre Erfassung an einem Zahlenbeispiel erläutert. Diese zusätzlichen Zahnbeanspruchungen müßten theoretisch mit dem Quadrat der Wälzgeschwindigkeiten ansteigen und deshalb auch bei Ladergetrieben besonders stark in Erscheinung treten. Nach amerikanischen Angaben nähert sich die dynamische Belastung der Zähne bei Wälzgeschwindigkeiten über 50 m/s jedoch asymptotisch einem Grenzwert, für dessen Ermittlung bei Buckingham [6] eine Formel angegeben wird.

Weiterhin ist das Luftschraubengetriebe den durch das Arbeitsspiel der Gas- und Massenkräfte bedingten ungleichförmigen Drehkräften ausgesetzt, da es zwischen Kurbelwelle und der als Schwungrad wirkenden Luftschraube liegt. Auf die Anbringung zusätzlicher Schwungmassen an der Kurbelwelle zur Verbesserung der Gleichförmigkeit muß beim Flugmotor aus naheliegenden Gründen verzichtet werden. Die Gleichförmigkeit nimmt jedoch mit der Wahl größerer Zylinderzahlen zu. Eine Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit bei der Zahnradberechnung ist auf jeden Fall geboten, wenn es sich um geringe oder besonders ungünstige Zylinderzahlen (z. B. Vierzylinder-Viertakter) oder um Motoren mit ungleicher Zündfolge oder mit Paarzündungen handelt [7].

Die größte Bedeutung unter den dynamischen Beanspruchungen kommt schließlich der Berücksichtigung der Schwingungsbeanspruchung der Flugmotorengetriebe zu. Es konnten Fälle festgestellt werden, bei denen durch kritische Drehschwingungen im Betriebsdrehzahlbereich des Motors zusätzliche Beanspruchungen des Luftschraubengetriebes von mehr als dem Vierfachen der Normallast und im Laderantrieb sogar von mehr als dem Sechsfachen auftreten. Die zahlenmäßige Ermittlung dieser Schwingungsbeanspruchungen wird später erläutert. Allgemein ist zu sagen, daß bei der üblichen Anordnung des Luftschraubengetriebes in unmittelbarer Nähe der Luftschraube (größten Masse) bei der Aufstellung der Eigenschwingungsformen des Flugmotors die Ersatzmassen des Luftschraubengetriebes meistens auch in der Nähe von Schwingungsknoten liegen. Dies bewirkt, daß die Schwingungsbeanspruchung hier nahezu ihren Höchstwert erreicht, daß jedoch die Drehschwingungsausschläge verhältnismäßig klein sind. Sofern nun diese Schwingungsausschläge geringer als das Zahnspiel bleiben, wird eine ungünstige Wechselbeanspruchung der Zähne und ein sog. Zähneklappern vermieden. Bei Ladergetrieben ist die Ermittlung der Schwingungsbeanspruchung außer für die Zahnradberechnung auch noch für die Bemessung der Rutsch- und Schaltkupplungen wichtig. Sind die gewählten Rutschdrehmomente geringer als die durch kritische Drehschwingungen bedingten Spitzendrehmomente. so wirkt die Rutschkupplung im Laderantrieb als Schwingungsdämpfer und wird in Resonanzbereichen in kurzer Zeit zerstört sein.

Zusammenfassend läßt sich über die Bedeutung der Spitzendrehmomente für die Zahnradberechnung sagen, daß den einmaligen oder kurzzeitigen Spitzendrehmomenten durch eine entsprechende Sicherheit gegen Bruch begegnet und daß den als Dauerbelastung auftretenden dynamischen Spitzendrehmomenten mindestens die gleiche Bedeutung wie den statischen Momenten zuerkannt werden muß.

II. Übersicht über die Ausführungsformen von Flugmotorengetrieben.

1. Luftschraubengetriebe.

Die serienmäßige Einführung von Luftschraubengetrieben, die unmittelbar am Motor angeflanscht werden, setzte während des Weltkrieges in England, Frankreich und USA. ein, während sie in Deutschland vorbereitet wurde. Trotzdem liegen gerade aus dieser Zeit umfangreiche Erfahrungen mit Luftschraubengetrieben in Deutschland vor, die bei der Untersuchung von ausländischen Motoren [3] vorwiegend jedoch bei der Lösung der Antriebsfrage der deutschen R-Flugzeuge [8] gesammelt wurden. Die R-Flugzeuge wurden z. T. mit Sammelgetrieben ausgerüstet, die bereits Leistungen bis zu 1000 PS übertrugen und dabei noch Schaltkupplungen, elastische Kupplungen und Gelenke enthielten, häufig auch als Winkelgetriebe ausgebildet waren. Man findet bei diesen Getrieben zahlreiche grundsätzliche Gestaltungsmerkmale, die auch heute noch bei Luftschraubengetrieben zur Anwendung kommen, ja sogar neuerdings erst wieder aufgegriffen werden. Die Anfänge der Entwicklung von Luftschraubengetrieben sind in der Arbeit von Noack [1] ausführlich beschrieben worden, so daß sich die folgenden Ausführungen auf neuere Luftschraubengetriebe beschränken können.

Als einfachste Lösung zeigt Bild 1 das Luftschraubengetriebe eines englischen Reihenmotors, bei dem die Kurbelwellendrehzahl durch ein einfaches geradflankiges Stirnräderpaar untersetzt wird. Es ist hier eine zweckmäßige Trennung der Motor- und Getriebebauteile durchgeführt. Die Luftschraubenwelle mit dem großen Stirnrad und das Ritzel sind mit reichlich bemessener Lagerung in einem besonderen, verwindungssteifen Getriebegehäuse angeordnet, das den Schraubenschub aufnimmt und stirnseitig an den Motor angeflanscht wird. Das Ritzel ist als hohler Kastenträger[1]) sehr leicht und steif gehalten. Die Verbindung zwischen Ritzel und Kurbelwelle erfolgt über eine Zahnkupplung, Bild 2, die als Gelenk[1]) das Motordrehmoment

[1]) Für Luftschraubengetriebe erstmals von der Zahnradfabrik Friedrichshafen angewandt.

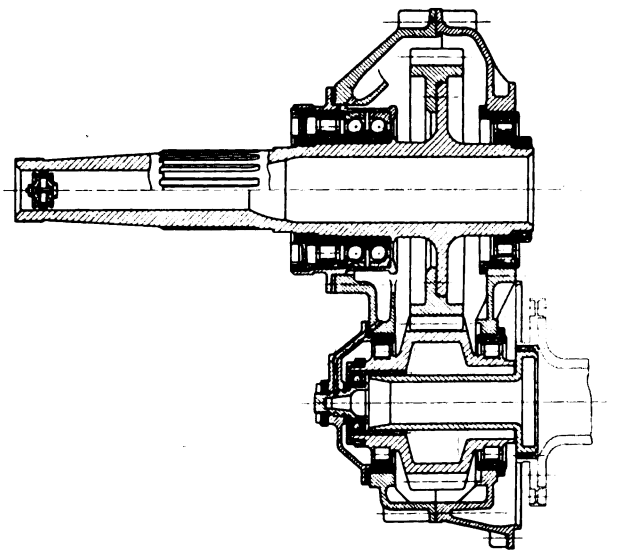


Bild 1. Luftschraubenuntersetzung durch geradflankiges Stirnräderpaar beim Rolls-Royce-Buzzard-Motor. $i = 1{,}81$.

Digitized by Google

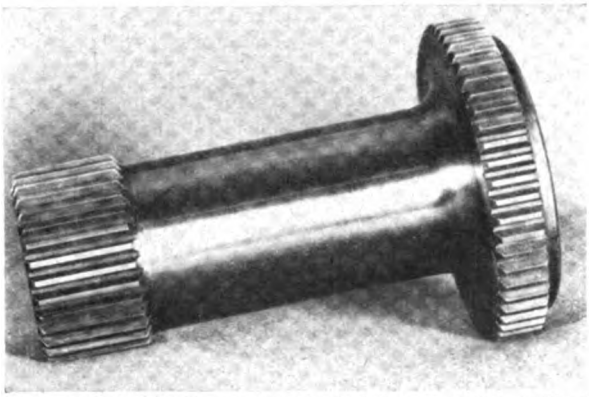


Bild 2. Zahnkupplung zur biegekräftefreien Drehmomentübertragung zwischen Kurbelwelle und Ritzel (max. Gelenkausschlag $\approx \pm 0{,}5$ mm).

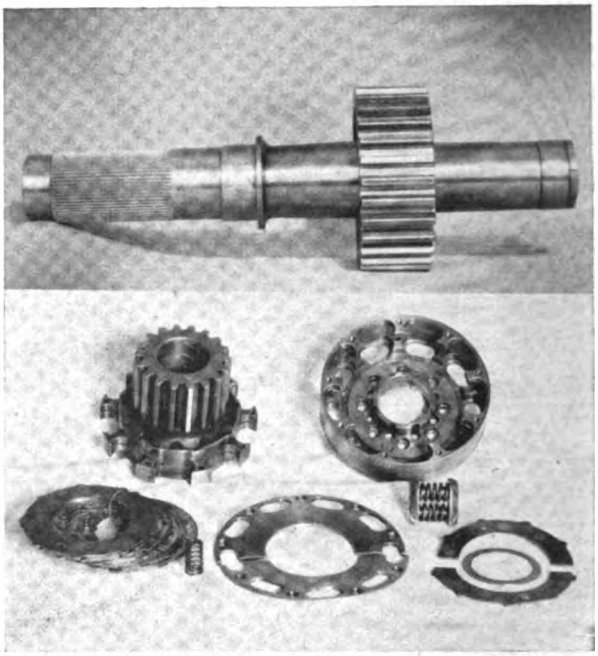
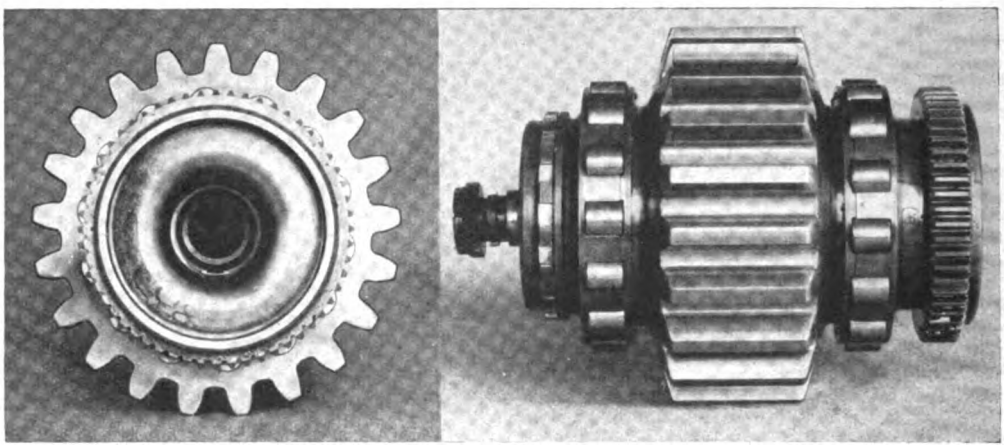


Bild 4 (rechts). Getrieberäder des Fiat-Motors A 30 RA, bei dem Kurbelwelle und Ritzel durch eine drehfedernde Kupplung mit eingebautem Reibungs-Schwingungsdämpfer verbunden sind. $i = 1{,}61$.

Bild 3 (unten). Zahnform und Lagerung des Ritzels beim Buzzard-Luftschraubengetriebe.



biegekräftefrei auf das Getriebe überträgt und die Zahnräder in ihrer ganzen Breite zum einwandfreien Tragen kommen läßt. Die Breite der Getrieberäder nimmt unter Berücksichtigung der Spannungsverteilung zum Kopf hin ab, Bild 3, die Übergänge zwischen Zahnfuß und Fußkreis sind gut abgerundet, alle Kanten sind sorgfältig gebrochen und Riefen und Rillen aus den Zahnlücken durch Polieren beseitigt. Allen diesen Maßnahmen ist eine besondere Beachtung gezollt worden.

Eine drehfedernde Kupplung zwischen Kurbelwelle und Ritzel findet sich bei einem Fiat-Motor, Bild 4. Es ist hier eine bedeutend weichere Federung zwischengeschaltet, als sie beispielsweise die Zahnkupplung in Bild 3 darstellt. Durch eine entsprechende Vorspannung dieser Federung und Einstellung des in die Kupplung eingebauten Reibungs-Schwingungs-Dämpfers hat man es in der Hand, die schwingungstechnische Auswirkung dieser Kupplung nur auf kritische Betriebszustände zu beschränken.

Bild 5 zeigt das Luftschraubengetriebe eines amerikanischen Reihenmotors mit einem pfeilverzahnten Stirnräderpaar, Bild 6. Das zur Gewichtsverminderung mit zahlreichen Bohrungen versehene Ritzel ist mit der Kurbelwelle starr verbunden, wogegen der Zahnkranz auf der Luftschraubenwelle ein wenig längsbeweglich und drehfedernd ist, so daß eine Selbsteinstellung der Pfeilzahnräder möglich ist und die durch den Luftschraubenschub bedingten Axialkräfte von den Zahnflanken ferngehalten werden. Wie wichtig die Fernhaltung fremder Kräfte auf die ohnehin hochbelasteten Zahnflanken der Luftschraubengetriebe ist, zeigte sich gerade bei diesem Getriebe. Als gelegentlich in der Federkupplung, Bild 6, des großen Zahnrades eine Feder brach, und die Beweglichkeit des Zahnkranzes blokkiert wurde, trat ein baldiges Fressen der Verzahnung ein, Bild 7.

Will man eine Gleichachsigkeit zwischen Kurbelwelle und Luftschraubenwelle erzielen, so kann man zwei Stirn-

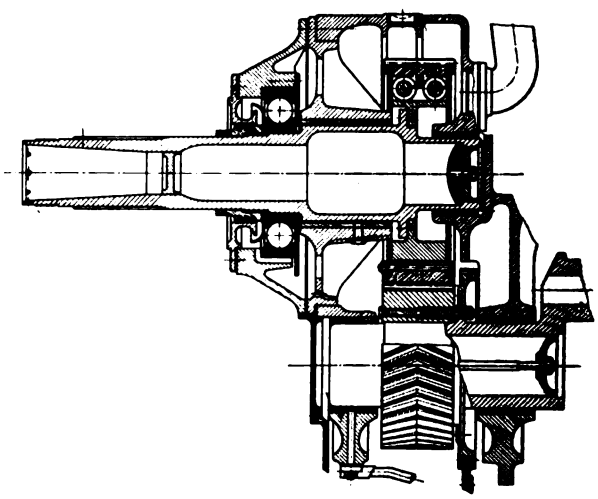


Bild 5. Luftschraubenuntersetzung durch pfeilverzahntes Stirnräderpaar beim Curtiss-Super-Conqueror-Motor. $i = 1 : 1.4$.

Digitized by Google

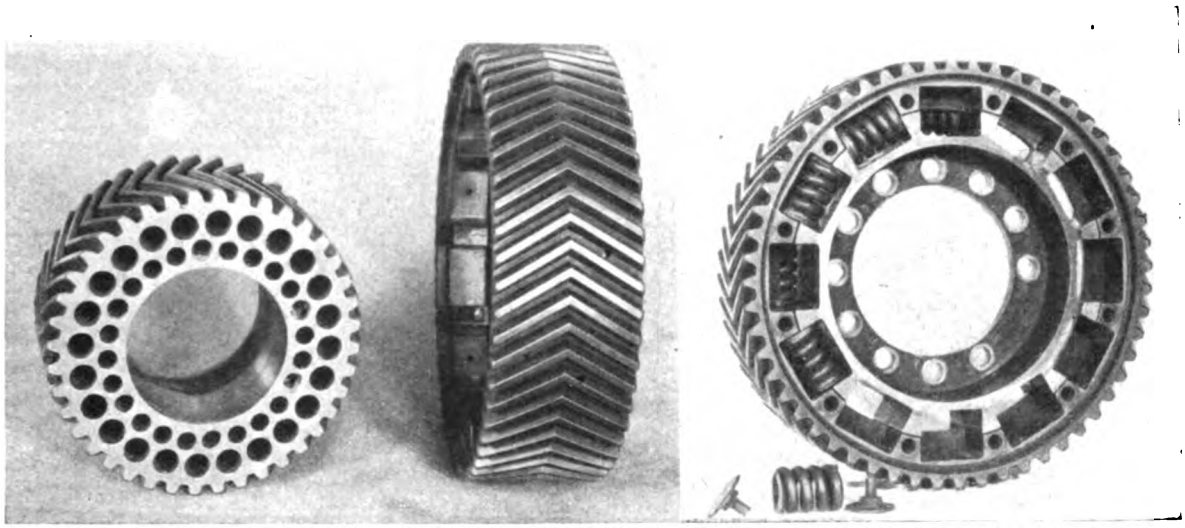


Bild 6. Pfeilzahnräder, von denen das große mit einem drehfedernden Zahnkranz versehen ist.

Bild 7. Anfressungen an den Zahnflanken eines Pfeilzahnrades infolge verhinderter Selbsteinstellungsmöglichkeit.

räderpaare hintereinander anordnen, wie es Bild 8 für einen englischen Renn-Flugmotor [9] zeigt. Eine Gleichachsigkeit erhält man ohne weiteres bei Umlaufgetrieben, die vorwiegend bei Sternmotoren und vereinzelt auch bei leichten Reihenmotoren anzutreffen sind.

Bild 9 zeigt das Stirnradumlaufgetriebe eines amerikanischen Sternmotors. Es findet hier eine Getriebegrundform Anwendung, die für Luftschraubengetriebe als besonders vorteilhaft und entwicklungsfähig angesehen werden kann und in einfacherer Art bereits 1918 beim Acht- und Zwölfzylinder-Flugmotor von Benz zur Anwendung kam. Auf der Kurbelwelle sitzt ein Innenzahnrad, das hier sechs gleichzeitig im Eingriff befindliche Umlaufräder antreibt, die ihrerseits auf einem mit dem Getriebegehäuse starr verbundenen Außenzahnkranz abrollen. Der Träger dieser sechs gleich großen Umlaufräder ist gleichzeitig auch als Luftschraubenwelle ausgebildet, Bild 10. Durch eine glockenförmige Gestalt der Umlaufräder konnten kleine Lagerdurchmesser, reine Druckbeanspruchungen in den Lagerstellen der Umlaufräder (Zahn- und Lagerdrücke fallen in eine Ebene), geringe Baulänge sowie geringes Gewicht des Getriebes erzielt werden. Besonders bemerkenswert sind noch der beim Innenzahnrad zur Erzielung einer hohen Formsteifigkeit vorgesehene starke äußere Bund, Bild 9, die gut ausgerundete Hinterdrehung der Innenverzahnung und die zur Vermeidung von Kerbwirkungen halbkreisförmig ausgerundeten Zahnfußformen, Bild 11.

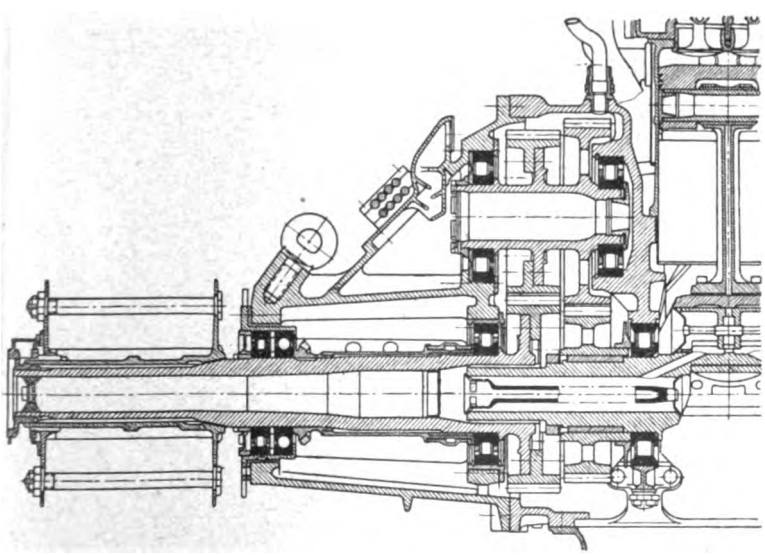


Bild 8. Gleichachsiges Luftschraubengetriebe mit zwei hintereinander angeordneten Stirnräderpaaren bei einem Napier-Flugmotor. $i = 1 : 1{,}306$.

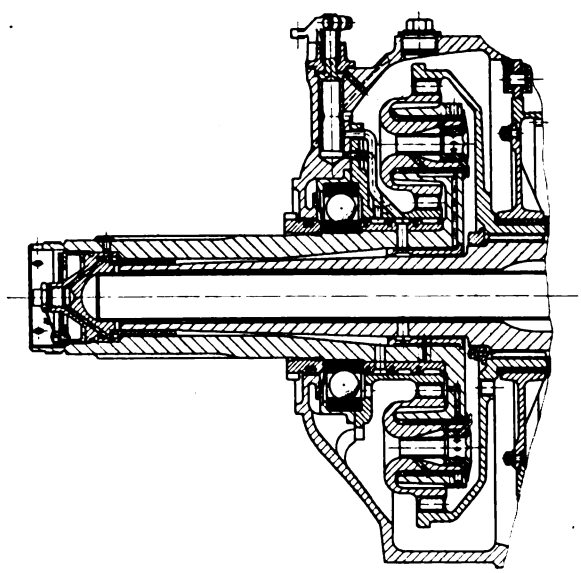


Bild 9. Stirnrad-Umlaufgetriebe des Wright-Cyclone-Motors. $i = 1 : 1{,}455$.

Digitized by Google

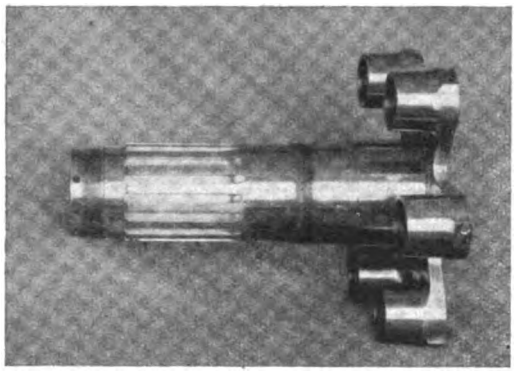


Bild 10. Umlaufradträger (Steg) gleichzeitig als Getriebestern und Luftschraubenwelle ausgebildet.

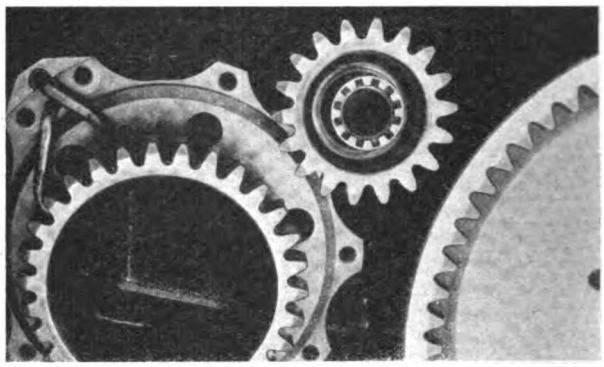


Bild 11. Halbkreisförmige Fußausrundung zur Verringerung der Kerbwirkung bei sämtlichen Getrieberädern des Wright-Cyclone-Motors.

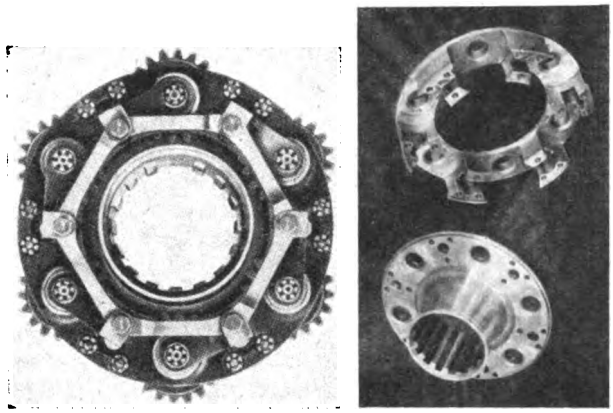


Bild 12. Umlaufradträger mit Zahndruckausgleich mittels Gelenksechseck bei einem Hornet-Motor. $i = 1 : 1{,}5$.

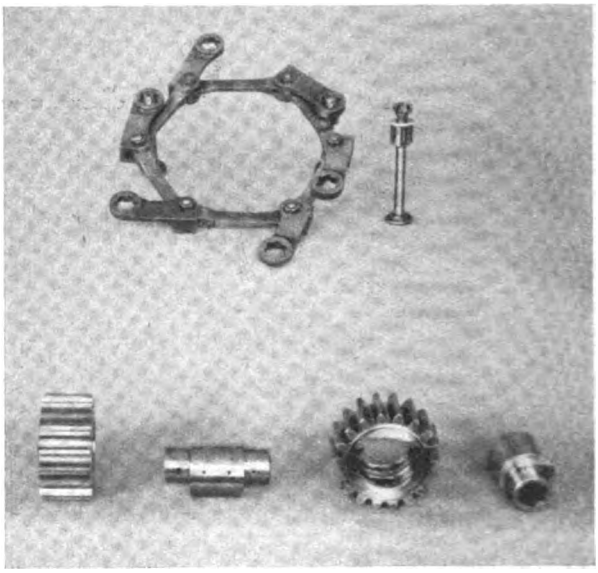
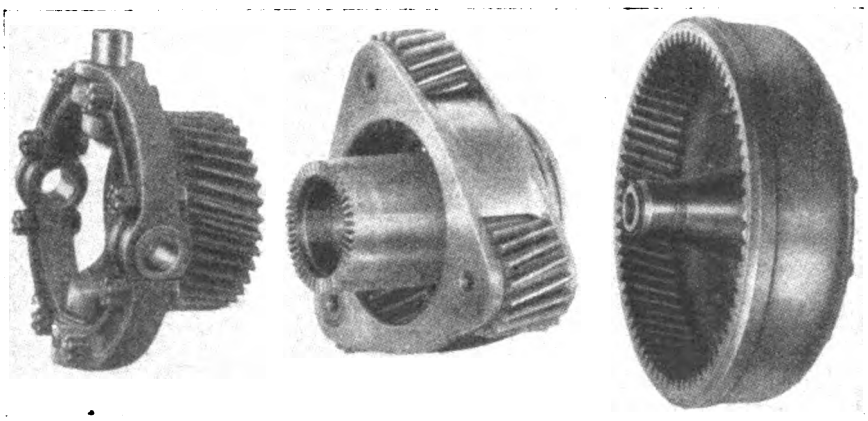


Bild 13. Gelenksechseck, Umlaufrad und Lagerzapfen zu Bild 12.

Bild 14 (unten). Umlaufgetriebe mit Schrägverzahnung und Zahndruckausgleich nach Stoeckicht beim Hirth-Motor HM 508. $i = 1 : 1{,}5$.



Ein besonderer Zahndruckausgleich zur gleichmäßigen Aufteilung der Belastung auf die sechs Umlaufräder ist nicht vorgesehen, er kann deshalb nur bei idealer Herstellungsgenauigkeit der Zahnräder und des Umlaufradträgers vorausgesetzt werden.

Die Vorteile bei der Anordnung eines selbsttätigen Zahndruckausgleiches können in der größeren Sicherheit gegen Überbeanspruchung einzelner Zahnräder, in der beliebigen Austauschbarkeit einzelner Teile, in der Herabsetzung der Anforderungen an die Herstellungsgenauigkeit und in der Beseitigung von Lagerdrücken (soweit sie aus Zahndrücken resultieren) für die zentralen Wellen bzw. Räder erblickt werden. Bild 12 zeigt einen Umlaufradträger mit Zahndruckausgleich, wie er beim Stirnrad-Umlaufgetriebe eines Hornet-Motors Anwendung fand. Die sechs Umlaufräder laufen hier auf außermittig gelagerten Zapfen, die untereinander durch ein gleichseitiges Gelenksechseck verbunden sind, Bild 13. Wird einer dieser Zapfen stärker belastet als die übrigen, so kann er in Richtung des größten Zahndruckes ausweichen, er muß jedoch dabei die übrigen durch das Gelenksechseck angelenkten Zapfen gleichfalls mitdrehen. Diese Drehung der übrigen Zapfen hat eine stärkere Belastung der übrigen Umlaufräder und damit eine Verringerung der Belastung des ersten Umlaufrades zur Folge. Ein Unterschied in den Zahndrücken kann nur noch in dem geringen Maße auftreten, wie die sich einstellende Form des Sechseckes von der eines regelmäßigen abweicht. Einen Zahndruckausgleich mit wesentlich einfacheren Mitteln hat Stoeckicht [10] vorgeschlagen, indem er das abstützende Zahnrad nicht starr, sondern kardanisch im Getriebegehäuse befestigt. Durch die gleichzeitige Anwendung einer Schrägverzahnung wirken auf das kardanisch aufgehängte Abstützrad Zahnkraftkomponenten ein, die sich durch eine Verstellung des Abstützrades auszugleichen suchen. Als Anwendungsbeispiel zeigt Bild 14 das Luftschraubengetriebe eines Hirth-Motors. Ein ähnlicher Grundsatz findet auch bei dem zahndruckausgeglichenen Kegelradumlaufgetriebe von Farman [11] Anwendung. Hier sind das abstützende und das antreibende Kegelrad auf Kugelflächen beweglich und sich selbst einstellend angeordnet. Das Farman-Getriebe, Bild 15, paßt sich gut einer aerodynamisch günstigen Gehäuseform ein. Die Schwierigkeiten, die sich im allge-

Digitized by Google

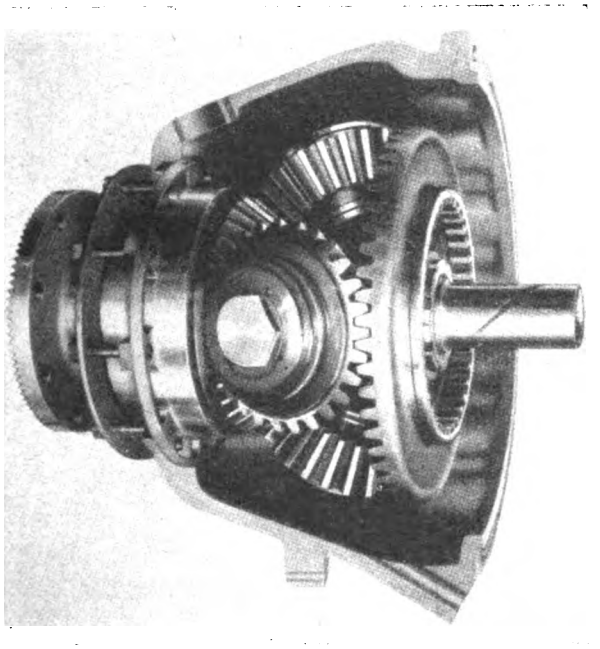


Bild 15. Umlaufgetriebe mit Kegelrädern und Zahndruckausgleich nach Farman beim Bramo 322. $i = 1 : 1{,}61$.

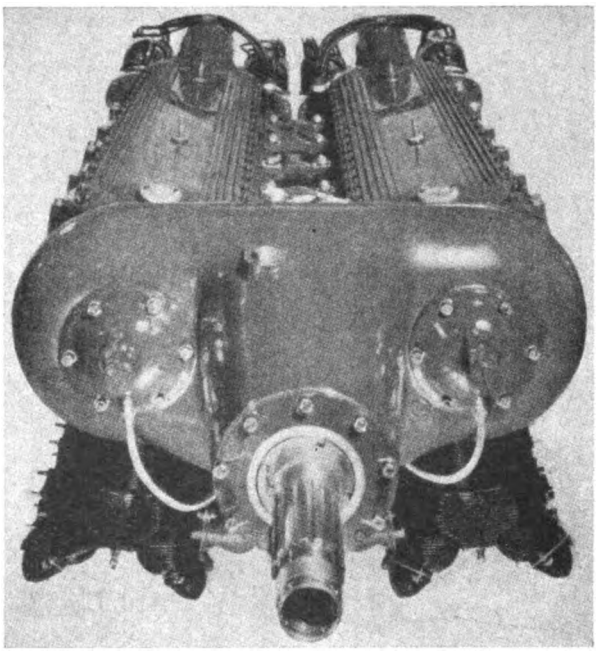


Bild 16. »Unitwin«-Zwillingstriebwerk. Zwei nebeneinander angeordnete Menasco-Motoren mit Sammelgetriebe.

meinen mit hochbelasteten Kegelrädern in der Spieleinstellung und in der Lagerung ergeben, sind durch langjährige Erfahrungen und Verbesserungen beseitigt worden. Eine große Entwicklungsmöglichkeit für Leistungen über 1000 PS dürfte jedoch beim Farman-Getriebe kaum noch bestehen.

Neben der eigentlichen Drehzahluntersetzung fallen dem Luftschraubengetriebe oft noch zusätzliche Aufgaben zu, die seinen äußeren Aufbau und seine Gestaltungsmerkmale stark beeinflussen können.

Es liegt beispielsweise nahe, Umlaufgetriebe auch als Drehmomentmeßgetriebe [12, 13] oder als Meßkupplungen [14] auszubilden, indem man das Abstützdrehmoment des feststehenden Rades als Maß für das auf die Luftschraube übertragene Motordrehmoment ermittelt. Bei einer trägheitsfreien Messung und Aufzeichnung der statischen und dynamischen Drehmomentspitzen und -schwankungen während des Fluges könnte man Rückschlüsse auf eine tatsächliche Beanspruchung der Zahnräder ziehen.

Für schnelle Flugzeuge, die auch in großen Höhen fliegen sollen und mit Verstellschrauben ausgerüstet sind, wird neuerdings die Einführung von Zweigang-Luftschraubengetrieben [15, 16, 17] vorgeschlagen. Es ist bei Verstellschrauben vorteilhaft, neben der normalen Untersetzung einen sog. Schnellgang zu besitzen, um beim Abflug die Verstellschraube mit erhöhter Drehzahl und besserem Wirkungsgrad betreiben zu können. Die Verwendung von Zweigang-Getrieben war bereits bei einem deutschen R-Flugzeug[2]) zum Antrieb der nicht verstellbaren Luftschraube vorgesehen. Hier allerdings, um beim Abflug durch Einschalten einer stärkeren Untersetzung der Luftschraube den sonst durch die Luftschraubencharakteristik bewirkten Drehzahlabfall des Motors vermeiden zu können. Auch eine stufenlose Drehzahländerung der Luftschraube durch eine regelbare Flüssigkeitskupplung ist vorgeschlagen [18] worden.

Bei Mehrwellenmotoren (z. B. H-Bauart, Junkers-Gegenkolbenbauart) übernimmt das Luftschraubengetriebe meistens auch die zwangläufige Kopplung der verschiedenen Kurbelwellen. Bei der H-Bauart ist die Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit der Drehkräfte (evtl. Paarzündungen) besonders zu beachten. Auch mehrere Motoren können über ein gemeinsames »Sammelgetriebe« auf eine oder zwei Luftschrauben arbeitend zusammengefaßt werden. Diese Aufgabenstellung trat bereits bei den R-Flugzeugen auf

[2]) Vgl. Schrifttum [1], Bild 23.

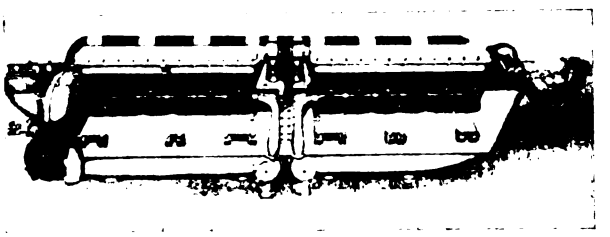


Bild 17. Fiat-Rennflugmotor AS 6. Zwillingstriebwerk mit zwei hintereinander angeordneten Motoren, die unabhängig ein gegenläufiges Luftschraubenpaar antreiben.

und wurde damals auch gelöst [1, 8]. In gewissen Fällen werden auch neuerdings wieder Vorteile für die Verwendung von Mehrfachtriebwerken geltend gemacht [19]. Die damaligen Schwierigkeiten, die beim Ausfall eines Motors auftraten, können heute leistungsmäßig durch die Verstellschraube und bedienungsmäßig durch die Anwendung von Freilaufgesperren als überwunden angesehen werden. Als neueres Ausführungsbeispiel derartiger Anordnungen zeigt Bild 16 ein amerikanisches Zwillingstriebwerk mit nebeneinander angeordneten Menasco-Motoren. Auch Zwillingstriebwerke mit hintereinander angeordneten Motoren sind beispielsweise im Fiat-Rennflugmotor AS 6 zur Ausführung gekommen, Bild 17. Hier sind jedoch zwei Getriebe angeordnet, die ein Luftschraubenpaar gegenläufig antreiben.

Will man die Vorteile des gleichachsigen, gegenläufigen Luftschraubenpaares auch beim Einzeltriebwerk wahrnehmen, so wendet man Verzweigungsgetriebe an. Bild 18 zeigt den Einbau eines derartigen Ferntriebwerkes [20] bei der »Koolhoven FK 55«. Zu einem besonderen Problem wird bei Verzweigungsgetrieben mit gegenläufigem Luftschraubenpaar die Art und Unterbringung der Luftschraubenverstelleinrichtung [21]. Auch bei einfachen Luftschraubengetrieben müssen die besonderen Belange der Luftschraubenverstellung bereits bei der Gestaltung der Getriebe und Getriebegehäuse berücksichtigt werden. Zur Entlastung des Apparateträgers zweigt man neuerdings einen Teil der zahlreichen Hilfsantriebe für das Motor- und Flugzeugzubehör auch wieder vom Luftschraubengetriebe ab.

Die Schmierstoffversorgung des Luftschraubengetriebes geschieht durch das Drucköl des Motors, in einzelnen Fällen auch durch einen eigenen Kreislauf. Die sehr breiten Zahnflanken erhalten ihren Schmierstoff meistens in feinen Strahlen aus mehreren Düsen (vorwiegend auf der

Digitized by Google

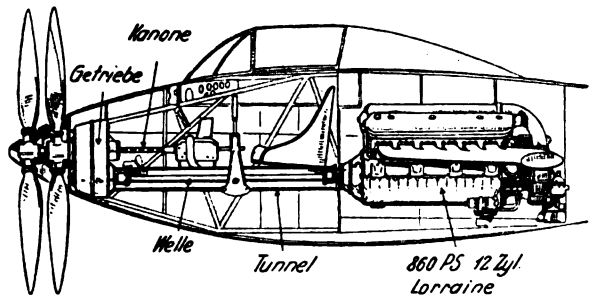
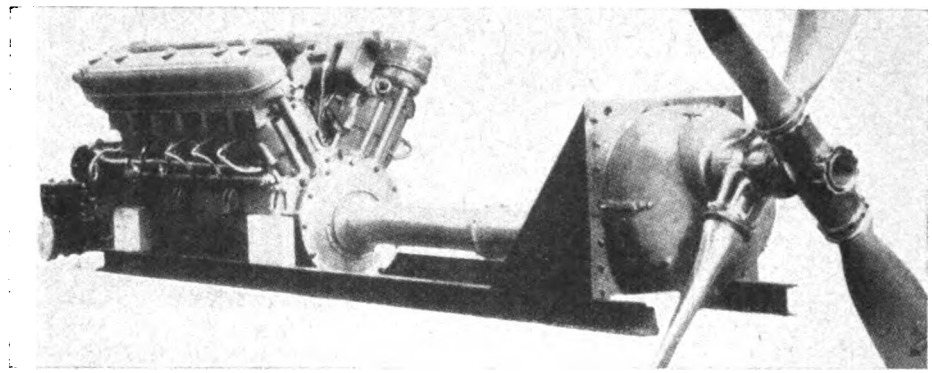


Bild 18. Anordnung und Ausführungsform eines Ferntriebes mit Verzweigungsgetriebe und gegenläufigem Luftschraubenpaar bei dem Jagdeinsitzer »Koolhoven FK 55«.



Zahneingriffseite), Gleitlagerungen werden an den Druckkreislauf angeschlossen, während den Wälzlagern das Öl meistens als Spritzöl aus besonderen Sammeltaschen im Getriebegehäuse zufließt. Bei Umlaufgetrieben wird die Schmierstoffzufuhr zu den Lagerstellen und Zahneingriffen der Umlaufräder durch die Fliehkraft unterstützt bzw. auch allein bewirkt. Zu enge Getriebegehäuse ergeben erhöhte Getriebeverluste und begünstigen die Ölschaumbildung. Da bei Motoren mit großer Leistung der Schmierstoffbedarf des Getriebes sehr groß ist und sich mit der Öltemperatur meistens stark ändert, versucht man diesem Temperatureinfluß durch Einbau von besonderen Schmierstoffverteilern im Getriebe zu begegnen.

Schließlich sei noch kurz auf den Gewichtsanteil des Luftschraubengetriebes am Motorgesamtgewicht hingewiesen. Unter Einbeziehung der Luftschraubenwelle und etwaiger Kupplungen dürfte der Gewichtsanteil des Luftschraubengetriebes etwa 8 bis 15% des Motorgesamtgewichtes ausmachen.

2. Ladergetriebe.

Die besonderen Gestaltungsmerkmale der Ladergetriebe lassen sich im wesentlichen durch die Forderung einer weitgehenden Gewichts- und Raumbeschränkung des Laders durch hohe Verdichterdrehzahlen, durch das Bestreben, eine wirtschaftliche Förderhöhenregelung durch Drehzahländerung zu erzielen, und schließlich durch die Lösung der Anbaufrage an den Flugmotor kennzeichnen. Die erste Forderung läßt sich durch die Anordnung von Zahnrädersätzen, die die Kurbelwellendrehzahl ins Schnelle übersetzen, erfüllen, während die Entwicklung von Getrieben mit veränderlicher Übersetzung zwar in Form von Schaltwechselgetrieben einen gewissen Stand erreicht hat, jedoch als noch nicht abgeschlossen angesehen werden kann. Für den Anbau des Laders an den Flugmotor kommen gleich-, parallel- oder kreuzachsige Anordnungen der Laderwellen zur Kurbelwelle in Betracht.

Eine Übersicht über verschiedene Ladergetriebe mit gleichbleibendem Übersetzungsverhältnis vermitteln die Beispiele 1 bis 4 und 6 bis 9 in den Bildern 19 und 20. Eine stufenlose Drehzahländerung durch eine regelbare Schlupfkupplung nach Junkers [22] ist im Beispiel 5 vorgesehen, während der Lader des Beispiels 10 ein Zweigangschaltgetriebe besitzt. Als weitere stufenlose Regelverfahren für Flugmotorenlader dürften die in englischen Patenten gemachten Vorschläge einer regelbaren Schlupfkupplung von Sinclair [23] und des gleichzeitigen Antriebes eines Kreisel- und Verdrängerverdichters durch ein Umlaufgetriebe von E. v. Grandell [24] zu beachten sein.

Die allgemeine Dynamik des Laderantriebes sowie die grundsätzlichen Gestaltungsfragen bei Schaltwechselgetrieben sind bereits ausführlich im Schrifttum [5] behandelt worden. Auf die Ausführungsformen der Ladergetriebe in Bild 19 und 20 braucht deshalb nur kurz eingegangen zu werden. Beispiel 1, Bild 19, zeigt ein gleichachsiges Ladergetriebe mit zwei hintereinander angeordneten Stirnräderpaaren. Das sehr eng ineinandergebaute Getriebe liegt zwischen Kurbelwelle und Lader, während in Beispiel 2 ein ähnliches Getriebe auf der Saugseite des Laders angeordnet ist. Die Beispiele 3 und 4 zeigen gleichachsige Ladergetriebe mit doppeltem Zahneingriff, d. h. der Antrieb erfolgt über doppelt angeordnete Zahnrädersätze. Durch Zahndruckausgleich, der hier durch Rutschkupplungen in den Getrieberädern angestrebt wird, sollen die Räder der schnellaufenden Laderwelle von Zahndrücken entlastet werden. Beispiel 5 zeigt den bereits erwähnten regelbaren Laderantrieb von Junkers. In Beispiel 6 und 7 sind gleichachsige Laderantriebe mit dreifachem Zahneingriff als Umlaufgetriebe und als Vorgelege dargestellt. Beim Beispiel 8 wird der Antrieb des parallelachsig zur Kurbelwelle angeordneten Laders am Luftschraubengetriebe abgenommen und durch eine drehfedernde Hohlwelle nach hinten geführt. Eine kreuzachsige Anordnung des Laders zur Kurbelwelle zeigen Beispiel 9 und 10, wobei das letztere Beispiel als Zweiganggetriebe ausgebildet ist und der Gangwechsel durch eine Lamellenschaltkupplung und ein Freilaufgesperre bewirkt wird.

Ganz allgemein lassen sich zur Erzielung eines ruhigen Gangwechsels für die Schaltkupplung im Laderantrieb folgende Forderungen aufstellen:

a) Allmähliche Steigerung des Rutschdrehmomentes in der Schaltkupplung beim Einkuppeln der großen Übersetzung, zur Vermeidung einer stoßartigen Leistungsanzapfung des Flugmotors und eines sprunghaften Förderhöhenanstiegs des Laders.

b) Nach Beendigung des Beschleunigungsvorganges muß das Rutschdrehmoment mit Rücksicht auf die Schwingungsbeanspruchung im Ladergetriebe mindestens auf den Betrag des erforderlichen Sicherheitsrutschdrehmomentes erhöht werden.

Die Verwirklichung dieser Anforderungen soll an dem Zweiganglader, Bild 21, eines englischen Flugmotors er-

Digitized by Google

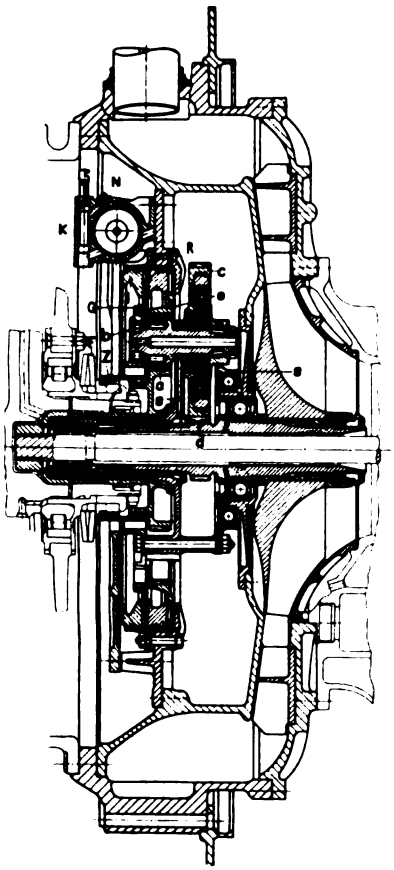
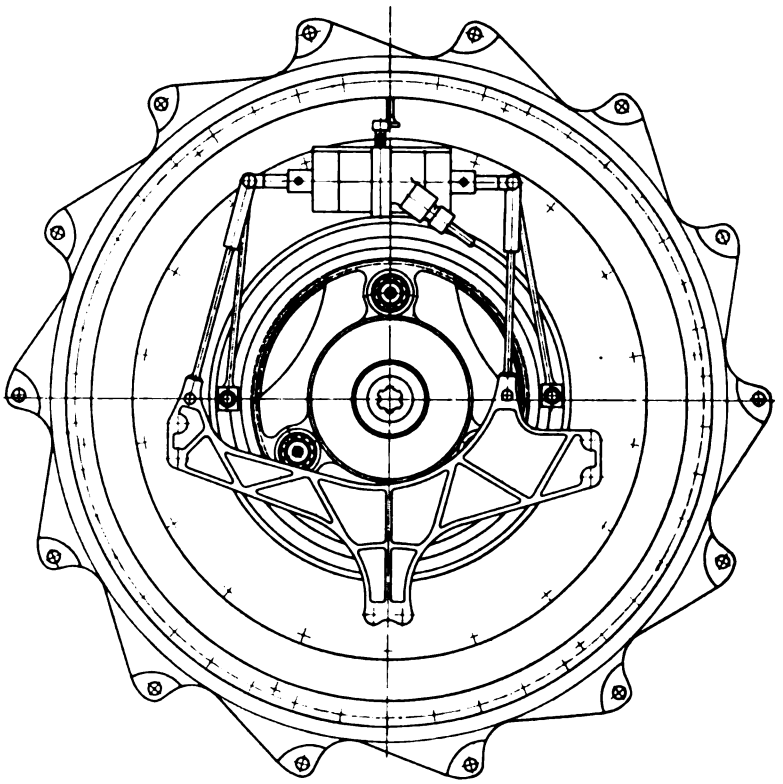


Bild 21. Zweiganglader des Tiger VIII (Doppelstern) mit ölgesteuertem Schaltgestänge. $i_I = 10$.



läutert werden. Die Gangschaltung erfolgt hier durch den Motoröldruck über zwei öldruckgesteuerte Bremsen (Kupplungen). Im ersten Gang ($i_I = 6$) arbeitet das Ladergetriebe als Umlaufgetriebe, indem der Innenzahnkranz e durch einen Bremsring Q gegen eine feststehende Bremsscheibe R gepreßt wird und der die drei Umlaufräderpaare b—c tragende Stegteil s umläuft. Durch Umsteuerung des doppeltwirkenden Arbeitskolbens wird der Bremsring Q gelöst und der Stegteil s über die Zahnkupplung G zwischen den beiden Bremsringen P und Q abgebremst und festgehalten. Die Zahnräder a—b—c—d treiben jetzt als hintereinander angeordnete Stirnräderpaare den Lader mit der großen Übersetzung ($i_{II} = 10$) an. Ein sanftes Hochschalten der Drehzahl wird dadurch erreicht, daß die Bremsringe P und Q außen mit einem mehrgängigen, gegenläufigen Gewinde versehen sind und die Verstellmuttern vom Arbeitskolben über ein Gestänge mit Kniehebelwirkung betätigt werden. Infolge der Gegenläufigkeit der Verstellmuttern nähern oder entfernen sich die beiden Bremsringe in Abhängigkeit vom Drehsinn.

Ebenso wie bei den Luftschraubengetrieben ist auch bei den Ladergetrieben auf die Erzielung einer großen Gestaltfestigkeit aller Bauteile besonderer Wert zu legen. Bild 22 zeigt beispielsweise ein hochbelastetes Kegelrad aus einem Laderantrieb, bei dem ein Dauerbruch durch Kerbwirkungen in den nicht genügend ausgerundeten Zahnfußformen verursacht wurde. Da im Ladergetriebe neben der statischen und dynamischen Belastung der Zahnräder noch erhebliche Fliehkraftbeanspruchungen auftreten können, ist auch eine sorgfältige Auswuchtung aller Ladergetriebeteile unbedingt erforderlich.

Auch der Kupplung zwischen Kurbelwelle und Ladergetriebe kommt besondere Bedeutung zu, insbesondere, wenn man sie drehfedernd ausführt. Beim Neuentwurf sollte man sich stets genügend Raum und Möglichkeiten offen lassen, die schwingungstechnischen Kennwerte dieses Bauteils nachträglich ändern zu können, um vielleicht die Eigenschwingungszahl des Motors oder die Beanspruchung im Ladergetriebe günstiger zu gestalten. Für geringe Baulängen kommen drehfedernde Kupplungen, Bild 23, und bei größeren Baulängen oder bei Hohlwellen Drehfederstäbe oder Verdrehwellen in Betracht. Bild 24 zeigt das Ladergetriebe des Wright-Cyclone-Motors, bei dem außer der zentralen Verdrehwelle noch ein drehfederndes Zahnrad, Bild 25, in den Laderantrieb eingefügt ist. Verwendet man für die Kupplung des Laderantriebes mit der Kurbelwelle dünne Drehfederstäbe, Bild 26, so ist eine Begrenzung der Ausschläge in beiden Richtungen vorteilhaft.

Zweckmäßige Lagerung und Schmierung sind für die Betriebssicherheit der Ladergetriebe Voraussetzung. Bei Gleitgeschwindigkeiten bis etwa 12 m/s bzw. Geschwindigkeitsziffern ($d \cdot n$) bis etwa 250000 können Gleit- und Wälzlager ausschließlich nach gestalterischen Gesichtspunkten ausgewählt werden. Darüber hinaus wird man bereits den Sonderansprüchen der einzelnen Lagerungsarten Rechnung tragen müssen. Es zeigt sich beispielsweise, daß

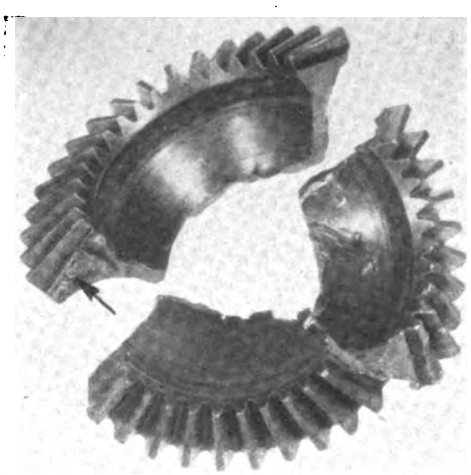
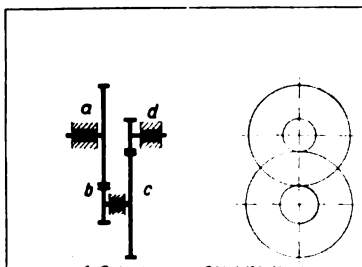
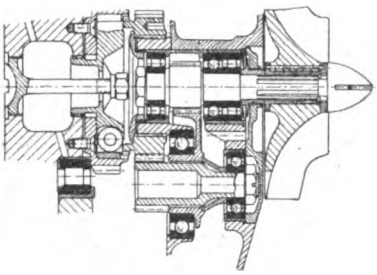


Bild 22. Dauerbruch an einem überbeanspruchten Kegelrad im Laderantrieb. Die Bruchzonen gehen von dem zuerst nicht genügend ausgerundeten Zahnfuß (Pfeil) aus.

Digitized by Google

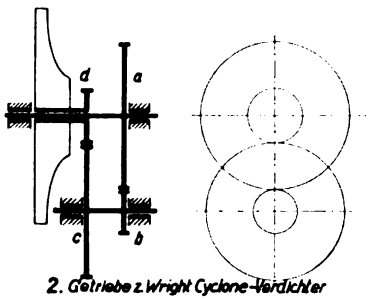


1. Getriebe zum BMW-132-Verdichter

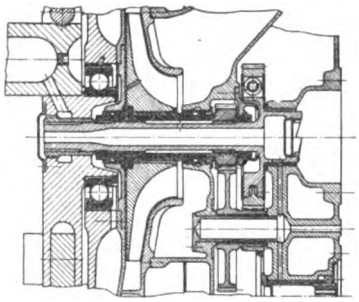


Zahnrad		a	b	c	d
Modul	mm	3	3	3	3
Zähnezahl		36	12	57	17
Zahnbreite	mm	22,5	25,5	21	24
Zahndruck	kg	132,5	132,5	28	28
$c = \frac{P}{b \cdot t}$	kg/cm²	62,5	62,5	14,1	14,1
Wälzgeschw.	m/s	10,2	10,2	48,2	48,2

Übersetzungsverhältnis: 10
Antriebsmoment: 7,15 mkg
n_{KW} = 1800 U/min

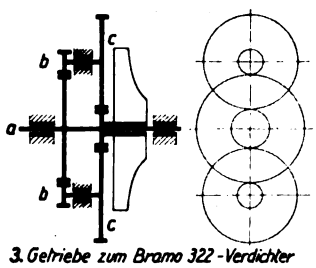


2. Getriebe z. Wright Cyclone-Verdichter

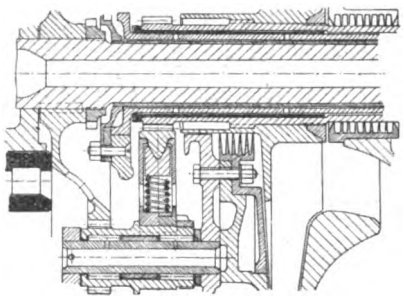


Zahnrad		a	b	c	d
$Dp = \frac{25,4}{Modul}$		10	10	10	10
Zähnezahl		63	18	57	24
Zahnbreite	mm	26	27	21	22
Zahndruck	kg	313	313	100	100
$c = \frac{P}{b \cdot t}$	kg/cm²	151	151	60	60
Wälzgeschw.	m/s	16,8	16,8	26,6	26,6

Übersetzungsverhältnis: 8,32
Antriebsmoment: 25 mkg
n_{KW} = 2000 U/min

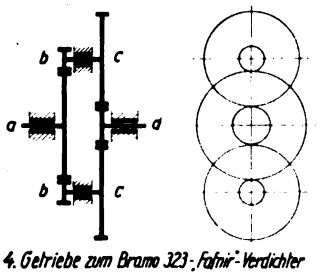


3. Getriebe zum Bramo 322-Verdichter

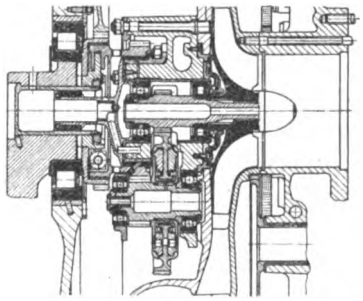


Zahnrad		a	b	c	d
Modul	mm	2	2	2	2
Zähnezahl		80	18	70	28
Zahnbreite	mm	13	13	16	16
Zahndruck	kg	312/2	312/2	80/2	80/2
$c = \frac{P}{b \cdot t}$	kg/cm²	191	191	40	40
Wälzgeschw.	m/s	17,6	17,6	68,6	68,6

Übersetzungsverhältnis: 11,12
Antriebsmoment: 25 mkg
n_{KW} = 2100 U/min

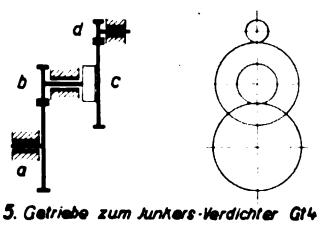


4. Getriebe zum Bramo 323-„Fafnir"-Verdichter

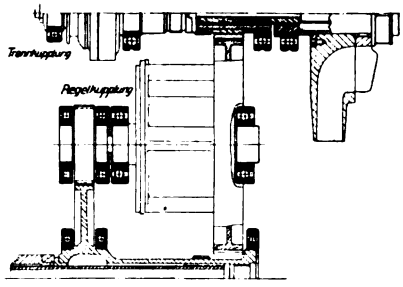


Zahnrad		a	b	c	d
Modul	mm	3	3	2	2
Zähnezahl		48	16	76	20
Zahnbreite	mm	28	28	18	18
Zahndruck	kg	514/2	514/2	162/2	162/2
$c = \frac{P}{b \cdot t}$	kg/cm²	97,5	97,5	71,6	71,6
Wälzgeschw.	m/s	17,7	17,7	56	56

Übersetzungsverhältnis: 11,4
Antriebsmoment: 37 mkg
n_{KW} = 2350 U/min



5. Getriebe zum Junkers-Verdichter G14



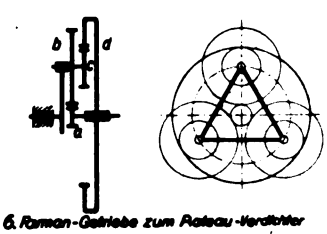
Zahnrad		a	b	c	d
Modul	mm	3	3	2,5	2,5
Zähnezahl		82	31	95	21
Zahnbreite	mm	20	20	32	32
Zahndruck	kg	356	356	139	139
$c = \frac{P}{b \cdot t}$	kg/cm²	189	189	55,4	55,4
Wälzgeschw.	m/s	24,5	24,5	62,7	62,7

Übersetzungsverhältnis: 12
Antriebsmoment: 44 mkg
n_{KW} = 1900 U/min

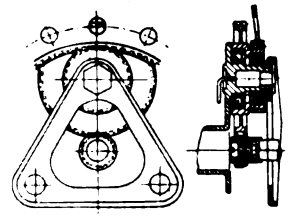
Bild 19. Getriebeschema, Ausführungsform und Kennwerte verschiedener Ladergetriebe (Beispiel 1 bis 5).

Gleitlager (aus den zur Zeit verwendeten sparstoffarmen Werkstoffen) mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit größere Lagerspiele und Schmierstoffmengen benötigen, während bei Wälzlagern gerade eine Verringerung des Radialspieles und der Schmierstoffmenge [25] zweckmäßig ist. Da eine sorgfältige Ölabdichtung zwischen Laderwelle und Laufrad gegen den Schmierstoffdruck, durch das große Lagerspiel der Gleitlager erschwert wird, kommen bei Laderwellen vorzugsweise Wälzlagerungen zur Anwendung. Auch bei den schnellen Getriebewellen wird man die Verwendung von Gleitlagern nach Möglichkeit einschränken, um den Schmierstoffkreislauf des Motors nicht zu stark anzapfen zu müssen, weiterhin wird der Getriebewirkungsgrad durch Gleitlager etwas ungünstiger und durch die planlose Ölwirbelung im Getriebe die Ölschaumbildung begünstigt. Enge Getriebegehäuse sind daher ebenso wie eine Tauchschmierung zu

Digitized by Google

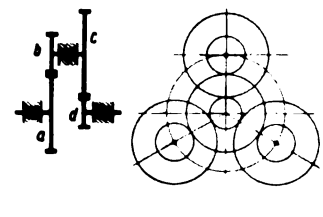


6. Roman-Getriebe zum Rateau-Verdichter

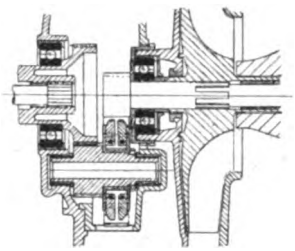


Zahnrad		a	b	c	d		
Modul	mm	2,5	2,5	2,5	2,5		
Zähnezahl		15	53	31	99		
Zahnbreite	mm	14	15	16	16		
Zahndruck	kg	191/3	191/3	355/3	355/3		
$c = \frac{P}{b \cdot f}$	kg/cm²	57,8	57,8	94,2	94,2		
Wälzgeschw.	m/s	37,5	37,5	22,5	22,5		

Übersetzungsverhältnis: 12,3
Antriebsmoment: 44,2 mkg
n_{Mot} = 1700 U/min

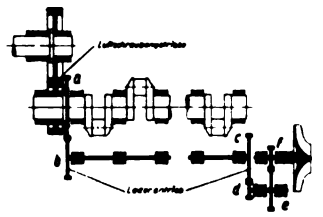


7. Getriebe zum Rolls-Royce Buzzard-Verdichter

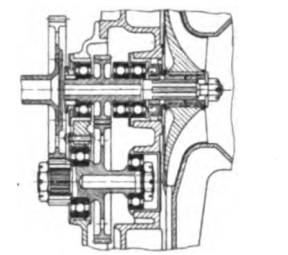


Zahnrad		a	b	c	d		
$Dp = \frac{24,4}{Modul}$		14	14	14	14		
Zähnezahl		51	26	57	20		
Zahnbreite	mm	22	20,7	22,6	22,6		
Zahndruck	kg	165/3	165/3	67/3	67/3		
$c = \frac{P}{b \cdot f}$	kg/cm²	44,1	44,1	17,5	17,5		
Wälzgeschw.	m/s	9,65	9,65	21,2	21,2		

Übersetzungsverhältnis: 5,6
Antriebsmoment: 7,9 mkg
n_{Mot} = 2200 U/min

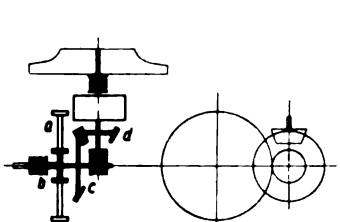


8. Getriebe zum Curtiss Super Conqueror-Verdichter

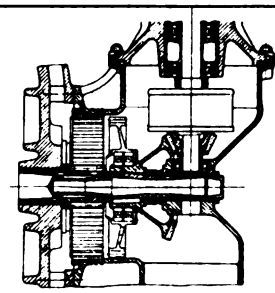


Zahnrad		a	b	c	d	e	f
$Dp = \frac{24,4}{Modul}$		7	7	7	7	14	14
Zähnezahl		55	36	44	13	75	39
Zahnbreite	mm	19	19	19	19	19	19
Zahndruck	kg	200	200	164	164	57	57
$c = \frac{P}{b \cdot f}$	kg/cm²	92,5	92,5	76	76	52,7	52,7
Wälzgeschw.	m/s	25,6	25,6	31,2	31,2	90,4	90,4

Übersetzungsverhältnis: 9,94
Antriebsmoment: 20 mkg
n_{Mot} = 2450 U/min

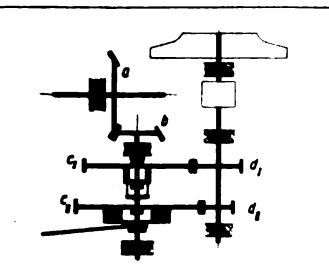


9. Getriebe zum DB 600-Verdichter

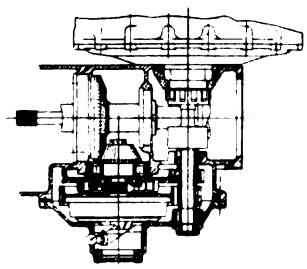


Zahnrad		a	b	c	d		
Modul	mm	3	3	3	3		
Zähnezahl		54	13	38	16		
Zahnbreite	mm	34	34	22	22		
Zahndruck	kg	345	345	164	164		
$c = \frac{P}{b \cdot f}$	kg/cm²	108	108	79	79		
Wälzgeschw.	m/s	20,4	20,4	59,3	59,3		

Übersetzungsverhältnis: 2,88
Antriebsmoment: 28 mkg
n_{Mot} = 2400 U/min



10. Getriebe zum Jumo 210-Verdichter



Zahnrad		a	b	c_1	c_2	d_1	d_2
Modul	mm	3,25	3,25	2	2	2	2
Zähnezahl		34	16	75	79	20	16
Zahnbreite	mm	25	25	18	26	18	26
Zahndruck	kg	478	478	78,5	125	78,5	125
$c = \frac{P}{b \cdot f}$	kg/cm²	187	187	69,5	76,5	69,5	76,5
Wälzgeschw.	m/s	15,6	15,6	45,1	47,9	45,1	47,9

Übersetzungsverhältnisse: $i_1 = 8$, $i_2 = 10,5$
Antriebsmomente: $Md_1 = 12,5$ mkg, $Md_2 = 21$ mkg
n_{Mot} = 2700 U/min

Bild 20. Getriebeschema, Ausführungsform und Kennwerte verschiedener Ladergetriebe (Beispiel 6 bis 10).

vermeiden. Reichlich bemessene Öffnungen müssen in allen Fluglagen den ständigen Ölabfluß gewährleisten. Bei den schnellaufenden Wälzlagern ist dafür Sorge zu tragen, daß das von den Zahnrädern abspritzende Öl nicht unmittelbar in die Wälzlager trifft, sonst tritt infolge der großen Ölmengen eine zu starke Erwärmung der Lager auf, was auch der Fall ist, wenn das Schmieröl aus den Wälzlagern nicht frei ablaufen kann.

Für die Zahnräder ist eine sparsame und trotzdem wirksame Schmierung vorzusehen, die sich durch Druckölschmierung erreichen läßt. Infolge der großen Umfangsgeschwindigkeit der Zahnräder (bis 100 m/s) ist es zwecklos, einen starken Ölstrahl auf die Zahnflanken zu spritzen, von

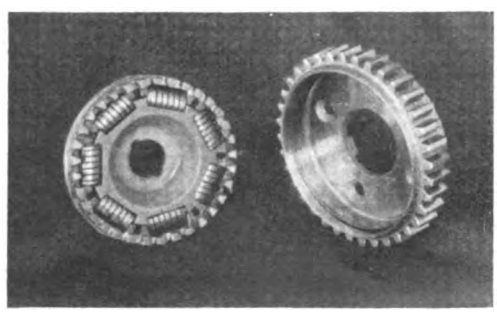


Bild 23. Drehfedernde Laderkupplung des Hornet-Motors.

Digitized by Google

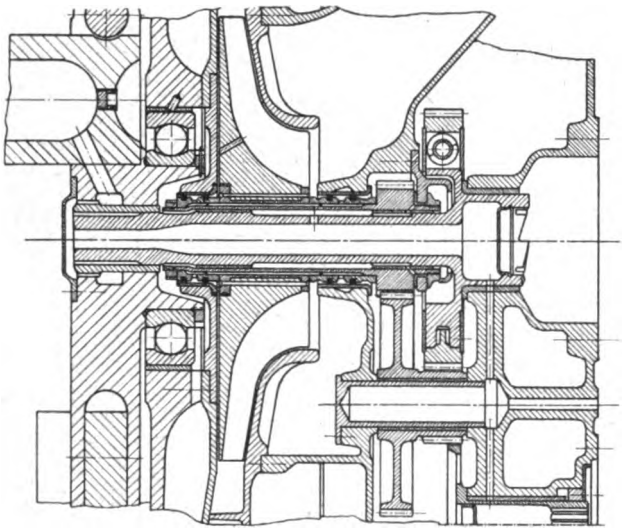


Bild 24 (links). Ladergetriebe des Wright-Cyclone-Motors. $i = 8{,}32$.

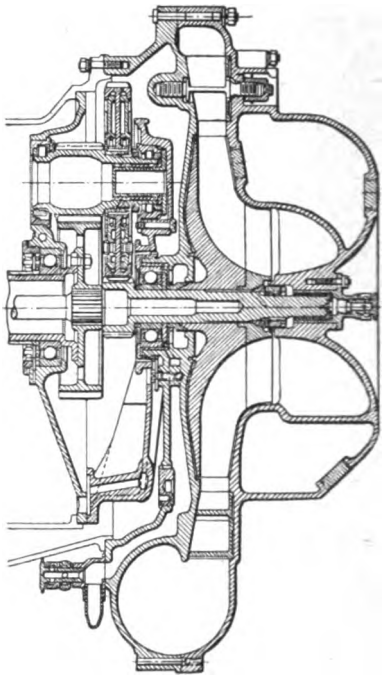


Bild 26 (rechts). Laderantrieb des Rolls-Royce »Merlin«. Kupplung des Ladergetriebes und Kurbelwelle durch Drehfederstab. $i = 8{,}588$.

dem doch nur ein geringer Teil mit den Zahnflanken in Berührung kommen würde. Viel wirksamer ist es, das Öl in fein verteilten Strahlen aus Düsen auf die Zahnflanken zu spritzen. Bei den geringen Zahnbreiten und der feinen Verteilung des Öles spielt die Frage der Quetschölverdrängung [26] eine untergeordnete Rolle.

III. Über die Berechnung von Flugmotorengetrieben.

Die Äußerung eines Fachmannes, daß es bei Flugmotorengetrieben weniger auf den Zahn als auf die Zahnlücke ankäme, läßt — allerdings in übertriebener Ausdrucksweise — erkennen, welche Bedeutung man bei Flugmotorengetrieben der zweckmäßigen Gestaltung und Fertigung des gesamten Getriebes und seiner Einzelteile beimessen muß. Diese Gesichtspunkte verständlicher zu machen und ihnen bei der Beurteilung der Betriebssicherheit der Flugmotorengetriebe die gleiche Anerkennung wie der Zahnradberechnung zu verschaffen, war der eigentliche Zweck des vorigen Abschnittes. Es darf jedoch kein Zweifel darüber bestehen, daß die gestalterischen und fertigungstechnischen Maßnahmen ihren Zweck nur erfüllen, wenn eine treffsichere Berechnung der Flugmotorengetriebe vorausgegangen ist bzw. eine auf Grund von Meßergebnissen (insbesondere schwingungstechnischer Art) erfolgende Nachrechnung die ursprünglich gemachten Annahmen bestätigt.

Für die Zahnradberechnung von Flugmotorengetrieben kommen aus den bereits erwähnten Gründen im wesentlichen nur Verfahren in Betracht, die das Maß der Sicherheit zahlenmäßig erkennen lassen. Unter diesen Gesichtspunkten wurden von Hofer [27, 28] für den allgemeinen Maschinenbau Formeln angegeben, die sich auf langjährige Erfahrungen der Zahnradfabrik Friedrichshafen stützen und weitgehenden Eingang gefunden haben. Sie müssen jedoch unter Berücksichtigung der besonderen Betriebsverhältnisse bei Flugmotoren so ergänzt werden, daß sie den Sicherheitsfaktor $S = 1$ (einfache Sicherheit) angeben, wenn gerade die höchstzulässige Beanspruchung vorliegt.

1. Verfahren der Zahnradberechnung.

Auf die Schwierigkeiten der Zahnradberechnung im allgemeinen hat Hofer [28] ausführlich hingewiesen und kommt zu dem Ergebnis, daß man aus der großen Zahl der Beanspruchungsmöglichkeiten nur diejenigen berücksichtigen solle, die für die Wahl der Abmessungen und für die Sicherheit der Zahnräder von wesentlicher Bedeutung seien.

a) Sicherheit gegen Anfressen infolge von Reibungswärme.

Zu den wesentlichen Fällen zählt zunächst die Gefährdung des Zahnrades durch übermäßige Erwärmung, wenn die durch die Leistungsübertragung erzeugte Reibungswärme größer als die durch die Verzahnungsoberfläche mögliche Wärmeabfuhr ist. Für diesen Fall wird von Hofer folgende Formel angegeben

$$S_a = \frac{m \cdot z \cdot b}{20 \cdot N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(m = Modul in mm, z = Zähnezahl, b = Zahnbreite in mm, N = Leistung in PS).

Bei Flugmotorengetrieben mit oberflächenharten, geschliffenen und druckölgeschmierten Zahnflanken kann man erfahrungsgemäß mit dem Sicherheitsfaktor S_a bis auf 0,5 heruntergehen. Es dürfte daher zweckmäßig sein, für die Verwendung bei Flugmotoren die Gl. (1) mit einem Faktor 2 zu erweitern, so daß

$$S_a' = \frac{m \cdot z \cdot b}{10 \cdot N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wird. Bei Flugmotorengetrieben normaler Ausführung sollte man den Sicherheitsfaktor $S_a' > 1{,}2$ wählen ($S_a > 0{,}6$).

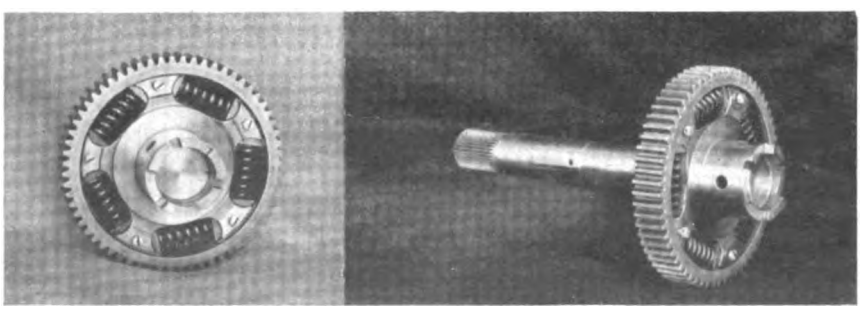


Bild 25. Verdrehwelle und drehfederndes Zahnrad im Ladergetriebe des Wright-Cyclone-Motors.

Digitized by Google

b) Sicherheit gegen Brechen.

Von besonderer Bedeutung ist bei Flugmotorengetrieben auch die Sicherheit gegen Zahnbruch. Die im Schrifttum meistens anzutreffende Meinung, daß Zahnbrüche infolge Biegebeanspruchung selten seien, trifft auch für die hochbelasteten Getriebe zugelassener Flugmotoren zu, weil die während der Entwicklungszeit des Baumusters aufgetretenen Schäden bis zur behördlichen Zulassung des Motors behoben sein müssen. Man sollte jedoch bei der Entwicklung eines Motormusters nicht die Kosten scheuen, durch den gelegentlichen Einbau eines absichtlich unterbemessenen Getriebes die Sicherheiten nachzuprüfen.

Die von Hofer angegebene Formel für die Bruchsicherheit lautet

$$S_b = \frac{m^2 \cdot z \cdot b \cdot k_b \cdot n}{8 \cdot 10^6 \cdot N} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(k_b = Kernfestigkeit in kg/mm², n = Drehzahl des Rades in U/min).

Die Gl. (3) ist in der angegebenen Form für Flugmotorengetriebe jedoch nicht unmittelbar geeignet, weil sie nur die aus der übertragenen Leistung sich ergebende Belastung und nicht die aus verschiedenen Blindleistungen und der Verzahnungsungenauigkeit sich ergebenden Beanspruchungen berücksichtigt. Es muß daher diese Gleichung auf das maximale Gesamtdrehmoment Md_{max} umgestellt werden. Da $\frac{N}{n} = \frac{Md}{716}$ ist, erhält man

$$S'_b = \frac{m^2 \cdot z \cdot b \cdot k_b \cdot 716}{8 \cdot 10^4 \cdot Md_{max}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(Md_{max} in cmkg).

Mit dem Sicherheitsfaktor $S'_b = 1$ liegt die einfache Sicherheit nur vor, wenn Md_{max} das tatsächliche Spitzendrehmoment darstellt. Um dieses Md_{max} zu ermitteln, muß man ähnlich wie bei der Berechnung der Verdrehungsbeanspruchung von Kurbelwellen[3]) vorgehen. Das Spitzendrehmoment für die Getriebebeanspruchung setzt sich dann folgendermaßen zusammen

$$Md_{max} = Md_n = Md_w + Md_s + Md_v \quad \ldots (5)$$

darin bedeuten:

- Md_n das mittlere Nutzdrehmoment am Kurbelwellenende (statische Last),
- Md_w das zusätzliche Drehmoment aus den Schwankungen der Drehkraftlinie (Blindlast I),
- Md_s das zusätzliche Drehmoment aus der Drehschwingungsbeanspruchung (Blindlast II),
- Md_v das zusätzliche Drehmoment durch Beschleunigungszahndrücke infolge Verzahnungsungenauigkeiten.

Da Md_{max} drehzahlabhängig ist, muß derjenige Wert von Md_{max} in die Gl. (4) eingesetzt werden, der im Betriebsbereich des Motors als Höchstwert auftreten kann.

Die einfache Sicherheit bei $S'_b = 1$ liegt nur bei normaler Verzahnung mit einer Zahnfußstärke $= 0{,}5 \cdot t$ vor. Durch Verbesserung der Zahnfußform und durch die Wahl von Sonderverzahnungen kann die Sicherheit erheblich erhöht werden.

c) Spezifische Flankenpressung.

Die Einführung des Wertes Md_{max} dürfte auch für die Nachrechnung der Zahnräder auf höchste Flankenpressung von Bedeutung sein. Beispielsweise erhält man für die von Wolf [30] angeführte Formel der höchsten spezifischen Flankenpressung bei außenverzahnten Stirnrädern

$$\sigma_{max} = C \frac{d}{2} \sqrt{\frac{Md_{max}}{b} \cdot \frac{i+1}{i}} \quad \ldots\ldots (6)$$

worin

- C = Festwert, der für $\alpha = 20°$ etwa 2190 beträgt,
- d = Ritzeldurchmesser in cm,
- Md_{max} = maximales Ritzeldrehmoment in cmkg,
- b = Zahnbreite in cm,
- i = Übersetzungsverhältnis.

[3]) Eine Zusammenfassung der Kurbelwellenberechnung wurde neuerdings von Cornelius [29] gegeben.

2. Untersuchung von ausgeführten Flugmotorengetrieben.

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Gleichungen zur Ermittlung der Sicherheiten gegen Anfressen und Bruch von Flugmotorengetrieben sollen an Zahlenbeispielen noch ergänzt und erläutert werden. Es wird im folgenden ein ausführliches Beispiel für einen Sternmotor und ein abgekürztes für einen Reihenmotor durchgerechnet.

Das Luftschraubengetriebe des Sternmotors (Wright-Cyclone) ist in Bild 9 und das Ladergetriebe in Bild 24 wiedergegeben. Einige Kennwerte für das Ladergetriebe können auch aus dem Beispiel 2 in Bild 19 entnommen werden.

Sternmotor $N = 640$ (720) PS,
$Md_n = 237$ (264) mkg,
$n = 1920$ (1950) U/min (Kurbelwelle).

Die Werte in Klammern geben Daten der 2-min-Leistung an.

Luftschraubengetriebe $i = 1:1{,}455$; $m = 5{,}08$ mm; $(D_p = 5)$,
Innenzahnrad $z_1 = 66$
6 Umlaufräder $z_2 = 18$ } $b = 20$ mm
festes Zahnrad $z_3 = 30$

Ladergetriebe $i = 8{,}32$; $m = 2{,}54$ mm; $(D_p = 10)$,
$N_n = 68$ PS bei $n_{KW} = 1960$ U/min,
$Md_n = 25$ mkg,
$z_a = 63$ } $b = 26$ mm,
$z_b = 18$ }
$z_c = 57$ } $b = 21$ mm.
$z_d = 24$ }

a) Nachrechnung der Getrieberäder auf Sicherheit gegen Anfressen infolge Reibungswärme.

Luftschraubengetriebe (bei Dauerlast von 620 PS),
Innenzahnrad $S'_a = 1{,}04$ $(S_a = 0{,}52)$.

Diese Werte sind ausreichend, da Innenrad sehr große Abkühlungsfläche hat.

Umlaufrad $S'_a = 1{,}73$ bei $^1/_6$ Last $(S_a = 0{,}86)$,
festes Zahnrad $S'_a = 0{,}47$ $(S_a = 0{,}235)$.

Hier Wärmeabfuhr durch Wärmeleitung.

Die Abkühlungsverhältnisse sind bei diesem Umlaufgetriebe günstiger als bei gewöhnlichen Stirnrädern, außerdem ist bei dieser Getriebeart die potentielle Leistung geringer als die übertragene[4]).

Ladergetriebe. Es brauchen nur die kleinsten Räder (Ritzel) nachgeprüft werden:
Zahnrad b $S'_a = 1{,}75$ ausreichend, $(S_a = 0{,}87)$,
Zahnrad d $S'_a = 1{,}88$ ausreichend, $(S_a = 0{,}94)$.

b) Nachrechnung auf Sicherheit gegen Bruch (S'_b).

Zum Ausgangspunkt dieser Berechnung macht man zweckmäßig die schwingungstechnische Untersuchung des betreffenden Motors. Drehschwingungsformen und Drehschwingungskennlinie des Cyclone-Motors wurden von Behrmann ermittelt und sind in Bild 27 und 28 wiedergegeben. Das Gesamtdrehschwingungssystem wurde auf fünf Ersatzmassen zurückgeführt. Da die Federn im drehfedernden Zahnrad des Ladergetriebes mit Vorspannung eingesetzt sind, kommen sie erst zur Wirkung, wenn das auftretende Drehmoment ihre Vorspannung übertrifft. Die Eigenschwingungszahlen des Systems wurden deshalb einmal nur mit Verdrehwelle (Fall α) und das andere Mal für die Gesamtfederung beider Bauteile (Fall β) errechnet. Man erhält:

	Grundschwingung	1. Oberschwingung
Fall α	$n_{eI} = 2000$/min	$n_{eII} = 6970$/min
Fall β	$n_{eI} = 668$/min	$n_{eII} = 6740$/min

Weiterhin steht nun zur schwingungstechnischen Beurteilung die mit einem Torsiographen aufgenommene Drehschwingungskennlinie des Motors zur Verfügung, Bild 28.

[4]) Vgl. Schrifttum [6] S. 252.

Digitized by Google

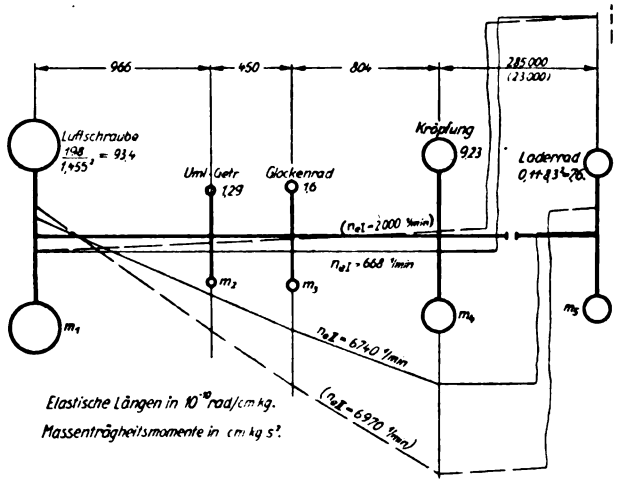


Bild 27. Errechnete Drehschwingungsformen eines Wright-Cyclone-Motors (in Klammern die Werte des Falles a).

Diese Messung wurde am vorderen Kurbelwellenende durch die hohle Luftschraubenwelle an der Stelle des Glockenrades (m_3) vorgenommen. Die Torsiogramme zeigten, daß für die Spitzendrehmomente durch Drehschwingungsresonnanzen im wesentlichen nur Schwingungen 4,5. Ordnung in Betracht kommen. Bei 1500 U/min liegt eine Resonnanzspitze mit Drehausschlägen von $\pm 0{,}48^0$ vor. Diese Kritische ergibt die gleiche Eigenschwingungszahl wie die für den Fall β errechnete 1. Oberschwingung $n_{e\,II} = 6740$/min. Die Grundschwingung war aus den Torsiogrammen nicht erkennbar. Der Ausschlag am Glockenrad dürfte für die Grundschwingung auch sehr klein sein. Für den Fall α, bei dem die im Getrieberad befindlichen Federn als unwirksam angenommen wurden, liegt die Grundschwingungszahl mit 2000/min so niedrig, daß die Kritische 4,5. Ordnung etwa bei 450/min also schon außerhalb des Betriebsdrehzahlbereiches liegen würde.

Die größte Schwingungsbeanspruchung (Md_s) in den einzelnen Triebwerkteilen ist infolge der Resonnanzspitze der Kritischen 4,5. Ordnung bei 1500 U/min zu erwarten. Für die Beanspruchung der einzelnen Bauteile ist die Neigung der Schwingungsform an der jeweiligen Stelle im Ersatzmassensystem maßgebend und für das zwischen zwei benachbarten Ersatzmassen auftretende Drehmoment erhält man

$$Md_s = \frac{\delta_a}{l_{ew}} \cdot \frac{\varphi_m}{a_m} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360} \cdot \frac{1}{i} \quad \ldots\ldots (7)$$

wobei

δ_a = Differenz der Verhältnisverdrehung zwischen den beiden Ersatzmassen,

l_{ew} = wirkliche elastische Länge zwischen den beiden Ersatzmassen in rad/cmkg,

a_m = Verhältnisverdrehung im Ersatzsystem an der Meßstelle,

φ_m = gemessener Verdrehwinkel in ° an der gleichen Meßstelle,

i = Übersetzung zwischen Drehzahl des Bauteiles und Bezugsdrehzahl des Ersatzsystems.

Nach Ermittlung der Zahlenwerte für die hier maßgebende 1. Oberschwingung $n_{e\,II}$ aus den Schwingungsformen des Bildes 28 erhält man:

im Luftschraubengetriebe (Innenzahnrad) (zwischen m_2 und m_3)

für Fall α $Md_{s\alpha} = 68500$ cmkg,

für Fall β $Md_{s\beta} = 68000$ cmkg,

und im Ladergetriebe (Verdrehwelle) (zwischen m_4 und m_5);

für Fall α $Md''_{s\,\alpha} = 6460$ cmkg,

für Fall β $Md''_{s\,\beta} = 470$ cmkg.

Als wesentliches Ergebnis der schwingungstechnischen Untersuchung, die von Behrmann angegeben wurde, kann

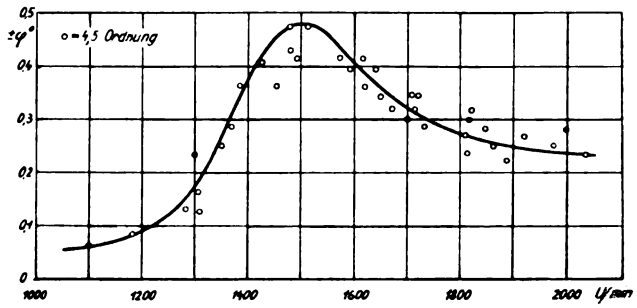


Bild 28. Drehschwingungskennlinie zu Bild 27 (torsiographisch ermittelt).

man jetzt für das Luftschrauben- und Ladergetriebe feststellen, daß im Falle α und β die Schwingungsbeanspruchung im Luftschraubengetriebe praktisch die gleiche ist, daß im Ladergetriebe jedoch erhebliche Unterschiede bestehen.

Nachdem die durch die Schwingungsbeanspruchung bedingten Drehmomente Md_s ermittelt sind, können jetzt für die Getriebe auch die Spitzendrehmomente $Md_{\max}$ nach Gl. (5) zusammengestellt werden. Um einen Vergleich zwischen den Spitzenbelastungen verschiedener Motoren ziehen zu können, soll noch ein Spitzenbelastungsfaktor k eingeführt werden, der angibt, um das Wievielfache das höchste Nutzdrehmoment oder das statische Laderantriebsmoment durch das Spitzendrehmoment übertroffen werden kann

$$Md_{\max} = k \cdot Md_n \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Für das hier durchgerechnete Zahlenbeispiel würde der Wert $Md_{\max}$ bei einer Kurbelwellendrehzahl $n_{KW} = 1500$ U/min auftreten. Nimmt man für das Luftschraubengetriebe an, daß das höchste statische Drehmoment $Md_n = 26400$ cmkg auch bei dieser Drehzahl auftreten kann, so erhält man

$$\begin{aligned} Md_n &= 1{,}0 \cdot Md_n = 26400 \text{ cmkg} \\ Md_w &= 0{,}2 \cdot Md_n \quad \text{(geschätzt)} \\ Md_s &= 2{,}6 \cdot Md_n = 68500 \text{ cmkg} \\ Md_v &= 0{,}2 \cdot Md_n \quad \text{(geschätzt)} \\ \hline Md_{\max} &= 4{,}0 \cdot Md_n = 105000 \text{ cmkg,} \end{aligned}$$

d. h. im ungünstigsten Belastungsfalle kann hier ein Spitzenbelastungsfaktor $k = 4$ auftreten. Am ungünstigsten würde dabei das feststehende Zahnrad des Umlaufgetriebes beansprucht werden. Nach Gl. (4) erhält man als Sicherheitsfaktor für dieses Zahnrad

$$S'_b = \frac{5{,}08^2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 130 \cdot 716}{8 \cdot 10^4 \cdot 8000} = 4.$$

Das Abstützdrehmoment dieses Zahnrades wurde zu $Md_k = 48000$ cmkg ermittelt, wovon $^1/_6$ eingesetzt wurde. $k_b = 130$ kg/mm². Mit Rücksicht auf eine mögliche ungleiche Lastverteilung auf die Umlaufräder kann dieser Wert $S'_b = 4$ als nicht zu hoch angesehen werden. Den nach Gl. (3) ermittelten Sicherheitsfaktor ($s_b = 16$) hätte aber ursprünglich jedermann für zu hoch gehalten.

Da beim Ladergetriebe sich die aus der Drehschwingungsrechnung ermittelten Drehmomente Md'' für den Fall α und β sehr unterscheiden, müssen die Bruchsicherheiten für beide Grenzfälle ermittelt werden. Bei der Kurbelwellendrehzahl $n_{KW} = 1500$ U/min müßte bei gleichbleibendem Ladedruck (Bodennähe) das Laderantriebsmoment $Md''_{1500} = Md''_n \cdot \left(\frac{1500}{1950}\right)^2 = 2500 \cdot 0{,}6 = 1500$ cmkg betragen. Man erhält dann

	Fall α	Fall β
$Md''_{1500} = 1500$ cmkg	$= 0{,}6 \cdot Md''_n$	$= 0{,}6 \cdot Md''_n$
Md''_w = —	—	—
Md''_s = 6460/470 cmkg	$= 2{,}6 \cdot Md''_n$	$= 0{,}2 \cdot Md''_n$
Md''_r (geschätzt)	$= 0{,}4 \cdot Md''_n$	$= 0{,}2 \cdot Md''_n$
$Md''_{\max}$	$= 3{,}6 \cdot Md''_n$	$= 1{,}0 \cdot Md''_n$
	$= 9000$ cmkg	$= 2500$ cmkg

Digitized by Google

Für das am höchsten belastete Zahnrad b des Ladergetriebes erhält man dann folgende Sicherheitsfaktoren:

Fall α $S'_b = 0{,}39$ unzulässig niedrig,
Fall β $S'_b = 1{,}4$ noch zulässig.

Man muß also die Vorspannung der Drehfederung im Zahnrad b des Ladergetriebes so niedrig wie möglich halten.

Reihenmotor.

Es soll das Luftschrauben- und Ladergetriebe eines Reihenmotors auf Sicherheit gegen Anfressen und Bruchfestigkeit vereinfacht nachgerechnet werden.

$N = 880$ PS; $n_{KW} = 2400$ U/min; $Md_n = 26400$ cmkg.

Luftschraubengetriebe (geradflankiges Stirnräderpaar)

$i = 1:1{,}55$; $m = 4{,}75$ mm; $b = 63$ mm; $z_1 = 38$; $z_2 = 59$

a) Sicherheit gegen Anfressen nach Gl. (2)

$$S'_a = \frac{4{,}75 \cdot 38 \cdot 63}{10 \cdot 880} = 1{,}3;$$

b) Sicherheit gegen Bruch nach Gl. (4).

Aus der schwingungstechnischen Untersuchung des Motors ergibt sich bei $n_{KW} = 2300$ U/min eine Kritische 2,5. Ordnung, die für den Luftschraubenantrieb ein zusätzliches Drehmoment Md_s zur Folge hat.

$$Md_s = 39300 \text{ cmkg}.$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned} Md_n &= 1{,}0 \cdot Md_n = 26400 \text{ cmkg}, \\ Md_w &= 0{,}2 \cdot Md_n \quad \text{(geschätzt 12-Zyl.-Motor)}, \\ Md_s &= 1{,}5 \cdot Md_n = 39300 \text{ cmkg}, \\ Md_v &= 0{,}2 \cdot Md_n \quad \text{(geschätzt)} \\ \hline Md_{max} &= 2{,}9 \cdot Md_n = 76500 \text{ cmkg}. \end{aligned}$$

Der Spitzenbelastungsfaktor im Luftschraubenantrieb beträgt bei diesem Motor also $k = 2{,}9$.

Die Bruchsicherheit der Zähne des Ritzels ist

$$S'_b = \frac{22{,}56 \cdot 38 \cdot 63 \cdot 130 \cdot 716}{8 \cdot 10^4 \cdot 76500} = 0{,}82.$$

Es müssen also besondere Maßnahmen (Gestaltung, Werkstoff, Verzahnung) getroffen werden, um die Bruchfestigkeit der Zähne über das normale Maß hinaus zu steigern.

Ladergetriebe. — Das Spitzendrehmoment im Laderantrieb wurde hier nicht aus der schwingungstechnischen Untersuchung, sondern durch praktische Versuche festgestellt. Die im Laderantrieb in der schnellen Welle angeordnete Rutschkupplung mußte auf mindestens $Md''_{max} = 18$ mkg eingestellt werden, damit sie nicht übermäßig rutscht. Die Kupplung begrenzt also das im Laderantrieb auftretende Drehmoment. Da das normale Laderantriebsmoment in der schnellen Welle etwa 2,4 mkg beträgt, liegt also hier im Ladergetriebe ein Spitzenbelastungsfaktor $k = 7{,}5$ vor.

a) Sicherheit gegen Anfressen nach Gl. (2),

Ritzel 1 $\quad S'_a = \frac{3 \cdot 13 \cdot 34}{10 \cdot 81} = 1{,}63;$

Ritzel 2 $\quad S'_a = \frac{3 \cdot 16 \cdot 22}{10 \cdot 81} = 1{,}3.$

b) Sicherheit gegen Bruch nach Gl. (4),

Ritzel 1 $\quad S'_b = \frac{9 \cdot 13 \cdot 34 \cdot 130 \cdot 716}{8 \cdot 10^4 \cdot 4300} = 1{,}08;$

Ritzel 2 $\quad S'_b = \frac{9 \cdot 16 \cdot 22 \cdot 130 \cdot 716}{8 \cdot 10^4 \cdot 1800} = 2{,}03.$

Das letztere Ritzel ist ein Kegelrad, bei denen erfahrungsgemäß das volle Tragen der Flanken nur bei sorgfältigster Lagerung und Einstellung gewährleistet ist. Das in Bild 22 gezeigte Kegelrad ist das Gegenrad zu diesem Ritzel. Besondere Maßnahmen zur Erhöhung der Festigkeit dürften gerade bei Kegelrädern in hochbelasteten Ladergetrieben unerläßlich sein.

Für das vorgeschlagene Berechnungsverfahren von Flugmotorengetrieben fehlen noch größere Erfahrungen. Die beiden Zahlenbeispiele dürften jedoch schon gezeigt haben, daß auf diesem Wege einer objektiveren Beurteilung der Sicherheit von Flugmotorengetrieben näherzukommen ist. Sobald für den neu eingeführten Belastungsfaktor k eine größere Zahl von Werten vorliegt, wird man auch für die Vorausberechnung der Getriebe eine sicherere Handhabe besitzen. Weiterhin sind noch Untersuchungen und Erfahrungen notwendig, die durch gestalterische Maßnahmen erhöhte Festigkeit in die Berechnung einzubeziehen. Auch Untersuchungen über die Werkstoffeigenschaften der sparstoffarmen Stähle, insbesondere über ihre Wechselbeanspruchungen (zulässigen) dürften erwünscht sein. Als sparstoffarme Werkstoffe kommen für die Zahnräder der Flugmotorengetriebe vorwiegend Einsatz-Chrom-Molybdän-Stähle ECMO 80 und ECMO 100 nach Flieg-Norm 1407 bzw. 1408 und zähharte Vergütungs-Chrom-Molybdän-Stähle VCMO 135 und VCMO 140 nach Flieg-Norm 1454 bzw. 1455 in Betracht. Die Oberflächenhärte dieser legierten Stähle muß möglichst groß sein (mindestens eine Rockwellhärte von 60 aufweisen).

IV. Einige grundsätzliche Maßnahmen zur Herabsetzung der Spitzenbeanspruchungen in Flugmotorengetrieben.

In dem Zahlenbeispiel der Zahnradberechnung des Ladergetriebes des Wright-Cyclone-Motors zeigte es sich, daß die Weichheit des federnden Getrieberades starken Einfluß auf die Drehschwingungsbeanspruchung im Laderantrieb nahm, daß jedoch die maßgebende Eigenfrequenz ($n_{e\,II}$) sich dabei nur unbedeutend verlagerte. Die Bedeutung und Auswirkung derartiger Maßnahmen wird gerade bei der Zahnradberechnung nach dem vorgeschlagenen Verfahren stark in Erscheinung treten. Zur Herabsetzung der Drehschwingungsbeanspruchung im Luftschraubenantrieb könnte man auch daran denken, das Luftschraubengetriebe in der Mitte der Kurbelwelle anzubringen, wie es beispielsweise Banks [31] vorschlug. Man könnte dadurch beide Kurbelwellenenden zur Verfügung haben und die Hilfsapparate wesentlich übersichtlicher unterbringen. Es wäre auch denkbar, diese Motoren vollkommen symmetrisch auszubilden, so daß Stirn- und Rückseite vertauschbar wären und mit jedem Motor links- bzw. rechtsgängige Schrauben angetrieben werden könnten.

Zur Herabsetzung der Drehschwingungsbeanspruchung im Laderantrieb versucht man neuerdings wieder, den Laderantrieb am Luftschraubengetriebe (Schwingungsknoten) abzuzweigen und ihn von den Motorschwingungen möglichst unabhängig zu machen.

Zusammenfassung.

Nach einer Übersicht über die gebräuchlichsten Bauformen von Luftschrauben- und Ladergetrieben und Hinweisen auf die besonderen Gestaltungsmerkmale der Flugmotorengetriebe wird für die Zahnradberechnung dieser Getriebe ein verbessertes Rechnungsverfahren vorgeschlagen, das auf eine genaue zahlenmäßige Erfassung der Sicherheiten in derartigen Getrieben hinzielt. An zwei Zahlenbeispielen wird der Hergang der Rechnung erläutert und es werden die Rechnungsgrundlagen festgelegt. Es wird ein Spitzenbelastungsfaktor k eingeführt, der als Erfahrungs- und Vergleichswert für die Vorausberechnung von Flugmotorengetrieben von Wert sein wird. Schließlich werden Maßnahmen erläutert, die sich auf die Betriebssicherheit und Beanspruchung von Flugmotorengetrieben günstig auswirken können.

Schrifttum.

[1] W. G. Noack, »Flugzeuggetriebe«. Z. VDI Bd. 64 (1920) S. 317, 346 u. 377.

[2] W. G. Noack, »Flugzeuggebläse«. Z. VDI Bd. 63 (1919) S. 995 u. 1026.

[3] K. Kutzbach, »Erfahrungen an Zahnradgetrieben«. Technische Berichte der Flugzeugmeisterei, Bd. III Heft 3, Berlin 1918.

Digitized by Google

[4] Dechamps und Kutzbach, »Prüfung, Wertung und Weiterentwicklung von Flugmotoren«. Handbuch der Flugzeugkunde, Bd. VI, 1. Teil, Berlin 1921.
[5] H. Ide, »Zur Dynamik des Antriebes von Flugmotorenladern«. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1938, Bd. II, S. 210.
[6] Buckingham-Olah, »Stirnräder mit geraden Zähnen«. Berlin 1932.
[7] H. Schrön, »Die Zündfolge der vielzylindrigen Verbrennungsmaschinen insbesondere der Fahr- und Flugmotoren«. München u. Berlin 1938.
[8] E. Offermann, »Riesenflugzeuge«. Handbuch der Flugzeugkunde, Bd. IV, Berlin 1927.
[9] H. Schneider, »Flugmotoren der Schneider-Trophäe 1928«. Z. VDI Bd. 74 (1930), S. 459/66.
[10] DRP. 556683, 486741, 496676, 609438 und 609654 von Stoeckicht.
[11] DRP. 546698 von Farman.
[12] N. S. Muir, »On the art of dynamometry with particular reference to the measurement of the engine power in flight«. The Journal of the Royal Aeronautical Society 1937, S. 864 (Abb. 65).
[13] L. Poincaré, »La mesure de la puissance des moteurs en vol«. Vortrag anläßlich der Hauptversammlung 1938 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1938, Ergänzungsband, S. 219.
[14] C. Waseige, »Possibilités des Moteurs à compresseurs«. La Science Aérienne Bd. 3 (1934) S. 478.
[15] G. Bock, »Wege zur Leistungssteigerung im Flugzeugbau«. Luftwissen Bd. 4 (1937) S. 104.
[16] F. Weinig, »Luftschrauben für schnelle Flugzeuge«. Luftfahrtforschung Bd. 14 (1937) S. 168.
[17] E. Heinkel, »Die Erhöhung der Geschwindigkeit der Flugzeuge in den letzten Jahren«. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1938, Ergänzungsband, S. 1.
[18] »A variable gear for aero-motors«. Aeroplane, Sept. 1938, S. 346.
[19] M. Short, »Unitwin« powerplant., Aero-Digest, Febr. 1939, S. 55; übersetzt im Luftfahrt-Schrifttum des Auslandes, April/Mai 1939, S. 98.
[20] »L'avion de chasse Koolhoven F. K. 55«. L'Aéro Bd. 28 (1936) Nr. 1483, S. 10.
[21] Schweizer Patent Nr. 185376 von J. Schmidlin.
[22] F. Goßlau, »Die internationale Luftfahrtausstellung in Paris«. Z. VDI Bd. 75 (1931) S. 478.
[23] Engl. Patent Nr. 378754 von H. Sinclair.
[24] Engl. Patent Nr. 442082 von E. v. Grandell.
[25] G. Getzlaff, »Untersuchung an Wälzlagern«. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1938, Bd. II, S. 110.
[26] E. Heidebroek u. W. Peppler, »Untersuchungen über die Quetschöl-Verdrängung und ihre Auswirkung bei Zahnradgetrieben«. Kraftfahrtechnische Forschungsarbeiten, Heft 2.
[27] H. Hofer, »Gehärtete und in der Verzahnung geschliffene Zahnräder aus hochwertigem Stahl«. Z. Masch.-Bau Bd. 5 (1926) S. 353.
[28] H. Hofer, »Die zulässige Zahnradbeanspruchung und ihre Berechnungsweise im Werkzeugmaschinenbau«. Werkstattstechnik Bd. 25 (1931) S. 128.
[29] F. Cornelius, »Berechnung und Gestaltung von Kurbelwellen für schnellaufende Verbrennungskraftmaschinen«. Vortrag auf der VDI-Hauptversammlung 1939 in Dresden.
[30] O. Wolf, »Konstruktive Entwicklung der Getriebetechnik unter besonderer Berücksichtigung der Anwendung hochwertiger Werkstoffe«. Z. VDI Bd. 80 (1936) S. 1093.
[31] F. R. Banks, »Fuel and modern aero-motor design.« Aeroplane Bd. 52, Nr. 1338, S. 39/44.

Digitized by Google

Die Zahnradbeanspruchung und ihre Berechnungsweise bei Flugmotorengetrieben.

Vergleich der Getriebe von Motoren mit verschiedenen Drehrichtungen.

Von O. Nübling, Berlin.

Neben der Berechnung der Zähne von Zahnrädern auf Biege- und Walzenfestigkeit ist es notwendig, dieselben auf Wärmestau nachzurechnen. Die hierfür bekannte Hoferformel gilt nur für einfache Stirnradgetriebe bei begrenztem Geschwindigkeitsbereich. Für die bei Flugmotoren meistens angewendeten Getriebe mit Zwischenräder oder Planetenräder werden Formeln abgeleitet. Es wird gezeigt, daß bei Austauschgetrieben, die zur Änderung der Luftschraubendrehrichtung Verwendung finden, die Abmessungen der Zahnräder je nach Drehrichtung erheblich verschieden sein müssen.

Gliederung.

I. Einleitung.
1. Die Belastung der Zahnräder bei Flugmotorengetrieben.
2. Formelzeichen.
II. Zweck der vorliegenden Arbeit.
III. Ableitung der Formeln zur Berechnung der Zahnräder auf Wärmestau.
1. Einfluß der Häufigkeit der Zahneingriffe.
2. Berücksichtigung des Schaltweges.
IV. Zahlenbeispiele.
1. Nachrechnung eines ausgeführten Getriebes zum Antrieb des Laders eines Flugmotors.
2. Aufgabe: Zu einem ausgeführten Planetengetriebe soll ein Umkehrgetriebe gebaut werden.
a) Das ausgeführte Planetenuntersetzungsgetriebe.
b) Getriebe mit gegenläufiger Luftschrauben- und Kurbelwelle.
c) Zweite Ausführung des Getriebes mit gegenläufiger Luftschraube.
d) Bestimmung der auf das Kurbelgehäuse übertragenen Momente.
e) Lösung der Aufgabe mit einfachem Stirnradgetriebe.
f) Umsteuerbarer Motor.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

I. Einleitung.

1. Die Belastung der Zahnräder bei Flugmotorengetrieben.

Schnellaufende, hochbelastete Zahnräder für Flugmotoren, das sind Zahnräder zum Antrieb der Luftschraube oder zum Antrieb des Laders, werden sehr oft zerstört, obwohl die bekannten Berechnungsverfahren [1, 2, 3][1]) eine ganz mäßige Beanspruchung ergeben.

In sehr vielen Fällen sind Drehmomentenschwankungen, z. B. Stöße beim Anfahren, durch plötzlichen Lastwechsel oder durch stark wechselnde Dreh- bzw. Biegeschwingungen die Ursache dieser Zerstörung. Durch konstruktive Maßnahmen, Einbau von elastischen Kupplungen, Abstimmung der Massen und Elastizitäten bzw. Einbau von Schwingungsdämpfern ist es möglich, die Eigenschwingungszahl so zu verlegen, daß die Zahnräder nicht überlastet werden.

Häufiger jedoch werden die Zahnräder dadurch zerstört, daß sich in der Nähe des Teilkreises Grübchen bilden. Die Grübchenbildung kann dadurch entstehen, daß die Beanspruchung der Zahnoberfläche (Hertzsche Gleichung [4, 5]) zu groß ist, oder aber dadurch, daß sich der Zahn an der Berührungsstelle zu sehr erwärmt und infolgedessen der Werkstoff an der Berührungsstelle zu geringe Festigkeit hat (Wärmestau).

[1]) Die Angaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende der Arbeit.

2. Formelzeichen.

Sa = Sicherheitsfaktor gegen Anfressen
N = übertragene Motorleistung in PS
b = Radbreite
m = Modul
C = Konstante
z = Zähnezahl
D = Teilkreisdurchmesser
φ = Korrekturfaktor für Räder mit mehreren Eingriffen
x = Anzahl der Eingriffe an einem Rad
n = Anzahl der Umläufe in 1 min
$\frac{1}{p}$ = Anzahl der Eingriffe bei Berücksichtigung der Relativdrehzahl
V = Faktor zur Berücksichtigung des Schaltweges
P = Zahndruck in kg
σ_{zul} = Zulässige Beanspruchung in kg/cm²
c = Belastungszahl in kg/cm²
v = Umfangsgeschwindigkeit in m/s
t = Zahnteilung
W_{zul} = zulässige Zahnbelastung nach der Lewisformel in kg
y = Zahnformfaktor
$Q = \frac{2 z_1}{z_2 + z_1}$ = Faktor zur Berechnung der Beanspruchung der Zahnflanke nach der Hertzschen Gleichung
K_{max} = spez. Druckkoeffizient $= \frac{\sigma_b^2 \cdot \sin \alpha}{4 \cdot 0{,}35} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$,
W_{azul} = zulässige Belastung der Zahnflanke nach der Hertzschen Gleichung
M_d = Drehmoment
M_r = Rückstellmoment.

II. Zweck der vorliegenden Arbeit.

Zur Berechnung der Zahnräder auf Wärmestau wird vielfach die Hofersche Formel [6, 7] benützt. Die Hoferformel gilt nur für einfache Stirnradgetriebe bei begrenztem Geschwindigkeitsbereich. Für die bei Flugmotoren meistens angewendeten Getrieben mit Zwischenrädern oder Planetenrädern ist die Formel nicht zu verwenden. Es werden Formeln zur Berechnung solcher Getriebe abgeleitet. Mit den abgeleiteten Formeln werden einige Zahlenbeispiele durchgerechnet.

Ein dringendes Bedürfnis der Luftfahrt sind Luftschraubengetriebe mit verschiedenen Drehrichtungen. Mit den abgeleiteten Formeln werden solche Getriebe in einem Zahlenbeispiel durchgerechnet. Es wird gezeigt, daß es nicht zweckmäßig ist, solche Getriebe zu bauen, sondern daß es besser ist, den Motor mit Umsteuerung zu versehen.

III. Ableitung der Formeln zur Berechnung der Zahnräder auf Wärmestau.

Die Größe der Erwärmung der Zahnoberfläche ist abhängig von

Digitized by Google

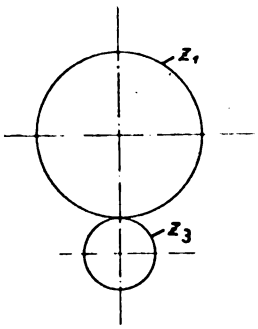


Bild 1. Stirnradgetriebe.

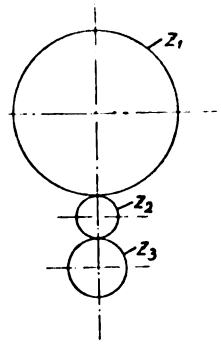


Bild 2. Getriebe mit Zwischenrad.

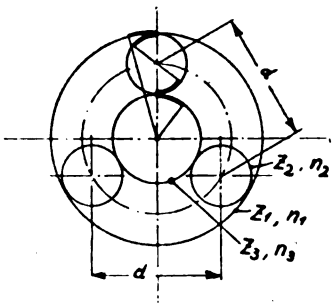
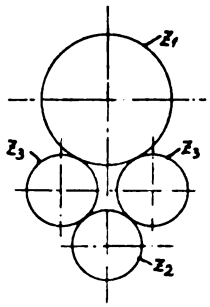


Bild 3. Untersetzungsgetriebe.



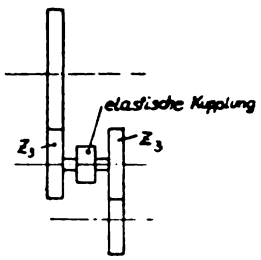


Bild 4. Getriebe mit elastisch gekuppelten Zwischenrädern.

der Belastung und der Häufigkeit, mit der sie auftritt,
der Beschaffenheit der Oberfläche,
der Gleitgeschwindigkeit,
der Art der Schmierung der Zähne,
der Wärmeleitfähigkeit des Zahnradkörpers bzw. des Getriebegehäuses.

Die Belastung und die Gleitgeschwindigkeit (abgewälzte Leistung) ist in der Hoferformel durch den Faktor N erfaßt. Die Wärmeleitfähigkeit des Zahnradkörpers in Annäherung durch die Größe des Zahnrades $b\ m\ z$. Die übrigen Faktoren sind Erfahrungswerte und durch die Größe des Sicherheitsfaktors S_a gekennzeichnet.

Bei Lager mit Flüssigkeitsreibung ist es bekannt, daß der Reibungskoeffizient und damit die Erwärmung der Lager mit der Umfangsgeschwindigkeit des Lagerzapfens sich verändern. Bei Zahnrädern tritt zum Unterschied von Lagerreibung nur Linienberührung auf, und durch die Fliehkraftwirkung wird das Öl abgeschleudert, so daß reine Flüssigkeitsreibung wohl kaum vorhanden sein wird. Dagegen ist die Abwälzbewegung der Zähne für den Schmiervorgang von Vorteil, da an der Radoberfläche haftende Öltröpfchen zwischen die Zahnflanken gewalzt werden.

Bei Berücksichtigung des veränderlichen Reibungskoeffizienten müßte aus diesem Grunde die Hoferformel heißen:

$$S_a = \frac{b \cdot m \cdot z}{20\,N} \cdot f(v), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei $f(v)$ die Abhängigkeit der Reibungswärme von der Umfangsgeschwindigkeit berücksichtigt. In diesem Falle ist im Ausdruck

$$N = \frac{P \cdot n \cdot z \cdot m}{60 \cdot 75} \cdot C$$

die Belastung der Zähne (P), die Häufigkeit mit der dieselbe erfolgt ($n\ z$) und die Länge der gewalzten Zahnflanke (m) enthalten.

In vielen Fällen genügt es, ein Getriebe mit der gewöhnlichen Hoferformel zu berechnen. Bei besonders schnellaufenden Getrieben wird der Einfluß der Geschwindigkeit so groß, daß die Hoferformel zu ungenau wird.

Bei Flugmotoren sind in vielen Fällen die Getriebe als Planetenumlaufgetriebe gebaut. Für dieselben ist aus folgenden Gründen die Hoferformel nicht zu verwenden:

1. Bei Planetengetrieben sind mehrere Planeten und dadurch mehrere Zahneingriffe im Außenrad bzw. Innenrad vorhanden. Die Anzahl der Eingriffe bedingt die Wärmeentwicklung und muß in der Formel zum Ausdruck kommen.
2. Bei Planetenrädergetrieben setzen sich die Wege der Räder aus Schaltweg und abgewälztem Weg zusammen. Die Gleitgeschwindigkeit ist dem abgewälzten Weg verhältig und dadurch kleiner, als sie dem Faktor N der Hoferformel entsprechen würde.

1. Einfluß der Häufigkeit der Zahneingriffe.

Ein Zahntrieb entsprechend Bild 1 hat bei Wärmestau nach der Hoferformel

$$S_a = \frac{b \cdot m \cdot z}{20\,N}$$

genügend Sicherheit gegen Anfressen. Wenn aus irgendeinem Grunde ein Zwischenrad z_2 angeordnet wird, so hat das Zwischenrad z_2 den doppelten Zahneingriff, so daß bei gleicher Zahnbelastung die doppelte Wärmemenge abzuführen ist. Für die Fähigkeit des Zwischenrades, die Wärme abzuführen, ist es nun nicht gleichgültig, ob die Wärmemenge durch zweimaligen Zahneingriff oder durch einmaligen Eingriff mit doppelter Last erzeugt wird. Da dies nicht rechnerisch zu erfassen ist, sei dies in der Formel durch den Faktor φ bei doppeltem bzw. φ_x bei $x$fachem Eingriff berücksichtigt. Für Zwischenräder wird demnach die Sicherheit gegen Anfressen:

$$S_a = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_2}{20 \cdot N \cdot x} f(v) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bei einem Getriebe in der Ausführung nach Bild 3 sind die Räder z_2 im Getriebegehäuse gelagert, so daß das Getriebe kein Umlaufgetriebe, sondern nur ein reines Untersetzungsgetriebe ist, wobei Außen- und Innenrad gegenläufig sind. Gegenüber Bild 2 sind die Zahndrücke im Verhältnis der Anzahl x der Räder z_2 kleiner. Dafür ist die Anzahl der Zahneingriffe der Räder z_1 und z_3 im selben Verhältnis größer. Die Formeln zur Berechnung heißen aus diesem Grunde:

$$\text{Außenrad:} \quad S_{a_1} = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_1}{20 \cdot N} \cdot f(v) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{Zwischenrad:} \quad S_{a_2} = \frac{\varphi_2 \cdot b \cdot m \cdot z_2 \cdot x}{40 \cdot N} \cdot f(v) \quad \ldots \quad (4)$$

$$\text{Innenrad:} \quad S_{a_3} = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_3}{20 \cdot N} \cdot f(v) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Gegenüber der Ausführung nach Bild 2 ist hierbei ein grundsätzlicher Unterschied. Es ist schwierig, bei Getrieben mit mehreren Zwischenrädern dieselben gleichmäßig zum Tragen zu bringen. Die Zahnräder haben Teilungsfehler, die Radabstände d sind nicht genau gleich und die Radmitten der Räder z_1 und z_3 sind auch nicht ganz genau zentrisch. Bei zwei Zwischenrädern kann man sich, wie in Bild 4 gezeichnet, helfen. Die Räder z_3 sind als Doppelräder ausgeführt, dieselben sind durch eine elastische Kupplung miteinander verbunden. In diesem Falle haben die Räder nur einen Eingriff, so daß sie nach Formel (1) zu berechnen sind. Bei Getrieben nach Bild 5 ist es bei drei Planetenrädern bekannt, dieselben mit freibeweglichen Rädern z_1 und z_3 in Eingriff zu bringen (Farman-Getriebe, Stöckicht-Getriebe). Doch auch hier wird es nicht der Fall sein, daß die Räder vollkommen gleichmäßig tragen. Sehr schwierig ist es bei mehr als drei Zwischenrädern oder bei nicht einstellbar gelagerten Rädern z_1 und z_3. Bei ungleich-

Digitized by Google

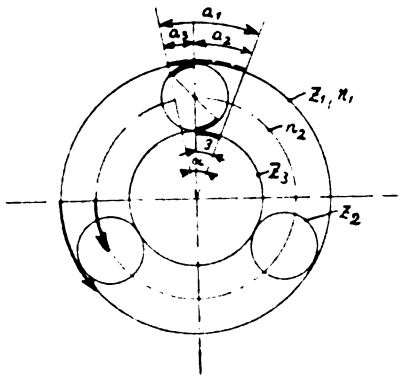


Bild 5. Planetengetriebe.

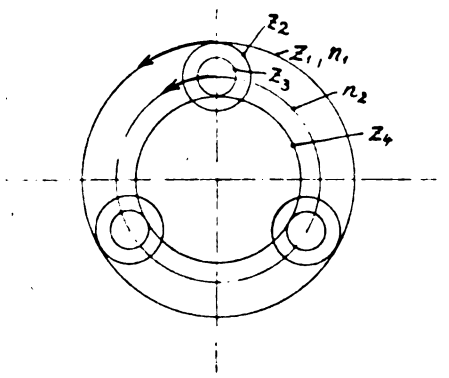


Bild 6. Planetengetriebe mit feststehendem Innenrad.

mäßigem Tragen wird der Anteil der Erwärmung der verschiedenen Zahneingriffe verschieden. Es ist unbekannt, wie viel ungünstiger sich ungleichmäßiges Tragen auf die Erwärmung auswirkt. Aus diesem Grunde ist es nicht zu empfehlen, mit dem Sicherheitsfaktor für Wärmestau bei Getrieben mit mehreren Zwischenrädern so niedrig zu gehen, als bei einfachen Untersetzungsgetrieben. Doch dies hängt immer von der Genauigkeit der Werkstattausführung ab.

Bei Planetengetrieben, das sind Getriebe mit umlaufendem Träger für die Zwischenräder (Planetenräder z_2), hängt die Anzahl der Zahneingriffe von der Anzahl x der Planeten ab und von der Anordnung. Nach Bild 5 bleibt das Innenrad stehen, Planetenradträger und Außenrad drehen sich, so daß das Außenrad sich um den $\sphericalangle\, \alpha$ dreht, während der Planetenradträger den $\sphericalangle\, \beta$ zurücklegt. Die Relativdrehzahl zwischen Außenrad und Planetenradträger beträgt $n_1 — n_2$, die Anzahl der Zahneingriffe am Außenrad

$$(n_1 — n_2)\, x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wenn das Außenrad z_1 die Leistung an ein im Getriebegehäuse gelagertes Rad z_2 abgeben würde, dann wären die Anzahl der Eingriffe des Außenrades $= n_1$. Zur Berechnung der Sicherheit gegen Anfressen für das Außenrad ist aus diesem Grunde die Hoferformel mit einem Faktor

$$\frac{1}{p_1} = \frac{n_1}{x\,(n_1 — n_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

zu multiplizieren.

Ähnlich bestimmen sich die Faktoren für die übrigen Räder:

Planetenrad. — Die Anzahl der Eingriffe des Planetenrades im Außenrad sind $(n_1 — n_2)\,\frac{z_1}{z_2}$. Da die Anzahl der Eingriffe des Planetenrades außen und innen gleich sein müssen (je zwei gegenüberliegende Zähne sind im Eingriff), wird die Anzahl der Eingriffe eines Planetenrades $2\,(n_1 — n_2)\,\frac{z_1}{z_2}$.

Wenn das Innenrad nicht vorhanden wäre und die Welle des Planetenrades fest gelagert wäre, dann wäre die Anzahl der Eingriffe des Planetenrades $= n_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}$.

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{p_2} = \frac{n_1 \cdot z_1 \cdot z_2}{2\,(n_1 — n_2)\, z_1 \cdot z_2} = \frac{n_1}{2\,(n_1 — n_2)} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Innenrad. — Anzahl der Eingriffe: $n_2\, x$. Wenn das Außenrad die Leistung über ein festgelagertes Zwischenrad z_2 an das sich drehende Rad z_3 abgeben würde, dann wäre die Anzahl der Eingriffe des Rades $z_3 = n_1 \frac{z_1}{z_3}$.

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{p_3} = \frac{n_1 \cdot z_1}{n_2 \cdot x \cdot z_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Übersetzung des Planetenrädergetriebes errechnet sich bekanntermaßen zu $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_1 + z_3}{z_1}$ oder $\frac{n_1 — n_2}{n_2} = \frac{z_3}{z_1}$. Dieser Wert wird in Formel (9) eingesetzt, so daß

$$\frac{1}{p_3} = \frac{n_1}{x\,(n_1 — n_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

2. Berücksichtigung des Schaltweges.

Bei dem Getriebe nach Bild 5 setzt sich der Weg a_1 des Rades z_1 aus dem Schaltweg a_2 und dem abgewälzten a_3 zusammen. Dementsprechend verringert sich die Gleitgeschwindigkeit im Verhältnis

$$v = \frac{a_3}{a_1}\, v_1 = \frac{n_1 — n_2}{n_1} \cdot v_1;\; f(v) = f\left(\frac{n_1 — n_2}{n_1} \cdot v_1\right) \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung des durch die Mehrzahl x der Planetenräder verkleinerten Zahndruckes wird bei Planetengetrieben die allgemeine Formel für die Sicherheit gegen Anfressen heißen:

$$S_a = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z \cdot x}{20 \cdot N \cdot p} \cdot f(v) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Das Getriebe nach Bild 5 hat hieraus folgende Sicherheitszahlen:

Außenrad: $$S_{a_1} = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_1 \cdot n_1}{20 \cdot N\,(n_1 — n_2)} \cdot f(v) \quad \ldots \quad (13)$$

Planetenrad: $$S_{a_2} = \frac{\varphi_2 \cdot b \cdot m \cdot z_2 \cdot x \cdot n_1}{40 \cdot N\,(n_1 — n_2)} \cdot f(v) \quad \ldots \quad (14)$$

Innenrad: $$S_{a_3} = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_3 \cdot n_1}{20 \cdot N\,(n_1 — n_2)} \cdot f(v) \quad \ldots \quad (15)$$

Bei einem Zahneingriff nach Bild 1 ist das kleine Rad das gefährdete. Bei der Berechnung des Sicherheitsfaktors setzt man darum die Zähnezahl des kleinen Rades z_2 in die Formel ein. Bei Planetenrädergetrieben und auch bei Getrieben nach Bild 2 ist dies nicht der Fall. In vielen Fällen ist das Zwischenrad z_2, vgl. Bild 2, das gefährdete. Bei Planetenrädergetrieben ist es in den meisten Fällen das Innenrad z_3. Die Bilder 12, 13 und 14 zeigen Aufnahmen von Zahnrädern, die bestätigen, daß das Innenrad z_3 am höchsten beansprucht wird. In dem später folgenden Berechnungsbeispiel wird dies auch durch die Rechnung bestätigt.

Sinngemäß lassen sich die Formel auch für ein Getriebe nach Bild 6 und für jedes andere Planetengetriebe ableiten. Bei dem Getriebe nach Bild 6 bleibt das Innenrad z_4 feststehend. Die Übersetzung errechnet sich bekanntermaßen zu

$$(n_1 — n_2)\, z_1 \cdot \frac{z_3}{z_2} = n_2 \cdot z_4 \text{ oder } \frac{n_1 — n_2}{n_2} = \frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} \quad (16)$$

Außenrad: $$\frac{1}{p_1} = \frac{n_1}{(n_1 — n_2)\, x};$$
$$S_{a_1} = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_1 \cdot n_1}{20 \cdot N\,(n_1 — n_2)} \cdot f(v)$$

Rad z_2: $$\frac{1}{p_2} = \frac{n_1 \cdot z_1 \cdot z_2}{z_2\,(n_1 — n_2)\, z_1} = \frac{n_1}{n_1 — n_2}$$
$$S_{a_2} = \frac{b \cdot m \cdot z_2 \cdot x \cdot n_1}{20\, N\,(n_1 — n_2)} \cdot f(v)$$

(Faktor φ fällt weg, weil nur ein Eingriff.)

Rad z_3: $$\frac{1}{p_3} = \frac{n_1 \cdot z_1 \cdot z_3}{n_2 \cdot z_2 \cdot z_4} = \frac{n_1}{n_1 — n_2}$$
$$S_{a_3} = \frac{b \cdot m \cdot z_3 \cdot x \cdot n_1}{20 \cdot N\,(n_1 — n_2)} \cdot f(v)$$

(Faktor φ fällt weg, weil nur ein Eingriff.)

Digitized by Google

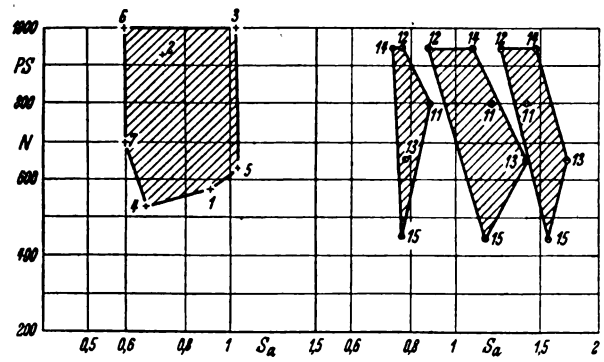


Bild 7. Werte für Sa von ausgeführten Luftschraubenuntersetzungsgetrieben.
┼ Stirnraduntersetzungsgetriebe.
⊕ Innenräder von Umlaufuntersetzungsgetrieben.
● Planetenräder von Umlaufuntersetzungsgetrieben.
⊖ Außenräder von Umlaufuntersetzungsgetrieben.

Nr.	Baumuster	z_1 z_2 z_3	b	m	N	S_{a_1} S_{a_2} S_{a_3}	Bem.
1	Curtiss Conqueror	32	76	4,23	575	0,9	
2	Rolls Royce Buzzard	44, 21	75	8,5	933	0,715	
3	Daimler Benz F2	24	122	7	1000	1,025	
4	Napier Lion . . .	26	48,5	5,6	530	0,66	
5	Fiat A 24 R . . .	22	88	6,75	630	1,04	
6	Daimler Benz DB 600	56 36	63	5	1000	0,6	
7	Jumo 210	56 32	56	5	700	0,6	
11	Farman Getriebe	54 30 33	38	4,5	800	1,41 1,19 0,87	3 Kegelradplaneten
12	Bramo 323	54 25 33	35	5,5	950	1,25 0,87 0,77	3 Kegelradplaneten
13	Wrigt Cyclone . .	103 28 47	20,7	3,17	650	1,71 1,4 0,78	6 Stirnradplaneten
14	Twin Wasp . . .	72 18 36	35	3,63	950	1,47 1,09 0,74	6 Stirnradplaneten
15	Argus 410	64 16 32	24	3	450	1,57 1,15 0,77	6 Stirnradplaneten

$$\text{Innenrad:}\quad \frac{1}{p_4} = \frac{n_1 \cdot z_1 \cdot z_3}{n_2 \cdot z_2 \cdot z_4 \cdot x} = \frac{n_1}{(n_1 - n_2) \cdot x}$$

$$S_{a_1} = \frac{\varphi_x \cdot b \cdot m \cdot z_4 \cdot n_1}{20 \cdot N \,(n_1 - n_2)}.$$

Man erkennt aus den Formeln, daß die Sicherheit gegen Anfressen dann am größten ist, wenn der Faktor $\frac{n_1}{n_1 - n_2}$ am größten ist, d. h. wenn $n_1 = n_2$ ist. In diesem Falle findet kein Abwälzen mehr statt, der gesamte Weg des Außenrades ist nur noch Schaltweg, das Getriebe läuft als Kupplung.

Ferner ergibt der Vergleich der Formel für Getriebe nach Bild 5 und Bild 6, daß, falls bei einem gegebenen Untersetzungsverhältnis beide Bauarten möglich sind, das Getriebe nach Bild 6 nur dann größere Sicherheit gibt, wenn der Durchmesser des Innenrades größer ist als der des Getriebes nach Bild 5. Ein Gewichtsvergleich müßte in diesem Falle zeigen, welche Bauart günstiger ist.

Die Formeln sind auch gültig, falls das Außenrad feststeht und das Innenrad umläuft.

Bild 7 zeigt Werte für S_a von ausgeführten Getrieben. Dieselben sind zum Teil einer Arbeit von Graf v. Soden entnommen [7]. Bei der Berechnung der Werte für S_a ist der Ausdruck $f(v)$ nicht berücksichtigt.

Es ist möglich, an ausgeführten Planetengetrieben den Einfluß der Geschwindigkeit $f(v)$ zu bestimmen. Das höchstbelastete Rad ist das Innenrad. Da das Innenrad sich nicht dreht, können Thermoelemente angebracht werden und mit denselben die Temperatur der Zähne bei konstantem Drehmoment und veränderlicher Gleitgeschwindigkeit bestimmt werden, ebenso die Temperatur der Zähne bei Beginn der Grübchenbildung und den Einfluß der Formgebung des Innenrades auf günstigen Wärmefluß. Auf Grund dieser Versuche könnte man für eine Getriebebauart $f(v)$ bestimmen und auf ähnliche Getriebe übertragen.

Ein Vergleich der Getriebe nach Bild 1 und 3 ergibt folgendes:

Bei gleicher übertragener Leistung, gleichem Drehmoment, gleicher Wälzgeschwindigkeit, gleichem Reibungskoeffizienten, gleicher Wärmeleitfähigkeit und gleichem Wert für S_a des Rades z_3 müßte auf Grund folgender Überlegung das Getriebe nach Bild 3 günstiger sein als das nach Bild 1.

Die mittlere Temperatur der Zahnräder ist nach obigen Voraussetzungen bei beiden Getrieben dieselbe. Dagegen ist die höchste Temperatur bei dem Getriebe in Bild 1 größer, weil die Reibungswärme bei größerer Zahnbelastung — die Anzahl der Zahneingriffe ist dafür im selben Verhältnis kleiner — entsteht als beim Getriebe nach Bild 3. Bekanntlich nimmt die Festigkeit des Werkstoffes mit steigender Temperatur ab, so daß, obwohl beide Getriebe dieselbe mittlere Temperatur aufweisen, das Getriebe nach Bild 1 höheren Zahndruck und kleinere Festigkeit an der Berührungsstelle der Zahnflanken aufweist als das Getriebe nach Bild 3. Der Faktor φ müßte also bei Getrieben nach Bild 3 größer als 1 sein. Sinngemäß gilt dies auch für Planetengetriebe nach Bild 5.

Entgegen obiger Überlegung haben die nach Bild 7 ausgeführten Planetenrädergetriebe viel höhere Sicherheitszahlen nötig als einfache Stirnradgetriebe. Es kann dies nicht nur in den obenerwähnten Ungenauigkeiten der Zahnräder und deren Lagerung herrühren. Vermutlich hängt es zum Teil damit zusammen, daß Planetenrädergetriebe im Vergleich zu Stirnradgetrieben sehr kompakte, auf kleinen Raum zusammengedrängte Getriebe darstellen, die die Wärme weniger leicht ableiten können als Stirnradgetriebe. Beim Entwurf von Planetenradgetrieben ist es aus diesem Grunde wichtig, durch gute Schmierung und durch geschickte Anordnung der die Wärme ableitenden Teile für ausreichende Kühlung zu sorgen.

Drehmomentenschwankungen durch Drehschwingungen wirken sich ähnlich wie oben dargestellt aus. Drehschwingungen sind Wechselbelastungen, die das mittlere Drehmoment überlagern. Sie verursachen keine Erhöhung der mittleren Getriebetemperatur, sondern eine Erhöhung der höchsten Temperatur an der Zahneingriffsstelle.

Bild 8 und 9 zeigen die Drehmomente, die auf das feststehende Getrieberad des Motors Argus 410 einwirken, das mittlere Drehmoment M_d wird überlagert von positiv oder negativ wirkenden Momenten M_{ds}. Zur Verringerung der Drehschwingung ist das Innenrad federnd gelagert. In Bild 13 ist die federnde Anordnung des Innenrades dargestellt. Bei fester Anordnung des Innenrades ist nach Bild 8 das größte Drehmoment und die Zahnbelastung 3,5 M_d

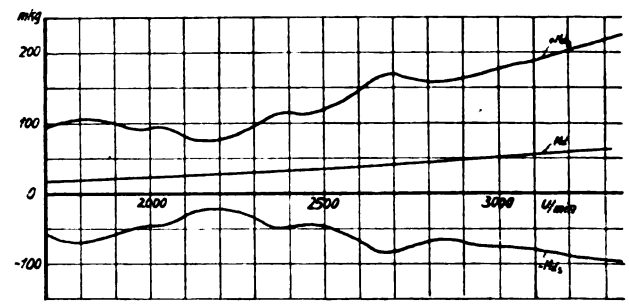


Bild 8. Drehmomente am feststehenden Getrieberad. Getriebe starr.

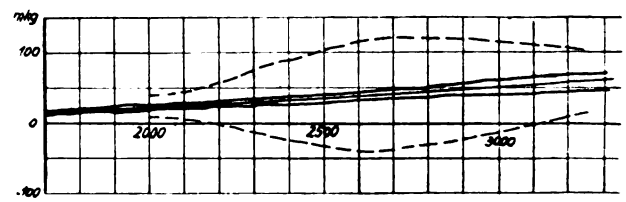


Bild 9. Drehmomente am feststehenden Getrieberad. Getriebe gefedert.

Digitized by Google

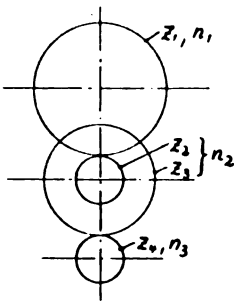


Bild 10. Anordnung des nachgerechneten Getriebes.

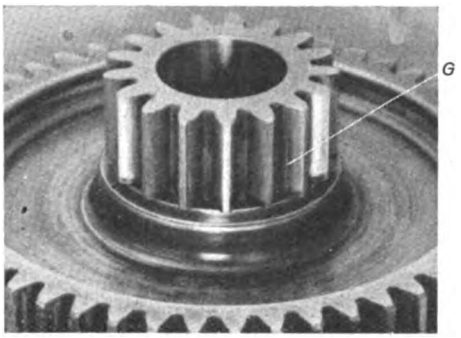


Bild 11. Grübchenbildung am Zahnrad z_2.

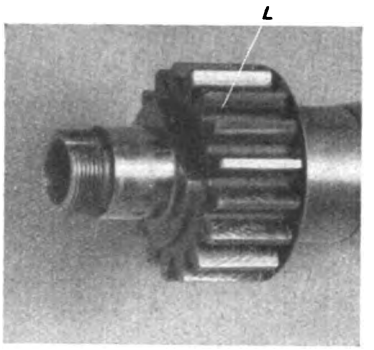


Bild 12. Beginn der Grübchenbildung am Zahnrad z_4.

bei $n = 3000$ U/min, bei federnder Anordnung dagegen nur 1,25fach. Die gestrichelte Linie zeigt einzelne auftretende Belastungen bei plötzlicher Änderung der Motorleistung. Die Biege- und Walzenfestigkeit der Zähne muß diesen Drehmomentschwankungen genügen.

IV. Zahlenbeispiele.

1. Nachrechnung eines ausgeführten Getriebes zum Antrieb des Laders eines Flugmotors.

Bild 10 stellt die Anordnung des Getriebes dar. Über eine sehr elastische Kupplung wird das Zahnrad z_1 von der Kurbelwelle angetrieben. Das Laderlaufrad wird vom Zahnrad z_4 über die Zwischenräder z_2 und z_3 von dem Zahnrad z_1 angetrieben. Das Laderlaufrad hat eine Leistung von 30 PS zu übertragen. Bei sehr langen Laufzeiten hat sich keinerlei Anzeichen von Zerstörungen oder Freßerscheinungen an den Zähnen gezeigt. Nach einem aufgenommenen Torsiogramm sind auch nur geringfügige Drehmomentschwankungen durch Kurbelwellenschwingungen auf das Laufrad übertragen worden. Zu Versuchszwecken ist das Laderlaufrad einmal mit 90 PS belastet worden. Nach einem Dauerlauf von 90 h bei 90 PS mußten die Antriebsräder wegen Lagerschadens ausgebaut werden. Das Rad z_2 zeigte Grübchenbildung G, Bild 11. Das Rad z_4 zeigt in der Nähe des Teilkreises eine Linie L, Bild 12, die vermutlich den Beginn der Grübchenbildung kennzeichnet. Der Fall ist dadurch interessant, daß die Räder z_2 und z_3 in der Zähnezahl und Radbreite einander gleich waren. Der Unterschied der beiden Räder bestand lediglich darin, daß das Rad z_2 korrigiert war, das Rad z_4 nicht. Nach der Hofer-Formel haben beide Zahnräder die gleiche Sicherheit gegen Anfressen. Die Verzahnung und die Lagerung der Räder sind besonders sorgfältig hergestellt. Die Abmessungen der Räder sind:

$z_1 = 73$, $z_2 = 17$, $z_3 = 49$, $z_4 = 17$, $b = 20$, $m = 2{,}5$, Eingriffswinkel 20°, Zahnflanken gehärtet und geschliffen, Werkstoff 1408.4, Schmierung erfolgte durch Spritzöl. Der Modul ist für alle vier Zahnräder derselbe. Der Teilkreisdurchmesser des Rades z_2 ist von 42,5 mm auf 44 mm korrigiert.

Bei den Zahlenbeispielen ist der Faktor $f(v)$ nicht berücksichtigt.

Die Drehzahlen betrugen:

Laufradwelle $n_3 = 33000$ U/min,
Zwischenräder $n_2 = 11450$ U/min,
Antriebsrad $n_1 = 2670$ U/min.

Bei Benützung der Hofer-Formel zur Berechnung der Sicherheit gegen Anfressen sind die Abmessungen in der Formel in Millimetern einzusetzen. Da dies allgemein so eingeführt ist, sei dies auch in den folgenden Zahlenbeispielen beibehalten.

$$S_{a_{2 \text{ und } 4}} = \frac{20 \cdot 2{,}5 \cdot 17}{20 \cdot 90} = 0{,}473.$$

Eine Nachrechnung des Zahnrades z_4 nach der üblichen Formel für den c-Wert und nach der amerikanischen Lewis-Formel bzw. eine Nachrechnung der Zahnflanke nach der Hertzschen Gleichung ergibt folgende Werte:

$$\text{Rad } z_4\text{: } P_1 = \frac{71600 \cdot 90}{33000 \cdot 2{,}125} = 92 \text{ kg};$$

$$c = \frac{P}{b \cdot t} = \frac{92}{2 \cdot 0{,}25 \cdot \pi} = 59$$

$$\text{Rad } z_2\text{: } P_2 = \frac{71600 \cdot 90}{11450 \cdot 2{,}125} = 265 \text{ kg};$$

$$c = \frac{265}{2 \cdot 0{,}25 \cdot \pi} = 170$$

$$v_4 = \frac{D\pi \cdot n}{60} = \frac{0{,}0425 \cdot \pi \cdot 33000}{60} = 70 \text{ m/s};$$

$$v_2 = \frac{0{,}0425 \cdot \pi \cdot 11450}{60} = 25{,}5 \text{ m/s}.$$

Für besonders genau ausgeführte Räder wird nach Barth:

$$\text{Rad } z_4\text{: } \sigma_{zul} = \left(\frac{5{,}5}{5{,}5 + \sqrt{v}}\right)\sigma_b;$$

$$\sigma_b = 12000 \text{ kg/cm}^2 \text{ für } 1408 \cdot 4$$

$$\sigma_{zul} = \frac{5{,}5}{5{,}5 + \sqrt{70}} \cdot 12000 = 4800 \text{ kg/cm}^2.$$

Zulässiger Zahndruck nach Lewis:

$$W_{zul} = \sigma_{zul} \cdot t \cdot b \cdot y = 4800 \cdot 0{,}25 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0{,}096 = 720 \text{ kg}$$

$y = 0{,}096$ (17 Zähne).

Sicherheit: $S = \frac{720}{92} = \sim 8$ fach.

$$\text{Rad } z_2\text{: } \sigma_{zul} = \frac{5{,}5}{5{,}5 + \sqrt{25{,}5}} \cdot 12000 = 6250 \text{ kg/cm}^2;$$

$y = 0{,}096$

Zulässiger Zahndruck:

$$W_{zul} = 6250 \cdot 0{,}25 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0{,}096 = 942 \text{ kg}.$$

Sicherheit: $S = \frac{942}{265} = 3{,}55$ fach

$$\text{Rad } z_4\text{: } Q = \frac{2 z_3}{z_4 + z_3} = \frac{98}{66} = 1{,}485;$$

$$k_{max} = \frac{\sigma_{D^2 max} \cdot \sin\alpha}{4 \cdot 0{,}35}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) = 55{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

Zulässiger Zahndruck nach Hertzscher Gleichung:

$$W_{a\,zul} = \frac{D_1 \cdot b \cdot k_{max} \cdot Q}{S}$$

Sicherheit: $S = \frac{4{,}25 \cdot 2 \cdot 55{,}5 \cdot 1{,}485}{92} = 7{,}6$ fach

$$\text{Rad } z_2\text{: } Q = \frac{2 \cdot z_1}{z_1 + z_2} = \frac{146}{90} = 1{,}61; \quad k_{max} = 55{,}5$$

Sicherheit: $S = \frac{4{,}25 \cdot 2 \cdot 55{,}5 \cdot 1{,}61}{265} = 2{,}87$ fach.

Zur Grübchenbildung des Rades z_2 ist folgendes zu sagen: Durch die Korrektur des Rades z_2 sind die Gleitverhältnisse des Rades z_2 ungünstiger als die des Rades z_4. Außerdem

Digitized by Google

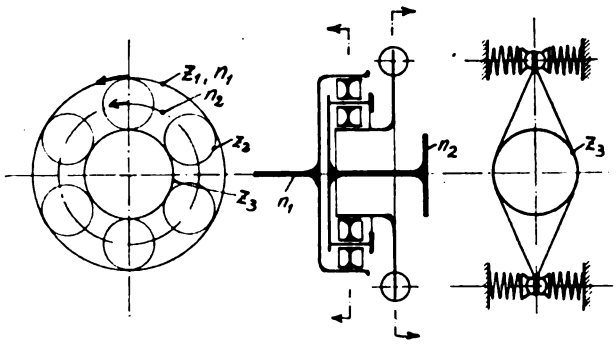


Bild 13. Federnde Anordnung des Innenrades.

war die Flächenpressung der Zahnflanke bedeutend höher als die des Rades z_4. In Zahlentafel 1 sind die Ergebnisse zusammengestellt.

Zahlentafel 1.

	Sicherheitsfaktor			c-Wert
	Hofer	Lewis	Hertz	
Rad z_2	0,473	3,55	2,87	170
Rad z_4	0,473	8	7,6	59

2. Aufgabe: Zu einem ausgeführten Planetengetriebe soll ein Umkehrgetriebe gebaut werden.

Bei mehrmotorigen Flugzeugen ist es vorteilhaft, die Drehrichtung der Motoren verschieden zu wählen. Es sei daher die Aufgabe gestellt, zu einem ausgeführten Umlaufuntersetzungsgetriebe mit in gleicher Drehrichtung laufender Luftschraube und Kurbelwelle ist ein Getriebe zu bauen, bei dem Luftschraube und Kurbelwelle gegenläufig sind. Beide Getriebe sollen je nach Verwendungszweck austauschbar sein.

a) Das ausgeführte Planetenraduntersetzungsgetriebe.

Die Bilder 13, 14, 15 und 16 zeigen Anordnung des Getriebes und Aufnahmen der gelaufenen Getrieberäder. Die Luftschraube wird vom Planetenträger angetrieben. Das feststehende Innenrad ist federnd abgestützt. Die Federung ist so weich, daß keine erheblichen Drehmomentschwankungen durch Drehschwingungen auftreten, vgl. Bild 9. Die Radbreiten sind mit $b = 24$ mm ausgeführt, und hierbei haben sich bei sehr langen Betriebszeiten keinerlei Nachteile gezeigt. Zu Versuchszwecken sind die Planeten-Räder auf $b = 15$ mm Breite abgedreht worden. Die Aufnahmen zeigen die abgedrehten Räder. Das Getriebe mit den abgedrehten Rädern hat eine Laufzeit von 950 h durchgehalten. Die Belastung des Getriebes betrug bei $n = 3000$ U/min 450 PS Spitzenleistung. Der Motor wurde nach den amtlichen Richtlinien der Musterprüfung belastet, so daß die Leistung von 450 PS nur während eines Teiles der Gesamtlaufzeit übertragen wurde. Die Zahnflanken waren gehärtet, aber nicht geschliffen. Die Grübchen G des Innenrades und der Planetenräder traten schon nach dem Einlauf auf. Während der Laufzeit wurde das Getriebe einige Male auseinandergenommen. Die Zahnflanken sind während der Betriebszeit eher besser als schlechter geworden, so daß anzunehmen ist, daß das Getriebe noch lange Zeit weiterlaufen kann. Die Grübchenbildung ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß die Räder sich beim Härten etwas verzogen haben, so daß die Zahnflanken nicht gleichmäßig getragen haben. Bei geschliffenen Rädern wird die Grübchenbildung vielleicht nicht eintreten. Die Schmierung erfolgte durch Spritzöl. Die Abmessungen der Räder sind:

$z_1 = 64$, $z_2 = 16$, $z_3 = 32$, $m = 3$, $b = 15$, Eingriffswinkel 20°, Werkstoffe: Außenrad z_1: 1470.4 (nitriert), Planetenräder und Innenrad: 1408.4.

Die Luftschraubendrehzahl errechnet sich zu:

$$\frac{n_1 - n_2}{n_2} = \frac{32}{64}; \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{32}{64} + 1 = 1{,}5; \quad n_2 = \frac{n_1}{1{,}5} = \frac{3000}{1{,}5} = 2000$$

Die Sicherheit gegen Anfressen wird für das:

Außenrad

$$S_{a_1} = \frac{\varphi \cdot b \cdot m \cdot z_1 \cdot n_1}{20 \cdot N\,(n_1 - n_2)} = \frac{1 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 64 \cdot 3000}{20 \cdot 450 \cdot (3000 - 2000)} = 0{,}96$$

Planetenrad

$$S_{a_2} = \frac{\varphi \cdot b \cdot m \cdot z_2 \cdot x \cdot n_1}{40 \cdot N\,(n_1 - n_2)} = \frac{1 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 3000}{40 \cdot 450 \cdot (3000 - 2000)} = 0{,}72$$

Innenrad

$$S_{a_3} = \frac{\varphi \cdot b \cdot m \cdot z_3 \cdot n_1}{20 \cdot N\,(n_1 - n_2)} = \frac{1 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 3000}{20 \cdot 450 \cdot (3000 - 2000)} = 0{,}48.$$

Da Werte für die Faktoren φ nicht bekannt sind, sind dieselben in obigem Beispiel mit $\varphi = 1$ angenommen.

Falls alle Räder gleichmäßig tragen, errechnet sich der Zahndruck zu:

$$P = \frac{71600 \cdot 450}{3000 \cdot 6 \cdot 9{,}6} = 186 \text{ kg}; \quad c = \frac{186}{1{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot \pi} = 132.$$

Bei besonders guter Ausführung:

$$v = \frac{D \cdot \pi \cdot (n_1 - n_2)}{60} = \frac{0{,}192 \cdot \pi\,(3000 - 2000)}{60} = 10 \text{ m/s}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{5{,}5}{5{,}5 + \sqrt{10}} \cdot 12000 = 7620 \text{ kg/cm}^2;$$

$$W_{zul} = 7620 \cdot 0{,}3 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}094 = \sim 1000 \text{ kg } (y = 0{,}094);$$

Sicherheit entsprechend der Lewis-Formel für das Planetenrad:

$$S = \frac{1000}{186} = 5{,}4 \text{ fach}.$$

Für handelsübliche Ausführung:

$$\sigma_{zul} = 0{,}231 \cdot 12\,000 = 2780 \text{ kg/cm}^2;$$

$$W_{zul} = 2780 \cdot 0{,}3 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}094 = 370 \text{ kg}.$$

Sicherheit entsprechend der Lewis-Formel für das Planetenrad:

$$S = \frac{370}{186} = \sim 2 \text{ fach}.$$

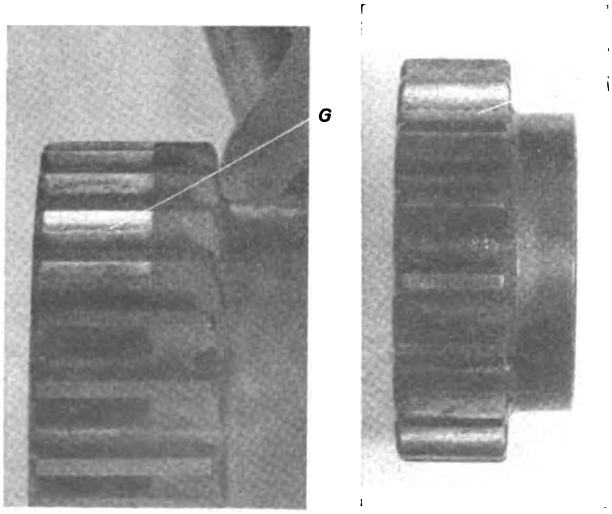


Bild 14, 15 und 16. Aufnahmen der gelaufenen Getrieberäder.

Digitized by Google

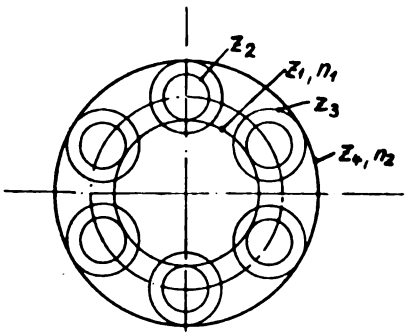


Bild 17. Skizze des durchgerechneten Getriebes mit gegenläufiger Luftschrauben- und Kurbelwelle.

Nach der Hertzschen Gleichung:

$$Q = \frac{2 \cdot 32}{32 + 16} = 1{,}33; \quad K_{max} = 55{,}5.$$

Sicherheitsfaktor:

$$S = \frac{4{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 55{,}5 \cdot 1{,}33}{186} = 2{,}86.$$

Nach der Hertzschen Gleichung müßte bei Überschreitung der zulässigen Druckbeanspruchung der Zahnflanke das Rad z_2 zuerst zerstört werden.

Nach der Hofer-Formel erfolgt die Zerstörung der Zahnflanke bei ungenügender Wärmeabfuhr zuerst am Innenrad. Dies stimmt auch mit dem erprobten Getriebe überein, vgl. Bild 14. Das Innenrad wurde bei einer verhältnismäßig hohen Wärmebelastung $S_a = 0{,}48$ zerstört.

Um Vergleichswerte zu erhalten, ist für die Festigkeitsrechnung das mittlere Drehmoment eingesetzt, da für die folgenden Getriebe das höchste Drehmoment unbekannt ist.

Bei der normalen Ausführung des Getriebes mit 24 mm breiten Rädern errechnen sich die Sicherheitszahlen für Wärmestau zu:

Außenrad: $S_{a1} = 1{,}57$,
Planetenrad: $S_{a2} = 1{,}15$,
Innenrad: $S_{a3} = 0{,}77$.

b) Getriebe mit gegenläufiger Luftschrauben- und Kurbelwelle.

Damit der Außendurchmesser des Getriebes nicht zu groß wird, sei ein Getriebe nach Bild 17 gewählt. Die Zwischenräder z_2 und z_3 sind fest miteinander verbunden und im Getriebegehäuse gelagert. Das Innenrad z_1 wird von der Kurbelwelle angetrieben, das Außenrad z_4 treibt die Luftschraube. Die Zähnezahlen sind:

$z_1 = 32$, $z_2 = 16$, $z_3 = 24$, $z_4 = 72$, $m = 3$; die Untersetzung errechnet sich zu:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{72 \cdot 16}{24 \cdot 32} = \frac{3}{2}.$$

Der Zahndruck des Innenrades wird:

$$P_1 = \frac{71600 \cdot 450}{3000 \cdot 6 \cdot 4{,}8} = 374 \text{ kg};$$

bei gleichem c-Wert wie bei dem Getriebe nach Bild 13 wird die Radbreite:

$$b = \frac{374}{132 \cdot 0{,}3 \cdot \pi} = 3 \text{ cm},$$

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{0{,}096 \cdot \pi \cdot 3000}{60} = 15 \text{ m/s}.$$

Bei besonders sorgfältiger Ausführung:

$$\sigma_{zul} = \frac{5{,}5}{5{,}5 + \sqrt{15}} \cdot 12000 = 7000 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_{zul} = 7000 \cdot 0{,}3 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 0{,}094 = 1860 \text{ kg} \quad (y = 0{,}094);$$

Sicherheitsfaktor nach Lewis-Formel:

$$S = \frac{1860}{374} = 5\text{fach},$$

Sicherheitsfaktor nach der Hertzschen Gleichung:

$$Q = \frac{2 \cdot 32}{32 + 16} = 1{,}33$$

$$S = \frac{3 \cdot 4{,}8 \cdot 55{,}5 \cdot 1{,}33}{374} = 2{,}86\text{fach},$$

Sicherheitsfaktor nach der Hofer-Formel: für das Rad z_2

$$S_{a_2} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 6}{20 \cdot 450} = 0{,}96,$$

für das Innenrad: $S_{a_i} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 32}{20 \cdot 450} = 0{,}64.$

Bei gleicher Sicherheit müßte die Radbreite des Rades z_2: $b = 20$ mm ausgeführt werden.

c) Zweite Ausführung des Getriebes mit gegenläufiger Luftschrauben- und Kurbelwelle.

Wenn aus baulichen Gründen eine Vergrößerung des Außendurchmessers möglich ist, kann das Getriebe nach Bild 3 ausgeführt werden. Die Lagerzapfen der Zwischenräder z_2 sind im Getriebegehäuse fest gelagert. Damit in den Zwischenrädern z_2 Lager untergebracht werden können, ist eine Mindestzähnezahl $z_2 = 16$ notwendig. Die Zähnezahlen der übrigen Räder bestimmen sich aus diesem Grunde zu $z_1 = 64$; $z_3 = 96$. Nach Voraussetzung ist:

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$$

Das Rad z_1 ist der treibende, das Rad z_3 der getriebene Teil. Das Übersetzungsverhältnis errechnet sich zu $\frac{z_3}{z_1} = \frac{96}{64} = 1{,}5$. Die Radbreite wird mit 15 mm angenommen, so daß Zahndruck und c-Wert dieselben wie bei dem Getriebe nach Bild 13 sind. Es ist $P = 186$ kg, $c = 132$ kg/cm² (6 Planetenräder)

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{0{,}192 \cdot \pi \cdot 3000}{60} = 30 \text{ m/s};$$

$$\sigma_{zul} = \frac{5{,}5}{5{,}5 + \sqrt{30}} \cdot 12000 = \sim 6000 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_{zul} = 6000 \cdot 0{,}3 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}094 = 800 \text{ kg}; \quad y = 0{,}094;$$

Sicherheitsfaktor nach der Lewis-Formel:

$$S = \frac{800}{186} = 4{,}3,$$

Sicherheitsfaktor nach der Hertzschen Gleichung:

$$Q = \frac{2 \cdot 64}{64 + 16} = 1{,}6$$

$$S = \frac{4{,}8 \cdot 55{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}6}{186} = 3{,}44 \text{ (Rad } z_2),$$

Sicherheitsfaktor nach der Hofer-Formel bei Vernachlässigung des Faktors φ:

$$\text{Antriebsrad } z_1 \quad S_{a_1} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 96}{20 \cdot 450} = 0{,}48$$

Zahlentafel 2. Zusammenstellung der Ergebnisse.

a Ausgeführtes Getriebe mit gleichlaufenden Antriebs- und Abtriebswellen	0,48 Innenrad 0,72 Planetenrad	5,4 Planetenrad	2,86 Planetenrad
b Getriebe nach Bild 17 mit gegenlaufenden Antriebs- und Abtriebswellen	0,64 Innenrad z_1 0,96 Zwischenräder $z_2 = 16$, $z_3 = 24$	5 Zwischenrad $z_2 = 16$	2,86 Zwischenrad $z_2 = 16$
c Getriebe nach Bild 3 mit gegenlaufenden Antriebs- und Abtriebswellen	0,32 für z_1 0,24 für z_2 0,48 für z_3	4,3 Zwischenrad $z_2 = 16$	3,44 Zwischenrad $z_2 = 16$
Sicherheit nach	Hofer	Lewis-Barth	Hertz

Digitized by Google

Zwischenrad z_2 $S_{a_2} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 6}{40 \cdot 450} = 0{,}24$

Außenrad z_3 $S_{a_3} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 64}{20 \cdot 450} = 0{,}32.$

Sämtliche Getriebe haben denselben Wert $c = 132$. Würde man in der Hofer-Formel bei obigen Getrieben einen Sicherheitsfaktor $S_a = 1$ zulassen können, dann würden die Getriebe folgende Radbreiten erhalten:

Getriebe a: $b = 15 \cdot \frac{1}{0{,}48} = \sim 31{,}5$ mm $(c = 62{,}5)$

Getriebe b: $b = 30 \cdot \frac{1}{0{,}64} + 20 \cdot \frac{1}{0{,}96} = 47 + 21 = 68$ mm

Getriebe c: $b = 15 \cdot \frac{1}{0{,}24} = 62{,}5$ mm.

d) Bestimmung der auf das Kurbelgehäuse übertragenen Momente.

Die Getriebe b und c haben nicht nur zum Nachteil, daß dieselben bei gleicher Sicherheit auf Wärmestau gegenüber dem Getriebe a in den Abmessungen viel größer und dadurch schwerer werden. Die Nachrechnung des vom feststehenden Getriebeteil auf das Getriebe bzw. Kurbelgehäuse übertragenen Drehmoment im folgenden Rückstellmoment genannt, ergibt, daß dieses bei den Getrieben b und c bedeutend größer ist als beim Getriebe a.

1. Getriebe a. — Umlaufplanetengetriebe mit in gleicher Drehrichtung laufenden Luftschrauben- und Kurbelwelle.

Die Summe der Zahndrücke auf das feststehende Getriebe-Innenrad beträgt:

$$\Sigma P_3 = \frac{M_{d_{\text{Motor}}} \cdot 2}{z_1 \cdot m}.$$

(Der Zahndruck des Außenrades ist so groß wie der Zahndruck des Innenrades.)

Das Rückstellmoment ist:

$$M_{d_R} = M_{d_{\text{Motor}}} \cdot \frac{z_3}{z_1}.$$

Da $\frac{z_3}{z_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_2}$ wird

$$M_{d_R} = M_{d_{\text{Motor}}} \frac{n_1}{n_2} - M_{d_{\text{Motor}}} = M_{d_{\text{Luftschr.}}} - M_{d_{\text{Motor}}} \quad (21)$$

2. Getriebe in der Ausführung b bzw. c mit gegenläufiger Luftschrauben- und Kurbelwelle.

Das Rückstellmoment ist gleich der Summe der Zahndrücke des Außen- und Innenrades mal Abstand des Zwischenradbolzens bis Mitte Kurbelwelle, vgl. Bild 17.

Die Summe der Zahndrücke des Außenrades beträgt:

$$\Sigma P_4 = \frac{M_{d_{\text{Luftschr.}}} \cdot 2}{z_4 \cdot m}.$$

Die Summe der Zahndrücke des Innenrades beträgt:

$$\Sigma P_1 = \frac{M_{d_{\text{Motor}}} \cdot 2}{z_1 \cdot m}.$$

Für den Abstand des Zahnradzwischenbolzens bis Mitte Kurbelwelle kann man schreiben:

$$(z_4 - z_3)\frac{m}{2} \text{ oder } (z_1 + z_2)\frac{m}{2}.$$

Das Rückstellmoment beträgt:

$$M_{d_R} = \frac{M_{d_{\text{Luftschr.}}} \cdot 2\,(z_4 - z_3) \cdot m}{2 \cdot z_4 \cdot m} + \frac{M_{d_{\text{Motor}}} \cdot 2\,(z_1 + z_2) \cdot m}{2 \cdot z_1 \cdot m}$$

$$= M_{d_{\text{Luftschr.}}} - M_{d_{\text{Luftschr.}}} \frac{z_3}{z_4} + M_{d_{\text{Motor}}} + M_{d_{\text{Motor}}} \cdot \frac{z_2}{z_1};$$

da $M_{d_{\text{Luftschr.}}} = M_{d_{\text{Motor}}} \cdot \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$

$$= M_{d_{\text{Luftschr.}}} - M_{d_{\text{Motor}}} \cdot \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} \cdot \frac{z_3}{z_4} + M_{d_{\text{Motor}}} + M_{d_{\text{Motor}}} \frac{z_2}{z_1}$$

$$M_{d_R} = M_{d_{\text{Luftschr.}}} + M_{d_{\text{Motor}}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

das heißt: Das Rückstellmoment ist bei Getrieben mit gleichlaufenden Antriebs- und Abtriebswellen gleich der Differenz der Drehmomente. Bei Getrieben mit gegenläufigen Antriebs- und Abtriebswellen ist das Rückstellmoment gleich der Summe der Drehmomente beider Wellen. Dies gilt für alle Arten von Getrieben.

Da in unserem Falle $M_{d_L} = 1{,}5\, M_{d_M}$ beträgt das auf das Getriebe und Kurbelgehäuse übertragene Rückstellmoment:

Für das Getriebe a: $M_{d_R} = 1{,}5\, M_{d_M} - M_{d_M} = 0{,}5 \cdot M_{d_M}$.

Für das Getriebe b bzw. c: $M_{d_R} = 1{,}5\, M_{d_M} + M_{d_M} = 2{,}5\, M_{d_M}$,

das heißt das fünffache Rückstellmoment des Getriebes a. Reihenmotoren besonders luftgekühlte Motoren haben ein verhältnismäßig niedriges und sehr langes, wenig drehsteifes Kurbelgehäuse, so daß für dieselben von großer Bedeutung ist, daß vom Getriebe her keine großen Drehmomente übertragen werden.

e) Lösung der Aufgabe mit einfachem Stirnradgetriebe.

Sollte die Aufgabe des Austauschgetriebes mit Luftschrauben verschiedener Drehrichtung mit einfachen Stirnraduntersetzungsgetrieben gelöst werden, so ist hierbei folgendes zu beachten. Ein Stirnradgetriebe nach Bild 1 ist ein Getriebe mit gegenläufigen Wellen, also ein Getriebe mit großem Rückstellmoment. Erfolgreiche Motoren mit solchen Getrieben z. B. der Motor DB 600, hat ein Kurbelgehäuse, das über die Getrieberäder nach vorn gezogen ist und am vordersten Ende Öffnungen zum Einbringen der Getrieberäder bzw. Lager hat. Dadurch wird das Rückstellmoment unmittelbar auf das Kurbelgehäuse übertragen. Würde das Getriebe als Austauschgetriebe mit einem besonderen Getriebegehäuse versehen, so müßte die Verbindung zwischen Getriebe und Kurbelgehäuse sehr kräftig und schwer ausgeführt werden, damit das Rückstellmoment sicher übertragen werden kann. Zur Aufnahme des Rückstellmomentes können die mit dem Kurbelgehäuse fest verschraubten Zylinderblöcke mit herangezogen werden.

Das Getriebe mit gleichlaufenden Wellen könnte nach Bild 18 gebaut werden. Nach Formel (4) müßte bei gleicher Sicherheit auf Erwärmung das Rad z_2 die doppelte Zähnezahl des Rades z_1 erhalten. Da dies aus baulichen Gründen wohl kaum möglich ist, wird man zwei Zwischenräder z_4 und z_5 anwenden müssen.

Bei über die Getrieberäder nach vorn gezogenem Kurbelgehäuse wird es nicht zweckmäßig sein, die Getrieberäder zur Änderung der Luftschraubendrehrichtung auszutauschen, denn es sind Luftschraubenwelle, Zahnräder z_1 und z_3 im einen Fall gegen Luftschraubenwelle, Zahnräder z_1 bis z_5 im andern Fall umzutauschen, dies bedingt einen weitgehenden Umbau und Neueinlauf des Motors.

f) Umsteuerbarer Motor.

Neben den oben angeführten Nachteilen des Getriebes mit gegenläufigen Wellen ist es vom Standpunkt der Beschaffung aus nicht wünschenswert, zwei vollkommen verschiedene Getriebe herzustellen und zu lagern. Es ist nun Sache des Gestalters, zu versuchen, ob die Änderung der Drehrichtung der Luftschraubenwelle durch andere einfachere Mittel erreicht werden kann.

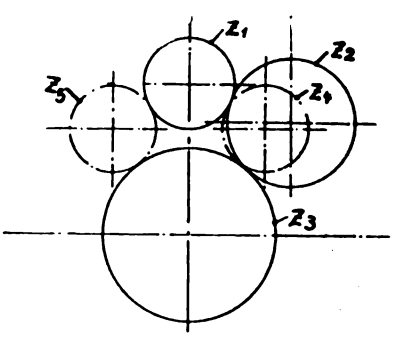


Bild 18. Zweite Ausführung des Getriebes mit gegenläufiger Luftschrauben- und Kurbelwelle.

Digitized by Google

Wenn man den Motor umsteuerbar bauen würde, d. h. die Nockenwelle oder die Nockentrommel wird mit der doppelten Anzahl der Nocken versehen, wobei zur Änderung der Drehrichtung die Nockenwelle in der Längsrichtung verschoben wird, so könnte dies baulich sehr einfach gestaltet werden, da der Umsteuervorgang nur bei Stillstand der Maschine erfolgt. Die Hilfsapparate (Lader, Magnetzünder, Schmierstoffpumpe usw.) müssen ihre Drehrichtung behalten. Um dies zu erreichen, wird man einen gemeinsamen Antrieb für alle Hilfsapparate vorsehen, der durch ein Schieberad beim Verschieben der Nockenwelle mit umgesteuert wird. Es liegt also das Umkehrgetriebe im Antriebsteil des Hilfsapparates. Das Gewicht des ganzen Umsteuermechanismus wird viel geringer als das Mehrgewicht des Getriebes *b* oder *c* gegenüber dem Getriebe *a* oder des Getriebes nach Bild 18 gegenüber dem Getriebe nach Bild 1 beträgt.

Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß sämtliche Teile für beide Drehrichtungen am Motor vorhanden sind, so daß jederzeit, ohne daß weitere Teile benötigt werden, auf die andere Drehrichtung umgeschaltet werden kann.

V. Zusammenfassung.

Die Hofersche Formel zur Berechnung der Zahnräder auf Wärmestau läßt sich nicht ohne weiteres auf Zahnräder mit mehreren Eingriffen und auf Planetenradgetriebe anwenden. Es werden Formeln zur Berechnung von Planetenradgetrieben abgeleitet. An einem Berechnungsbeispiel wird gezeigt, daß Getriebe mit verschiedenen Drehrichtungen des treibenden und getriebenen Teiles viel ungünstiger liegen als Planetenuntersetzungsgetriebe.

Zur Berechnung der Zahnräder auf Wärmestau sind eingehende Versuche notwendig, um die Größe des Faktors $f(v)$ bzw. φ zu klären. Bei Anordnung mehrerer Zwischenräder oder Planetenräder ist es nicht zu vermeiden, daß die Räder ungleichmäßig tragen.

Durch Versuche ist zu klären, wie hoch der Faktor S_a in diesem Falle gewählt werden kann.

VI. Schrifttum.

[1] Pfauter, Wälzfräsen. Berlin 1933.
[2] Earl Buckingham-Olah, Stirnräder mit geraden Zähnen. Berlin 1932.
[3] A. Schiebel, Zahnräder, I. Teil. Berlin 1930. III. Aufl.
[4] M. Ulrich, Zur Frage der Grübchenbildung bei Zahnrädern. Z. VDI Bd. 78 (1934), S. 53.
[5] M. Fink und U. Hofmann, Abnutzung von Zahnräder. Z. VDI Bd. 77 (1933), S. 978.
[6] H. Hofer, Die zulässige Zahnradbeanspruchung und ihre Berechnungsweise im Werkzeugmaschinenbau. Werkst. Techn. Bd. 25 (1931), S. 128.
[7] Getriebe für Leichtmotoren, Vortrag von Graf v. Soden anläßlich der 71. Hauptversammlung des VDI in Friedrichshafen-Konstanz. Sonderdruck der Zahnradfabrik Friedrichshafen. VDI-Verlag 1933.
[8] Hütte 25. Auflage Bd. 2, S. 642.

Digitized by Google

Unstetige Strömungen mit endlichem Totwasser.

Von M. Kolscher, Darmstadt*).

Durch Verallgemeinerung der bekannten Ansätze zur Behandlung unstetiger ebener Potentialströmungen wird ein Ansatz erhalten, der Profilströmungen mit endlichem Totwassergebiet liefert. Durch vollständige Durchführung einzelner Beispiele ergibt sich ein Einblick in die gestaltlichen Verhältnisse und wird der Nachweis erbracht, daß physikalisch sinnvolle Strömungsbilder entstehen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Der ursprüngliche Ansatz.
III. Symmetrische Strömungen.
IV. Unsymmetrische Strömungen.
V. Die Tragflügelströmung um die ebene Platte.
VI. Die Strömung um die ebene Platte für kleine Anstellwinkel.
VII. Strömungen um beliebige Konturen.
VIII. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die bekannten Ansätze zur Berechnung ebener Strömungen mit Totwasser liefern stets Lösungen, bei denen das Totwasser sich ins Unendliche erstreckt und die Geschwindigkeit auf den Grenzen des Totwassers, den »freien Stromlinien«, aus Stetigkeitsgründen mit der Anströmgeschwindigkeit übereinstimmt. Ist die umströmte Kontur und ihre Lage zur Strömung vorgegeben, so darf man noch beide Ablösungsstellen frei wählen. Doch werden die Lösungen sinnlos, sobald diese Stellen gewisse Grenzlagen überschreiten. Liegen beide Stellen zu nahe dem vorderen Staupunkt, so schneiden die freien Stromlinien die Kontur, liegen sie zu weit rückwärts, so überschneiden sich die freien Stromlinien. Es soll gezeigt werden, daß letztere Einschränkung entfällt, wenn durch Abänderung des bisherigen Ansatzes erreicht wird, daß das Totwassergebiet sich bereits im Endlichen schließt. Es ergeben sich hierbei Potentialströmungen, die die Lücke schließen zwischen den von Schmieden untersuchten Grenzfällen unendlicher Totwassergebiete, die bereits endliche Breite haben, und den stetigen Potentialströmungen. Praktische Anwendungen hierfür ergeben sich bei Berechnung der Druckverteilung »gesunder« Tragflügelströmungen. Nehmen wir hierbei die eine Ablösungsstelle in der Hinterkante an, die andere auf der Saugseite in der Nähe der Hinterkante, so erhalten wir Strömungen, die besser als die stetige Strömung die wahren Verhältnisse wiedergeben, da an der Hinterkante kein Staupunkt mehr entsteht und die Strömung dort das Profil tangential zur Druckseite verläßt. Eine weitere Anwendung erhalten wir für Tragflügel mit stark ausgeschlagener Landeklappe, wo wir eine Ablösungsstelle in der Hinterkante, die andere auf der Saugseite an der Drehungsachse annehmen werden.

Von Schmieden [1, 2] wurde bereits die Vermutung ausgesprochen, daß auch endliche Totwassergebiete mathematisch möglich sind. Den Nachweis erbringen wir durch Aufstellung eines allgemeinen Ansatzes, der eine Verallgemeinerung des bekannten Ansatzes von Levi-Civita darstellt, und Durchführung einfacher Beispiele, wobei die Anwendung auf Tragflügelströmungen im Vordergrund stehen möge.

*) Dissertation am Lehrstuhl für Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt. D 87 (gekürzt).

II. Der ursprüngliche Ansatz.

Liegt in der komplexen z-Ebene eine Potentialströmung vor, so existiert eine analytische Funktion

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) \qquad z = x + i\,y, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so daß ψ = konst. die Stromlinien in der z-Ebene darstellt. Insbesondere soll $\psi = 0$ die umströmte Kontur enthalten. Bei Strömungen mit Totwasser bilden die freien Stromlinien zusammen mit der umströmten Kontur die Gesamtkontur und werden daher auch durch $\psi = 0$ dargestellt. Hat an der Stelle z die Geschwindigkeit den Betrag v und die Richtung Θ, so ist dort

$$\frac{dw}{dz} = v e^{-i\Theta}.$$

Fassen wir (1) als konforme Abbildung auf, so ist hierdurch das von der Strömung erfüllte Gebiet der z-Ebene auf die längs eines Stücks der reellen Achse aufgeschlitzte w-Ebene abgebildet. Für großes $|z|$ geht die Strömung der z-Ebene in eine Parallelströmung über. Daher entspricht sich $z = \infty$ und $w = \infty$. Das Bild der Strömung in der z-Ebene ist die Parallelströmung in der w-Ebene.

Erstreckt sich die Kontur in der z-Ebene nach rechts bis ins Unendliche, so ist auch die reelle Achse der w-Ebene nach rechts bis ins Unendliche aufgeschlitzt. Das Bild des Staupunktes bildet den Schlitzanfang. Haben wir eine Kontur, die zum Teil aus freien Stromlinien besteht, so liegen die Bilder der Ablösungsstellen auf verschiedenen Ufern des Schlitzes. Zur bequemeren Behandlung dieses Falles ist es zweckmäßig, die geschlitzte w-Ebene auf das Innere der oberen Hälfte des Einheitskreises einer neuen τ-Ebene abzubilden. Die Schlitzränder ergeben dabei den vollen Umfang des Halbkreises. Dabei soll dem Bild der festen Kontur der z-Ebene der Halbkreisbogen, den freien Stromlinien der reelle Durchmesser entsprechen. Endlich soll $w = \infty$ in $\tau = 0$ übergehen. Hierdurch ist die Abbildung eindeutig festgelegt. Das Bild des nicht aufgeschlitzten Teils der reellen Achse der w-Ebene ist eine gewisse Kurve, die das Bild des Staupunktes auf dem Kreisbogen mit $\tau = 0$ verbindet. Diese Zusammenhänge zwischen den drei Ebenen veranschaulicht Bild 1.

Wegen der eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten der z-Ebene und denen der w-Ebene ist $\frac{dw}{dz}$ eine eindeutige Funktion im Halbkreis, die dort außer beim Bild des Staupunktes nirgends verschwindet. Auf den freien Stromlinien

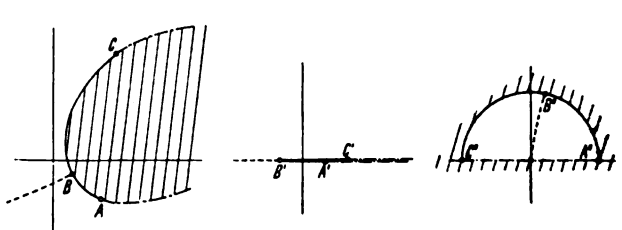


Bild 1. Übersicht der Abbildungen zwischen der z-, w- und τ-Ebene für unendliches Totwasser. $z = w = \infty$ entspricht $\tau = 0$.

Digitized by Google

muß v konstant sein. Setzen wir $v_\infty = 1$, so ist also $\left|\frac{dw}{dz}\right| = 1$ für reelles τ. Führen wir

$$\zeta = \ln \frac{dz}{dw} = -\ln v + i\Theta$$

als neues Symbol ein, so ist ζ analytisch im Innern des Halbkreises und rein imaginär für reelles τ. Aus dem Spiegelungsprinzip folgt daher, daß ζ analytisch für $|\tau| < 1$. Daher können wir für ζ eine Reihe um $\tau = 0$ ansetzen.

Ebenso sehen wir, daß auch w im Halbkreis eine eindeutige Funktion von τ ist, die auf dem Rande reelle Werte annimmt und bei $\tau = 0$ unendlich wird. Beim Bilde des Staupunktes der z-Ebene muß $\frac{dw}{d\tau}$ verschwinden, da hier beim Übergang von τ zu w die Konformität der Abbildung nicht mehr besteht.

Sind ζ und w als Funktionen von τ gegeben, so findet man durch

$$z = \int^{\tau} e^{\zeta} \frac{dw}{d\tau} d\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

z als Funktion von τ, wobei ein Punkt des Randes des Halbkreises untere Grenze sein möge. Der Rand als Integrationsweg liefert die Gesamtkontur der z-Ebene. Das ist der bisherige Ansatz.

III. Symmetrische Strömungen.

Für Strömungen mit endlichem Totwasser bleibt ein Teil der angestellten Überlegungen gültig. Es muß wieder eine Funktion $w(z)$ geben, die für zirkulationsfreie Strömungen in dem nun zweifach zusammenhängenden Regularitätsbereich eindeutig ist. Der Schlitz in der w-Ebene ist endlich. Die Ablösungsstellen liegen wieder auf verschiedenen Ufern des Schlitzes. Die nicht aufgeschlitzten Teile der reellen Achse der w-Ebene entsprechen dem nicht zur Kontur gehörigen Teil der Stromlinie $\psi = 0$. Auch dieser Bereich der w-Ebene läßt sich auf den Halbkreis der τ-Ebene so abbilden, daß für die freien Stromlinien τ reell ist. Für die Endpunkte des Schlitzes verschwindet $\frac{dw}{d\tau}$. Da beim Bilde des Staupunktes auch $\frac{dw}{dz}$ verschwindet, beim Zusammenschluß der freien Stromlinien aber nicht verschwinden soll, wird nach (2) der Staupunkt ein regulärer Punkt der Kontur, während beim Zusammenschluß der freien Stromlinien eine Spitze entsteht. Diese Abbildung wird eindeutig durch die Festsetzung, daß das Bild von $w = \infty$ auf die imaginäre Achse der τ-Ebene fallen soll.

Für symmetrische Strömungen erhalten symmetrische Punkte der Kontur dieselbe w-Koordinate auf verschiedenen Ufern des Schlitzes und liegen in der τ-Ebene symmetrisch zur imaginären Achse. Daher kommt der Staupunkt nach $\tau = i$, die Spitze des Totwassers nach $\tau = 0$. Das Bild von $z = \infty$ möge nach $\tau = ir$ $(0 < r < 1)$ fallen. Da $w(\tau)$ bei $\tau = ir$ einen Pol hat und auf dem Rande des Halbkreises reelle Werte annimmt, folgt aus analytischer Fortsetzung durch Spiegelung, daß auch bei $\tau = -ir$ und $\tau = \pm\frac{i}{r}$ Pole liegen. Aus dieser Betrachtung ergibt sich der Ansatz

$$w = c_1 \frac{(1+\tau^2)^2}{(\tau^2+r^2)(r^2\tau^2+1)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

mit reellem $c_1 > 0$. Hieraus erhält man weiter

$$\frac{dw}{d\tau} = -2c_1(1-r^2)^2 \frac{(1-\tau^2)\tau(1+\tau^2)}{(\tau^2+r^2)^2(r^2\tau^2+1)^2} \quad \ldots \quad (4)$$

Dies geht für $r = 0$ in bekannte Ausdrücke über [1].

Für Strömungen mit endlichem Totwasser wird der Totwasserdruck P_T nicht mehr mit P_∞ übereinstimmen und daher ist auch $v_T \neq v_\infty$. Setzen wir wieder $v_\infty = 1$, so wird für reelles τ $e^{\zeta} = \left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{1}{v_T}$ und $e^{\zeta}(ir) = 1$. Die Betrachtung über die analytische Fortsetzbarkeit von ζ bleibt hiervon jedoch unberührt. Für symmetrische Strömungen erhalten wir daher den Ansatz

$$e^{\zeta} = c_2 \frac{i+\tau}{i-\tau} e^{i\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\tau^{2n+1}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

mit reellen c_2 und a_{2n+1}. Die Reihe muß für $|\tau| < 1$ und für singularitätenfreie Konturen auch noch für $|\tau| = 1$ konvergieren. $c_2 > 0$ muß so gewählt werden, daß $e^{\zeta}(ir) = 1$. Dann erfüllt $\frac{dw}{dz} = e^{-\zeta}$ alle Bedingungen einschließlich des Verschwindens bei $\tau = i$.

Für jeden solchen Ausdruck (5) können wir mit (4) nach (2) die zugehörige Kontur der z-Ebene finden, wobei $\tau = i$ untere Grenze sein möge. Indessen ist der Integrand von (2) bei $\tau = ir$ nicht regulär und das Integral über den Halbkreis liefert nur dann eine geschlossene Kontur, wenn auch noch die »Schließungsbedingung«

$$Res.\left\{e^{\zeta}\frac{dw}{d\tau}\right\}_{\tau=ir} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

erfüllt ist. Da $\frac{dw}{d\tau}$ für zirkulationsfreie Strömungen kein Residuum besitzt, wird hieraus

$$\frac{d}{d\tau}\left\{e^{\zeta}\right\}_{\tau=ir} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Ist auch noch diese Bedingung erfüllt, so erhalten wir eine symmetrische Strömung mit endlichem Totwasser.

Als einfachstes Beispiel behandeln wir die Strömung um die senkrecht angestellte ebene Platte, bei der die Plattenkanten umströmt sein sollen und die Ablösung irgendwo auf der Rückseite erfolgt. In der z-Ebene erwarten wir ein Strömungsbild der in Bild 2 dargestellten Art.

Beim Übergang zur τ-Ebene mögen die Bilder der Kanten bei $\tau = e^{i\alpha}$ und $\tau = -e^{-i\alpha}$ liegen. Auf dem Halbkreisbogen sei allgemein $\tau = e^{i\vartheta}$. Dann sind die Randbedingungen für die Strömungsrichtung $\Theta = \frac{\pi}{2}$ für $0 \leqq \vartheta < \alpha$ und $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi - \alpha$, $\Theta = -\frac{\pi}{2}$ für $\alpha < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und $\pi - \alpha < \vartheta \leqq \pi$. Dies wird erfüllt durch den Ansatz

$$e^{\zeta} = c_2 \frac{i+\tau}{i-\tau} \frac{\tau - e^{i\alpha}}{\tau + e^{i\alpha}} \frac{\tau + e^{-i\alpha}}{\tau - e^{-i\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Hiernach wird $v_T = \frac{1}{c_2}$. Wegen $e^{\zeta}(ir) = 1$ wird

$$c_2 = \frac{1-r}{1+r}\frac{1+2r\sin\alpha+r^2}{1-2r\sin\alpha+r^2}.$$

Aus (8) folgt

$$\frac{d}{d\tau}e^{\zeta} = -c_2\, 2i(2\sin\alpha - 1)\frac{\tau^4 + 2\tau^2\frac{1+2\sin\alpha-2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha-1}+1}{(i-\tau)^2(\tau+e^{i\alpha})^2(\tau-e^{-i\alpha})^2} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so daß wegen (7)

$$r^4 - 2r^2\frac{1+2\sin\alpha-2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha-1} + 1 = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

sein muß. Für $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ hat (10) genau eine reelle Lösung r mit $0 < r < 1$. Ferner sind dann auch $-r$ und $\pm\frac{1}{r}$

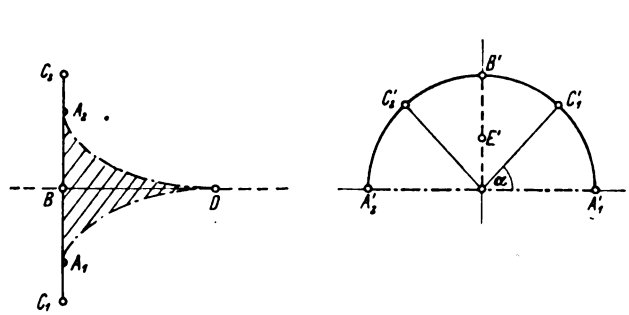


Bild 2. z- und τ-Ebene für die Strömung um die senkrecht angestellte ebene Platte. Dem Punkte E' entspricht $z = \infty$.

Digitized by Google

Lösungen, so daß dann der Zähler von (9) die gleichen Nullstellen hat wie der Nenner von (3), der sich hiervon nur durch den Faktor r^2 unterscheidet. Daher wird durch partielle Integration von (2)

$$z = \left[e^{\zeta} \cdot w\right]_i^r + c_1 c_2 \cdot 2\, i \frac{2\sin\alpha - 1}{r^2} \int_i^r \frac{(i+\tau)^2}{(\tau + e^{i\alpha})^2 (\tau - i e^{-i\alpha})^2}\, d\tau$$

und endlich

$$\left.\begin{aligned} z &= c \cdot \left[G(\tau) + \frac{1}{\cos\alpha}\left(i \cdot \ln \frac{\tau - e^{-i\alpha}}{\tau + e^{i\alpha}} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \\ &\text{mit} \\ G(\tau) &= \frac{2\,i\,(\tau^3+\tau)\,(2\sin\alpha - 1) - (\tau^4 - 1)\,(2 - \sin\alpha)}{(\tau^4+1)(2\sin\alpha - 1) + 2\,\tau^2 (1 + 2\sin\alpha - 2\sin^2\alpha)} \\ &\text{und} \\ c &= c_1 c_2 \frac{1}{r^2} \frac{2\sin\alpha - 1}{1 + \sin\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Hiermit lassen sich die Lösungen vollständig diskutieren. Für $\tau = e^{i\alpha}$ und $\tau = -e^{-i\alpha}$ erhält man die Plattenkanten. Soll die Platte von $z = i$ bis $z = -i$ reichen, so folgt

$$c = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \ln\sin\alpha}$$

womit auch c_1 festgelegt wird. Für $\tau = -1$ erhält man die Lage der oberen Ablösungsstelle mit

$$z(-1) = i\,c \left[-\frac{2\sin\alpha - 1}{\sin\alpha\,(2 - \sin\alpha)} + \frac{1}{\cos\alpha} \ln \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right].$$

Spaltet man für reelles τ (11) auf in Real- und Imaginärteil, so erhält man die freien Stromlinien in Parameterdarstellung. Endlich liefert $\tau = 0$ die Lage der Spitze des Totwassers.

$$z(0) = c \left[\frac{2 - \sin\alpha}{2\sin\alpha - 1} - \frac{\pi - 2\alpha}{2\cos\alpha}\right].$$

Aus diesen Formeln folgt, daß für jedes α mit $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ die Lösung sinnvoll ist. Für $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ strebt sowohl $z(-1)$ wie $z(0)$ gegen 0 und der Quotient beider Größen strebt gegen 1. Ferner wächst hierbei der Druck im Totwasser monoton und strebt gegen den Staudruck. Die Zahlenwerte dieser charakteristischen Größen sind in Bild 3 aufgetragen. Für den Grenzfall $r \to 0$ oder $\alpha \to \frac{\pi}{6}$ gehen alle Formeln in die bereits bekannten [1] über.

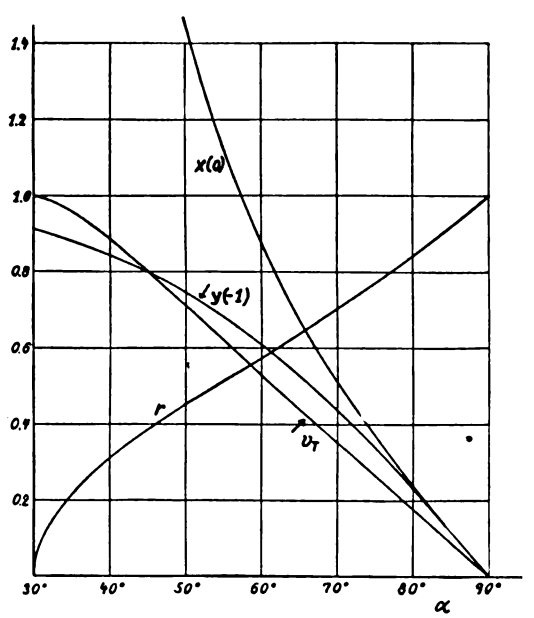


Bild 3. Die charakteristischen Größen der Strömung mit endlichem Totwasser um die senkrecht angestellte ebene Platte in Abhängigkeit vom freien Parameter α.

Hiermit ist gezeigt, daß endliche Totwassergebiete existieren und insbesondere auch beliebig kleine Gebiete vorhanden sind.

IV. Unsymmetrische Strömungen.

Wir nehmen nun an, daß es auch für Zirkulationsströmungen Profile mit geschlossenen Totwassergebieten gibt, bei denen eine aus dem Unendlichen kommende Stromlinie die feste Kontur in einem Staupunkt trifft, während sie von einer Spitze des Totwassers ausgehend wieder ins Unendliche geht. Dann haben wir eine Strömung mit Zirkulation um eine endliche Gesamtkontur vor uns, für die nach (1) ein Strömungspotential vorhanden ist. Dies Potential nimmt allerdings bei einmaliger Umlaufung der Kontur um einen festen Betrag zu. Um Eindeutigkeit zu erreichen, schneiden wir die z-Ebene längs der den Körper verlassenden Stromlinie auf. Dann wird durch $w(z)$ die z-Ebene auf die w-Ebene abgebildet, die vom Bilde des Staupunktes aus längs der reellen Achse nach rechts bis $w = \infty$ aufgeschnitten ist. Das obere Ufer des Schnittes wird gebildet durch das Bild des Teils der Kontur vom Staupunkt bis zur oberen Ablösungsstelle, das Bild der oberen freien Stromlinie und das Bild des oberen Schnittufers der z-Ebene. Entsprechendes gilt für das untere Ufer. Gegenüberliegende Punkte des Schnittes in der z-Ebene liegen in der w-Ebene um einen konstanten Betrag gegeneinander verschoben. Auch dieser Bereich der w-Ebene läßt sich so auf den Halbkreis der τ-Ebene abbilden, daß aus der Gesamtkontur der z-Ebene der Umfang des Halbkreises wird, wobei die Ablösungsstellen wieder nach $\tau = \pm 1$ fallen und $z = w = \infty$ nach $\tau = ir$ fällt. Dem Schnitt der z-Ebene entspricht ein Einschnitt in den Halbkreis von einem Punkt der reellen Achse aus nach $\tau = ir$. Die inverse Funktion $w(\tau)$ findet man durch ähnliche Betrachtungen wie früher und erhält

$$w = \frac{a\,(\tau^2+1)^2 + b\,(\tau^3+\tau)}{(\tau^2+r^2)\,(r^2\tau^2+1)} + n\,i \cdot \ln \frac{(\tau + i\,r)\,(-r\tau + i)}{(\tau - i\,r)\,(r\tau + i)} \quad (12)$$

mit reellen a, b, n, r. Hieraus folgt weiter

$$\frac{dw}{d\tau} = (1-\tau^2) \frac{(m+b)\,r^2\,(\tau^4+1) - 2\,a\,(1-r^2)\,(\tau^3+\tau) + [m\,(r^4+1) + b\,(4\,r^2 - 1 - r^4)]\,\tau^2}{(\tau^2+r^2)^2\,(r^2\tau^2+1)^2} \quad (13)$$

mit $m = 2\,nr\,(1 - r^2)$.

Man erkennt, daß $\frac{dw}{d\tau}$ außer bei $\tau = \pm 1$ noch vier weitere Nullstellen hat. Wir benötigen eine solche auf dem Halbkreisbogen für den Staupunkt, eine weitere auf dem reellen Durchmesser für die Spitze des Totwassers. Liegt die erste bei $\tau = ie^{-i\beta}$, die zweite bei τ_0, so liegen die weiteren bei $\tau = -i\,e^{i\beta}$ und $\tau = \frac{1}{\tau_0}$. Ist $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ und $|\tau_0| < 1$, so stören die übrigen Nullstellen daher nicht.

Setzen wir noch

$$\tau_0 + \frac{1}{\tau_0} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

so nimmt daher (13) die Form

$$\frac{dw}{d\tau} = -c_1 \frac{[1-\tau^2]\,[\tau + \lambda\,(1+\tau^2)]\,[\tau + i\,e^{i\beta}]\,[\tau - i\,e^{-i\beta}]}{(\tau^2+r^2)^2\,(r^2\tau^2+1)^2} \quad \ldots \quad (15)$$

an. Von dieser Form soll weiterhin ausgegangen werden. Dann sind λ, β, r, c_1 freie reelle Parameter, die nur den Ungleichungen

$$0 < r < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}, \quad c_1 > 0$$

genügen müssen. Durch Koeffizientenvergleichung zwischen (15) und (13) lassen sich auch die alten Koeffizienten berechnen. So wird z. B.

$$n = c_1 \frac{2\,r^2 \sin\beta - \lambda\,(1-r^2)^2}{4\,r^3\,(1-r^2)^3} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Digitized by Google

Für e^{ζ} erhalten wir auch jetzt leicht einen Ansatz. Wieder muß $|e^{\zeta}|$ für reelles τ konstant sein. Doch muß jetzt $e^{-\zeta}$ bei $\tau = ie^{-i\beta}$ verschwinden. Ferner sei $e^{\zeta}(ir) = e^{i\alpha}$, damit $v_\infty = 1$ wird. α liefert dann den Anstellwinkel. Auch hier muß die Schließungsbedingung in der Form (6) erfüllt sein, die sich nun aber nicht vereinfachen läßt.

Bei Strömungen mit Zirkulation liefert die Resultierende der Druckkräfte einen Auftrieb. Zu dessen Berechnung zerlegen wir die Gesamtkontur in die feste Kontur einschließlich des im Totwasser liegenden Stücks und das hierdurch abgeschlossene Totwasser. Im Totwasser ist der Druck konstant, daher auch keine resultierende Kraft vorhanden. Wir berechnen daher die Kraft auf die Gesamtkontur und erhalten damit zugleich die Kraft auf die feste Kontur, da die Druckkräfte an der Grenzlinie sich aufheben. Der komplexe Kraftvektor wird dann (ϱ = Dichte des strömenden Mediums).

$$P = -i\,\frac{\varrho}{2}\oint v^2\,dz.$$

Gehen wir hierin zum konjugierten Wert über, setzen $\overline{dz} = dz\cdot e^{2i\Theta}$ und transformieren auf die τ-Ebene, so wird

$$\overline{P} = -i\,\frac{\varrho}{2}\oint e^{-\zeta}\,\frac{dw}{d\tau}\,d\tau,$$

wobei jetzt über den ganzen Rand des Halbkreises zu integrieren ist. Also

$$\overline{P} = 2\pi\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot Res.\left\{e^{-\zeta}\,\frac{dw}{d\tau}\right\}_{\tau=ir}.$$

Nehmen wir für e^{ζ} und $\frac{dw}{d\tau}$ Reihen um $\tau = ir$ an, berechnen daraus die Reihe für $e^{-\zeta}$, beachten (6) und benutzen die für $e^{\zeta}(ir)$ und Res. $\left\{\frac{dw}{d\tau}\right\}_{\tau=ir}$ eingeführten Symbole, so wird endlich

$$P = ie^{i\alpha}\cdot\frac{\varrho}{2}v_\infty^2\cdot 4\pi n, \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

also reiner Auftrieb, wie es sein muß.

Geht man in den vorstehend entwickelten Formeln über zu $r = 0$, so muß wegen (17) n endlich bleiben und hieraus folgt nach (16)

$$\lim_{r\to 0}\frac{\lambda}{2r^2} = \lim_{r\to 0}\sin\beta \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Mithin verschwindet λ von 2. Ordnung, in (12) fällt der 2. Term fort und (12) und (15) liefern bereits bekannte Ausdrücke [2]. Hat man für ein vorgegebenes Profil demnach eine Lösungsschar, in der $r\to 0$ gehen kann, so muß (18) erfüllt sein, damit sich diese Schar stetig an die Lösungen mit unendlichem Totwasser anschließt.

V. Die Tragflügelströmung um die ebene Platte.

Als Beispiel für eine unsymmetrische Strömung behandeln wir nun die Strömung um die ebene Platte unter beliebigem Anstellwinkel mit Umströmung der Vorderkante. Um die Verhältnisse der Strömung um den Tragflügel anzugleichen, wählen wir die eine Ablösungsstelle in der Hinterkante, die andere auf der Saugseite. Insbesondere untersuchen wir die Fälle mit kleinem Anstellwinkel. Die Platte möge in der reellen Achse der z-Ebene liegen und sich von $z = -1$ bis $z = 0$ erstrecken.

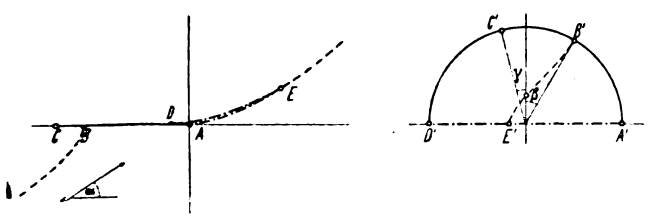


Bild 4. z- und τ-Ebene für die Strömung um die ebene Platte mit Ablösung der freien Stromlinie in der Hinterkante.

Aus Bild 4 entnehmen wir, daß längs AB und CD $\Theta = 0$, längs BC $\Theta = \pi$ ist. In B wird $|e^{\zeta}| = \frac{1}{v} = \infty$, in C wird $|e^{\zeta}| = 0$. Beim Übergang zur τ-Ebene fällt das Bild des Staupunktes nach $\tau = ie^{-i\beta}$, das der umströmten Kante möge nach $\tau = ie^{i\gamma}$ fallen. Die hieraus auf dem Kreisbogen folgenden Randbedingungen erfüllt der Ansatz

$$e^{\zeta} = c_2 e^{-i(\beta+\gamma)}\cdot\frac{\tau+ie^{i\beta}}{\tau-ie^{-i\beta}}\cdot\frac{\tau-ie^{i\gamma}}{\tau+ie^{-i\gamma}} \quad \ldots \quad (19)$$

mit reellem $c_2 > 0$. Als Schließungsbedingung (6) erhalten wir mit (15) und (19)

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{[1-\tau^2]\,[\tau+\lambda\,(1+\tau^2)]\,[\tau+ie^{i\beta}]^2\,[\tau-ie^{i\gamma}]}{[\tau+ir]^2\,[r^2\tau^2+1]^2\,[\tau+ie^{-i\gamma}]}\right\}_{\tau=ir} = 0$$

Dies liefert eine komplexe Gleichung zwischen den reellen Parametern r, λ, β, γ, so daß zwei Parameter freibleiben. Eine allgemeine Auflösung ist möglich nach λ und β. Zweckmäßig ist zum Schluß die Einführung von

$$\mu = \lambda\,\frac{(1-r^2)^2}{2r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

als neuen Parameter. Als Ergebnis finden wir nach längerer Rechnung das reelle System

$$\begin{aligned} K\cos\beta + L\sin\beta &= M \\ -L\cos\beta + K\sin\beta &= N \end{aligned}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K &= (1-r^2)(\cos\gamma - r) + \mu\cdot 2r\sin\gamma \\ L &= 2r^2\sin\gamma + \mu\cdot(1-r^2+2r\cos\gamma) \\ M &= (1-r^2)(1-r\cos\gamma) + \mu\cdot 2r^2\sin\gamma \\ N &= 2r\sin\gamma + \mu\cdot r(-1+r^2+2r\cos\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Die Auflösung liefert

$$\sin\beta = \frac{KN+LM}{K^2+L^2} \qquad \cos\beta = \frac{KM-LN}{K^2+L^2} \quad \ldots \quad (22)$$

mit der Nebenbedingung

$$K^2+L^2 = M^2+N^2$$

Setzen wir hier die Werte aus (21) ein, so entsteht eine quadratische Gleichung für μ. Diese ist rational lösbar und liefert

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \sin\gamma\,\frac{1+r^2}{1+r^2+4r\cos\gamma} \\ \text{oder} \\ &\lambda = \frac{2r^2}{(1-r^2)^2}\cdot\frac{1+r^2}{1+r^2+4r\cos\gamma}\,\sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

der zweite Wert ist $\mu = -\sin\gamma$. Hierfür wird aber $\beta = -\gamma$ und wir erhalten nur die triviale Parallelströmung. Für $\gamma = 0$ entsteht mit μ nach (23) ebenfalls eine Parallelströmung, da nach (21), (22), (19) auch β und α verschwindet. Für kleines γ wird daher auch α klein. Ersetzt man γ durch $-\gamma$, so geht β in $-\beta$ über und in der z-Ebene findet nur eine Spiegelung an der reellen Achse statt, so daß es genügt, die Fälle $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ zu untersuchen. Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird $\beta = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \pi$, wobei wieder Parallelströmung entsteht. Die diesem Fall benachbarten Fälle sind aber ohne Interesse, da hier das Totwasser der Strömung zugewandt ist. Ohnehin muß auch noch darauf geachtet werden, daß $\lambda < \frac{1}{2}$ bleibt.

Wählt man nun r beliebig und γ gemäß diesen Einschränkungen, so ergibt sich nach (23), (21), (22) λ und β, und zwar $0 \leqq \lambda < \frac{1}{2}$ und $0 \leqq \beta < \frac{\pi}{2}$. Auf die Darstellung von β (und α) in einer Gesamtformel verzichten wir, da diese Formel so kompliziert ist, daß ihre Diskussion umständliche Betrachtungen erfordert. Mit diesen Werten wird dann nach (2), (15), (19)

$$z = -c_1 c_2\int_1^{\tau}\frac{[1-\tau^2]\,[\tau+\lambda\,(1+\tau^2)]\times}{[\tau^2+r^2]^2\,[r^2\tau^2+1]^2\,[\tau+ie^{-i\gamma}]}\,e^{-i(\beta+\gamma)}\,d\tau \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Digitized by Google

Die Darstellung der Platte selbst erhalten wir hieraus für $\tau = e^{i\vartheta}$ mit

$$z = -4 c_1 c_2 \int_0^{\vartheta} \frac{\sin\vartheta\,(1+2\lambda\cos\vartheta)}{(1+2r^2\cos 2\vartheta + r^4)^2} \times \\ \times [1+\sin(\vartheta-\beta)] \frac{\sin\gamma+\cos\vartheta}{1+\sin(\gamma+\vartheta)}\, d\vartheta \quad . . \quad (25)$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \beta$ als obere Grenze finden wir die Lage des Staupunktes, für $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \gamma$ die Vorderkante, für $\vartheta = \pi$ die Ablösungsstelle auf der Saugseite. Durch passende Wahl von $c_1 c_2$ kann erreicht werden, daß die Vorderkante bei $z = -1$ liegt. Für reelles τ liefert (24) eine Parameterdarstellung der freien Stromlinien. Setzen wir in (19) $\tau = ir$, so wird

$$e^{\zeta}(ir) = c_2 e^{-i(\beta+\gamma)} \frac{r^2 - e^{2i\beta}}{1-2r\cos\beta+r^2} \frac{r^2-e^{2i\gamma}}{1+2r\cos\gamma+r^2} \\ = \frac{1}{v_\infty} e^{i\alpha}.$$

Wegen $v_\infty = 1$ folgt daraus

$$c_2^2 = \frac{1}{v_T^2} = \frac{1-2r\cos\beta+r^2}{1+2r\cos\beta+r^2} \cdot \frac{1+2r\cos\gamma+r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2} \quad . . \quad (26)$$

und

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta - r^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma - r^2} - \beta - \gamma \quad (27)$$

Damit sind alle Größen berechenbar.

Der Grenzübergang zu $r = 0$ bietet bei festgehaltenem γ keine Schwierigkeiten. Nach (23), (21), (22) wird $\mu = \sin\gamma$, $\beta = \gamma$ und (18) wird erfüllt. Nach (26) wird $v_T = 1$ und nach (27) $\alpha = \beta + \gamma = 2\gamma$. Daher können wir überall α als freien Parameter einführen. Zur Berechnung der Gesamtkraft müssen wir (23), (21), (22) nach Potenzen von r entwickeln und damit den Grenzwert von (16) ermitteln. Es zeigt sich, daß dann aus (15), (19), (17) die von Schmieden [2] angegebenen Ausdrücke entstehen, womit nachgewiesen ist, daß auch hier ein stetiger Übergang zu den Strömungen mit unendlichem Totwasser vorhanden ist.

Nicht so einfach ist der Übergang zu $r = 1$. Zunächst darf γ hierbei nicht fest bleiben, da sonst nach (23) sehr bald $\lambda > \frac{1}{2}$ wird. Wir setzen

$$\gamma = k\,(1-r)^3 \quad . . . . . \quad (28)$$

und halten $k > 0$ fest. Dann verschwindet für $r \to 1$ λ linear, so daß k jeden Wert haben darf. Durch Entwicklung von (23), (21), (22) nach Potenzen von $1 - r$ wird

$$\beta = \frac{8}{3} k\,(1-r) + \ldots,$$

und ebenso aus (26) und (27)

$$\lim_{r\to 1} c_2^2 = 1 + \frac{64}{9} k^2 \qquad \lim_{r\to 1} \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{8}{3} k \quad . \quad (29)$$

Durch passende Wahl von k kann also jedes $\alpha < \frac{\pi}{2}$ erreicht werden.

In (25) wächst der Integrand bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ über alle Grenzen. Genauer zeigt sich, daß für endliche Plattenlängen c_1 von 2. Ordnung klein werden muß, da c_2 nach (29) endlich bleibt. Unter Verzicht auf genaue Festlegung der Plattenlänge schreiben wir daher für (25)

$$z = -c\,(1-r)^2 \int_0^{\vartheta} \frac{\sin\vartheta\,(1+2\lambda\cos\vartheta)}{1+\sin(\gamma+\vartheta)} \frac{1+\sin(\vartheta-\beta)}{(1+2r\sin\vartheta+r^2)^2} \\ \times \frac{\sin\gamma+\cos\vartheta}{(1-2r\sin\vartheta+r^2)^2}\, d\vartheta.$$

Setzen wir hier die Reihen für γ, λ, β ein und entwickeln den 1. Faktor unter dem Integral nach Potenzen von $1-r$, so ist nur das konstante Glied der Entwicklung für den Grenzwert von Bedeutung. Ebenso entfällt im 2. Faktor der Summand $\sin\gamma$. Daher bleibt

$$\lim_{r\to 1} z = -c \cdot \lim_{r\to 1} \int_0^{\vartheta} \frac{\sin\vartheta}{4\,(1+\sin\vartheta)^2} \cdot \frac{(1-r)^2\cos\vartheta}{(1-2r\sin\vartheta+r^2)^2}\, d\vartheta.$$

In diesem Integral nimmt der 2. Faktor nur in der Umgebung von $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ große Werte an und strebt sonst überall für $r \to 1$ gegen 0. Daher ist für den 1. Faktor nur der Wert bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ von Bedeutung und wir erhalten

$$\lim_{r\to 1} z = -\frac{c}{16} \lim_{r\to 1} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos\vartheta\,(1-r)^2}{(1-2r\sin\vartheta+r^2)^2}\, d\vartheta \\ = -\frac{c}{32} \lim_{r\to 1} \frac{(1-r)^2}{1-2r\sin\vartheta+r^2} \quad (30)$$

Setzen wir hier $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \gamma$ mit γ nach (28), um die Plattenlänge zu erhalten, so wird

$$\lim_{r\to 1} z\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) = -\frac{c}{32}.$$

Mit $c = 32$ wird also die Plattenlänge wieder 1. In gleicher Weise wird die Grenzlage des Staupunktes

$$\lim_{r\to 1} z\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = -\frac{1}{1+\frac{64}{9}k^2} = -\cos^2\alpha,$$

letzteres wegen (29), in Übereinstimmung mit dem bekannten Ergebnis für die Platte ohne Totwasser. Der Grenzwert (30) verschwindet für jedes festgehaltene $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$. Setzen wir aber

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - (1-r)\,\vartheta_0 \quad . . . . . \quad (31)$$

und halten ϑ_0 fest, so wird

$$\lim_{r\to 1} z = -\frac{1}{1+\vartheta_0^2} \quad . . . . . \quad (32)$$

Aus (19) erhalten wir für die Geschwindigkeit an der Platte mit (31)

$$v(\vartheta_0) = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\sin\frac{(1-r)\vartheta_0-\beta}{2}}{\cos\frac{(1-r)\vartheta_0+\beta}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{(1-r)\vartheta_0-\gamma}{2}}{\sin\frac{(1-r)\vartheta_0+\gamma}{2}}$$

und hieraus mit den Reihen für β, γ, c_2

$$\lim_{r\to 1} v(\vartheta_0) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{64}{9}k^2}} \frac{\vartheta_0 - \frac{8}{3}k}{\vartheta_0} = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \frac{1}{\vartheta_0}.$$

Berechnen wir nun ϑ_0 aus (32) und setzen dies hier ein, so wird

$$v = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{-z}{1+z}} \quad \text{für } \vartheta_0 > 0$$

$$v = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{-z}{1+z}} \quad \text{für } \vartheta_0 < 0$$

und dies stimmt völlig überein mit den Formeln für Unterseite und Oberseite der ebenen Platte ohne Totwasser. Der Nachweis für eine beliebige Stelle der Strömung kann genau so geführt werden, erübrigt sich aber, da eine analytische Funktion durch ihre Werte auf einer Strecke völlig festliegt. Es ist damit bewiesen, daß für $r \to 1$ die Strömung mit Totwasser stetig in die Strömung ohne Totwasser übergeht. In gleicher Weise kann der Beweis auch für die symmetrische Strömung um die ebene Platte erbracht werden.

Digitized by Google

VI. Die Strömung um die ebene Platte für kleine Anstellwinkel.

Bisher waren r und γ freie Parameter. α konnte nur nachträglich über die Formeln (23), (21), (22), (27) bestimmt werden. Ist α gegeben, so muß hiernach γ durch schrittweise Näherung berechnet werden. Für kleines α ist aber γ klein und wir können die genannten Formeln nach Potenzen von γ entwickeln. Da λ, μ, β, α ungerade Funktionen von γ sind, fallen hierbei alle geraden Potenzen fort und das lineare Glied allein gibt für die praktisch interessierenden Anstellwinkel bereits eine gute Annäherung. Durch Umkehrung dieser Ausdrücke ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1+4r+r^2}{2(1+r)(1+r^2)^2}(1-r)^3\cdot\alpha+\dots \\ \lambda &= \frac{r^2}{(1+r)^3(1+r^2)}(1-r)\,\alpha+\dots \\ \beta &= \frac{1+2r+10r^2+2r^3+r^4}{2(1+r)(1+r^2)^2}(1-r)\,\alpha+\dots \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Hiermit finden wir aus (26)

$$v_T = \frac{1}{c_2} = 1 - \frac{8r^3}{(1+r^2)^2(1+r)^2}\alpha^2+\dots \quad (34)$$

Daher ist der Druck im Totwasser allgemein

$$P_T = P_\infty + \frac{\varrho}{2}v_\infty^2\,\frac{16r^3}{(1+r^2)^2(1+r)^2}\alpha^2+\dots$$

Entwickeln wir nun den Integranden von (24) nach Potenzen von λ, β, γ und brechen nach der 1. Potenz ab, so lassen sich die hieraus entstehenden Ausdrücke leicht formelmäßig integrieren. Setzen wir dann noch (33) ein und setzen nach (34) $c_2 = 1$, so wird schließlich

$$\begin{aligned} z = c_1 &\frac{1}{2(1+r^2)^2}\cdot\frac{(1-\tau^2)^2}{R} \\ &- c_1\alpha\left\{\frac{1+6r^2+r^4}{(1+r)^2(1+r^2)(1-r^4)}\left[\frac{\tau+\tau^3}{R}-\frac{2}{(1+r^2)^2}\right]\right. \\ &\left.+\frac{i}{2(1-r^4)}\,\frac{\tau^4-1}{R}-\frac{2i}{1-r^4}\ln\frac{(\tau+ir)(r+i)}{(r\tau+i)(1+ir)}\right\} \end{aligned} \quad (35)$$

mit $R = (\tau^2+r^2)(r^2\tau^2+1)$.

Setzen wir hier $\tau = ie^{i\gamma} = i-\gamma$ als Grenze ein, so wird die Plattenlänge

$$z(ie^{i\gamma}) = -c_1\frac{2}{(1-r^4)^2}\{1+\Phi(r)\cdot\alpha\}$$

mit

$$\Phi(r) = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arc\,tg} r - (1-r)\,\frac{1+6r^2+r^4}{(1+r)(1+r^2)^2}.$$

Setzen wir nun $z(ie^{i\gamma}) = -1$, so wird

$$c_1 = \frac{1}{2}(1-r^4)^2[1-\Phi(r)\cdot\alpha] \quad \dots \quad (36)$$

Aus (17), (16), (33), (36) erhält man für die Gesamtkraft

$$P = ie^{i\alpha}\cdot\frac{\varrho}{2}v_\infty^2\cdot 2\pi\alpha[1-\Phi(r)\cdot\alpha] \quad \dots \quad (37)$$

Für $\tau = -1$ liefert (35) als Koordinate der Ablösungsstelle auf der Saugseite

$$x_T = -2\Phi(r)\cdot\alpha \quad \dots \quad (38)$$

Für $\tau = \tau_0$ erhalten wir die Lage der Spitze des Totwassers. Nach (14) wird

$$\tau_0 = -\lambda(1+\lambda^2+2\lambda^4+\dots)$$

Daher setzen wir $\tau_0 = -\lambda$ mit λ nach (33) und erhalten für $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{(1-r^2)^2}{4r^2} - \frac{(1+r^2)^2}{4r^2}\cdot\Phi_{(r)}\cdot\alpha = a_0 - a_1\cdot\alpha \\ y_0 &= \left(\frac{1-r^4}{4r^2}+\ln r\right)\cdot\alpha \quad = \quad b_1\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Ebenso können wir aus (35) auch die Parameterdarstellung der freien Stromlinien und die Druckverteilung für kleine Anstellwinkel berechnen. Der durch diese Formeln entstehende Fehler ist gleichmäßig in r bei festem α, wie die Anwendung auf die Grenzfälle zeigt. Die Formeln sind bis zu $\alpha = 10^0$ durchaus brauchbar, wie nachstehende Zahlentafel zeigt. Hier sind für $r = 0{,}5$ und $\alpha = 10^0$ die charakteristischen Größen einmal exakt berechnet und unter A angegeben, ein zweites Mal aus den Reihen ermittelt und unter B angegeben.

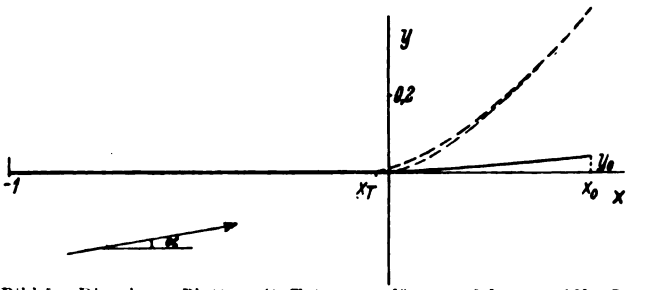


Bild 5. Die ebene Platte mit Totwasser für $r = 0{,}5$; $\alpha = 10^0$. In den gestrichelten Kurven sind die freien Stromlinien noch einmal mit 10fach überhöhten Ordinaten dargestellt.

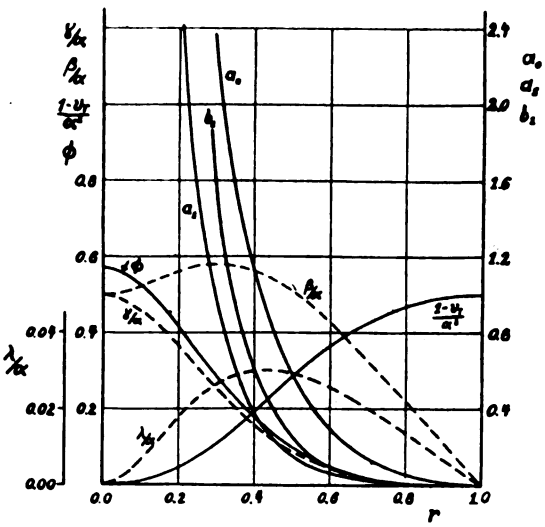


Bild 6. Die Koeffizienten der charakteristischen Größen für die Strömung mit Totwasser um die ebene Platte bei kleinen Anstellwinkeln.

		A	B
	γ^0	0,8709	0,8667
$r = 0{,}5$	λ	0,005196	0,005171
$\alpha = 10^0$	β^0	5,154	5,133
	c_1	0,4304	0,4320
	c_2	1,00872	1,00866

	A	B
P	1,0766	1,0781
x_T	−0,0333	−0,0338
x_0	0,5368	0,5361
y_0	0,0433	0,0427

Die Platte mit Totwasser ist in Bild 5 wiedergegeben. Die Unterschiede zwischen A und B liegen unterhalb der Grenze der Zeichengenauigkeit.

In Bild 6 sind die Werte der charakteristischen Größen nach (33), (34), (37), (38), (39) aufgetragen und lassen erkennen, daß für alle r die Lösungen sinnvoll sind. Weiter entnimmt man, daß mit wachsendem r die Ablösungsstelle monoton gegen die Hinterkante rückt, die Länge des Totwassers monoton abnimmt und der Druck im Totwasser monoton zunimmt. Anstatt durch Angabe von r und α kann daher auch durch Angabe der Ablösungsstelle und α oder des Totwasserdrucks und α eine Lösung eindeutig festgelegt werden.

VII. Strömungen um beliebige Konturen.

Um Strömungen mit endlichem Totwasser um andere Konturen zu erhalten, müssen wir für $e^{\tilde{}}$ andere Funktionen einsetzen, die den früher angegebenen Bedingungen genügen. Für symmetrische Strömungen leistet dies der Ansatz (5). Aus diesem Ansatz gewinnt man leicht mit (2)

Digitized by Google

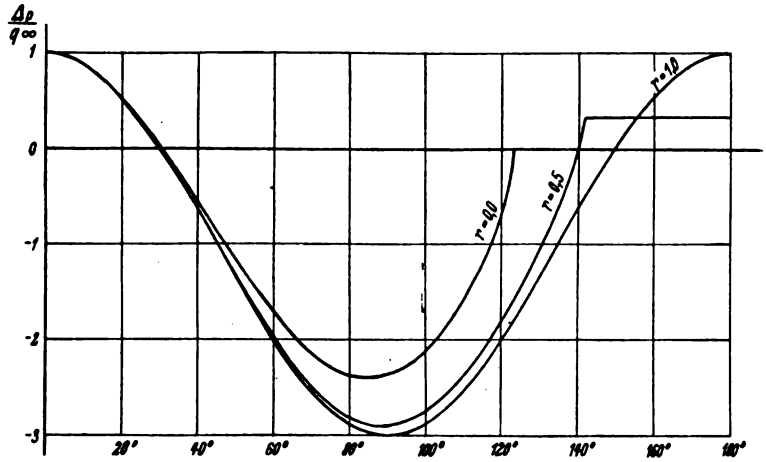


Bild 7. Druckverteilung für den Kreis mit Totwasser für $r = 0{,}0$; $r = 0{,}5$ und $r = 1{,}0$, aufgetragen über dem Halbkreisbogen vom Staupunkt aus.

und (4) einen Ausdruck für die Konturkrümmung $k = \frac{d\Theta}{|dz|}$. Hinzu kommt die Gleichung (7). Zur Berechnung der Strömung um den Kreiszylinder setzen wir dann $k \equiv 1$ und erhalten eine Funktionalgleichung, aus der sich durch schrittweise Annäherung die Koeffizienten a_{2n+1} von (5) berechnen lassen. Dies entspricht dem von Schmieden [1] für $r = 0$ durchgeführten Verfahren. Auf diesem Wege ist für $r = 0{,}5$ die Strömung um den Kreis ermittelt und die daraus folgende Druckverteilung. Das numerische Ergebnis ist in Bild 7 wiedergegeben.

Für andere Konturen ist k eine bekannte Funktion von Θ. In diesem Falle erhält man als Ansatz zur Berechnung von $e^{\tilde{}}$ eine Integralgleichung der Art, wie sie zuerst von Quarleri für $r = 0$ und den Kreis aufgestellt wurde und die sich nach Schultze [3] auch zur Berechnung für andere Konturen eignet. Die Integralgleichung kann entsprechend dem für $r = 0$ angewandten Verfahren aufgestellt werden.

VIII. Schrifttum.

[1] C. Schmieden, Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unstetigen Strömungen. Ingenieur-Archiv Bd. 3 (1932) und Ingenieur-Archiv Bd. 5 (1934).

[2] C. Schmieden, Über Tragflügelströmungen mit Wirbelablösung. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940) Nr. 2, S. 37.

[3] J. F. Schultze, Über unstetige Flüssigkeitsbewegungen um vorgegebene Profile. Schr. math. Inst. u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin Bd. 4 (1939) Nr. 6.

Digitized by Google

II E 9

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 6 enthält Arbeiten von: I. Flügge-Lotz und K. Solf S. 161—166, H. Behrbohm S. 167—171, A. Reinhardt S. 172—173, Berichtigung S. 173, Ergänzung S. 173, K. Ramsayer S. 174

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 6 SEITE 161 BIS 188 | MÜNCHEN, 20. 6. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:
Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Strömungsaufnahmen eines durch einen Tragflügel gestörten Schraubenstrahles. Von I. Flügge-Lotz und K. Solf . . . . . Seite 161
Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten. Von Herm. Behrbohm . . . . . Seite 167
Zur Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik. Von A. Reinhardt . . . . Seite 172
Gedankengänge zur Flatterberechnung. Berichtigung . . . . . Seite 173
Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze. Ergänzung . . . . . Seite 173
Die Änderung der Elemente magnetischer Störgebiete mit der Höhe und ihr Einfluß auf die Flugnavigation. Von K. Ramsayer . . . . . Seite 174

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. Juni 1940 Lfg. 6

Strömungsaufnahmen eines durch einen Tragflügel gestörten Schraubenstrahles.

Von I. Flügge-Lotz und K. Solf.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V.

Hierzu Tafel 1 bis XI.

Um einen Schraubenstrahl, der einen Tragflügel schneidet, beobachten zu können, wurden Versuche in Wasser angestellt. Der Schraubenstrahl wurde durch eingeführte Luft sichtbar gemacht.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Beschreibung der Versuchsanordnung.
III. Bemerkungen zu den Aufnahmen.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Bei Stabilitätsrechnungen macht sich die Tatsache unangenehm bemerkbar, daß man die Abwindverhältnisse in Leitwerksgegend nur schwer abschätzen kann, weil man den Einfluß des Schraubenstrahles bis jetzt nicht genügend genau kennt. Es liegt zwar eine Anzahl Messungen des Geschwindigkeitsfeldes hinter einem Flügel vor, der einen Schraubenstrahl schneidet [1], [2], [3], [4], [5], [6]; aber es ist schwer, sich aus den punktweise vermessenen Feldern eine Vorstellung über den Gesamtverlauf zu machen, z. B. die Frage zu beantworten: Wie wird der Schraubenstrahl abgelenkt; bleibt er ungefähr ein Ganzes, oder ist er in Leitwerksgegend schon stark aufgelöst? Darum bestand der Wunsch, die Strömung Schraubenstrahl mit Tragflügel sichtbar zu machen. Früher haben O. Flamm [7], C. A. Parsons [8] und J. Valensi [9] den Schraubenstrahl allein betrachtet[1]). Flamm und Parsons untersuchten, von Problemen des Schiffbaues ausgehend, in Wasser arbeitende Schrauben. Valensi machte Versuche in Luft, bei denen die Strömung durch zugeführten Rauch sichtbar gemacht wurde. Die letzte Anordnung bedingt immer verhältnismäßig kleine Geschwindigkeiten und damit kleine Reynoldssche Zahlen. Daher führten wir die Versuche wieder in Wasser durch.

II. Beschreibung der Versuchsanordnung.

Bild I zeigt den Wasserkanal mit der Beobachtungsstrecke, die Glaswände besitzt. Bild II läßt die Anordnung von Tragflügel und Schraube in der Beobachtungsstrecke besser erkennen. Aus Bild III sind die Maße der ganzen Anordnung zu entnehmen.

Der Tragflügel war aus Metall hergestellt und wurde durch zwei Befestigungsschrauben, die in den seitlichen Glaswänden saßen, gehalten. Der Anstellwinkel konnte durch Drehen um diese Befestigungspunkte geändert werden. Zwischen Glaswand und Flügel war eine Gummidichtung angebracht, deren Reibung eine unbeabsichtigte Drehung des Tragflügels unmöglich machte. Die Schraube, die über eine biegsame Welle angetrieben wurde, hing an einem Arm. Dieser konnte so verstellt werden, daß einerseits eine

[1]) Nach Fertigstellung unserer Arbeit lernten wir das Buch von Ch. Chartier, Chronophotogrammetrie plane et stéréoscopique (Publ. sci. et techn. du ministère de l'air Nr. 114, Paris 1937) kennen, in dem neben anderen die Strömung um die Schraube allein untersucht wird. Die Versuche wurden im Wasser durchgeführt und die Strömung teils durch Aluminiumflitter, teils durch Luftblasen sichtbar gemacht.

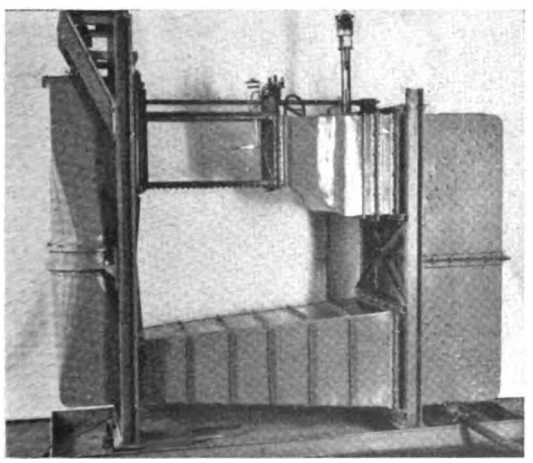


Bild I. Wasserkanal.

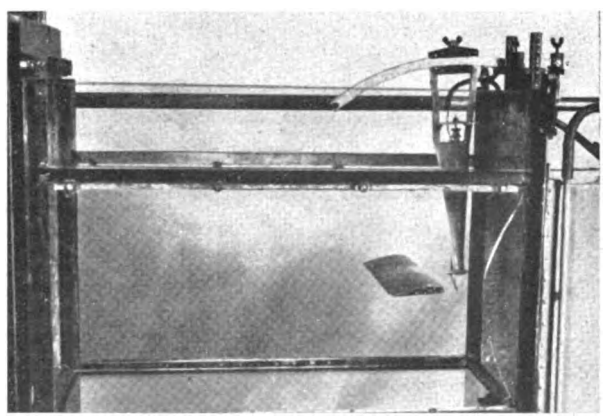


Bild II. Beobachtungsstrecke.

Digitized by Google

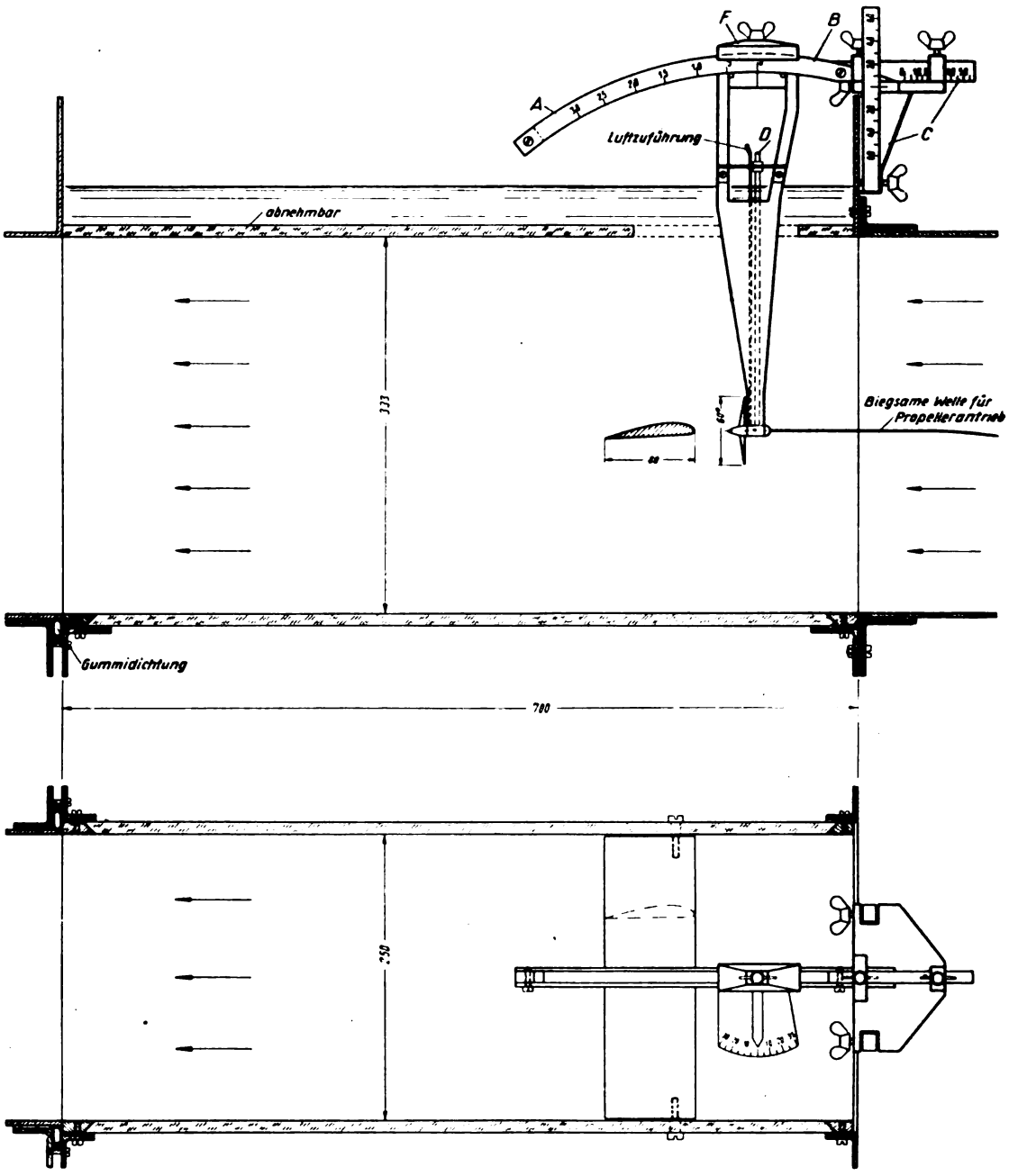


Bild III. Aufriß und Grundriß der Beobachtungsstrecke.

Neigung der Schraubenachse gegen die Horizontalebene (Führung F auf AB, Bild III) und andererseits eine seitliche Schrägstellung der Achse (Führung D) möglich war. Durch die Führung C konnte der ganze Arm noch gehoben und gesenkt, bzw. in Strömungsrichtung verschoben werden, so daß wir die Lage der Schraube zum Tragflügel weitgehend ändern konnten.

Um den Schraubenstrahl sichtbar zu machen, wurde Luft an der Nabe zugeführt. Die Zuführungsleitung ist in Bild III angedeutet. Die Luft wurde mit Hilfe einer gewöhnlichen Fahrradpumpe stoßweise eingeblasen, da durch kontinuierliche Zuführung im ganzen Kanal ein Wasser-Luftgemisch entstanden wäre.

Viel Mühe machte die Wahl einer geeigneten Öffnung, durch die die Luft in das Wasser eintrat. Zunächst waren horizontale Bohrungen verschiedenen Durchmessers in solcher Höhe des Armes angebracht, daß die Luft in der Nähe der Schraubenblattspitzen austrat. Waren die Öffnungen groß, dann waren die entstehenden Luftblasen zu groß. Sie wurden nicht mit der Strömung fortgeführt, sondern stiegen vermöge ihres statischen Auftriebes zur Wasseroberfläche empor. Waren die Öffnungen enger, so wurden die Luftblasen zu klein, und es gab eine Art Sprühnebel, der die Strömung nicht erkennen ließ.

Schließlich ergab sich, daß man am einfachsten die Luft durch den natürlichen Spalt zwischen Tragarm und Nabe austreten ließ, da die Höhenlage der Öffnung nichts ausmachte und dieser Spalt gerade die passende Größe als Zuleitung hatte. Man konnte aber auch hiermit nicht vermeiden, daß sich Luftblasen durch Zusammenfließen zu größeren vereinigten, die nun doch wieder hochstiegen. Doch ließ sich diese störende Erscheinung so weit einschränken, daß sie sich von der beabsichtigten Darstellung der Strömungsbilder klar trennen ließ.

Diese mühsamen Vorarbeiten für die eigentlichen Versuche wurden von Herrn Dipl.-Ing. Wasielewski durchgeführt. Er hat auch die Aufnahmen mit den Plattennummern bis 279 gemacht (in der vorliegenden Auswahl im wesentlichen Bild 1 bis 15), während die übrigen von dem zweiten Verfasser stammen.

Die Wassergeschwindigkeit in der Maßstrecke betrug 0,70 m/s, die mittlere Temperatur 15°. Da drei Tragflügel

Digitized by Google

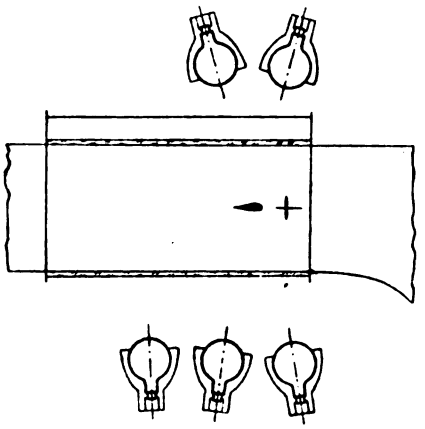


Bild IV. Anordnung der Lampen (Aufriß) für die Seitenaufnahmen.

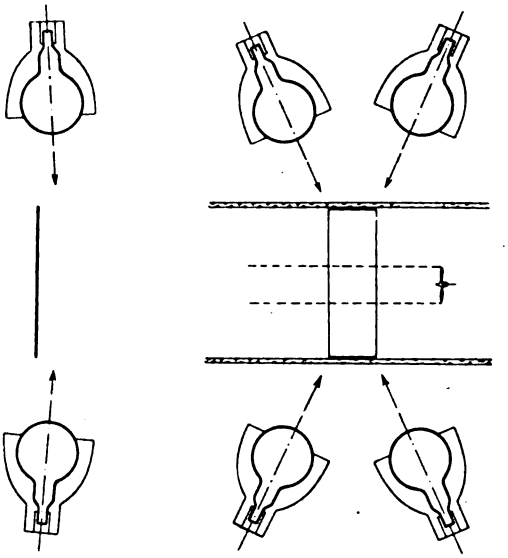


Bild V. Anordnung der Lampen (Seitenriß und Grundriß) für die Aufnahmen von unten.

mit den Tiefen 0,04, 0,06 und 0,08 m und eine ebene Platte[2]) mit der Tiefe 0,10 m untersucht wurden, ergaben sich für die Reynoldssche Zahl (auf die Flügeltiefe bezogen) Werte zwischen $2{,}4 \cdot 10^4$ und $6 \cdot 10^4$. Sie ist demnach immer noch verhältnismäßig niedrig. Um trotzdem eine Strömung zu erhalten, die einer höheren Reynoldsschen Zahl besser entsprach, wurde das zunächst gewählte Profil Gö 398 an der Nase abgeändert; die Nase wurde etwas heruntergezogen und der kleinste Krümmungsradius etwas verringert.

Die benutzte Schraube, eine Linksschraube, gehörte der Durand-Lesley-Serie an [10] (Kennziffer $S_1\, F_2\, A_2\, P_1$), hatte einen Durchmesser $D = 0{,}06$ m und die Steigung $H/D = 0{,}7$. Sie lief im Mittel mit 1600 U/min. Dem entspricht ein Fortschrittsgrad $\lambda = 0{,}14$. Die Reynoldssche Zahl der Strömung an der Schraube, bezogen auf die effektive Anströmungsgeschwindigkeit und die Blattbreite, beide an der Stelle 0,7r, betrug $1{,}83 \cdot 10^4$.

Wir haben auch versucht, Schrauben mit größerer Steigung zu benutzen. Bei kleinen Fortschrittsgraden ergaben sich dabei aber zu große Drehzahlschwankungen, wenn die Luft eingeblasen wurde; bei größeren Fortschrittsgraden wurde der Schraubenstrahl nicht so gut sichtbar. Das letztere lag daran, daß bei hohem Fortschrittsgrad, d. h. kleinem Belastungsgrad, die zusätzliche Achsialgeschwindigkeit im Strahl zu klein war. Die großen Drehzahlschwankungen versteht man, wenn man die Charakteristiken für Schrauben großer und kleiner Steigung vergleicht: Nach dem Einblasen der Luft arbeitet die Schraube in einem Medium verringerter Dichte. Das kann man auch so auffassen, als ob der Drehmomentenbeiwert k_d der Schraube und damit das Schraubendrehmoment über den ganzen Bereich des Fortschrittsgrades verkleinert wird. Bei der Schraube großer Steigung ist nun k_d bei kleinen λ-Werten von λ ziemlich unabhängig oder nimmt mit abnehmendem λ ab, während bei der Schraube kleiner Steigung k_d mit abnehmendem λ wächst. Im letzten Falle reicht nach Einblasen der Luft eine kleinere Drehzahlerhöhung, d. h. eine kleinere Verminderung von λ, aus, um wieder Gleichgewicht zwischen Motor- und Schraubendrehmoment herzustellen, als bei der Schraube größerer Steigung. Darum läuft die Schraube kleiner Steigung gleichmäßiger.

Die Strömung wurde von der Seite, von unten und in einigen Fällen schräg von oben aufgenommen. Senkrecht von oben zu photographieren, war wegen der unruhigen Wasseroberfläche über der abnehmbaren Deckscheibe der Meßstrecke nicht möglich. Außerdem störten die Verstellvorrichtungen. Die Aufnahmen wurden mit einer Stereokamera gemacht, deren Brennweite 8 cm und deren Objektivabstand 6,3 cm betrug. Die benutzten Platten waren Agfa Isopan mit 17/10 Din bzw. Agfa Isopan ISS mit 20/10 Din Empfindlichkeit. Als zweckmäßigste Belichtungszeit ergab sich $^1/_{100}$ s. Zur Beleuchtung dienten 4 bis 8 Nitraphotlampen von je 500 W (je 11000 Lumen); die relative Blendenöffnung betrug 1:4,5 bis 1:7. Bild IV zeigt die Anordnung der Lampen für die Seitenaufnahmen, Bild V die für die Aufnahmen von unten. Bei den Seitenaufnahmen waren in manchen Fällen oben auch 4 Lampen (je 2 nebeneinander in Spannweitenrichtung) angebracht. Bei den Aufnahmen von unten kostete es viel Mühe, die Lampen so anzuordnen, daß der Schraubenstrahl gegenüber dem Flügel stark beleuchtet wurde, sich also gut abhob; zudem war die Kontraststärke auf der entwickelten Platte wesentlich geringer als bei der Beobachtung auf der Mattscheibe. Bild V zeigt die Anordnung, die sich als günstigste ergab. Die Lampen wurden so eingestellt, daß die Richtungen maximaler Lichtstärke (Pfeile!) etwas ununterhalb des Flügels verliefen, annähernd mit den Diagonalrichtungen der Flügelsehnenebene übereinstimmten, aber etwas nach unten geneigt waren. Die Lampen befanden sich dabei in einem seitlichen Abstand von 10 bis 15 cm von den Glaswänden der Meßstrecke. Außerdem wurden die Flügel von 0,08 m und die Platte von 0,10 m Tiefe mattschwarz lackiert.

Während bei den Seiten- und Schrägaufnahmen der Abstand der Kameraobjektive von der Horizontalen durch die Nabenspitze der Schraube 1 m betrug (die den normalen Bildweiten entsprechende minimale Gegenstandsweite), mußte dieser Abstand bei den Aufnahmen von unten wegen des Kanalrücklaufes auf 0,85 m verringert werden. Dadurch erklären sich die Größenunterschiede zwischen den beiden Bildergruppen und die etwas verschiedene räumliche Wirkung bei stereoskopischer Betrachtung.

Da eine Veröffentlichung der Photographien selbst nicht möglich war, sind die Bilder nach dem Anaglyphenverfahren reproduziert[3]). Es hat den Vorteil, daß man die vergrößerten Bilder — Vergrößerung war notwendig, um die durch das Druckraster bedingte Unschärfe nicht zu groß werden zu lassen — bequem mit der beiliegenden »Brille« betrachten kann. Bei einer Reproduktion als eigentliche Stereobilder wäre ein Stereoskop großen Formats nötig, das meist nicht zur Hand ist.

III. Bemerkungen zu den Aufnahmen.

Bevor wir die Aufnahmen betrachten, wollen wir uns die gegenseitigen Einflüsse von Schraubenstrahl und Tragflügel aufeinander überlegen. Wir betrachten zunächst den Schraubenstrahl allein. Von den Schraubenblättern gehen Unstetigkeitsflächen ab, die von den freien Wirbelfäden gebildet werden. Sie wickeln sich schnell zu zwei Wirbeln auf, so daß hinter der Schraube hauptsächlich die Spitzen- und Nabenwirbel vorhanden sind. Führen wir der Schraubenströmung Luft zu, so wandert diese nach den Stellen

[2]) Die ebene Platte wurde genommen, weil ein Tragflügel von dieser Tiefe nicht schnell genug hergestellt werden konnte.

[3]) Die Anaglyphendrucke wurden von der Firma A. Kämpfe, Buch-, Offset- und Kupfertiefdruck, in Jena hergestellt.

Digitized by Google

größten Unterdruckes, also vor allem nach den Wirbelkernen. Die zugeführte Luft macht daher die abgehenden schraubenförmigen Spitzen- und Nabenwirbel sichtbar. Sie sind besonders deutlich in Bild 6 (Nabenwirbel) und Bild 12 (Spitzenwirbel) zu sehen. Bei einigen Aufnahmen (Bild 4 und 12) ist nur ein Spitzenwirbel zu sehen. Dies rührt daher, daß die Luftzuführung ungleichmäßig war. Letzteres ließ sich bei der großen Schwierigkeit, während der kurzen Zeit der Luftzuführung den geeigneten Aufnahmemoment zu finden, nicht vermeiden. Für das Ziel der Arbeit entsteht dadurch auch kaum ein Nachteil.

Bringen wir in den Schraubenstrahl einen Tragflügel, so sucht dieser die drehende Bewegung im Strahl zu vermindern. Wir werden daher hinter dem Flügel die Schraubenlinien nicht mehr so gut ausgebildet vorfinden. Wie stark der Tragflügel den Strahl gleichrichtet und für dauernd teilt, hängt wesentlich von der Tragflügeltiefe ab.

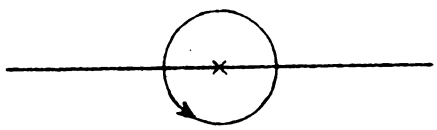


Bild VI. Tragflügel mit Schraubenstrahl in Flugrichtung gesehen.

Der Schraubenstrahl wirkt in zweifacher Weise auf den Tragflügel ein: einmal werden durch die erhöhte Achsialgeschwindigkeit im Strahl am Tragflügel im Mittel größere Kräfte erzeugt, zum andern werden durch den im Strahl vorhandenen Drall die getroffenen Flügelschnitte unter verschiedenen Winkeln angeströmt. Bei hohen Anstellwinkeln kann durch die Abwärtsgeschwindigkeiten links in Bild VI die Strömung im Strahl noch anliegen, während sie bei nicht vorhandenem Strahl schon abgerissen wäre; umgekehrt kann rechts in Bild VI die Strömung im Strahl schon in einem Anstellwinkelbereich abreißen, wo ohne Strahl die Strömung noch anliegen würde.

Für die Betrachtung der Aufnahmen sei zunächst festgesetzt, daß rechts und links bedeuten: rechts und links vom Führer eines Flugzeuges aus gesehen, dessen Tragflügel und Schraube wir betrachten. Die Schraube war, wie schon erwähnt, eine Linksschraube.

Der Schraubenstrahl wurde zunächst an drei Tragflügeln von der Tiefe 0,04 m, 0,06 m, 0,08 m und an einer ebenen Platte von der Tiefe 0,10 m photographiert. Die Anstellwinkel α betrugen jeweils 3°, 7°, 11° und 15°, die Winkel β zwischen Strömungsrichtung und Schraubenachse entsprechend 0°, 4°, 8° und 12°, so daß der Einstellwinkel der Schraubenachse zur Flügelsehne $\alpha-\beta$ konstant gleich 3° blieb. Flügel und Schraube lagen so zueinander, daß die Schraubenachse durch die Vorderkante des Flügels ging. Weiterhin wurde bei dem Flügel mit der Tiefe t = 0,08 m die relative Höhenlage von Flügel und Schraubenachse verändert, und zwar betrug die Verschiebung der Schraube nach unten 0,20 t und 0,40 t (Schulter- bzw. Hochdeckeranordnung), nach oben 0,15 t (Tiefdeckeranordnung). Das gleiche Programm: Änderung des Anstellwinkels und der relativen Höhenlage wurde auch für einen Flügel der Tiefe t = 0,08 m bei einem Schiebewinkel $\delta = 10°$ (Linksschieben) durchgeführt. Ferner wurden einige Aufnahmen von der Anordnung Schraubenstrahl mit ebener Platte gemacht, bei denen der Winkel zwischen Flügelsehne und Strahlachse verändert wurde, und zwar wurde α verändert, β aber konstant gleich 0° gelassen. Schließlich wurde der Schraubenstrahl noch mit einem Flügel (t = 0,08 m, $\delta = 0°$, Normallage), an dem eine starke Störung in Form einer Motorgondel angebracht war, bei verschiedenen Anstellwinkeln photographiert.

Alle Anordnungen sind von der Seite und von unten, eine Reihe auch schräg von oben photographiert worden. Aus beleuchtungstechnischen Gründen konnten die Seiten- und Untenaufnahmen nicht gleichzeitig gemacht werden. Darum kann man keine gegenseitige Zuordnung der sichtbaren Wirbelfäden vornehmen.

Nimmt man an, daß bei Motorflugzeugen das Leitwerk etwa eine halbe Spannweite hinter der Tragflügelmitte sitzt, dann muß man es sich bei einem Seitenverhältnis 1:6 ungefähr drei Flügeltiefen hinter der Tragflügelmitte angebracht denken. Daher ist, soweit es möglich war, der Schraubenstrahl in dieser Länge aufgenommen.

Von diesen Aufnahmen zeigt der folgende Bilderteil einen Ausschnitt, der die wesentlichen Ergebnisse erkennen läßt. Weitere Bilder können wir als Stereoabzüge zur Verfügung stellen.

Die Bilder sind in Serien zusammengefaßt, in denen jeweils ein bestimmtes Merkmal der Versuchsanordnung variiert wurde. Wir betrachten nun die verschiedenen Bildserien der Reihe nach.

Serie 1, »Schraubenstrahl ohne Tragflügel« (Bild 1 bis 3), zeigt den Schraubenstrahl allein bei zwei verschiedenen Winkeln zwischen Strömungsrichtung und Schraubenachse.

Serie 2, »Einfluß des Anstellwinkels« (Bild 4 bis 11), zeigt die Strömung an einem Tragflügel der Tiefe t = 0,08 m bei vier verschiedenen Anstellwinkeln $\alpha = 3°, 7°, 11°$ und 15°. Dabei ist der Einstellwinkel $\alpha-\beta$ der Schraubenachse zum Flügel stets 3°. Man erkennt, daß der Schraubenstrahl mit wachsendem Anstellwinkel, entsprechend der stärkeren Zirkulation um den Flügel, sich immer stärker krümmt. Auf Bild 11 sieht man, daß die Strömung rechts abgerissen ist, während sie links noch anliegt; eine Bestätigung der oben angestellten Überlegung. Der Strahl erscheint auf der Flügelunterseite verbreitert und nach rechts abgelenkt. Diese Erscheinung verstärkt sich zunächst mit wachsendem Anstellwinkel (Bild 5 und 7); bei noch größerem Anstellwinkel ($\alpha = 11°$, Bild 9) ist die seitliche Ablenkung wieder geringer.

Für die Ablenkung gab A. Betz folgende Erklärung: Der Tragflügel teilt den Schraubenstrahl in zwei Abschnitte, von denen jeder sich entsprechend seinem Impuls bewegt. Nun hat infolge der Strahlrotation jeder Abschnitt eine Impulskomponente in Spannweitenrichtung, die bei einer Linksschraube unterhalb des Flügels nach rechts, oberhalb nach links gerichtet ist. Will man diese Impulskomponente und die zugehörige Geschwindigkeit berechnen, so braucht man eine Annahme über die Verteilung der Tangentialgeschwindigkeit längs des Radius. Nach der Theorie der schwachbelasteten Schraube bei geringstem Energieverlust ist letztere proportional zu $\frac{V\,\Omega r}{V^2+\Omega^2 r^2}$, wo V die Fahrtgeschwindigkeit, Ω die Winkelgeschwindigkeit der Schraube und r der Abstand von der Schraubenachse ist. In Bild VII ist die hiernach berechnete Geschwindigkeit v des Strahlabschnittes in Spannweitenrichtung über dessen Dicke h aufgetragen; v und h sind mit den Werten v_0 und R des halben Strahles dimensionslos gemacht. Man sieht, daß es für die Geschwindigkeit des kleineren Strahlabschnittes nicht viel ausmacht, wo der Flügel den Strahl teilt; dagegen verliert der größere Abschnitt mit wachsender Dicke schnell an Geschwindigkeit. Letzteres werden wir durch die Aufnahmen bestätigt finden. Über die Größe der Ablenkung der Strahlabschnitte kleiner Dicken geben die Versuche kein eindeutiges Bild.

Die Betrachtung der beiden Serien 1 und 2 hat uns drei Erscheinungen gezeigt, die für den Einfluß des Tragflügels

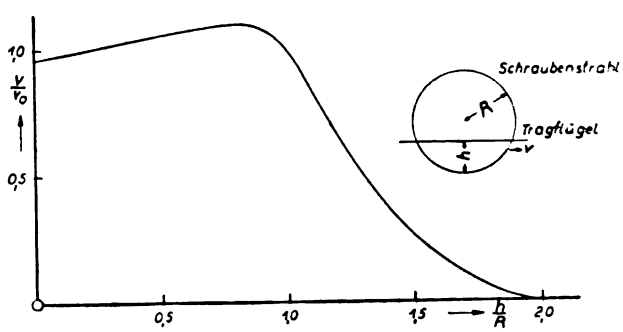


Bild VII. Geschwindigkeit eines Strahlteiles in Spannweitenrichtung.

Digitized by Google

Serie 1.

Schraubenstrahl ohne Tragflügel.

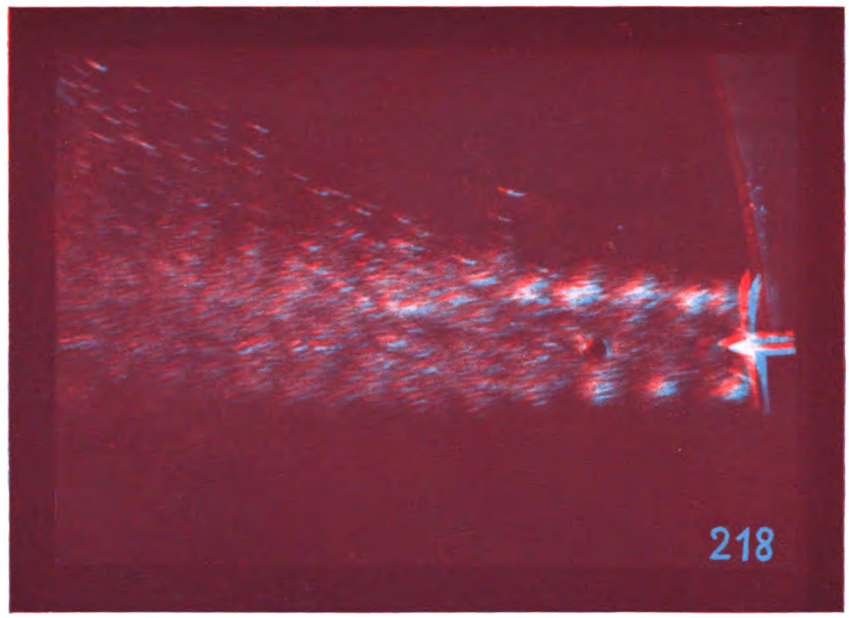


Bild 1. $\beta = 4^0$. Seitenaufnahme.

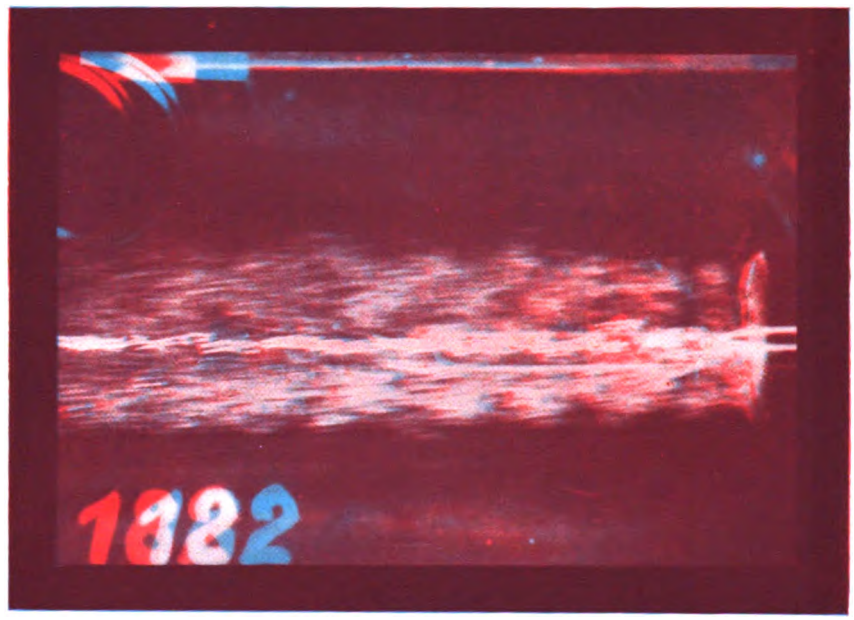


Bild 2. $\beta = 4^0$. **Aufnahme von unten.**

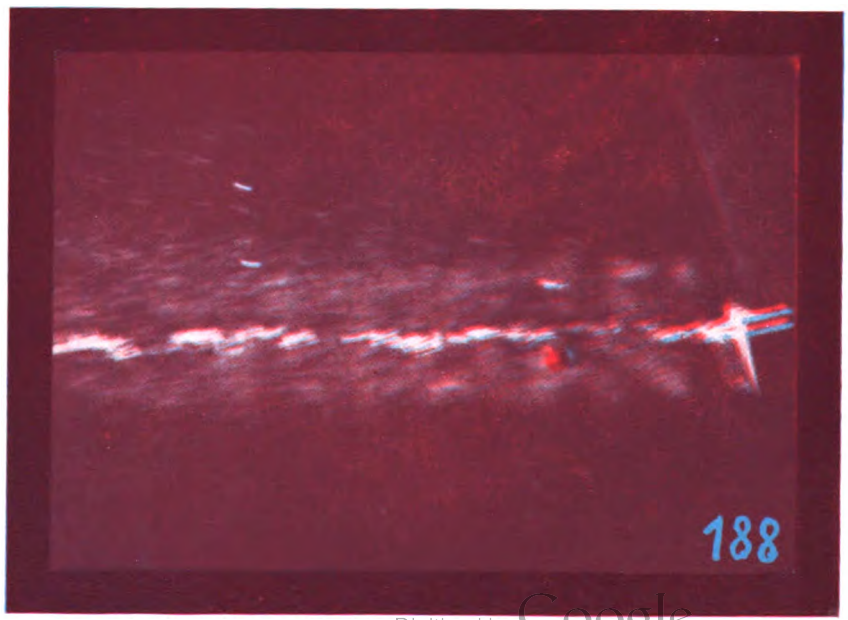
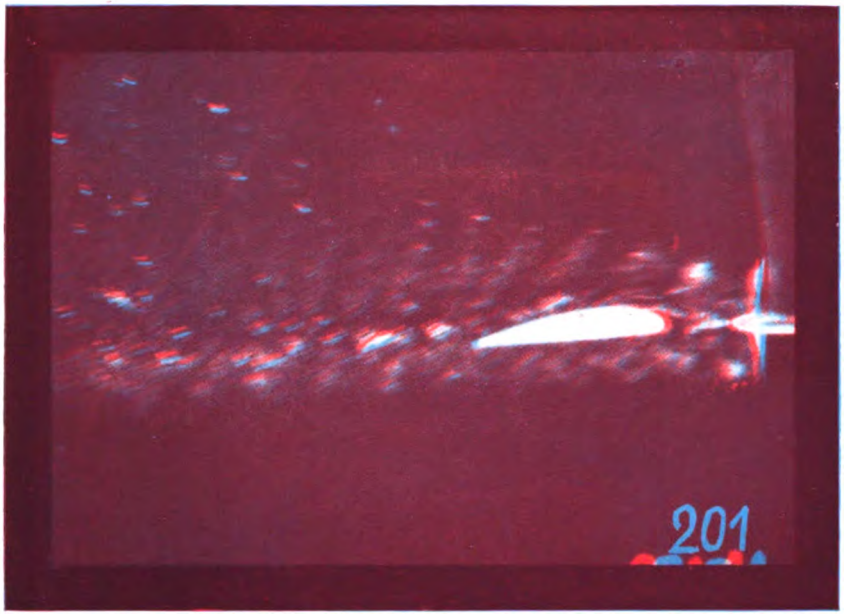


Bild 3. $\beta = 12^0$. Seitenaufnahme.

Digitized by Google



Serie 2.

Einfluß des Anstellwinkels.

Schraubenstrahl mit demselben Tragflügel ($t = 0.08$ m) bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Bild 4. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.08$ m. Seitenaufnahme.

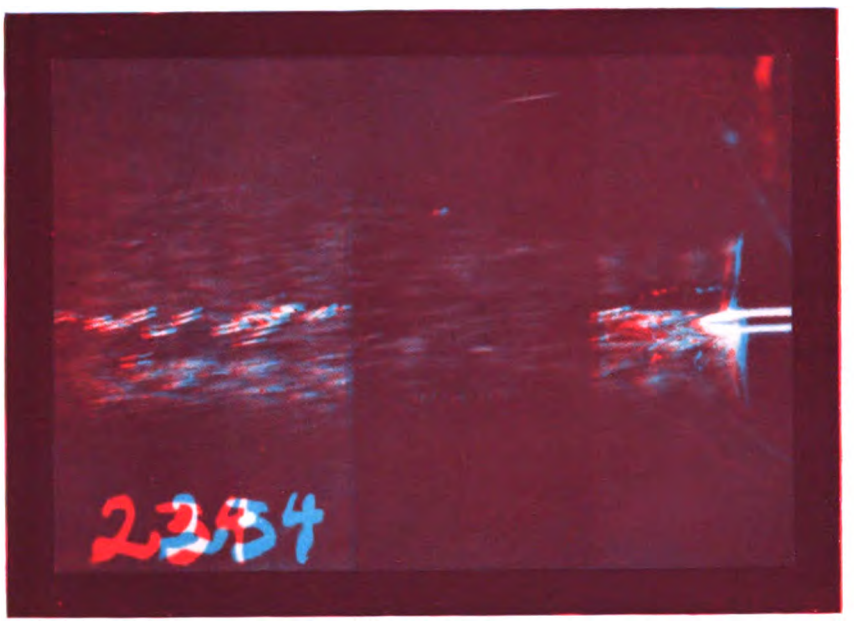


Bild 5. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0{,}08$ m. Aufnahme von unten.

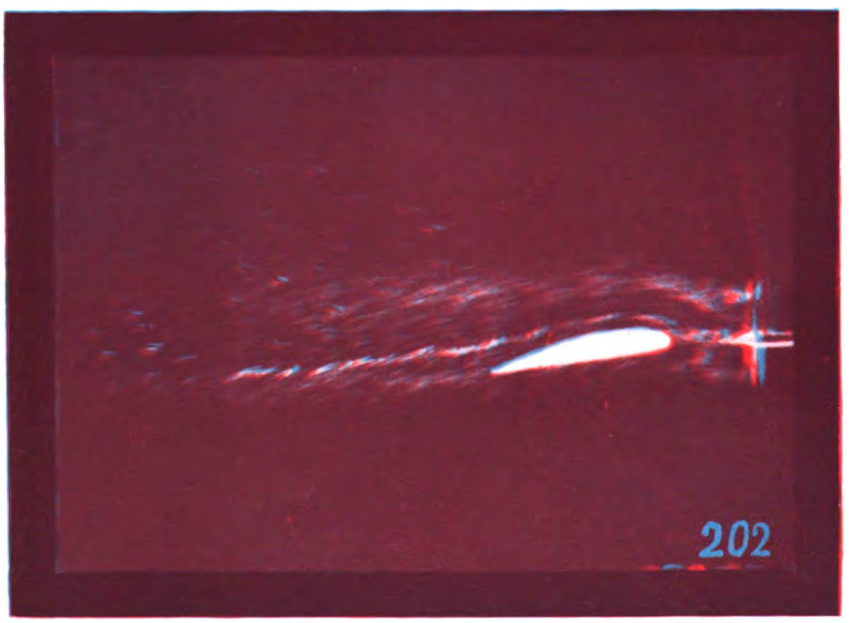


Bild 6. $\alpha = 7^0$, $\beta = 4^0$, $t = 0.08$ m. Seitenaufnahme.

Digitized by Google

Serie 2. (Fortsetzung).

Einfluß des Anstellwinkels.

Schraubenstrahl mit demselben Tragflügel ($t = 0.08$ m) bei verschiedenen Anstellwinkeln.

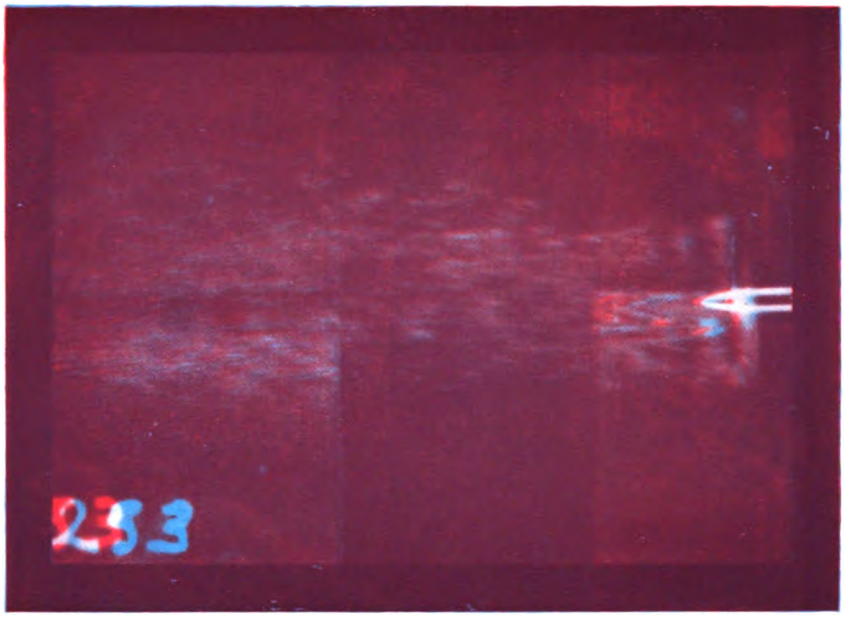


Bild 7. $\alpha = 7^0$, $\beta = 4^0$, $t = 0.08$ m. Aufnahme von unten.

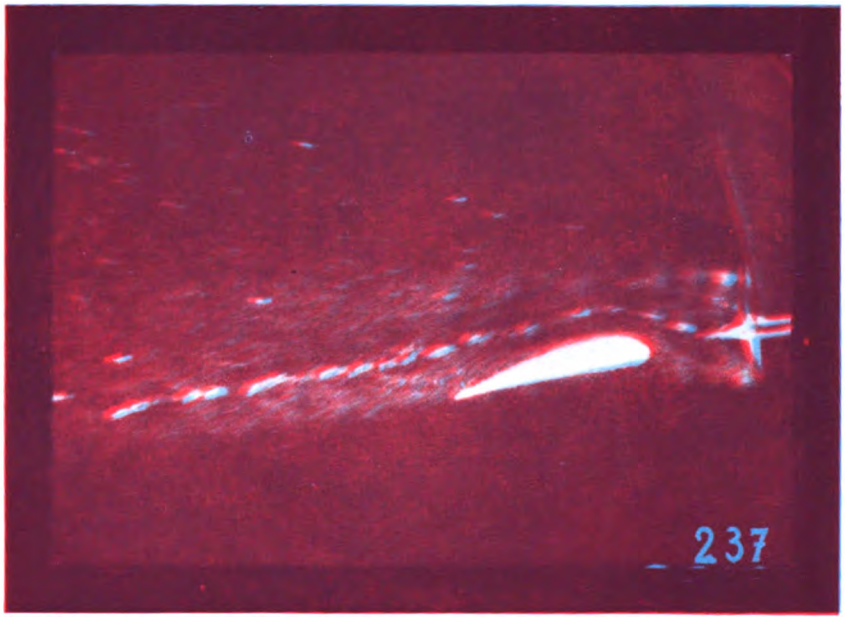


Bild 8. $\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0.08$ m. Seitenaufnahme.

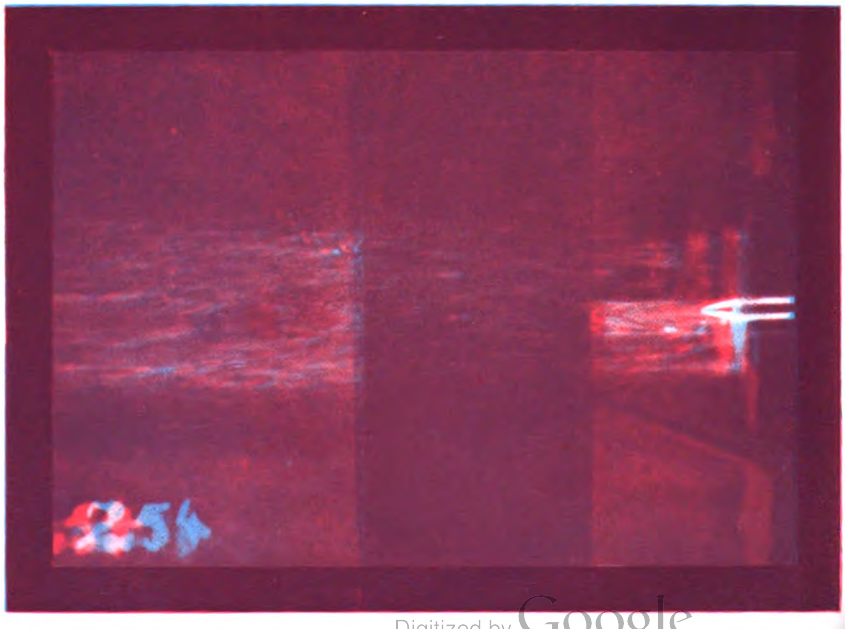
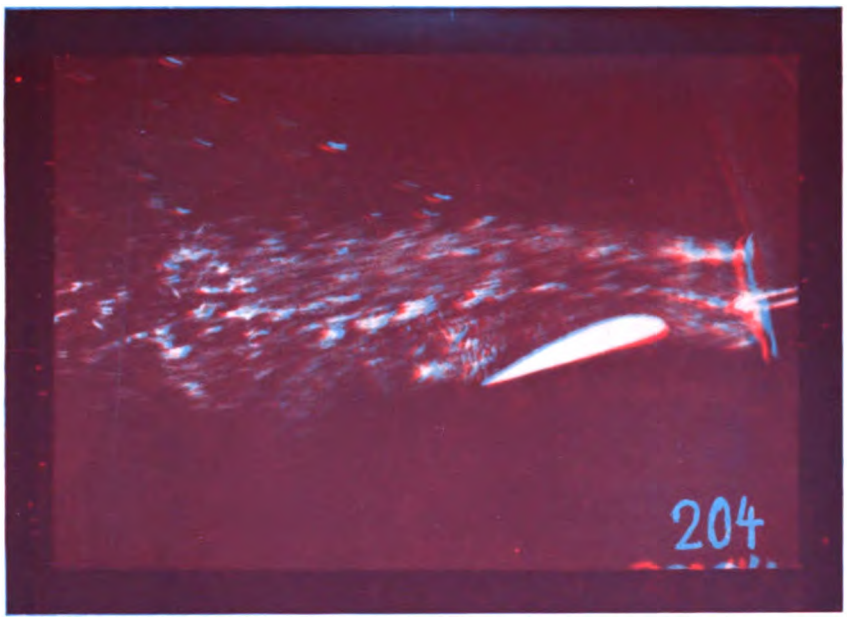


Bild 9. $\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0.08$ m. Aufnahme von unten.

Digitized by Google



Serie 2. (Fortsetzung).

Einfluß des Anstellwinkels.

Schraubenstrahl mit demselben Tragflügel ($t = 0.08$ m) bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Bild 10. $\alpha = 15^0$, $\beta = 12^0$, $t = 0.08$ m. Seitenaufnahme.

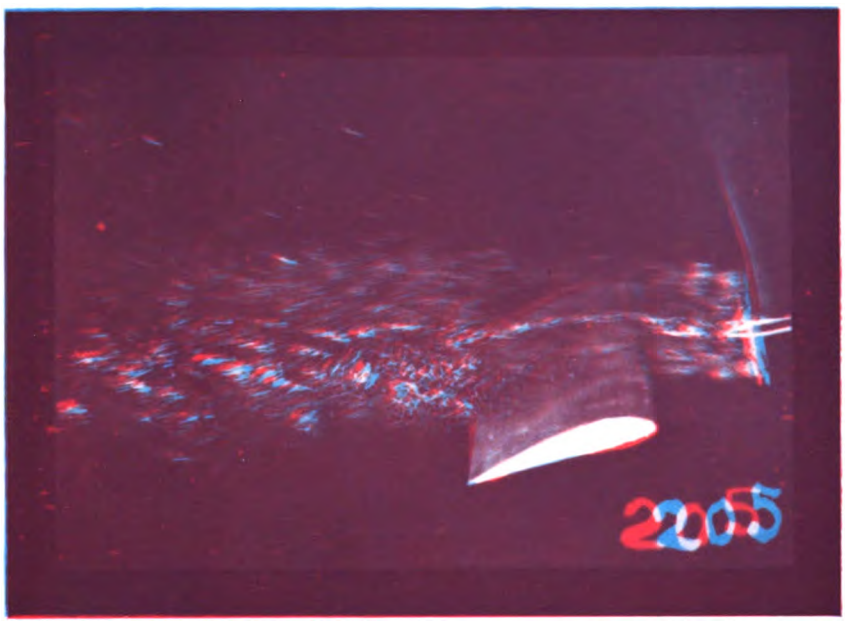
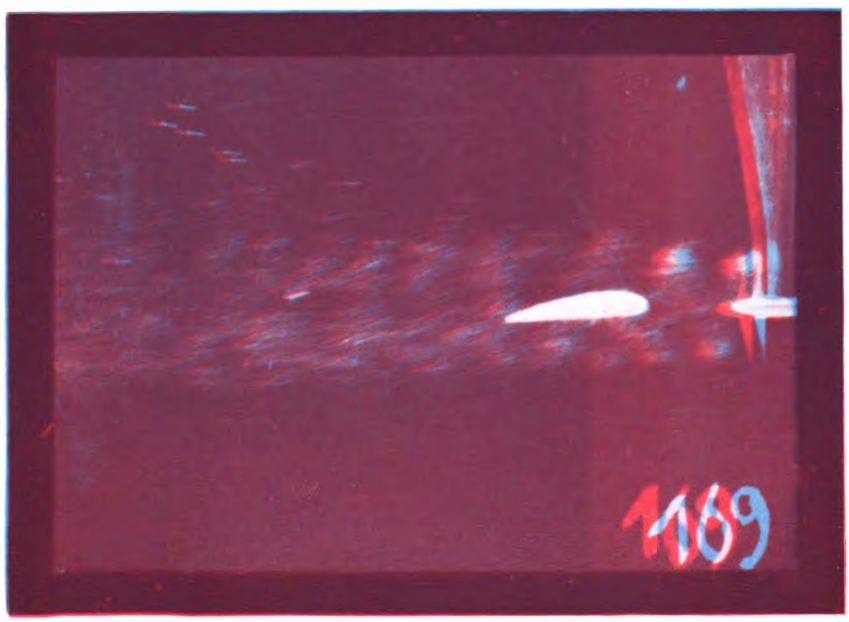


Bild 11. $\alpha = 15^0$, $\beta = 12^0$, $t = 0.08$ m. Aufnahme schräg von oben rechts.



Serie 3.

Einfluß der Flügeltiefe.

Schraubenstrahl mit Tragflügeln verschiedener Tiefe bei demselben Anstellwinkel ($\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$).

Bild 12. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.06$ m. Seitenaufnahme.

Digitized by Google

Serie 3. (Fortsetzung).

Einfluß der Flügeltiefe.

Schraubenstrahl mit Tragflügeln verschiedener Tiefe bei demselben Anstellwinkel ($\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$).

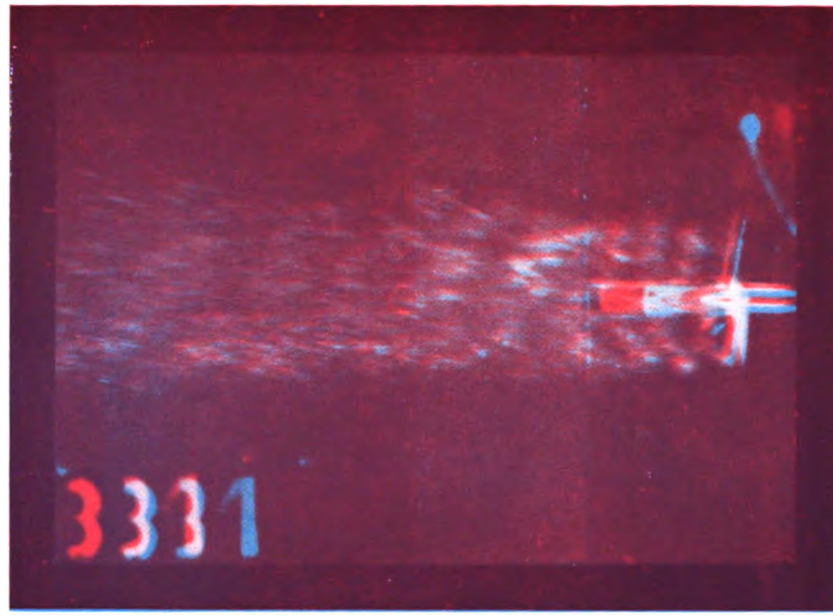


Bild 13. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.06$ m. Aufnahme von unten.

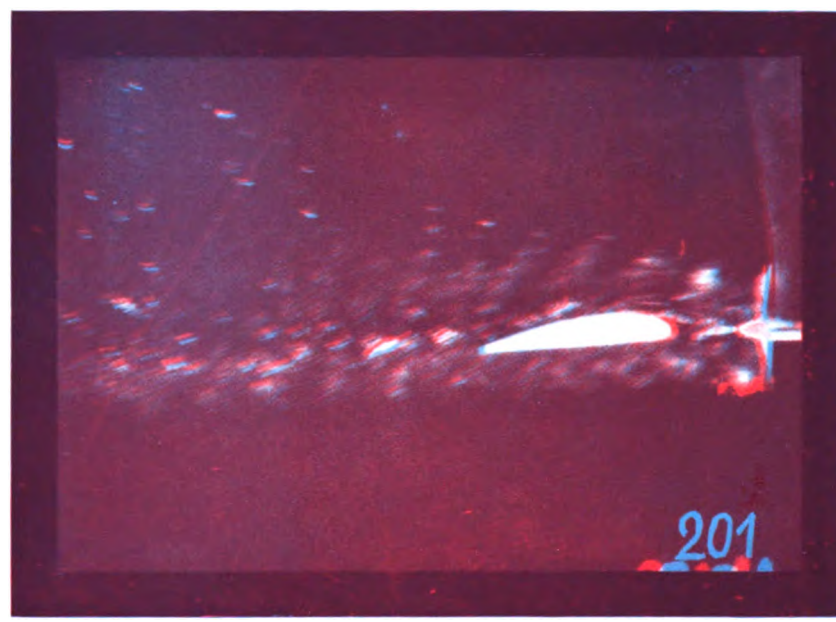
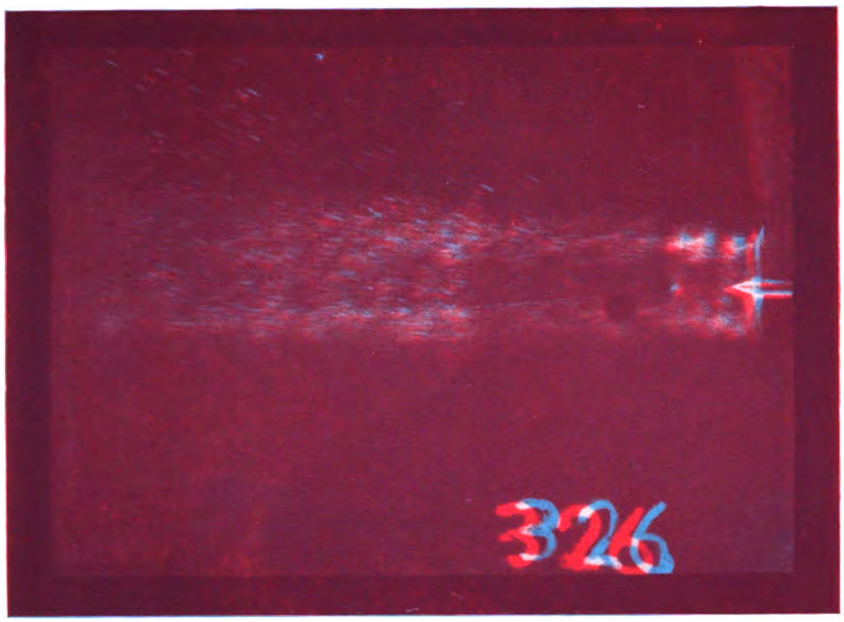


Bild 14. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.08$ m. Seitenaufnahme.

Bild 15. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.08$ m. Aufnahme von unten.

Digitized by Google



Serie 3. (Fortsetzung).

Einfluß der Flügeltiefe.

Schraubenstrahl mit Tragflügeln verschiedener Tiefe bei demselben Anstellwinkel ($\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$).

Bild 16. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.10$ m. Seitenaufnahme.

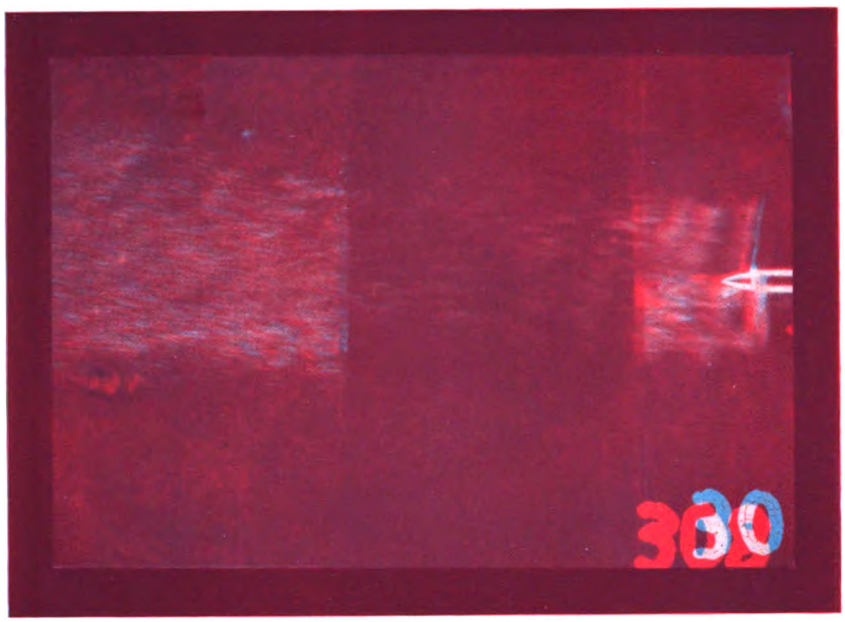
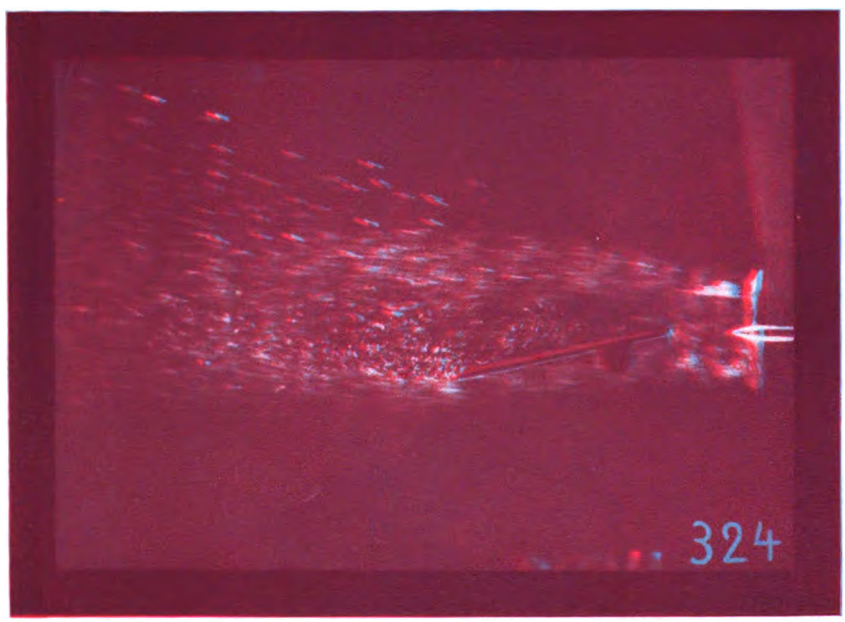


Bild 17. $\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.10$ m. Aufnahme von unten.



Serie 4.

Einfluß des Winkels zwischen Schraubenachse und Flügelsehne.

Schraubenstrahl mit ebener Platte. $\alpha = 11^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.10$ m.

Bild 18. Seitenaufnahme.

Digitized by Google

Serie 4. (Fortsetzung).

Einfluß des Winkels zwischen Schraubenachse und Flügelsehne.

Schraubenstrahl mit ebener Platte.
$\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0.10$ m.

Bild 19. Aufnahme von unten.

Serie 5.

Einfluß des Abstandes zwischen Schraubenachse und Flügelsehne.

Schraubenstrahl mit Tragflügel bei Hoch-, Schulter- und Tiefdeckeranordnung.
$\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0.08$ m.

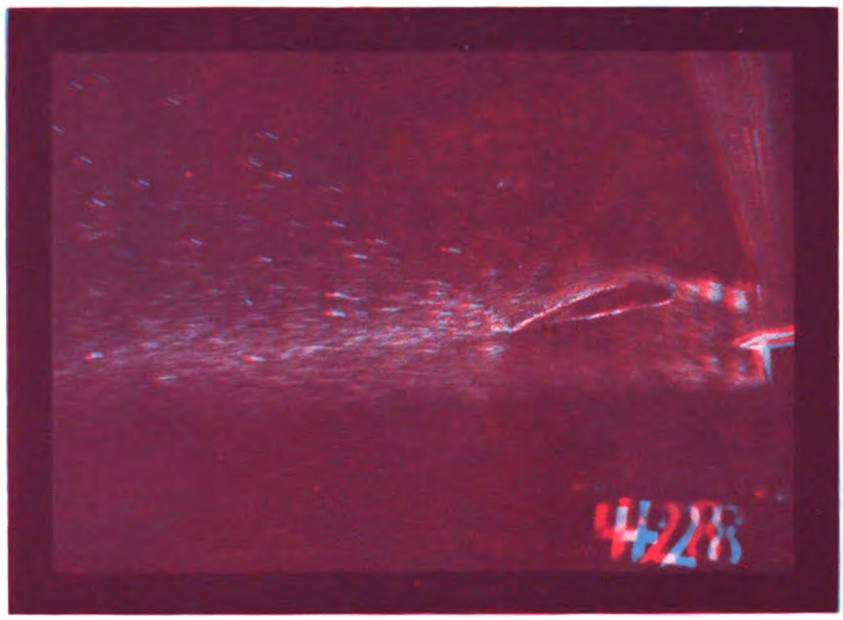


Bild 20. Hochdeckeranordnung. Seitenaufnahme.

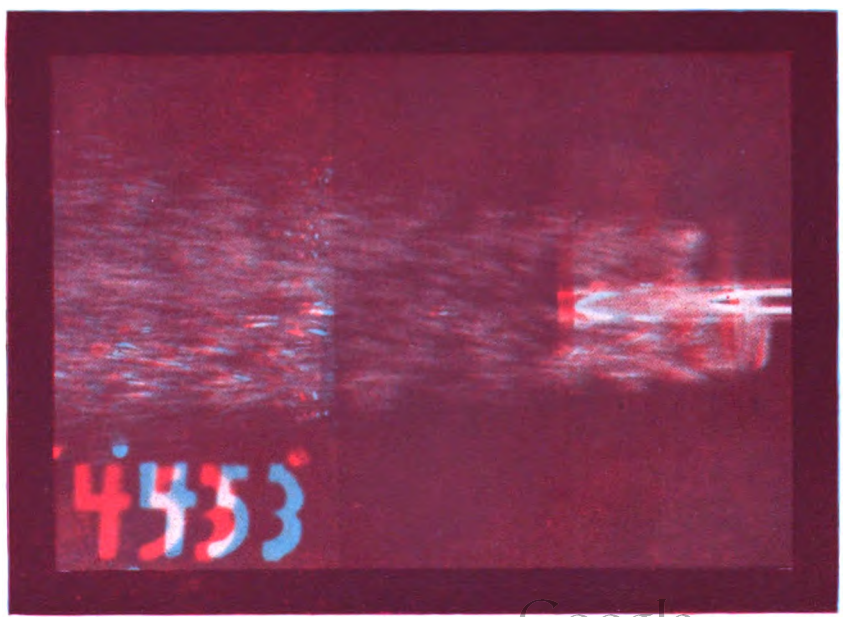
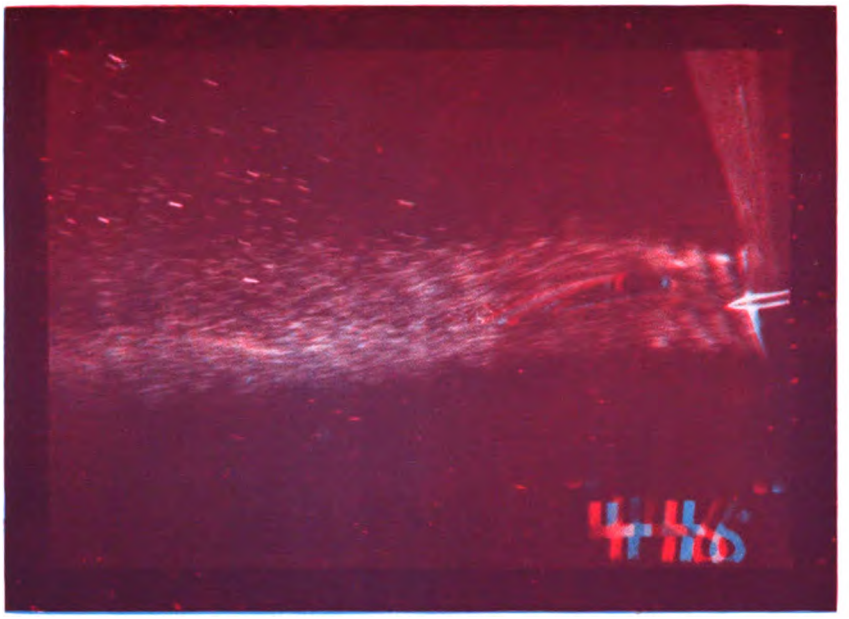


Bild 21. Hochdeckeranordnung. Aufnahme von unten.

Digitized by Google



Serie 5. (Fortsetzung).

Einfluß des Abstandes zwischen Schraubenachse und Flügelsehne.

Schraubenstrahl mit Tragflügel in Hoch-, Schulter- und Tiefdeckeranordnung. $\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0{,}08$ m.

Bild 22. Schulterdeckeranordnung. Seitenaufnahme.

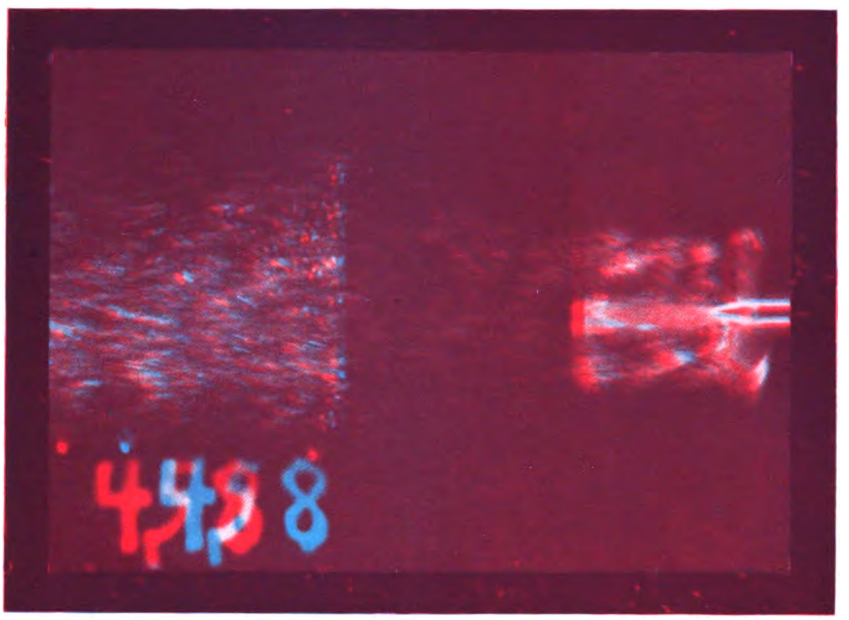


Bild 23. Schulterdeckeranordnung. Aufnahme von unten.

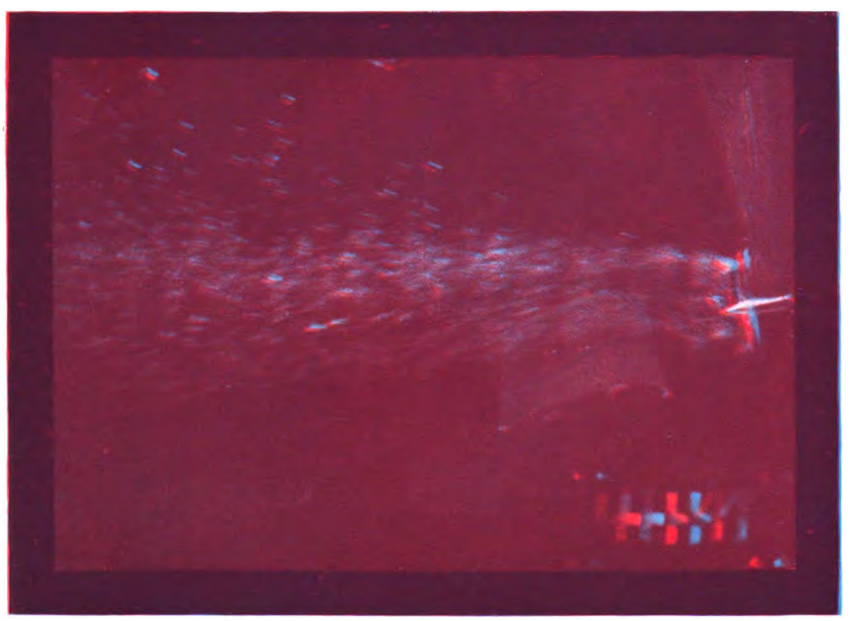


Bild 24. Tiefdeckeranordnung. Aufnahme schräg von oben rechts.

Digitized by Google

Serie 6.

Einfluß des Schiebens.

Schraubenstrahl mit Tragflügel bei Schräganblasung.
$\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0{,}08$ m, $\delta = 10^0$.

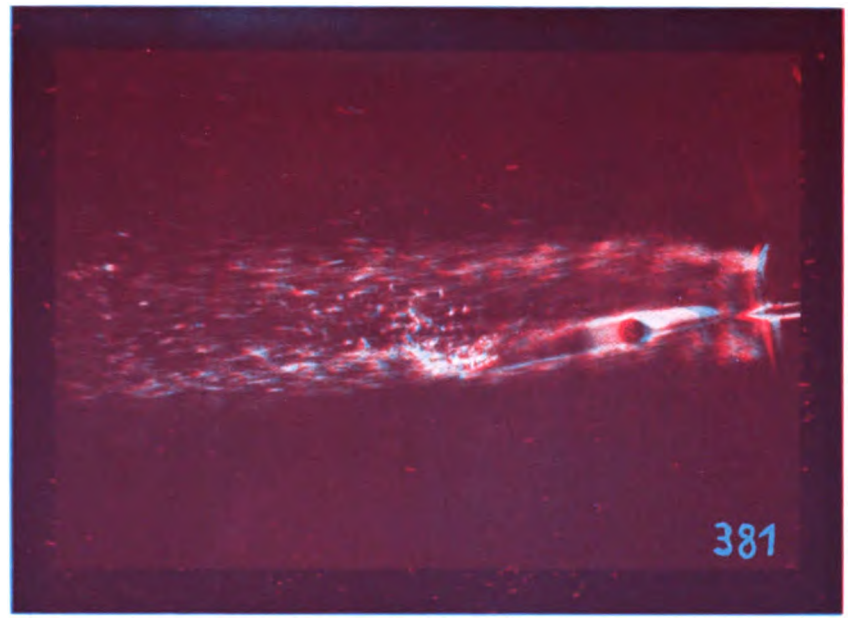


Bild 25. Seitenaufnahme.

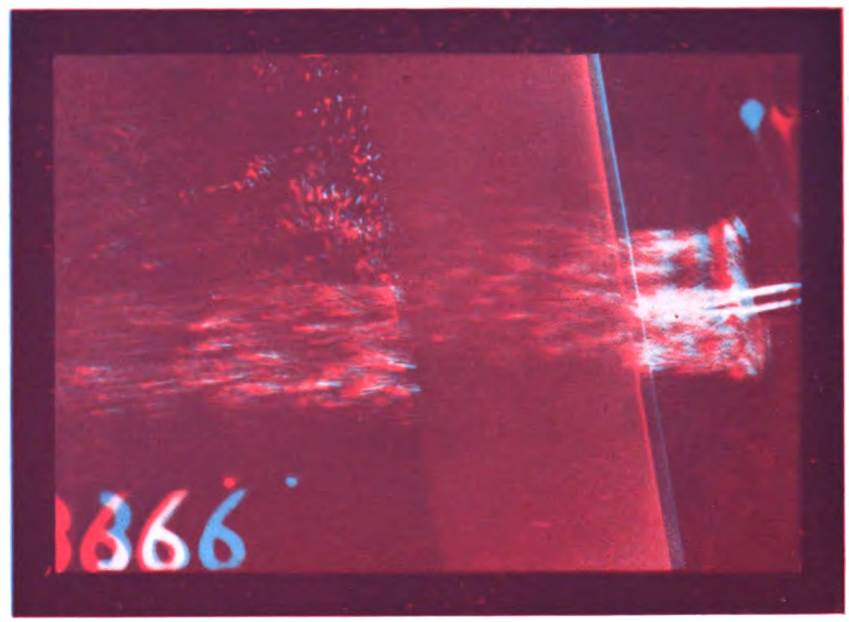


Bild 26. Aufnahme von unten.

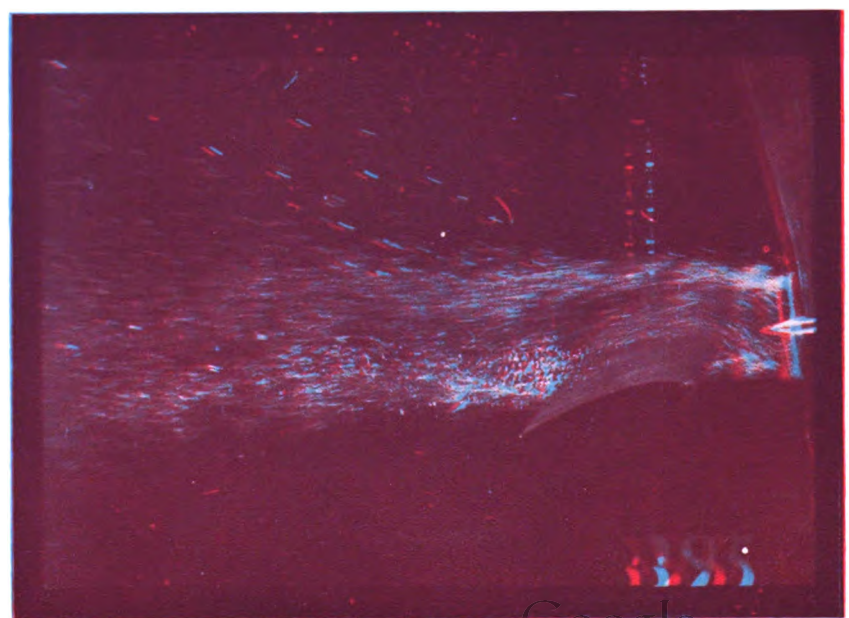
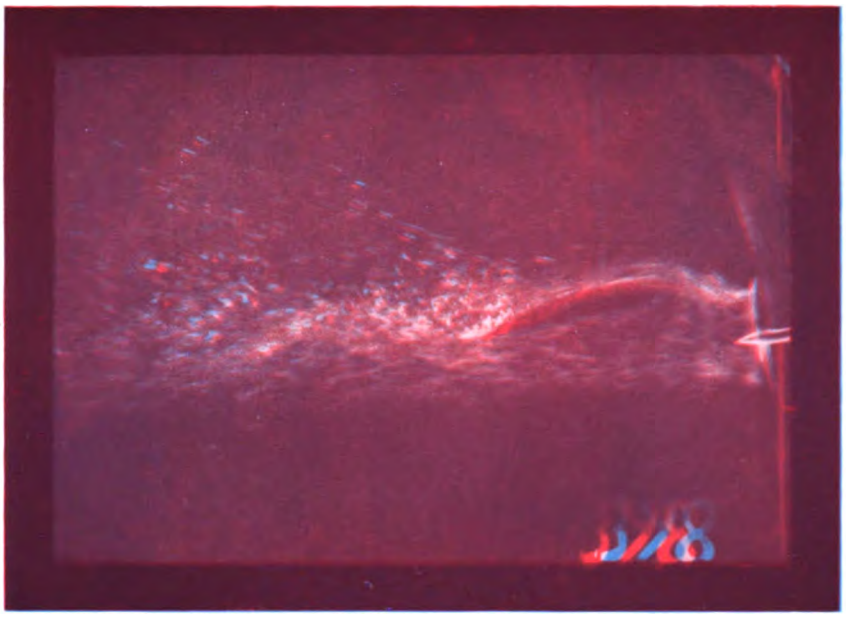


Bild 27. Aufnahme schräg von oben rechts.

Digitized by Google



Serie 7.

Einfluß des Abstandes zwischen Schraubenachse und Flügelsehne beim schiebenden Flugzeug.

Schraubenstrahl mit Tragflügel in Hochdeckeranordnung beim schiebenden Flugzeug.
$\alpha = 11^0$, $\beta = 8^0$, $t = 0.08$ m, $\delta = 10^0$.

Bild 28. Seitenaufnahme.

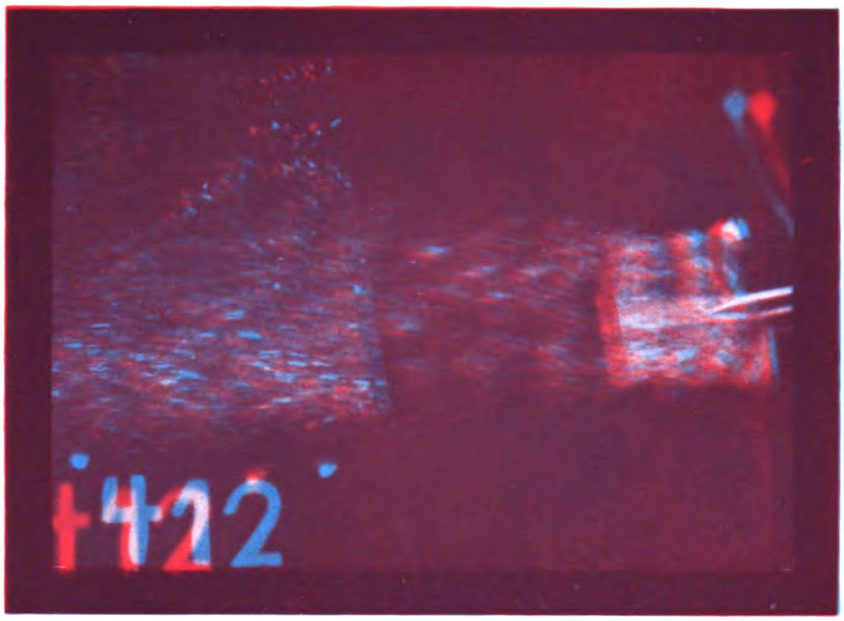


Bild 29. Aufnahme von unten.

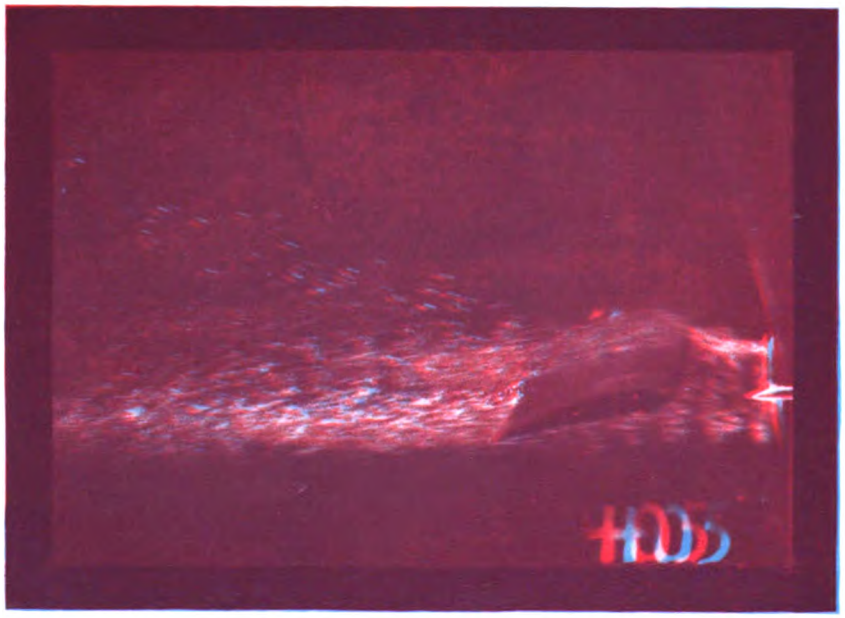


Bild 30. Aufnahme schräg von oben rechts.

Digitized by Google

Serie 8.

Einfluß einer starken Störung am Flügel.

Schraubenstrahl mit Tragflügel und Motorgondel.
$\alpha = 3^0$, $\beta = 0^0$, $t = 0.08$ m.

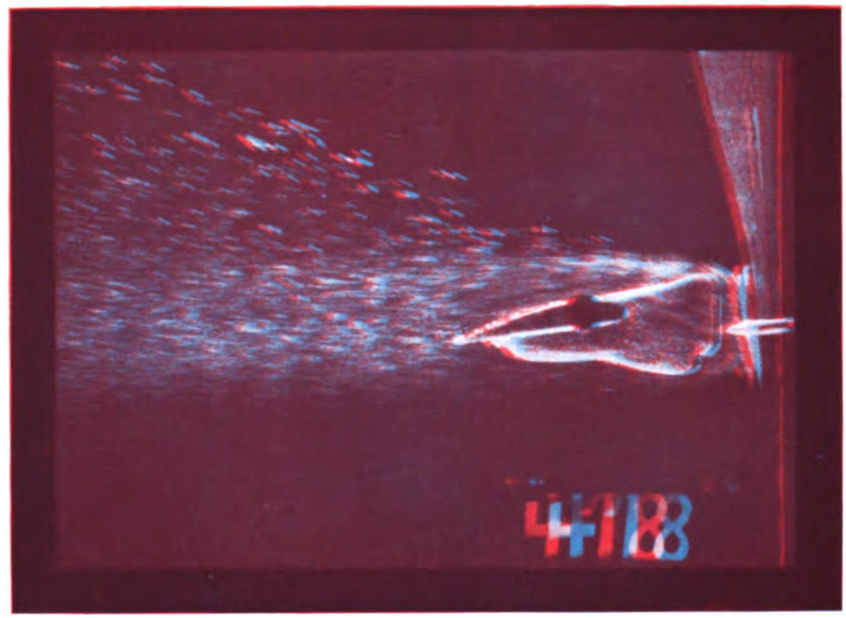


Bild 31. Seitenaufnahme.

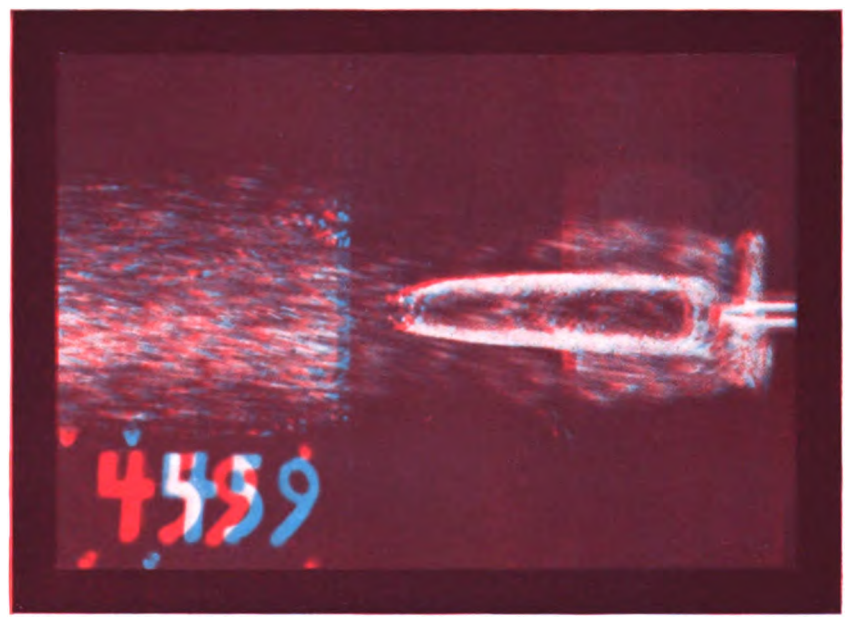


Bild 32. Aufnahme von unten.

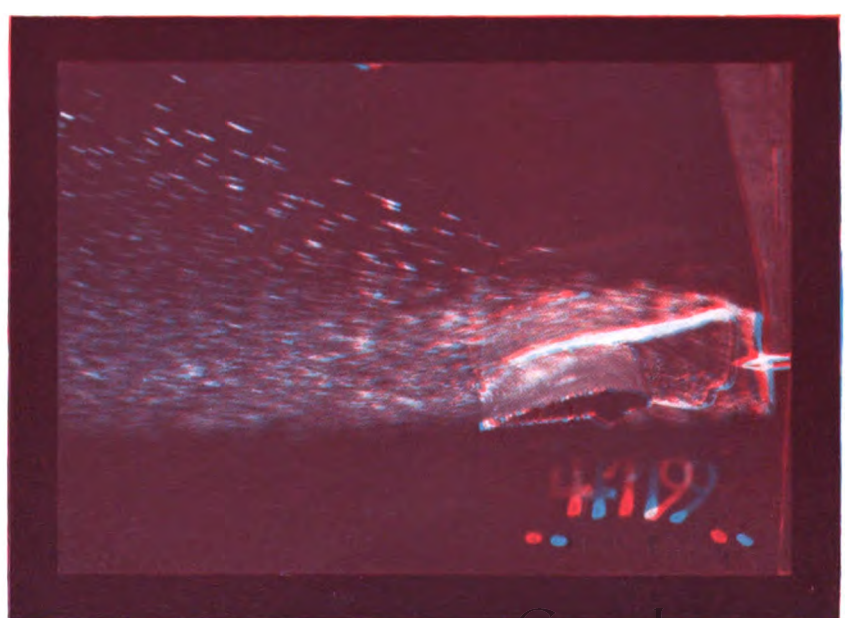


Bild 33. Aufnahme schräg von oben rechts.

Digitized by Google

Digitized by Google

auf den Schraubenstrahl typisch sind und sich bei allen folgenden Serien mehr oder weniger ausgeprägt wiederfinden:

1. Der Schraubenstrahl paßt sich der Tragflügelströmung weitgehend an. Von einer Steifigkeit des Strahles kann man nicht sprechen.

2. Der Strahl verbreitert sich längs der Flügeltiefe.

3. Der Tragflügel teilt den Strahl in zwei Teile, die sich hinter dem Flügel nicht wieder völlig vereinen. Vielmehr bleibt der untere Teil nach rechts, der obere nach links abgelenkt. (Vgl. die Versuche von Stüper [2]).

Wir betrachten nun die folgenden Serien.

Serie 3, »Einfluß der Flügeltiefe« (Bild 12 bis 17), zeigt die Strömung im Schraubenstrahl an zwei Flügeln von den Tiefen t = 0,06 m und 0,08 m und an einer ebenen Platte von t = 0,10 m. Der Anstellwinkel ist $\alpha = 3^0$ (in den Bildern 14 und 15 bzw. 4 und 5 überschneiden sich Serie 2 und 3). Man sieht, wie mit wachsender Tiefe die seitliche Ablenkung des Strahles wächst (Bild 17).

Die beiden Bilder von Serie 4, »Einfluß des Winkels zwischen Schraubenachse und Flügelsehne« (Bild 18 und 19), zeigen eine Anordnung mit größerem Winkel ($\varkappa - \beta = 11^0$) zwischen Schraubenachse und Platte. In diesem Falle werden die Ausbreitung und seitliche Ablenkung im unteren Strahlteil größer.

Die Aufnahmen können auch zu der Erklärung für die Abweichungen beitragen, die zwischen der Koningschen Theorie [11, 12] über den Einfluß des Schraubenstrahles auf den Tragflügel einerseits und den Messungen von Stüper [2] andererseits bestehen. Ablenkung und Ausbreitung der Strahlabschnitte werden den vom Strahl hervorgerufenen Auftriebszuwachs vermindern.

In der Serie 5, »Einfluß des Abstandes zwischen Schraubenachse und Flügelsehne« (Bild 20 bis 24), wurde die relative Höhenlage von Schraubenachse und Flügel verändert. Die seitliche Ablenkung ist am stärksten bei der Schulterdeckeranordnung (Bild 23), wo der Strahl in nahezu gleiche Teile geteilt ist. Die geringere Ablenkung bei der Hochdeckeranordnung (Bild 21), wo der größere Teil des Strahles unterhalb des Flügels verläuft, wird durch die oben erwähnte Impulsbetrachtung verständlich.

Den Schraubenstrahl am nach links schiebenden Flugzeug ($\delta = 10^0$) zeigt uns Serie 6, »Einfluß des Schiebens« (Bild 25 bis 27). Eine Skizze der Anordnung gibt Bild VIII. Vergleichen wir Bild 26 mit Bild 9, so erkennen wir auf der Unterseite deutlich die wesentlich stärkere Strahlablenkung nach rechts, die nicht dadurch erklärt werden kann, daß in Bild 26 ein etwas größerer Anteil des Strahles unterhalb des Flügels liegt als in Bild 9. Vielmehr ist sie zurückzuführen auf die am schiebenden Flügel auf der Unterseite bestehende seitliche Strömung vom vorangehenden Ende nach dem nachkommenden zu. Auf der Saugseite müßte die Ablenkung schwächer werden. Wie schon erwähnt, gestattete die Versuchsanordnung nicht, senkrecht von oben zu photographieren. Durch Umdrehen des Tragflügels, so daß die Saugseite unten liegt, könnte man die fehlenden Aufnahmen erhalten. Dabei macht sich aber unangenehm die Tatsache bemerkbar, daß die Tragflügelströmung nach oben abgelenkt wird, so daß sich die aufsteigenden zu großen Luftblasen nicht deutlich genug von der wirklichen Strömung abheben und zu stark stören.

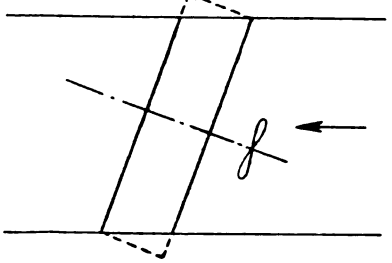


Bild VIII. Schiebender Flügel im Kanal von oben gesehen.

Serie 7, »Einfluß des Abstandes zwischen Schraubenachse und Flügelsehne beim schiebenden Flugzeug« (Bild 28 bis 30), zeigt noch einige Aufnahmen des schiebenden Flügels in Hochdeckeranordnung. Man sieht die etwas stärkere Ablenkung in Bild 26 gegenüber Bild 29 (Einfluß der Strahldicke), und in Bild 29 gegenüber Bild 21 (Einfluß des Schiebens), im übrigen dieselben Erscheinungen wie beim senkrecht zur Spannweite angeblasenen Flügel.

Endlich zeigt Serie 8, »Einfluß einer starken Störung am Flügel« (Bild 31 bis 33), den Schraubenstrahl mit Tragflügel und Motorgondel. Eine Gondel, die zu einem Motor mit Zylinderanordnung in V-Form gehört, wurde aus Plastelin nachgebildet und an den Tragflügel gesetzt. Leider haften an der rauhen Plastelinoberfläche immer Luftbläschen, die das Bild etwas stören. Man kann deutlich aus diesen Bildern erkennen, daß der Strahlzusammenhang auch durch diese unförmige Gondel nicht stark gestört wird, so daß man auch hinter dem Flügel und der Gondel noch einen merklichen Strahl wiederfindet. Die Zahl der durch statischen Auftrieb aufsteigenden Luftblasen ist bei diesen Aufnahmen leider besonders groß. Sie ließen sich aber nicht vermeiden; an der oberen Gondelkante stoßen Blasen kleineren Durchmessers zusammen und vereinigen sich zu solchen, deren Auftrieb zu groß ist, als daß sie sich mit der Strömung fortbewegen könnten.

Wie die Bilder aller Serien zeigen, wird der Schraubenstrahl von der Tragflügelströmung so stark beeinflußt, daß es keinesfalls zulässig ist, ihn wie einen starren Körper zu behandeln. Man muß daher bei der Frage, ob der Strahl das Höhenleitwerk trifft, sehr vorsichtig sein und darf keineswegs die Strahlgrenze so zeichnen, als würde der Strahl nicht deformiert. Auch die oft vorgeschlagene Regel, daß man die neue Richtung der Strahlachse dadurch findet, daß man Fahrtgeschwindigkeit und die nach der Strahltheorie errechnete Zusatzgeschwindigkeit vektoriell addiert, scheint nicht bestätigt. Man muß sich allerdings auch hüten, aus den Aufnahmen, die doch in erster Linie eine qualitative Anschauung vermitteln sollen, zu weitgehende quantitative Schlüsse zu ziehen. Für solche Zwecke sind Messungen, wie sie Misztal [13], Stüper [2], Schmidt [3], Seiferth [6] und Stieß [5] gemacht haben, besser geeignet.

IV. Zusammenfassung.

Die Beobachtung des Schraubenstrahles, der einen Tragflügel trifft, hat folgendes ergeben: Der Schraubenstrahl paßt sich der Tragflügelströmung stark an. Der Tragflügel vermindert den Drall im Strahl, wenn er ihn schneidet. Die durch den Flügel getrennten Strahlteile werden im Sinne der Strahldrehung nach der Seite abgelenkt, solange sie unter dem unmittelbaren Einfluß des Tragflügels stehen. Die Strahlteile vereinigen sich später nicht wieder ganz. Richtung und Größe der Ablenkung entsprechen dem vom Drall herrührenden Impuls des betreffenden Strahlteiles. Beim schiebenden Flugzeug kann die durch die Schräganblasung des Tragflügels hervorgerufene seitliche Strömung die seitliche Ablenkung des Strahlteils verstärken oder schwächen, je nach dem Drehsinn der Schraube und der Richtung des Schiebens. Durch eine Motorgondel wird der Strahlzusammenhang nicht merklich zerstört.

V. Schrifttum.

[1] H. Muttray, Untersuchungen über den Abwind hinter einem Trapezflügel mit Rumpf und Schraube. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 101.

[2] J. Stüper, Einfluß des Schraubenstrahles auf den Flügel und das Leitwerk. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 181.

[3] R. Schmidt, Experimenteller Beitrag zum Problem »Abwind und Schraubenstrahl«. Jahrbuch 1937 der Deutschen Luftfahrt-Forschung I, S. 139. Verlag R. Oldenbourg, München.

[4] I. Flügge-Lotz und D. Küchemann, Zusammenfassender Bericht über Abwindmessungen ohne und mit Schraubenstrahl. Jahrbuch 1938 der Deutschen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung I, S. 172. Verlag R. Oldenbourg, München.

[5] W. Stieß, Über den Einfluß des Luftschraubendrehsinnes auf die Längsstabilität von zweimotorigen Flugzeugen. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrt-Forschung I, S. 206. Verlag R. Oldenbourg, München.

[6] R. Seiferth, Windkanaluntersuchungen über den Einfluß des Luftschraubendrehsinnes auf die Längsstabilität eines zweimotorigen Flugzeuges. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrt-Forschung I, S. 220. Verlag R. Oldenbourg, München.

[7] O. Flamm, Die Schiffsschraube und ihre Wirkung auf das Wasser. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1909.

[8] Siehe Diskussionsbemerkung von C. A. Parsons in A. W. Johns, A comparison between the results of propeller experiments in air and water. Trans. Inst. Naval Architects (1915), S. 136.

[9] J. Valensi, Ecoulement de l'air autour d'une hélice. Science Aérienne Bd. 4 (1935), S. 97.

[10] W. F. Durand and E. P. Lesley, Experimental research on air propellers V. NACA-Rep. 141 (1922).

[11] C. Koning, Influence of the propeller on other parts of the airplane structure. W. F. Durand, Aerodynamic Theory Vol. IV, Div. M. Verlag Springer, Berlin 1935.

[12] I. Lotz, Beeinflussung der Auftriebsverteilung durch den Schraubenstrahl. Jahrbuch der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung 1936, S. 57.

[13] Fr. Misztal, Zur Frage der schräg angeblasenen Propeller. Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen, Heft 11. Verlag Springer, Berlin 1932.

Digitized by Google

Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten.

Von Hermann Behrbohm, Augsburg.

Bericht der Messerschmitt-A.-G., Augsburg.

Es wird ein rasch arbeitendes graphisches Verfahren entwickelt, aus vorgegebener Ausgangshöhe und Anfangsgeschwindigkeit zu jeder beliebig vorgegebenen Endhöhe die durch senkrechten Sturzflug (oder Gleitflug unter konstantem Bahnneigungswinkel) erreichte Fluggeschwindigkeit zu ermitteln.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Bezeichnungen.
III. Ableitung der Bewegungsgleichung.
IV. Lösung der Differentialgleichung und graphische Darstellung.
V. Bemerkungen zur Praxis und numerische Angaben.
VI. Beispiele.
VII. Schrifttum.

I. Einleitung.

Im folgenden wird eine einfache Konstruktion angegeben, die u. a. zu irgendeiner Sturzflugausgangshöhe mit zugehöriger Anfangsgeschwindigkeit die in beliebiger Höhe durch senkrechten Sturzflug erreichte Geschwindigkeit eines Flugzeuges finden läßt. Die mit der Höhe veränderliche Luftdichte wird dabei durch einen Exponentialansatz erfaßt. Man erhält für das Quadrat der Fluggeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Luftdichte eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Die Linearität des vollständigen Integrals sowohl in der gesuchten Funktion als auch in der Integrationskonstanten läßt sich dann zu einer einfachen Geradlinienkonstruktion verarbeiten. An zwei durchgeführten Beispielen wird die praktische Verwendung der Konstruktion gezeigt.

Es sei auch an dieser Stelle meinem Mitarbeiter, Herrn Willi Ebert, für seine tatkräftige Mithilfe bei der endgültigen Abfassung dieser Arbeit gedankt.

II. Bezeichnungen.

G = Fluggewicht (kg)
F = Flügelfläche (m^2)
z = Flughöhe (m)
z_A = Ausgangshöhe des Sturzfluges (m)
t = Zeit (s)
v = Fluggeschwindigkeit (m/s)
V = Fluggeschwindigkeit (km/h)
v_A = Anfangsgeschwindigkeit (m/s)
ϱ = Luftdichte in der Höhe z (kgs^2/m^4)
ϱ_A = Luftdichte in der Höhe z_A (kgs^2/m^4)
ϱ_0 = Luftdichte in Bodennähe (kgs^2/m^4)
W = Widerstand (kg)
$c_w = \frac{W}{q \cdot F}$ Widerstandsbeiwert
g = Erdbeschleunigung (m/s^2)

III. Ableitung der Bewegungsgleichung.

Das im senkrechten Sturzflug befindliche Flugzeug unterliegt der Kraft $G - W$[1]). Nach Newton ist

$$G - W = \frac{G}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wird statt der Zeit t die Höhe z durch

$$z = z\ (t)$$

eingeführt, so geht Gleichung (1) über in

$$G - W = \frac{G}{g} \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dt},$$

was wegen

$$\frac{dz}{dt} = -v$$

die Gleichung

$$G - W = -\frac{G}{g} \cdot v \frac{dv}{dz} = -\frac{G}{2g} \cdot \frac{d(v^2)}{dz}$$

ergibt. Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch G und setzt man für W den Wert

$$W = c_w \cdot \frac{1}{2} \varrho v^2 \cdot F$$

ein, so folgt

$$1 - \frac{c_w \cdot F}{2G} \varrho v^2 + \frac{1}{2g} \frac{d(v^2)}{dz} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Mit dem Ansatz

$$\varrho = a e^{-bz}$$

geht nach der Substitution

$$z = z\ (\varrho),\ v^2 = u\ (\varrho)$$

die Gleichung (2) über in diese:

$$1 - \frac{c_w \cdot F}{2G} \cdot \varrho \cdot u\ (\varrho) - \frac{b}{2g} \cdot \varrho \cdot \frac{du}{d\varrho} = 0.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Funktion $u\ (\varrho)$, die in der folgenden Gestalt geschrieben werden kann

$$\frac{du}{d\varrho} = -\alpha \cdot u\ (\varrho) + \frac{\beta}{\varrho}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

falls

$$\alpha = \frac{c_w \cdot g \cdot F}{b \cdot G} \text{ und } \beta = \frac{2g}{b}$$

gesetzt wird.

IV. Lösung der Differentialgleichung und graphische Darstellung.

Die Lösung der Differentialgleichung (3) ist gegeben durch

$$u = \beta e^{-\alpha \varrho} \left\{ li\ (e^{\alpha \varrho}) - li\ (e^{\alpha \varkappa}) \right\}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

wobei $li\ (x)$ die für positive x durch

$$li\ (x) = \int_0^x \frac{dy}{\ln y}$$

gegebene Funktion, der sog. Integrallogarithmus ist. Die Größe $\varkappa$ in Gleichung (4) ist eine willkürliche Integrationskonstante, die bei einem konkreten Problem durch die Bedingung

$$u = u_A = v_A^2 \text{ für } \varrho = \varrho_A = \varrho\ (z_A)$$

festgelegt wird. Wird noch die Funktion $\overline{Ei}\ (x)$ durch

$$\overline{Ei}\ (x) = li\ (e^x)$$

eingeführt, so schreibt sich die Lösung (4) der Differentialgleichung (3) in der Gestalt

$$u = \beta e^{-\alpha \varrho} \left\{ \overline{Ei}\ (\alpha \varrho) - \overline{Ei}\ (\alpha \varkappa) \right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

[1]) Die folgenden Betrachtungen gelten näherungsweise auch für einen Gleitflug unter dem konstanten Bahnneigungswinkel γ, wenn nur G durch $G \cdot \sin \gamma$ ersetzt wird.

Digitized by Google

mit

$$\overline{Ei}(\alpha x) = \overline{Ei}(\alpha \varrho_A) - \frac{u_A}{\beta} e^{\alpha \varrho_A} \quad \ldots\ldots (6)$$

Für die physikalisch in Frage kommenden Fälle ist α positiv und somit $\overline{Ei}(\alpha\varrho)$ definiert.

In den Funktionstafeln von Jahnke und Emde findet man auf Seite 83 bis 85 die Funktion $\overline{Ei}(x)$ für $0 \leq x \leq 15$ tabelliert, so daß einer numerischen Berechnung von $u(\varrho)$ bei gegebenem ϱ_A und u_A nichts im Wege steht.

Für ein geeignetes Nomogramm dagegen soll die Gleichung (5) mittels (6) noch erst anders geschrieben werden. Mit

$$\alpha\varrho = \sigma, \quad \alpha\varrho_A = \sigma_A$$

folgt nämlich aus beiden Gleichungen (5) und (6)

$$\frac{u \cdot e^{\varrho}}{\beta} - \overline{Ei}(\sigma) = \frac{u_A e^{\varrho_A}}{\beta} - \overline{Ei}(\sigma_A).$$

Der Geschwindigkeitsverlauf des Flugzeuges im senkrechten Sturzflug über der durch ϱ charakterisierten Höhe z ist daher ein solcher, daß die Funktion

$$H(u, \sigma) = \frac{u e^{\varrho}}{\beta} - \overline{Ei}(\sigma) \quad \ldots\ldots (7)$$

einen einmal angenommenen Wert $H(u_A, \sigma_A)$ stets beibehält:

$$H(u, \sigma) = \text{const.}$$

Die Linearität von $H(u, \sigma)$ in u führt dann zu folgender einfachen Konstruktion, mittels derer aus ϱ_A und v_A zu jedem $\varrho = \varrho_E$ sofort v_E gefunden werden kann.

Gleichung (7) stellt nämlich in u, H eine Geradenschar mit dem Parameter σ dar. Man denke sich diese Schar in einem rechtwinkligen u, H-System gezeichnet, Bild 1. Im Punkte u_A der u-Achse gehe man senkrecht hoch, bis im Punkt P_A die zum Parameterwert $\sigma_A = \alpha\varrho_A$ gehörige Gerade erreicht wird. Von P_A aus gehe man horizontal weiter, bis man auf die zum Wert $\sigma = \sigma_E$ gehörige Schargerade im Punkt P_E stößt. Schließlich lote man P_E auf die u-Achse und findet dort den Wert u_E.

Diese an sich sehr einfache Konstruktion hat vorerst noch den Nachteil, daß evtl. nach σ interpoliert werden muß, da natürlich die kontinuierlich vielen Geraden der Schar nur in diskreten Exemplaren einzeln gezeichnet vorliegen können. Jedoch läßt sich das leicht dadurch umgehen, daß man ein Mittel angibt, das die jeweils gebrauchten Geraden sofort selbst zu konstruieren gestattet.

Eine Gerade der Schar ist durch ihre Abschnitte auf der u- und H-Achse bestimmt. Die Achsenabschnitte $\bar{u}(\sigma)$ und $\bar{H}(\sigma)$ auf der u- bzw. H-Achse der zu σ gehörigen Schargeraden

$$H - \frac{e^{\varrho}}{\beta} u + \overline{Ei}(\sigma) = 0 \quad \ldots\ldots (8)$$

sind

$$\bar{u}(\sigma) = \frac{\overline{Ei}(\sigma) \cdot \beta}{e^{\varrho}}, \quad \bar{H}(\sigma) = -\overline{Ei}(\sigma) \quad \ldots\ldots (9)$$

In Bild 2 sind diese beiden Funktionen über σ aufgetragen, und zwar so, daß die σ-Achse der Abschnittsfunktion $\bar{u}(\sigma)$ der H-Achse, die der Abschnittsfunktion $\bar{H}(\sigma)$ der u-Achse überlagert wird. Man kann damit zu gegebenem σ die Achsenabschnitte und also die zugehörige Gerade sofort zeichnen.

In Bild 2 sind neben diesen Abschnittsfunktionen noch zwei weitere Kurven, Kurve E und Kurve B, eingetragen, die u. a. der Erleichterung (und Kontrolle) des Geradenzeichnens dienen sollen. Die Geradenschar (8) hat nämlich eine Einhüllende E, die sich aus (8) und der aus (8) durch Differentiation nach dem Scharparameter σ ergebenden Gleichung

$$-\frac{e^{\varrho}}{\beta} u + \frac{e^{\varrho}}{\sigma} = 0$$

in der Parameterdarstellung

$$(E) \begin{cases} u = \dfrac{\beta}{\sigma} \\ H = \dfrac{e^{\varrho}}{\sigma} - \overline{Ei}(\sigma) \end{cases} \quad \ldots\ldots (10)$$

mit Hilfe des Parameters σ ergibt. Die Kurve B, gegeben durch

$$u = \frac{\beta}{\sigma}, \quad \ldots\ldots (11)$$

gestattet überdies, den Berührungspunkt P_b der zum Parameterwert σ gehörenden Schargeraden mit E sofort von der Kurve B auf E hinaufzuloten, so daß damit ein weiterer Punkt der zu konstruierenden Geraden gefunden ist. (Für flüchtige Überschlagskonstruktionen genügt natürlich P_b und die Tangente in P_b an E allein zur Geradenbestimmung.)

Die Einhüllende E hat aber auch eine physikalische Bedeutung. Da für ihre Punkte nämlich $u = \frac{\beta}{\sigma}$ ist, so folgt nach Gleichung (3) für sie sofort $\frac{du}{d\varrho} = 0$ und durch nochmalige Differentiation $\frac{d^2u}{d\varrho^2} = -\frac{\beta}{\varrho^2} < 0$. Das heißt aber: Die Abszisse u des Schnittpunktes der Geraden $H = \text{const.}$ mit der Einhüllenden E führt zur größten Geschwindigkeit, die bei den durch $H = \text{const.}$ bestimmten Ausgangswerten überhaupt im Sturzflug ohne Schraubenschub erreicht werden kann. Man sieht das geometrisch auch sehr schön daran, daß die auf die u-Achse projizierten Schnittpunkte der Schargeraden mit der Geraden $H = H(u_A, \sigma_A) = \text{const.}$, ausgehend von kleinen σ-Werten, sich erst im Sinne wachsender u nach rechts bewegen und dann nach Überschreiten des zum Schnittpunkt G von $H = H(u_A, \sigma_A) = \text{const.}$ und E gehörigen σ-Wertes $\sigma = \sigma_g$ wieder nach links zurückwandern. Die zu G gehörige Abszisse u werde mit u_g bezeichnet, die zu u_g gehörige Grenzgeschwindigkeit mit V_g.

Schließlich kann die Einhüllende E noch zur Bestimmung derjenigen Höhe z_E herangezogen werden, in der das Flugzeug die vorgegebene Geschwindigkeit V_E erreicht, wenn es in der Höhe z_A die Anfangsgeschwindigkeit V_A hatte. Es kommt hierbei darauf an, aus u_A, σ_A und u_E die Größe σ_E zu bestimmen. Dazu geht man so vor, daß man von dem durch die gegebenen Daten u_A, ϱ_A, u_E eindeutig bestimmten und in Bild 1 mit P_E bezeichneten Punkt aus die Tangente an E zieht. Der zu dieser Tangente gehörige und mit Hilfe der Abschnittsfunktionen leicht bestimmbare Parameterwert ist der gesuchte Wert σ_E. Wegen der Konvexität von E $\left(\frac{d^2H}{du^2} \text{ ist stets positiv}\right)$ existiert entweder keine solche Tangente, nämlich dann, wenn $u_E > u_g$ ist. Oder es existiert genau eine Tangente, nämlich dann, wenn $u_E = u_g$ ist. Oder es existieren zwei Tangenten, nämlich dann, wenn $u_E < u_g$ ist. D. h. die gestellte Aufgabe hat je nachdem keine, eine oder zwei Lösungen, was nach dem oben über u_g Gesagten ja auch physikalisch klar ist. (Natürlich ist dabei auch noch auf die Bedingung $\varrho_E < \varrho_0$ zu achten.)

Man wird bemerken, daß besonders für kleine u und große σ die in u auf die u-Achse errichtete Senkrechte die zu σ gehörige Schargerade in einem zeichnerisch schlechten Schnitt oder auch in einem auf dem Zeichenpapier unzugänglichen Schnittpunkt trifft. Wie läßt sich hier Abhilfe schaffen?

Betrachten wir dazu die Aufgabe, zu u_A, σ_A, σ_E die Größe u_E zu finden. In Bild 3 seien Q_A und Q_E die Schnittpunkte der zu $\sigma = \sigma_A$ und $\sigma = \sigma_E$ gehörigen Schargeraden mit der u-Achse; S sei der Schnittpunkt der beiden Schargeraden. Seine Koordinaten heißen u_S, H_S. Die Geraden $u = u_A$ und $H = H_S$ schneiden sich in P'_A. Die Verbindungslinie von P'_A und Q_A schneide die Gerade $u = u_S$ im Punkte S'. Man verbinde S' mit Q_E und erhält im Schnittpunkt P'_E dieser Verbindungsgeraden mit der Horizontalen $H = H_S$ einen Punkt, dessen Abszisse das gesuchte u_E ist. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion beruht auf den einfachsten Sätzen über Proportionen und soll hier weggelassen werden.

Digitized by Google

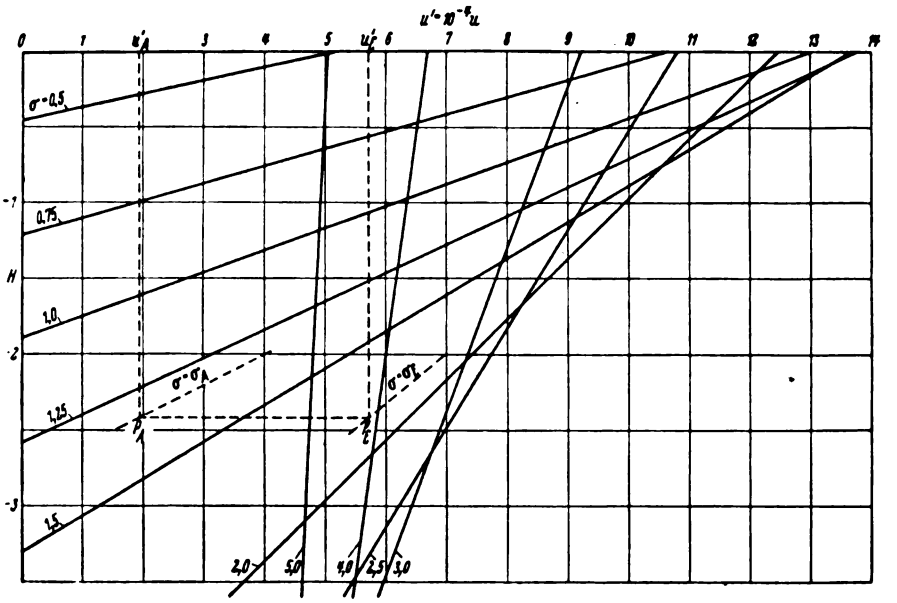


Bild 1. Die Geradenschar

$$H - \frac{e^{\sigma}}{\beta} u + \overline{Ei}\,(\sigma) = 0$$

für verschiedene Parameterwerte σ (mit eingezeichneter Lösung des Beispiels 1).

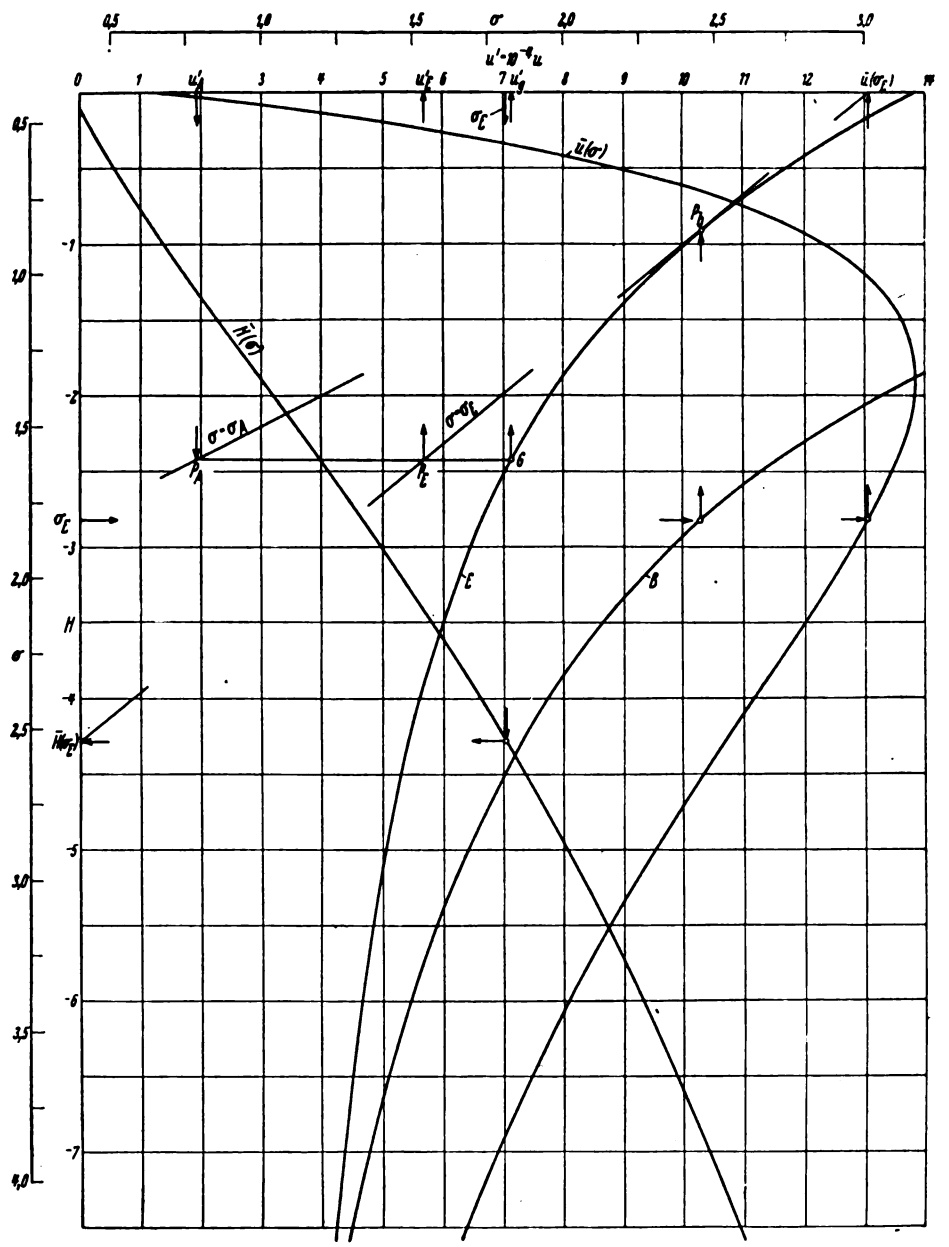


Bild 2. Die Abschnittsfunktionen $\bar{u}\,(\sigma)$, $\overline{H}\,(\sigma)$, die Einhüllende E und die Kurve B der Berührungspunkte (mit eingezeichneter Lösung des Beispiels 1).

Digitized by Google

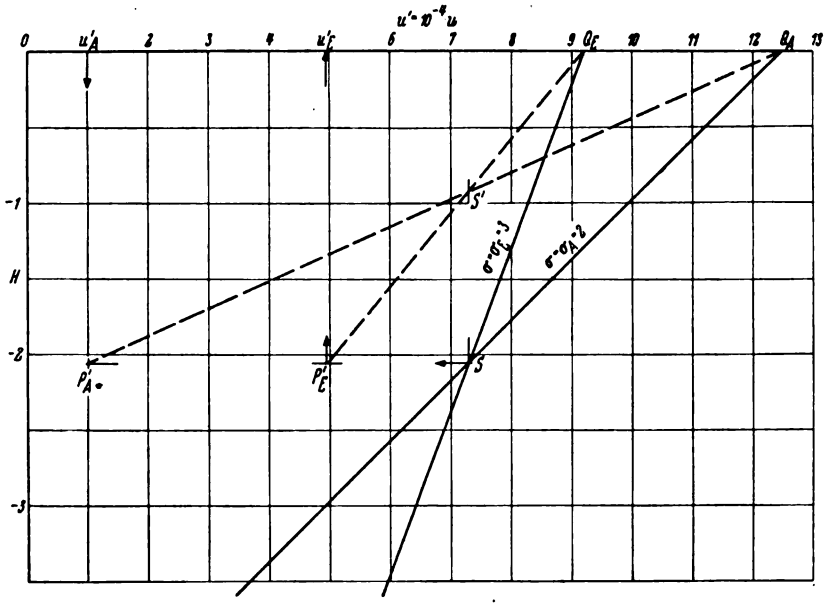


Bild 3. Hilfskonstruktion bei unzugänglichen Schnittpunkten (mit eingezeichneter Lösung des Beispiels 2).

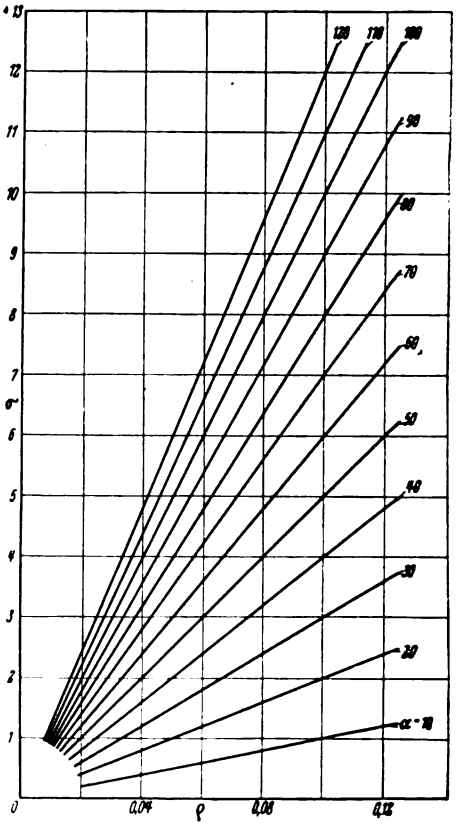


Bild 4. σ über ϱ mit α als Parameter.

V. Bemerkungen zur Praxis und numerische Angaben.

In Bild 4 ist $\sigma = \alpha\varrho$ über ϱ für verschiedene α als Parameter aufgetragen.

Bild 1 und Bild 2 werden zweckmäßig noch durch die Parabel $V = 3{,}6\sqrt{u}$ ergänzt, so daß man sofort in der Lage ist, die Sturzfluggeschwindigkeiten V in km/h abzulesen.

Da der praktische Wert der angegebenen Konstruktion natürlich (bis zu einem gewissen Grade) mit der Größe des Maßstabes der aufgezeichneten Kurven wächst, ist es vielleicht ratsam, die benötigten Kurven aus Bild 2 nochmals in Tafelform zu geben, damit sie jederzeit sauber in vergrößertem Maßstab aufgezeichnet werden können, Zahlentafel 1.

Zahlentafel 1. Tafel für die Funktionen $\overline{u}(\sigma)$, $\overline{H}(\sigma)$, $u = \frac{\beta}{\sigma}$ und $H = \frac{e^0}{\sigma} - \overline{Ei}(\sigma)$.

σ	$\overline{u}(\sigma) \cdot 10^{-5}$	$-\overline{H}(\sigma)$	$\frac{\beta}{\sigma} \cdot 10^{-5}$	$\frac{e^0}{\sigma} - \overline{Ei}(\sigma)$
0,4	0,131	0,105	4,655	3,625
0,45	0,338	0,285	4,138	3,200
0,5	0,513	0,454	3,724	2,843
0,55	0,661	0,615	3,385	2,536
0,6	0,787	0,770	3,103	2,267
0,65	0,893	0,919	2,865	2,028
0,7	0,985	1,065	2,660	1,812
0,75	1,062	1,207	2,483	1,615
0,8	1,127	1,347	2,328	1,435
0,85	1,182	1,486	2,191	1,267
0,9	1,228	1,623	2,069	1,111
0,95	1,266	1,759	1,960	0,963
1,0	1,298	1,895	1,862	0,823
1,2	1,370	2,442	1,552	0,325
1,4	1,381	3,007	1,330	— 0,111
1,6	1,355	3,605	1,164	— 0,510
1,8	1,308	4,250	1,034	— 0,889
2,0	1,248	4,954	0,931	— 1,260
2,2	1,183	5,733	0,846	— 1,630
2,4	1,115	6,601	0,776	— 2,008
2,6	1,048	7,576	0,716	— 2,398
2,8	0,983	8,679	0,665	— 2,806
3,0	0,921	9,934	0,621	— 3,239
3,2	0,863	11,367	0,582	— 3,701
3,4	0,809	13,012	0,548	— 4,199
3,6	0,758	14,906	0,517	— 4,740
3,8	0,712	17,095	0,490	— 5,331
4,0	0,669	19,631	0,466	— 5,981

Für ϱ als Funktion von z wurde der Everlingsche Ansatz [1][2]) gewählt

$$\varrho = 0{,}125 \cdot 0{,}9^{\frac{z}{1000}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

so daß die Koeffizienten a und b der angesetzten Gleichung

$$\varrho = a\, e^{-bz}$$

sich als

$$a = 0{,}125, \quad b = 0{,}00010537$$

ergeben. Dieser Ansatz liefert bis $z = 5000$ m gute Näherungswerte für ϱ. Für $z > 5000$ m läßt sich dieser Ansatz durch den Brennerschen Ansatz [2][2])

$$\varrho = 0{,}125 \cdot 0{,}896^{\frac{z}{1000}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

ersetzen. Dann wird

$$a = 0{,}125, \quad b = 0{,}00010981.$$

Will man für Höhen $z > 5000$ m diesen besseren Ansatz für ϱ in unserer Konstruktion berücksichtigen, so hat man nur α durch $0{,}96\,\alpha$ und β durch $0{,}96\,\beta$ zu ersetzen. Das kann aber auch so geschehen, daß man mit um 4% kleinerem Widerstandsbeiwert und mit um 2% kleineren Geschwindigkeiten rechnet als in den Höhen $z \leqq 5000$ m.

Bild 5 bringt die INA-Werte der Luftdichte über der Höhe z. Explizit gegebene ϱ entnehme man Bild 5, nicht der Gleichung (12) oder (13).

Soll bei größeren Geschwindigkeiten (von zur Schallgeschwindigkeit vergleichbarer Größenordnung) noch der Einfluß der Machschen Zahl $\frac{v}{c}$ (c = Schallgeschwindigkeit in der entsprechenden Höhe) auf den Widerstandsbeiwert c_w in die Geschwindigkeitsbestimmung einbezogen werden, so teile man das zu durchfallende Höhenintervall in eine beliebige Anzahl von Teilintervallen und entnehme dem graphischen Bild von c_w als Funktion der Machschen Zahl den der jedesmal am Ende eines vorhergehenden Teilintervalls neu gewonnenen Machschen Zahl entsprechenden neuen c_w-Wert, mit dem man dann das folgende Teilintervall

[2]) Zahlenangaben in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttum am Schluß dieser Arbeit.

Digitized by Google

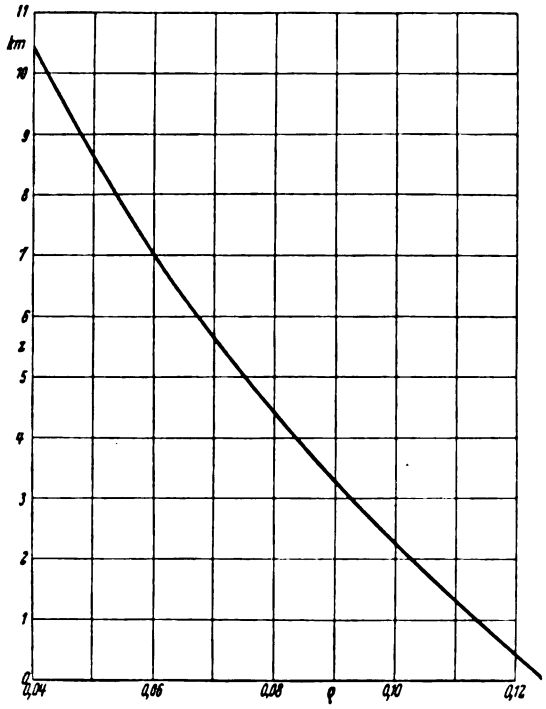


Bild 5. INA-Werte der Luftdichte ϱ über der Höhe z.

durchrechnet. Die Wahl der Anzahl der Teilintervalle und ihrer jeweiligen Länge richtet sich dabei nach der Art der funktionalen Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von der Machschen Zahl. Je stärker sich c_w ändert, um so enger wird man zweckmäßigerweise die Teilintervalle annehmen.

Ein ähnliches schrittweises Verfahren kann auch in einem solchen Falle verwendet werden, bei dem sich der Luftschraubenwiderstand während des Sturzfluges ändert (z. B. infolge der Fortschrittsgradänderungen bei Luftschrauben, die selbsttätig auf konstante Drehzahl eingeregelt werden).

VI. Beispiele.

Zum Schluß möge an zwei durchgerechneten Beispielen die praktische Verwendung der Konstruktion vorgeführt werden.

1. Beispiel (ohne Machschen Einfluß):

Gegeben sei $\frac{G}{F} = 200$ kg/m²; $c_w = 0{,}036$ (einschließlich Schraubenwiderstand im Leerlauf); $z_A = 4500$ m; $V_A = 500$ km/h. Gesucht ist V_E in $z_E = 1500$ m Höhe.

Es ist

$$\alpha = \frac{c_w \cdot g}{b \cdot \frac{G}{F}} = 16{,}76, \quad \varrho_A = 0{,}0792, \quad \varrho_E = 0{,}1080.$$

Nach Bild 4 ist

$$\sigma_A = 1{,}33; \quad \sigma_E = 1{,}81.$$

In Bild 1 und in Bild 2 sind die zugehörigen Schargeraden eingezeichnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die oben genannte Parabel $V = 3{,}6\sqrt{u}$ nicht mit eingezeichnet worden. Wir müssen daher in u rechnen. Es ist $u_A = 19300$. Von u_A gehe man senkrecht herunter auf die zu $\sigma_A = 1{,}33$ gehörige Schargerade und erhält den Punkt P_A. Von P_A gehe man horizontal weiter, bis man in P_E die zu $\sigma_E = 1{,}81$ gehörige Schargerade trifft. Die Abszisse u_E von P_E gibt uns den gesuchten Endwert $u_E = 57000$, der zu $V_E = 860$ km/h führt.

2. Beispiel (ohne Machschen Einfluß):

Gegeben sei $\frac{G}{F} = 105$ kg/m²; $c_w = 0{,}03$; $z_A = 5000$ m; $V_A = 360$ km/h. Gesucht ist V_E in $z_E = 1100$ m Höhe.

Es ist

$$\alpha = \frac{c_w \cdot g}{b \cdot \frac{G}{F}} = 26{,}6, \quad \varrho_A = 0{,}0751, \quad \varrho_E = 0{,}1125,$$

also

$$\sigma_A = 2{,}0; \quad \sigma_E = 3{,}0.$$

In Bild 3 sind die zugehörigen Schargeraden eingezeichnet. Der Schnittpunkt P_A des Lotes in $u_A = 10000$ auf die u-Achse mit der Geraden $\sigma = \sigma_A = 2{,}0$ ist auf dem Zeichenpapier unzugänglich. Nach den obigen Ausführungen hat man daher die Achsenabschnittspunkte Q_A und Q_E der Schargeraden $\sigma = \sigma_A$ und $\sigma = \sigma_E$, desgleichen den Schnittpunkt S beider Geraden zu bestimmen. Die Horizontale durch S und die Vertikale durch u_A schneiden sich in P'_A. Die Gerade $Q_A P'_A$ schneidet die Vertikale durch S in S'. Die Gerade $Q_E S'$ schneidet die Horizontale $P'_A S$ im Punkte P'_E, dessen Abszisse $u_E = 49500$ zum gesuchten $V_E = 801$ km/h führt.

VII. Schrifttum.

[1] E. Everling, Der Aufstieg von Flugzeugen. Z. Flugtechn. Bd. 7 (1916), S. 124—132.

[2] P. Brenner, Die Steigleistungen von Flugzeugen. Z. Flugtechn. Bd. 15 (1924), S. 61—65.

Digitized by Google

Zur Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik.

Von A. Reinhardt, Braunschweig.

Die übliche Ähnlichkeitsumrechnung auf »dimensionslose« Beiwerte wird physikalisch gedeutet als Maßstabtransformation auf ein modellbezogenes Maßsystem, dessen Maßeinheiten in möglichst einfacher und allgemein verabredeter Weise von den Hauptgrößen des Modellvorganges abgeleitet werden. Die Beiwerte sind vollständige Maßangaben in diesem relativen Maßsystem, ihre Maßzahlen sind selbstverständlich als reine Zahlen dimensionslos. Diese Rechnungsweise wird verglichen mit dem im Wasserturbinenbau üblichen maßstabbezogenen Modell. Es wird angegeben, wie die eine Rechnungsart in die andere übergeführt werden kann.

Die Ähnlichkeitsmechanik ist keine besondere Mechanik in dem Sinne, wie etwa die euklidische Geometrie eine besondere Geometrie ist. Vielmehr ist sie ein Sondergebiet innerhalb der allgemeinen Mechanik, das die Regeln zusammenfaßt, nach denen man am besten ähnlich verlaufende Naturvorgänge miteinander vergleicht, was insbesondere bei allen Modellversuchen erforderlich ist.

Um die Meßergebnisse von ähnlichen Vorgängen gut vergleichen zu können, muß man sie so umformen, daß die Ausführungsgröße des Modells und andere für die Ähnlichkeit des Vorgangs unwesentliche Konstanten auf das Zahlenergebnis keinen Einfluß mehr haben. Ist dies Ziel erreicht, so werden die Maßzahlen für einander entsprechende Größen in demselben Maß gleich werden, in dem die Vorgänge wirklich einander ähnlich sind. Dazu kann man auf zwei Wegen gelangen: entweder man paßt das Modell dem üblichen Maßsystem oder umgekehrt das Maßsystem dem Modell an.

Bei der einen Art werden die Meßergebnisse eines Modellvorganges auf diejenigen Meßergebnisse umgerechnet, die man bei ähnlichem Verhalten erhalten würde, wenn das Modell in seiner geometrischen Abmessung und die übrigen maßgebenden Konstanten des Versuches (Gefälle, Förderhöhe, Anblasegeschwindigkeit usw.) die Größe der entsprechenden Maßeinheiten haben würden. Dieses Verfahren ist im Wasserturbinenbau üblich geworden und es bestehen internationale Verabredungen darüber, wie groß die Vergleichsgrößen zu wählen sind (Einschnürungsdurchmesser = 1 m, Fallhöhe = 1 m). Dadurch können die auf diese Weise umgerechneten Meßergebnisse der verschiedensten Forscher sehr leicht miteinander verglichen werden. Eine internationale Schwierigkeit besteht insofern, als die in den Ländern mit metrischem Maßsystem gewählten Konstanten im Zollsystem keine runden Werte sind. Deshalb werden in den englisch sprechenden Ländern meistens andere Einheiten gewählt und dementsprechend andere Zahlenwerte angegeben.

Der zweite Weg zur Umrechnung benutzt ein neues Maßsystem, dessen Einheiten auf möglichst einfache Art aus den maßgebenden Größen des Modellvorganges abgeleitet werden. Bei der so vorgenommenen Maßstabtransformation fallen die Maßeinheiten der landesüblichen Maßsysteme notwendiger Weise heraus, weshalb die so erhaltenen neuen Maßgaben oft als »dimensionslose Beiwerte« oder als »dimensionsfreie Kennzahlen« bezeichnet werden. In Wirklichkeit jedoch behält bei der Umformung jede Länge die Dimension einer Länge, jede Kraft die Dimension einer Kraft. Es wird nur an die Stelle der gesetzlichen und landesüblichen Maßeinheit eine andere Einheit der gleichen Dimension gesetzt. So ist es zur Angabe der Luftkräfte an einem Tragflügel üblich geworden als Maßeinheit, auf die Auftrieb und Widerstand bezogen werden, diejenige Kraft zu wählen, die auf die größte Projektionsfläche des Flügels wirkt, wenn diese Fläche mit dem Staudruck der Strömung $\varrho \frac{w^2}{2}$ belastet wird. Das Moment wird mit der gleichen Krafteinheit und einem Hebelarm gemessen, der in Bruchteilen der Profiltiefe angegeben wird. Dann sind c_a, c_w und c_m die Maßzahlen des so bestimmten Maßsystems.

Beide Arten der Umrechnung führen zu den gleichen Maßzahlen, wenn man die gleichen Größen des Modellvorganges zu Maßeinheiten macht und dabei die gleichen Konstanten für das Maßsystem verwendet. Man muß dann also im modellbezogenen Maßsystem auch die Leistungseinheit aus $\frac{75\,\text{Krafteinheiten} \times \text{Längeneinheiten}}{\text{Zeiteinheiten}}$ entsprechend 1 PS $= \frac{75\,\text{m kg}}{\text{s}}$ bilden und die Drehzahl in $\frac{\text{Umdrehungen}}{60\ \text{Zeiteinheiten}}$ entsprechend U/min messen. Auf diese Weise kann die eine Art der Ähnlichkeitsumrechnung vollständig in die andere Art übergeführt werden. Die beiden Arten sind dann nur noch verschiedene Anschauungsweisen für den gleichen Rechnungsgang.

Die jetzt bestehenden Unterschiede sind lediglich darauf zurückzuführen, daß man im allgemeinen bestrebt ist, für das modellbezogene Maßsystem alle abgeleiteten Maßeinheiten unmittelbar aus den Einheiten der gewählten Grundmaße des Systems ohne Benutzung konstanter Faktoren zu bilden. Dadurch würden auch die ursprünglich im Zollsystem gemessenen Werte nach der Umrechnung dieselben Maßzahlen geben, wie die metrisch gemessenen, wenn die Engländer ihre Tragflügelbeiwerte nicht auf den Strömungsdruck $\varrho\, w^2$ an Stelle des bei uns üblichen Staudruckes $\varrho \frac{w^2}{2}$ beziehen würden. Ihre Beiwertzahlen sind also halb so groß als unsere. Es wäre sehr zu wünschen, daß durch allgemein gültige Verabredung derartige Abweichungen beseitigt würden. Sonst geht ein erheblicher Teil der Vorzüge des modellbezogenen Maßsystems gegenüber dem maßstabbezogenen Modell wieder verloren.

Als Nachteil des modellbezogenen Maßsystems kann man anführen, daß die Umrechnungsformeln wegen der Beseitigung der den technischen Maßsystemen eigentümlichen Konstanten etwas umständlicher sind, was bei der großen Zahl der erforderlichen Umrechnungen ziemlich ins Gewicht fallen kann. Auch ist die unmittelbare Vorstellung, die man mit den so dargestellten Meßergebnissen verbinden kann, erschwert. Völlig unmöglich kann aber solche unmittelbare Vorstellung, auf die der Ingenieur mit Recht Wert legt, werden, wenn man verkennt, daß es sich bei der Umrechnung um die Transformation auf ein neues Maßsystem handelt, wenn man statt dessen nur der vermeintlichen

Digitized by Google

»Dimensionslosigkeit« der Beiwerte nachjagt. Dann werden leicht unmaßgebliche Größen nur deshalb als Einheiten der neuen Maßstäbe gewählt, weil sie die gleiche Dimension haben, wie die zu messenden, weil sie daher deren Dimension scheinbar zum Verschwinden bringen.

Ein wirklich entscheidender Vorteil für die Auswertung der im Schrifttum von den verschiedenen Forschern veröffentlichten Meßergebnisse wird durch die Ähnlichkeitsumrechnung erst dann erreicht, wenn alle Forscher auf Grund allgemeingültiger Verabredungen ihre Ergebnisse in der gleichen Weise umgerechnet angeben, so daß sie ohne weitere Rechnung miteinander verglichen werden können. Rechnet aber jeder Forscher nach seinem eigenen System um, so wäre es für die Allgemeinheit oft besser, er gäbe seine Werte gleich in dem Maßsystem an, in dem er sie ursprünglich gewonnen hat. Dann unterläuft dem Benutzer beim weiteren Gebrauch nicht so leicht ein Irrtum, als wenn er gezwungen wird Werte gemeinsam zu verwenden, die nach mehreren unter sich verschiedenen Systemen behandelt sind. Auf diesem Gebiet der Normung ist schon manches erreicht, aber vieles ist noch zu tun. Um die Normung zu erleichtern, ist in den vorstehenden Ausführungen versucht, die wesentlichen Merkmale der Umrechnung von den unwesentlichen zu trennen.

Gedankengänge zur Flatterberechnung.

Berichtigung.

In meiner Arbeit Bd. 16 (1939) Lfg. 6, S. 283, sind, wie ich erst jetzt feststellte, einige Versehen unterlaufen.

Es muß heißen:

Seite 285 links, Zeile 14: »$P_1'^*$« (statt: $P_1'^*$),

Seite 288 links, Zeile 44 und 45: »Federung C' und Dämpfung C''« (statt: Federung und Dämpfung),

Seite 288 rechts, Zeile 12: »$\mathfrak{A}_m^{(\nu)}$« (statt: $\mathfrak{A}_m^{(\nu)}$),

Seite 304 links, Zeile 2: »III A 1« (statt: III a 1),

Seite 308 rechts, Zeile 30: »33 — 37« (statt: 73 — 75),

Seite 297 links, Zeile 41 bis 43; Seite 301 rechts, Zeile 44 bis 47; Seite 304 rechts, Zeile 9 bis 12:

»Eine Vereinfachung wird auf diese Weise allerdings meist nur dann zu erreichen sein, wenn gleichzeitig gewisse Vernachlässigungen gemacht werden dürfen. Z. B. liegt es nahe, die Beiwerte der zu eliminierenden Amplituden als unveränderlich mit ω und v anzusehen, also in diesen Beiwerten geschätzte Beträge für ω und v einzusetzen, oder darin die von ω bzw. von v abhängigen Anteile zu streichen«. (Statt: Voraussetzung . . . . . haben).

Teichmann.

Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze.

Ergänzung.

Die in Band 17 (1940) Lieferung 4 erschienene Arbeit »Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze« von H. J. Rautenberg ist in der vorliegenden Form auch als Dissertation der Technischen Hochschule Berlin eingereicht worden. Berichter: Professor Dr.-Ing. W. Hoff, Mitberichter: Professor Dr. E. Eberling.

Digitized by Google

Die Änderung der Elemente magnetischer Störgebiete mit der Höhe und ihr Einfluß auf die Flugnavigation.

Von Karl Ramsayer*).

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Bordgerät und Navigation.

Zur Feststellung, ob in Deutschland magnetische Störgebiete die Flugnavigation beeinflussen können, wurden vom Verfasser über einem der stärksten Störgebiete Deutschlands, der Anomalie von Bockwitz-Reudnitz in Sachsen, Deklination und Horizontalintensität in verschiedenen Höhen im Luftschiff gemessen. Außerdem wurden diese Werte nach dem Malkinschen Verfahren berechnet und zwecks Feststellung der Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens mit den Messungen verglichen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Potentialtheoretische Lösung.
1. Die erste Randwertaufgabe: Dirichletsches Problem.
2. Die zweite Randwertaufgabe: Neumannsches Problem.
III. Messung der Deklination und der Horizontalintensität in verschiedenen Höhen über dem magnetischen Störgebiet von Bockwitz-Reudnitz.
1. Deklinationsmessungen am Boden.
2. Messungen im Luftschiff.
a) Deklinationsmessungen.
b) Horizontalintensitätsmessungen.
IV. Auswertung der Messungen.
1. Auswertung der Deklinationsmessungen.
2. Auswertung der Horizontalintensitätsmessungen.
V. Berechnung nach dem Malkinschen Verfahren und Vergleich mit der Messung.
VI. Zusammenfassung der Ergebnisse.
VII. Schrifttum.

I. Einleitung.

Der Magnetkompaß ist das wichtigste Navigationshilfsmittel im Flugzeug. Sieht man von den störenden Einflüssen des Flugzeugs selbst ab, dann stellt sich das Magnetsystem stets in Richtung des magnetischen Meridians. Für eine erfolgreiche Navigation ist es also notwendig, in jedem Punkt der Flugbahn die Richtung des magnetischen Meridians gegen den geographischen Meridian, d. h. die Deklination, zu kennen. Auf der Erdoberfläche sind die magnetischen Elemente im allgemeinen bekannt, und magnetische Störgebiete sind sogar oft besonders eingehend vermessen. Da nun Luftfahrzeuge teilweise in beträchtlicher Höhe fliegen, erhebt sich die Frage, wie sich die magnetischen Elemente, insbesondere die Deklination, mit der Höhe ändern. Theoretisch ist die Abnahme mit der Höhe in ungestörten Gebieten bekannt und beträgt für die Horizontal- und Vertikalintensität nur $^1/_{2000}$ je km [1].

Wie sich die Elemente magnetischer Störgebiete mit der Höhe ändern, hat N. Malkin [2], [3] potentialtheoretisch dargelegt, und K. Weinberg [4] untersuchte ebenfalls theoretisch den Einfluß der starken Kursker Anomalie (magnetischer Rücken) auf die Kurshaltung von Luftfahrzeugen nach dem Magnetkompaß. Hierbei zeigte sich, daß das Flugzeug bei einer Reihe von Kursen in die Richtung der Längsachse der Anomalie eindreht und derselben bis zur Grenze des Störgebiets entlang fliegt.

II. Potentialtheoretische Lösung.

Da die Malkinschen Arbeiten in Deutschland wenig bekannt sind und darin nur die Formeln und deren praktische Lösung angegeben sind, werden die notwendigen Gleichungen hier noch einmal kurz abgeleitet.

*) Von der Technischen Hochschule Berlin genehmigte Dissertation [D 83].

Macht man die einzige Annahme, daß die Anomalie nur durch magnetische Massen auf oder unterhalb der Erdoberfläche hervorgerufen wird, dann erfüllt das Potential V dieser Massen für den Raum über der Erdoberfläche die Laplacesche Gleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

d. h. die Summe der zweiten Ableitungen des Potentials nach den drei Koordinaten ist gleich Null. Wählt man die x-Achse in der Nordrichtung des geographischen Meridians, die y-Achse senkrecht dazu nach Osten und die z-Achse in Lotrichtung nach unten, dann sind

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Komponenten der Feldstärke des Störgebiets in den drei Achsenrichtungen. Die Aufgabe ist nun, eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ zu finden, die vorgegebene Randbedingungen erfüllt. Dies führt zu den beiden ersten Randwertaufgaben der Potentialtheorie, dem Dirichletschen und dem Neumannschen Problem.

1. Die 1. Randwertaufgabe: Dirichletsches Problem.

Gegeben ist das Potential V auf der geschlossenen Begrenzungsfläche F des Gebietes T. Gesucht wird eine Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta V = 0$ im Außenraum des Bereichs, wobei die Grenzwerte der zu findenden Funktion V bei Annäherung an den Rand die vorgegebenen Werte annehmen müssen.

Nun wird V als Potential einer Doppelbelegung auf dem Rande angesehen, also

$$V = \iint_F \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo ν die unbekannte Dichte der fingierten Doppelbelegung mit magnetischen Massen, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ die Entfernung des Aufpunkts $P(x, y, z)$ von dem auf F variablen Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$, $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ die Ableitung von $1/r$ in Richtung der Normalen in Q und dF das Flächenelement bedeuten. V ist dann für alle Punkte innerhalb oder außerhalb der Begrenzungsfläche F stetig und erfüllt die Bedingung $\Delta V = 0$. Beim Durchgang des Aufpunktes P durch F ändert sich jedoch das Potential sprungweise, und zwar ist

$$V_a = V_F + 2\pi\nu,$$

wenn V_a der Grenzwert von V bei Annäherung von P an den Rand von außen her und V_F der Wert des Potentials auf der Begrenzungsfläche selbst sind. Für die Belegungsdichte ν erhält man dann

Digitized by Google

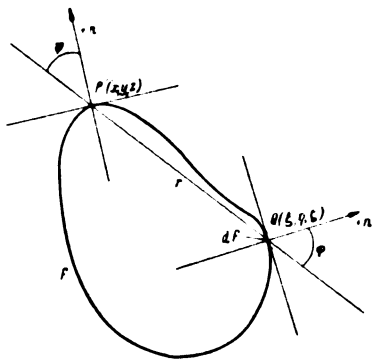


Bild 1.

$$2\pi\nu(P') - \iint_F \nu(Q)\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\cdot dF = f(P') \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Es sind (Bild 1): $P'(x, y, z)$ der von außen an F herangerückte Aufpunkt, $P, Q(\xi, \eta, \zeta)$ der Belegungspunkt im Flächenelement dF mit der Belegungsdichte ν, r der Abstand $P'Q$, φ der Winkel zwischen der positiven Normalenrichtung in Q und $P'Q$ und $f(P')$ der vorgegebene Funktionswert Va in P'.

Aus (4) erhält man ν und aus (3) V. Für die Ebene, die als eine sich im unendlich fernen Punkt schließende Fläche angesehen werden kann, wird die Lösung der Integralgleichung (4) sehr einfach. Wegen $\cos\varphi = 0$ wird

$$2\pi\nu(P') = f(P') = V(P')$$

also

$$\nu(P') = \frac{V(P')}{2\pi}.$$

Setzt man dies in (3) ein und wählt das Koordinatensystem so, daß die x-, y-Ebene mit der ebenen Randfläche zusammenfällt und z senkrecht nach oben geht, dann erhält man

$$V(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_F V(P')\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot dF = -\frac{1}{2\pi}\iint_F V(P')\,\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\cdot dF.$$

Nun ist aber

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-0)^2$$

also

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

folglich

$$V(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint_F V(P')\cdot\frac{z}{r^3}\cdot dF.$$

Für $z = h$ = konst. erhält man

$$V(P) = -\frac{h}{2\pi}\iint_F V(P')\cdot\frac{dF}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierbei durchläuft $P'(\xi, \eta, 0)$ alle Punkte der Ebene, während der Aufpunkt $P(x, y, h)$ fest bleibt. Ersetzt man $V(P)$ bzw. $V(P')$ durch ihre Ableitungen nach den drei Achsenrichtungen, so erhält man

$$X(P) = \frac{h}{2\pi}\iint_F X(P')\cdot\frac{dF}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

$$Y(P) = \frac{h}{2\pi}\iint_F Y(P')\cdot\frac{dF}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

$$Z(P) = \frac{h}{2\pi}\iint_F Z(P')\cdot\frac{dF}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6c)$$

denn die Ableitungen kann man wieder als Potentiale auffassen, die für den Außenraum die Laplacesche Bedingung erfüllen.

2. Die 2. Randwertaufgabe: Neumannsches Problem.

Gegeben ist die Normalableitung $\frac{\partial V}{\partial n}$ der Potentialfunktion V auf der geschlossenen Begrenzungsfläche F des Gebietes T. Gesucht wird eine Lösung V der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V = 0$, deren Normalableitungen bei Annäherung an den Rand gegen die vorgegebenen Werte $\frac{\partial V}{\partial n}$ konvergieren.

Beim Neumannschen Problem sieht man V als Potential einer einfachen Flächenbelegung auf dem Rande an, also

$$V = \iint_F \frac{\mu}{r}\cdot dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo μ die Dichte der einfachen Massenbelegung und r und dF dasselbe bedeuten wie in Gleichung (3). Beim Durchgang des Aufpunktes $P(x, y, z)$ durch den Rand F bleibt V stetig, dagegen ändert sich die Normalableitung $\frac{\partial V}{\partial n}$ sprungweise und liefert somit eine Gleichung für die Belegungsdichte. Liegt P außerhalb von F im Abstand h, dann erhält man als Grenzwert der Normalableitung für $h \to 0$

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} = \frac{\partial V}{\partial n_F} - 2\pi\mu,$$

wo $\frac{\partial V}{\partial n_a}$ den Grenzwert der Normalableitung im Außenraum und $\frac{\partial V}{\partial n_F}$ die Normalableitung auf F bedeuten. Für μ ergibt sich also die Integralgleichung

$$2\pi\mu(P') + \iint_F \mu(Q)\cdot\frac{\cos\psi}{r^2}\cdot dF = -f(P') \quad . \quad . \quad (8)$$

Hierbei ist (Bild 1) $P'(x, y, z)$ wieder der von der positiven Seite her an F herangerückte Aufpunkt P, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ der auf F variable Belegungspunkt im Flächenelement dF mit der Belegungsdichte $\mu(Q)$ als stetige Funktion des Ortes auf F, r der Abstand $P'Q$, ψ der Winkel zwischen $P'Q$ und der positiven Normalenrichtung in P' und $f(P')$ der vorgeschriebene Grenzwert von $\partial V/\partial_{na}$ im Punkte P'.

Die zweite Randwertaufgabe hat dann und nur dann eine Lösung, wenn

$$\iint_F f(P')\,dF = 0$$

erfüllt ist, was in vorliegendem Fall wegen der Voraussetzung $\Delta V = 0$ zutrifft. Es ist nämlich nach dem Greenschen Satz

$$\iiint_T \Delta V\,d\tau = -\iint_F \frac{\partial V}{\partial n}\cdot dF.$$

Aus der Gleichung (8) läßt sich die Belegungsdichte μ bestimmen. Das gesuchte Potential ist dann

$$V = \iint_F \frac{\mu}{r}\cdot dF + \text{konst.}$$

Für die Ebene wird die Lösung von (8) wieder besonders einfach. Wegen $\cos\psi = 0$ erhält man

$$2\pi\mu(P') = -f(P').$$

Wählt man das Koordinatensystem wieder so, daß die x-, y-Ebene mit der ebenen Randfläche F zusammenfällt und die positive z-Achse senkrecht nach oben geht, dann wird

$$f(P') = \frac{\partial V}{\partial n_a} = \frac{\partial V}{\partial z} = Z(P'),$$

also

$$\mu(P') = -\frac{Z(P')}{2\pi}$$

und nach (7)

$$V(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint_F \frac{Z(P')}{r}\cdot dF + \text{konst.}$$

Digitized by Google

Rückt der Aufpunkt P ins Unendliche, dann muß $V(p)$ gegen Null gehen, also muß konst. $= 0$ sein, folglich ist

$$V(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint_F \frac{Z(P')}{r}\cdot dF \quad \ldots\ldots (9)$$

$P'(\xi, \eta, 0)$ durchläuft jetzt die ganze Ebene, während $P(x, y, z)$ fest bleibt. Durch Differentiation nach x, y und z erhält man hieraus die drei Komponenten der Feldstärke

$$X(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_F Z(P')\,\frac{x-\xi}{r^3}\cdot dF \quad \ldots (10a)$$

$$Y(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_F Z(P')\,\frac{y-\eta}{r^3}\cdot dF \quad \ldots (10b)$$

$$Z(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_F Z(P')\,\frac{z}{r^3}\cdot dF \quad \ldots\ldots (10c)$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Die Gleichung (10c) ist hierbei identisch mit (6c).

Nach den Formeln (5), (6) und (9), (10), die mit den von Malkin [2], [3] angegebenen übereinstimmen, ist es also möglich, sämtliche Elemente des magnetischen Störfeldes über einer Ebene zu berechnen, wenn die Elemente auf dieser Ebene bekannt sind, ja es genügt sogar die Kenntnis der Vertikalkomponente allein. Theoretisch müßten hierbei die Werte über die ganze Ebene, d. h. bis zum unendlich fernen Punkt bekannt sein. Mit wachsender Entfernung vom Störgebiet gehen sie jedoch ihrem Betrage nach rasch gegen Null, so daß es praktisch genügt, sich auf den meist kleinen Bereich des Störgebiets zu beschränken, der immer als Ebene angesehen werden kann. Da bei der magnetischen Vermessung von Störgebieten meistens nur die Z-Komponente gemessen wird, gewinnen die Formeln (10) an Bedeutung. Auch der nachfolgenden Berechnung der Elemente über der Anomalie von Bockwitz-Reudnitz liegt eine Karte der Z-Isanomalen von G. Siemens [6] zugrunde, weshalb hier eine Lösung der Gleichungen (10a und b) nach einem der Verfahren von N. Malkin [2] angegeben wird.

Aus den Gleichungen

$$X(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint_F Z(\xi, \eta, 0)\cdot\frac{(x-\xi)}{r^3}\cdot dF$$

$$Y(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint_F Z(\xi, \eta, 0)\cdot\frac{(y-\eta)}{r^3}\cdot dF$$

erhält man nach Einführung von Zylinderkoordinaten für den Nullpunkt $(x, y, 0)$, d. h. wenn man setzt:

$$z = h,\ l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};\ \operatorname{tg}\varkappa = \frac{y-\eta}{x-\xi}$$

bzw.

$$(x-\xi) = l\cdot\cos\varkappa,\ (y-\eta) = l\cdot\sin\varkappa;\ dF = l\cdot d\varkappa\cdot dl;$$
$$r = \sqrt{l^2+h^2}$$

$$X(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varkappa\, d\varkappa\int_0^{L} Z(P')\,\frac{l^2}{(l^2+h^2)^{3/2}}\cdot dl$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\cos\varkappa\cdot d\varkappa \quad \ldots (11)$$

$$Y(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varkappa\, d\varkappa\int_0^{L} Z(P')\,\frac{l^2}{(l^2+h^2)^{3/2}}\cdot dl$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\sin\varkappa\cdot d\varkappa \quad \ldots (12)$$

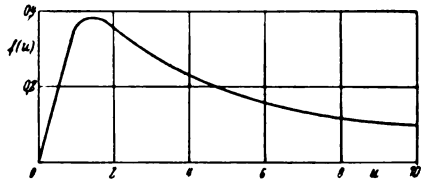


Bild 2. Schaubild der Funktion $f(u) = \frac{u^2}{(u^2+1)^{3/2}}$, wobei $u = \frac{l}{h}$.

wo

$$U = \int_0^{L} Z(P')\,\frac{l^2}{(l^2+h^2)^{3/2}}\cdot dl \quad \ldots\ldots (13)$$

Mit

$$\frac{l}{h} = u \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

erhält man

$$U = \int_{u=0}^{u=n\cdot\Delta u} Z(P')\,\frac{u^2}{(u^2+1)^{3/2}}\cdot du = \int_0^{n\cdot\Delta u} Z(P')\cdot f(u)\, du \quad \ldots (15)$$

Den Verlauf von $f(u)$ zeigt Bild 2. Der Höchstwert liegt bei $u = \sqrt{2}$. Für größere u nimmt $f(u)$ langsam ab und nähert sich immer mehr der Funktion $1/u$. Die Anwendung der Simpsonschen Regel für das Intervall Δu gibt

$$U = \frac{\Delta u}{3}(Z_0 f_0 + 4Z_1 f_1 + Z_2 f_2) + \frac{\Delta u}{3}(Z_2 f_2 + 4Z_3 f_3 + Z_4 f_4) + \ldots$$
$$\ldots (15a)$$

worin bedeuten Z_0 und f_0 die Vertikalkomponente bzw. den Funktionswert von $f(u)$ an der Stelle $0\cdot\Delta u$, Z_1 und f_1 die entsprechenden Werte an der Stelle $1\cdot\Delta u$ usw. Theoretisch müßte man bis $n = \infty$ gehen, praktisch kann man jedoch schon sehr bald abbrechen, da die Z-Werte am Rande des Störgebiets rasch gegen Null gehen. Wendet man noch die Tangententrapezregel an, so ergibt sich aus den Gleichungen (11) und (12) bei einer Intervallbreite von $2\pi/m$

$$X = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=m} U(\varkappa_i)\cos\varkappa_i \quad \ldots\ldots (16)$$

$$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=m} U(\varkappa_i)\sin\varkappa_i \quad \ldots\ldots (17)$$

wobei $\varkappa_i = 2\pi\cdot\frac{i}{m}$ oder in Graden $= 360\,\frac{i}{m}$.

Für $m = 8$ ergibt sich

$$X = \frac{1}{8}[U_0 + 0{,}71\,U_{45} - 0{,}71\,U_{135} - U_{180} - 0{,}71\,U_{225} + 0{,}71\,U_{315}] \quad \ldots (18)$$

$$Y = \frac{1}{8}[0{,}71\,U_{45} + U_{90} + 0{,}71\,U_{135} - 0{,}71\,U_{225} - U_{270} - 0{,}71\,U_{315}] \quad \ldots (19)$$

Zur praktischen Berechnung von X und Y zeichnet man auf Pauspapier ein Netz von konzentrischen Kreisen mit den Halbmessern $n\cdot\Delta u$ und zeichnet diejenigen Radien ein, die mit einem Anfangsradius die Winkel $360\cdot\frac{i}{m}$ bilden (Bild 9). Dieses Netz legt man so auf die Isanomalenkarte, daß der Mittelpunkt mit dem Bild des Aufpunktes zusammenfällt und der Anfangsradius parallel zur x-Achse verläuft und entnimmt der Karte die Z-Werte an den Schnittpunkten, die man zweckmäßig in ein Schema schreibt. Durch Verkleinerung der Intervalle Δu und $\Delta\varkappa$ kann man jede beliebige Annäherung an die exakten Werte X und Y erhalten.

Die obige Integrationsmethode bedeutet nichts anderes als eine Aufteilung der Integrationsfläche in ein Mosaik von Kreisringsektoren mit einem Öffnungswinkel von $360°/m$ und einer Breite Δu, wobei angenommen wird,

Digitized by Google

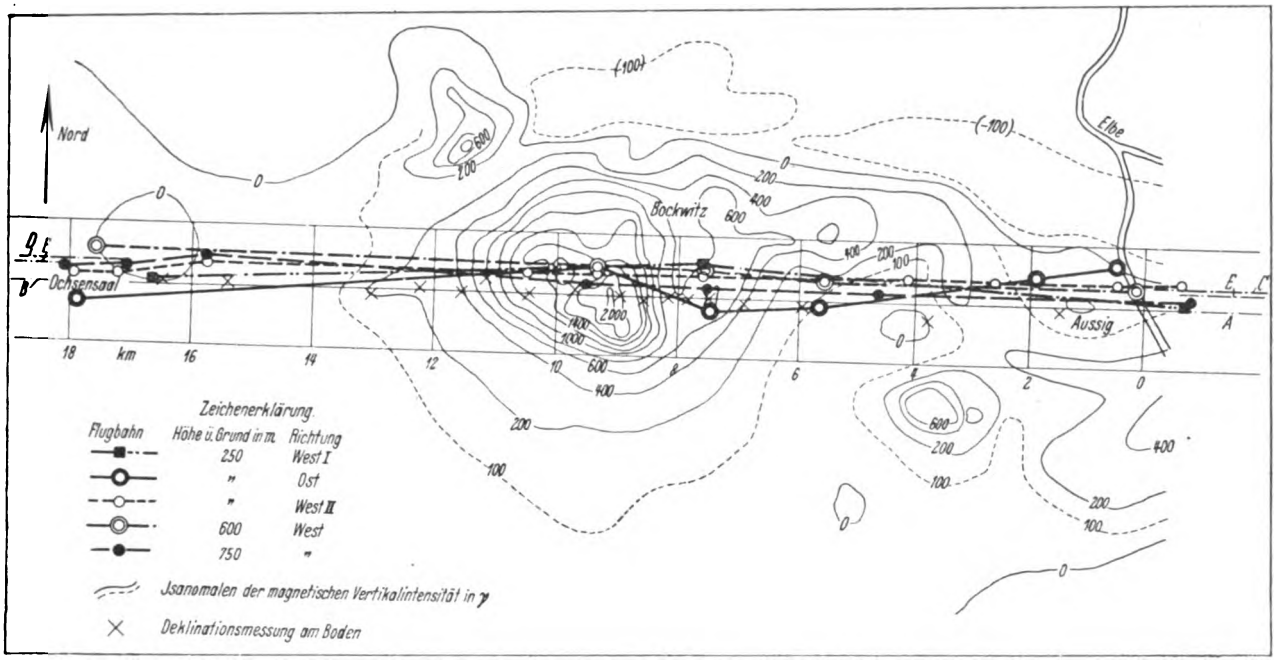


Bild 3. Lageplan zu den magnetischen Messungen in der Anomalie Bockwitz-Reudnitz.
(Die Isanomalen sind der Arbeit von G. Siemens [6] entnommen).

daß der Ringsektor über seine ganze Fläche denselben Z-Wert hat, wie er seiner Mitte entnommen wurde. Man erhält daher bessere Resultate, wenn man den tatsächlichen Mittelwert für jeden Sektor abschätzt. Malkin hat deshalb auch ein Verfahren angegeben [3], bei dem die Integrationsfläche in Flächen gleicher Wirkung aufgeteilt wird, für die dann jeweils ein mittlerer Z-Wert zu bestimmen ist. Diese zweite Methode erfordert jedoch auch entsprechend mehr Aufwand, weshalb von ihrer Anwendung abgesehen wurde.

III. Messung der Deklination und Horizontalintensität in verschiedenen Höhen über dem magnetischen Störgebiet von Bockwitz-Reudnitz.

Auf Vorschlag von Prof. Reich, Reichsstelle für Bodenforschung, wurde für die Messungen die magnetische Anomalie von Bockwitz-Reudnitz zwischen Riesa und Torgau in Sachsen gewählt, weil sie eine der stärksten, in Deutschland bekannten Anomalien ist und weil von dem Gebiet eine sehr genaue Vermessung der Vertikalintensität durch G. Siemens [6] vorliegt. Siemens hatte für geologische Untersuchungen die Vertikalintensität mit einem Vertikalvariometer ermittelt und das Normalfeld der Erde zwischen den Breiten $\varphi = 51^0$ und $\varphi = 51^0 35'$, nach der Schmidtschen Formel als Niveau berechnet. Die Differenzen zwischen Messung und Rechnung ergaben dann die Störungswerte Z, die zur Zeichnung einer Isanomalenkarte von 100 zu 100 γ[1]) im Maßstabe 1 : 50000 verwendet wurden. Die Ursache der Anomalie sind kristalline plutonische Gesteine, hauptsächlich Syenit in etwa 2 km Tiefe. Die vertikalen Störungswerte wachsen bis über + 2000 γ an; das sind annähernd 4,5% der normalen Vertikalintensität.

1. Deklinationsmessungen am Boden.

Da von dem Störgebiet, das größtenteils im Wald liegt und wegen seiner geringen Ausdehnung (5 km Durchmesser) bei der Vermessung I. Ordnung nicht bemerkt wurde, keine Deklinationswerte vorlagen, wurden von J. Grambow und dem Verfasser am 27. und 28. Februar 1939 an den im Lageplan (Bild 3) mit einem Kreuz bezeichneten Stellen die Deklination mit einem Breithaupt-Bussolentheodolit aus Sonnenazimuten ermittelt[2]). Der Zeitpunkt des Durchgangs des linken und rechten Sonnenrandes durch das Fadenkreuz wurde je zweimal bestimmt, die Bussole am Nord- und Südende auf $^1/_{10}{}^0$ genau abgelesen und für den Mittelwert das Azimut nach der Formel

$$\operatorname{ctg} a_n = \operatorname{tg}\delta \cos\varphi \operatorname{cosec} t - \sin\varphi \cdot \operatorname{ctg} t$$

berechnet. Hierin bedeuten: a_n das Azimut der Sonne vom Nordpunkt des Meridians aus gerechnet, δ die Abweichung und t den Stundenwinkel der Sonne, φ die geographische Breite des Beobachtungsorts. Die geographischen Koordinaten der Beobachtungsorte wurden hierbei den Meßtischblättern 1 : 25000, die zur lagemäßigen Festlegung der Meßpunkte dienten, entnommen. Die Differenz zwischen dem so berechneten Sonnenazimut und dem Mittelwert aus den Bussolenablesungen ist dann die relative Deklination D'; denn es konnte sich hierbei nur um Relativmessungen handeln, weil der Winkel zwischen Ziellinie und Nullpunkt der Bussolenteilung unbekannt ist. (Der Winkel ließe sich aus Azimutmessungen bei bekannter Deklination leicht bestimmen, interessiert jedoch in unserem Falle nicht, da nur die Änderung der Deklination festgestellt werden sollte.) Das Ergebnis dieser Bodenmessungen unter Berücksichtigung der Tagesvariationen zeigt Zahlentafel 1. Die Lagebezeichnung der Punkte bezieht sich hierbei auf ihren Abstand vom Nullpunkt (Elbe) des Profils AB, Bild 3.

D' erreicht mit $-7{,}0^0$ bei km 8,53 und $-1{,}4^0$ bei km 11,05 Extremwerte, ändert sich also auf rund 2,5 km um $5{,}6^0$.

[1]) $1\,\gamma = 10^{-5}$ Gauß.

[2]) Da für die Messungen nur wenig Zeit zur Verfügung stand, wurde den ganzen Tag über beobachtet. Die geforderte Genauigkeit von $^1/_{10}{}^0$ konnte hierbei immer leicht eingehalten werden, da die größte Azimutänderung der Sonne zur Zeit ihrer Kulmination nur 17″ je Zeitsekunde betrug.

Zahlentafel 1. Zusammenstellung der am Boden gemessenen relativen Deklinationswerte D'.

Abstand v. Nullpunkt in km	1,38	3,85	5,93	6,93	7,50	7,86	8,21	8,53	9,00
D'	$-4{,}6^0$	$-3{,}9^0$	$-5{,}0^0$	$-6{,}0^0$	$-5{,}0^0$	$-5{,}1^0$	$-6{,}4^0$	$-7{,}0^0$	$-5{,}2^0$
Abstand v. Nullpunkt in km	9,70	10,43	11,05	11,57	12,26	13,03	15,40	16,46	—
D'	$-3{,}4^0$	$-2{,}3^0$	$-1{,}4^0$	$-1{,}6^0$	$-2{,}7^0$	$-2{,}8^0$	$-3{,}2^0$	$-3{,}9^0$	—

Digitized by Google

2. Messungen im Luftschiff.

Am 16. Juni 1939 wurden nun vom Verfasser unter Mithilfe von J. Grambow und R. Böttger im Luftschiff LZ 130, das von Kapt. Sammt geführt wurde, relative Deklinations- und Horizontalintensitätswerte in verschiedenen Höhen über der Bockwitzer Anomalie gemessen. Das Störgebiet wurde in annähernd ost-westlicher bzw. west-östlicher Richtung in den Höhen 250, 600 und 750 m über Grund mit einer mittleren Geschwindigkeit von 80 km/h überflogen. Größere Höhen (bis zu 2000 m) waren zwar geplant, konnten aber wegen starker Bewölkung nicht erreicht werden, da Bodensicht für die genaue Ortung unbedingt notwendig war. Die Höhen wurden barometrisch gemessen, wobei das Aneroid mehrmals durch Echolotungen an N.N. angeschlossen wurde. Zur Ortsbestimmung wurde das Gelände während der ersten 4 Meßflüge mit einer Rolleiflexkamera 6 × 6 cm, die mit dem Luftschiff fest verbunden war und deren Neigung an einer Dosenlibelle mit Gradteilung abgelesen werden konnte, photographiert und der jeweilige Zeitpunkt der Aufnahme an einer Stoppuhr abgelesen und notiert. Aus den Negativen ließ sich dann der Standort in den Meßtischblättern 1 : 25000 genau bestimmen. Bei den restlichen Meßflügen war jedoch das Photographieren wegen zunehmender Bewölkung unmöglich. Es wurden deshalb an Hand des Meßtischblattes vorausliegende markante Punkte (Straßenkreuzungen, Waldecken usw.) ausgesucht, in der Karte angekreuzt und der gestoppte Zeitpunkt des Überfliegens dazugeschrieben. Bei den geringen Flughöhen dürften auch die so bestimmten Orte auf etwa 50 m genau sein[3]). Bild 3 zeigt die so ermittelten Flugbahnen der 18 km langen Meßstrecke von der Elbe bei Aussig bis zum Dorfe Ochsensaal. In den mit einem Kreis, Viereck usw. bezeichneten Punkten wurde der Ort nach einem der oben angegebenen Verfahren bestimmt, während im übrigen angenommen wurde, daß sich das Luftschiff zwischen zwei solchen aufeinanderfolgenden Punkten geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegte.

a) Deklinationsmessungen.

Zur Messung der Deklination diente ein Trockenkompaß der Firma C. Plath, Hamburg, mit einer in einzelne Grade geteilten Thomsonrose von 25 cm Durchmesser, einem Moment von 380 Gauß·cm³, einer Schwingungsdauer von 34 s und einem Dämpfungsfaktor (reziprokes Verhältnis der 1. Amplitude zur 2. entgegengesetzten) von 0,9. Dieser Trockenkompaß wurde mit einem von einem Federwerk (Grammophonmotor) angetriebenen Kinamo laufend photographiert und zwar in einer Sekunde 1 Bild. Mit einem zweiten Kinamo wurde auch wieder jede Sekunde die Minutenrose des im Luftschiff vorhandenen Anschütz-Kreiselkompasses (Kugelkompaß) photographiert. Zur Synchronisierung der beiden Filme wurden je eine Uhr mit großem Sekundenzeiger mitphotographiert.

Aus den synchronisierten Kreiselkompaß- und Magnetkompaßablesungen erhält man dann relative Deklinationswerte auf folgende Weise: Aus dem am Magnetkompaß anliegenden Kurs K_M, dem Aufstellfehler A_M, der Deviation δ und der Deklination D erhält man den rechtweisenden Kurs K_R nach der Gleichung

$$K_R = K_M + A_M + \delta + D.$$

Aus dem am Kreiselkompaß anliegenden Kurs K_K, dem Aufstellfehler A_K, dem Fahrtfehler F und dem Beschleunigungsfehler B erhält man den rechtweisenden Kurs K_R aus

$$K_R = K_K + A_K + F + B$$

also

$$K_M + A_M + \delta + D = K_K + A_K + F + B$$

$$d = K_K - K_M = D - (F + B) + (A_M - A_K) + \delta \qquad (20)$$

Die Differenz zwischen den Ablesungen am Kreiselkompaß und am Magnetkompaß setzt sich also zusammen aus der mit dem Ort veränderlichen Deklination, dem veränderlichen Fahrt-[4]) und Beschleunigungsfehler des Kreiselkompasses, der konstanten Differenz der Aufstellfehler beider Geräte und der Deviation des Magnetkompasses, die für jeden Meßflug als eine Konstante angesehen werden kann, da die Kursschwankungen innerhalb eines Meßflugs im allgemeinen $< \pm 10^0$ waren. Die δ-Werte der verschiedenen Meßflüge können jedoch voneinander verschieden sein, da die Abtriften verschieden sind. Setzt man voraus, daß sich die Deklination am Anfang und Ende der Meßstrecke, also außerhalb des Störgebiets praktisch mit der Höhe nicht ändert, so entsprechen den Werten d_A und d_E am Anfang und am Ende der Meßstrecke die zugehörigen Werte D_A' und D_E' am Boden. Die Differenz

$$(D_E' - d_E) - (D_A' - d_A) = a \qquad (21)$$

gibt die Auswanderung des Kreisels in der Zwischenzeit. Setzt man ferner voraus, daß die Auswanderung linear mit der Zeit bzw. der zurückgelegten Wegstrecke erfolgt, so erhält man für die relativen Deklinationswerte D' folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} D' &= d + (D_A' - d_A) + \frac{t - t_A}{t_E - t_A} \cdot a \\ \text{bzw.} \\ D' &= d + (D_A' - d_A) + \frac{s - s_E}{s_E - s_A} \cdot a \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Zeichnerisch erhält man D', indem man die gemessenen d-Werte mit ihrem Abstand vom Nullpunkt als Abszisse aufträgt, für die Anschlußstrecken am Anfang und Ende die Schwerpunkte ermittelt und von diesen Punkten aus die gemittelten Deklinationswerte D_A' und D_E' unter Berücksichtigung des Vorzeichens in Richtung der Ordinatenachse abträgt. Die Verbindungslinie der beiden so erhaltenen Punkte ist dann die »Basis« und die Ordinatendifferenz zwischen »Basis« und d-Kurve sind die gesuchten D'-Werte.

b) Horizontalintensitätsmessungen.

Die Horizontalintensität wurde mit einem von der Deutschen Seewarte in Hamburg freundlicherweise zur Verfügung gestellten Doppelkompaß mit photographischer Ableseeinrichtung gemessen. Für die Eichung des Geräts und die Beratung über die Anlage der Messungen bin ich Herrn Prof. Errulat zu besonderem Dank verpflichtet.

Magnetkompaß und Doppelkompaß waren im Heckraum der Führergondel aufgestellt. Die Minutenrose des Kreiselkompasses befand sich im unmittelbar angrenzenden Navigationsraum. Magnetisch war der Platz nicht besonders günstig, dafür hatten wir aber den Vorteil, uns während der Messungen mit der Schiffsführung und gegenseitig besser verständigen zu können. Auch die Ortung war von hier aus am besten möglich.

IV. Auswertung der Messungen.

1. Auswertung der Deklinationsmessungen.

Zunächst wurden die Magnetkompaßkurse und die Kreiselkompaßkurse eines jeden Meßflugs in den Filmen auf $^1/_{10}{}^0$ genau abgelesen, auf Millimeterpapier mit der mitphotographierten Zeit als Abszisse aufgetragen und durch eine Kurve verbunden. Dann wurden die Magnetkompaßzeiten an Hand der Uhrvergleichungen auf die Kreiselkompaßzeiten reduziert, die zusammengehörigen Magnet- und Kreiselkompaßkurven auf Pauspapier in dasselbe Koordi-

[3]) Der Nadirpunkt läßt sich nach einfachen Versuchen ohne Visiervorrichtung auf etwa ± 2,5° genau schätzen.

[4]) Der Fahrtfehler $\operatorname{tg} F = \frac{v \cdot \cos A}{1660 \cdot \cos \varphi + v \cdot \sin A}$ (v = Geschwindigkeit des Luftschiffes in km/h, A = Kurs über Grund, φ = geographische Breite) nimmt bei konstanter Geschwindigkeit und konstantem Kurs einen konstanten Wert an, muß jedoch bei den Meßflugen als veränderlich angesehen werden, da der Kreiselkompaß während der 10 bis 15 Minuten, die für eine Meßstrecke gebraucht wurden, gar nicht die Zeit hatte, in seine Ruhelage einzuschwingen, und er durch die Drehungen nach jedem Meßflug immer wieder ausgelenkt wurde.

Digitized by Google

natensystem übertragen und alle 5 s die Differenzen $d = K_K - K_M$ entnommen.

Diese Differenzen sind natürlich auch nach der Reduktion noch nicht die gesuchten relativen D'-Werte, sondern sind noch mit vielen Fehlern behaftet, die hauptsächlich vom Magnetkompaß herrühren. Durch die fortwährenden kleinen Kursschwankungen, Beschleunigungen und Erschütterungen wird die Kompaßrose abgelenkt und kommt ins Schwingen. Diese erzwungene Kompaßschwingung hat dieselbe Periode wie die erregende Schwingung, ist jedoch gegen letztere entsprechend den Schwingungseigenschaften des Kompasses zeitlich verschoben (siehe z. B. W. Immler [7]). Über längere Zeiträume bzw. Flugstrecken betrachtet, haben jedoch die durch die Kompaßschwingungen hervorgerufenen Fehler den Charakter zufälliger Fehler. Sie könnten also durch einfache Mittelbildung eliminiert werden, wenn die Mittlungszeit genügend lang gewählt wird, und die Deklination in der während dieser Zeit zurückgelegten Strecke konstant bleibt oder sich linear ändert. Bei nicht linearer Änderung der Deklination begeht man durch die Mittelbildung einen zusätzlichen Fehler, dessen Betrag von der Länge der Mittelungsstrecke und der Steigung und Krümmung der Deklinationskurve abhängt. Läßt man einen »Mittelungsfehler« von 0,1° noch zu, dann darf, nach den Bodenmessungen zu schließen, über eine Strecke von etwa 600 m gemittelt werden, was bei einer mittleren Geschwindigkeit von 20 m/s einem Zeitraum von 30 s entspricht.

Es wurden deshalb immer 7 aufeinanderfolgende d-Werte für jede 5. Sekunde gemittelt und die Mittelwerte dm mit den berechneten Abständen vom Nullpunkt des Profils als Abszisse aufgetragen. Diesen Schaubildern sind die dm-Werte, Zahlentafel 2, für jeden Viertelskilometer entnommen. Die Lücken rühren davon her, daß der Filmtransport im Kinamo für den Kreiselkompaß mehrmals versagte, so daß jedesmal eine frische Kassette eingesetzt werden mußte, wodurch natürlich kostbare Zeit verlorenging.

Um die dm-Kurven noch etwas stärker zu glätten, wurden je 3 aufeinanderfolgende dm-Werte gemittelt, Zahlentafel 2. Diese Mittelwerte d_M entsprechen dann annähernd denjenigen Werten, die man aus den Einzelbeobachtungen nach folgender Gleichung erhalten hätte:

$$d_M \approx \frac{1}{21}\,[(d_1 + d_2 + d_3) + 2\,(d_4 + d_5 + d_6) + 3\,d_7 + 2\,(d_8 + d_9 + d_{10}) + (d_{11} + d_{12} + d_{13})].$$

Die Gewichtsverteilung gewährleistet also ein enges Anschmiegen an die wahre Deklinationskurve. Schließlich wurden die d_M-Werte für jeden halben km aufgetragen und durch eine ausgleichende Kurve verbunden, Bild 4a bis e.

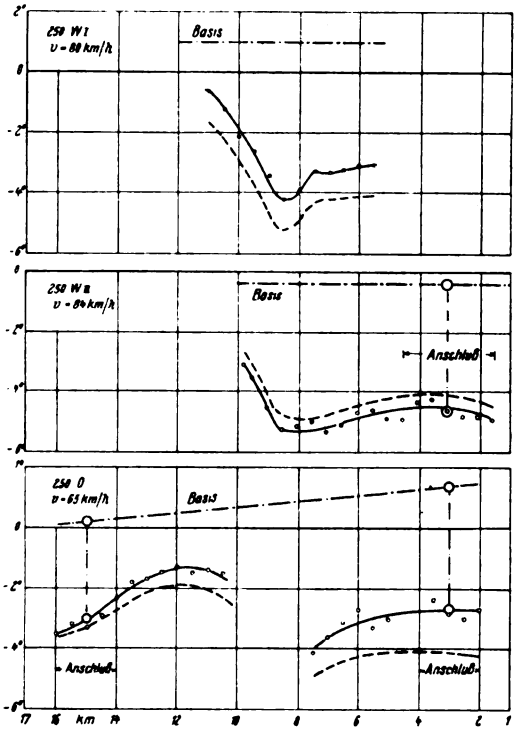
Aus den Differenzen zwischen der ausgleichenden Kurve und den gemessenen d-Werten läßt sich rückschließend ein Urteil fällen, wieweit durch obiges Verfahren die zufälligen Fehler eliminiert werden. Zu diesem Zweck wurde ein Teil des Meßflugs 250 O, der die größten Schwankungen aufwies, näher untersucht. Dort weichen die gemessenen d-Werte im Mittel (aus 51 Werten) um $\pm 0{,}85°$ von der ausgleichenden Kurve ab. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist also d_M auf $\pm 0{,}25°$ sicher. Durch die graphische Ausgleichung geht der Fehler um mindestens ⅓ zurück, verbleiben also noch $\pm 0{,}17°$. Wegen Änderung der Deklination im Mittelungsbereich kann nach dem oben Gesagten noch ein zusätzlicher Fehler von $\pm 0{,}10°$ hinzukommen, so daß also die ausgleichende Kurve auf etwa $\pm 0{,}20°$ genau ist, wenn man von den systematischen Fehlern absieht.

Die ausgeglichenen d-Kurven wurden nun am Anfang und am Ende der Meßstrecke an die Deklinationswerte am Boden angeschlossen und so die Kreiselauswanderung bestimmt (s. oben). Sie betrug im Mittel 0,1° je min. Die Ordinatendifferenzen zwischen »Basis« und d-Kurve lieferten dann, von der Abszissenachse aus abgetragen, die Kurve der gesuchten relativen Deklinationswerte D'. Der Meßflug 250 W II konnte nur einseitig angeschlossen werden, weil die Kreiselregistrierungen aus dem obenerwähnten Grunde ausfielen, 250 W I mußte sogar aus demselben Grunde zwischen 250 O und 250 W II »eingehängt« werden. Zahlentafel 3 zeigt die Berechnung der an den d-Werten von 250 W I anzubringenden Korrektion. Die starke Verschiebung der Basis in 750 W (d-Werte positiv) gegenüber

Zahlentafel 2. Tafel der gemittelten Differenzen zwischen Kreiselkurs und Magnetkompaßkurs, $d = K_K - K_M$.

Abstand vom Nullpunkt in km	Höhe über Grund: 250 m, Fahrtrichtung nach W I		250 m, W II		250 m, O		600 m, W		750 m, W	
	d_m	d_M	d_m	d_M	d_m	d_M	d_m	d_M	d_m	d_M
1,25			−4,9°				−2,5°			
1,50			4,9	−4,9°			2,5	−2,4°		
1,75			4,8	4,8	−2,4°		2,3	2,4		
2,00			4,7	4,8	2,6	−2,7°	2,3	2,4		
			4,8	4,7	3,0	2,9	2,5			
			4,7	4,8	3,0	3,0				
			4,8	4,7	3,0	2,9				
3,00			4,6	4,6	2,8	2,8				
			4,4	4,4	2,6	2,6				
			4,2	4,2	2,4	2,4				
			4,0	4,1	2,2					
4,00			4,2	4,3						
			4,7	4,6			2,4			
			5,0	4,9			2,3	2,4		
			5,1	5,0	3,0		2,4	2,4		
5,00			4,9	4,9	3,0	3,0	2,6	2,6		
			4,8	4,8	3,1	3,2	2,7	2,7		
	−2,9°		4,8	4,6	3,6	3,3	2,9	2,9		
	3,3	−3,1°	4,3	4,6	3,2	3,0	3,0	2,9		
6,00	3,1	3,1	4,8	4,7	2,3	2,7	2,9	3,0		
	3,0	3,1	5,0	4,9	2,7	2,7	3,0	3,0		
	3,1	3,2	5,0	5,1	3,1	3,1	3,1	3,1		
	3,4	3,3	5,4	5,3	3,6	3,4	3,2	3,2		
7,00	3,3	3,3	5,4	5,3	3,4	3,6	3,3	3,3		
	3,3	3,2	5,1	5,2	3,7	3,7	3,3	3,3		
	3,1	3,3	5,1	5,0	3,9	4,1	3,3	3,3		
	3,5	3,5	4,9	5,0	4,6		3,2	3,2		
8,00	4,0	3,9	5,0	5,1			3,2	3,2		
	4,2	4,2	5,4	5,2			3,1	3,1		
	4,4	4,2	5,3	5,2			3,0	3,0		
	4,0	3,9	4,8	4,9			2,9	2,9	+0,1°	
9,00	3,4	3,4	4,7	4,5			2,7	2,7	0,3	+0,3°
	2,8	2,9	4,0	4,0			2,5	2,5	0,6	0,6
	2,5	2,6	3,4	3,5			2,2	2,2	1,0	1,0
	2,4	2,4	3,1				1,8	1,8	1,3	1,2
10,00	2,3	2,1			2,0		1,5	1,5	1,3	1,3
	1,7	1,7			1,8	1,8	1,2	1,2	1,3	1,3
	1,1	1,2			1,5	1,5	1,0	1,0	1,4	1,4
	0,8	0,8			1,3	1,4	0,9	0,9	1,5	1,5
11,00	0,6	0,6			1,3	1,4	0,9	0,9	1,6	1,7
	0,4	0,4			1,7	1,5	0,9	0,9	1,9	1,8
	0,3				1,4	1,5	1,0	1,0	2,0	1,9
					1,4	1,3	1,0	1,0	1,7	1,7
12,00					1,1	1,3	1,1	1,1	1,5	1,5
					1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,4
					1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3
					1,4	1,6	1,5	1,5	1,2	1,2
13,00					1,7	1,7	1,5	1,5	1,1	1,1
					2,0	1,8	1,4	1,4	0,9	1,0
					1,8	1,8	1,4	1,5	0,9	0,9
					1,7	2,0	1,6	1,7	0,9	0,9
14,00					2,5	2,3	2,0	1,9	0,9	0,9
					2,8	2,7	2,2	2,0	1,0	1,0
					2,8	2,9	1,9	1,9	1,0	0,9
					3,2	3,1	1,6	1,7	0,8	0,8
15,00					3,4	3,3	1,6	1,6	0,7	0,7
					3,4	3,3	1,7	1,7	0,7	0,7
					3,2	3,2	1,8	1,8	0,7	0,7
					3,1	3,3	1,9		0,6	0,6
16,00					3,6	3,5			0,6	0,6
					3,9				0,6	0,5
									0,4	0,5
									0,4	0,4
17,00									0,4	

Digitized by Google



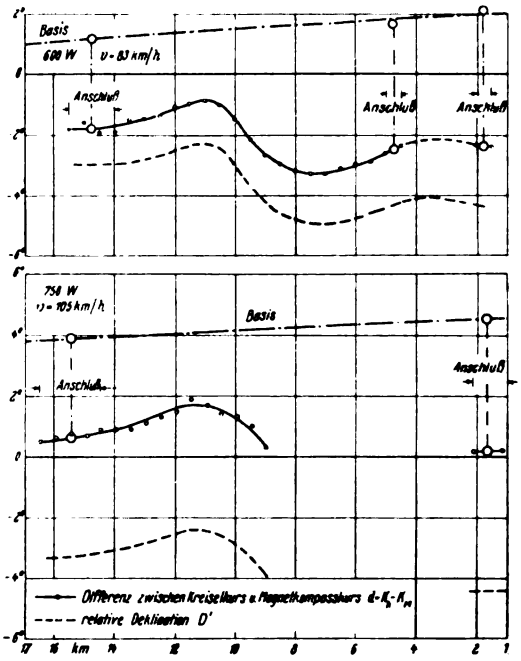


Bild 4a—e. Ermittlung der relativen Deklinationswerte aus den Differenzen zwischen Kreiselkurs und Magnetkompaßkurs.

den anderen Meßflügen rührt wohl davon her, daß irgendein eisenhaltiger Gegenstand zu nahe an den Magnetkompaß gelegt wurde. In Zahlentafel 4 sind die relativen Deklinationswerte zusammengestellt. Die D'-Werte der 3 Meßflüge in 250 m Höhe wurden dabei gemittelt. Ihr Vergleich liefert einen groben Anhalt über die tatsächlich erreichte Meßgenauigkeit, wenn auch die Messungen nicht völlig voneinander unabhängig sind. Aus den Differenzen gegen die Mittelwerte von km 5,5 bis km 11 ergab sich für die D'-Werte eines Meßflugs eine Genauigkeit von $\pm 0{,}2^0$, was sich mit der zu erwartenden Genauigkeit von $\pm 0{,}20^0$ deckt, wenn nur zufällige Fehler vorhanden wären. Die systematischen Fehler müssen also sehr klein sein.

2. Auswertung der Horizontalintensitätsmessungen.

Nach G. Fanselau [8] erhält man mit dem Doppelkompaß die Horizontalintensität H nach der Gleichung

$$H = \frac{M_1 + M_2}{e^3} \cdot D \cdot \cos\frac{\psi}{2} \cdot$$

Dabei sind M_1 und M_2 die Momente der beiden Magnetsysteme, e ihre Entfernung, D eine nur von der geometrischen Anordnung der Rosenmagnete abhängige reine Zahl

Zahlentafel 3.

Abstand vom Nullpunkt in km	Meßflug 250 O D'	250 W_{II} D'	— Mittel	250 W_I d
5,5	4,1°	4,3°	4,2°	3,1°
6	4,2°	4,4°	4,3°	3,1°
	4,4°	4,6°	4,5°	3,1°
7	4,6°	4,8°	4,7°	3,2°
	4,9°	4,9°	4,9°	3,5°
8		4,9°	4,9°	3,9°
		4,8°	4,8°	4,2°
9		4,1°	4,1°	3,6°
		3,1°	3,1°	2,7°
10				
	2,3°		2,3°	1,2°
11	2,0°		2,0°	0,7°
Summe . .			43,8°	32,3°
Mittel . .			3,98°	2,94°
Korrektion				+ 1,04°

und ψ der Spreizungswinkel der beiden Rosen. Über kürzere Zeiträume können die Momente als konstant angesehen werden. Hält man e auch konstant, dann wird

$$H = C \cdot \cos\frac{\psi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Die Instrumentenkonstante C läßt sich bei bekanntem H bestimmen.

Die Anschlußmessungen im Observatorium Wingst der Deutschen Seewarte ergaben für eine Ablenkung des Nord-

Zahlentafel 4. Zusammenstellung der relativen Deklinationswerte.

Abstand vom Nullpunkt in km	Flughöhe über Grund 250 m W_I	250 m W_{II}	250 m O	250 m Mittel	600 m	750 m
1,5		— 4,4°		— 4,4°	— 4,4°	— 4,4°
2		4,3°	— 4,2°	4,3°	4,3°	4,4°
		4,2°	4,1°	4,2°	4,2°	
3		4,1°	4,1°	4,1°	4,2°	
		4,1°	4,1°	4,1°	4,1°	
4		4,1°	4,1°	4,1°	4,1°	
		4,2°	4,1°	4,1°	4,2°	
5		4,2°	4,1°	4,2°	4,4°	
	— 4,1°	4,3°	4,1°	4,2°	4,6°	
6	4,1°	4,5°	4,2°	4,3°	4,8°	
	4,1°	4,6°	4,4°	4,4°	4,9°	
7	4,2°	4,8°	4,6°	4,5°	5,0°	
	4,5°	4,9°	4,9°	4,8°	4,9°	
8	4,9°	4,9°		4,9°	4,8°	
	5,2°	4,8°		5,0°	4,6°	
9	4,6°	4,1°		4,3°	4,2°	4,0°
	3,7°	3,1°		3,4°	3,7°	3,4°
10	2,9°			2,9°	3,0°	2,9°
	2,2°		2,3°	2,3°	2,5°	2,7°
11	1,7°		2,0°	1,9°	2,3°	2,4°
			1,9°	1,9°	2,4°	2,4°
12			1,9°	1,9°	2,6°	2,5°
			1,9°	1,9°	2,7°	2,8°
13			2,1°	2,1°	2,8°	3,1°
			2,4°	2,4°	2,9°	3,2°
14			2,7°	2,7°	3,0°	3,3°
			3,0°	3,0°	3,0°	3,3°
15			3,3°	3,3°	3,0°	
			3,5°	3,5°	3,0°	
16			3,6°	3,6°		

Digitized by Google

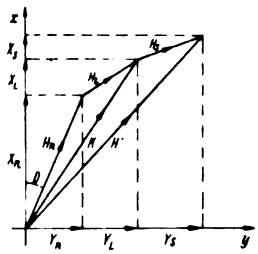


Bild 5.

punkts der oberen Rose nach Osten $\log C_E = 9{,}4730$ und für westliche Ablenkung $\log C_W = 9{,}4889$. Zur Kontrolle, ob sich die Instrumentenkonstante während des Fluges verändert hatte, wurden vor und nach dem Fluge auf dem Flughafengelände in Frankfurt a. Main die Horizontalintensität gemessen. Am 8. Juni 1939 19^{00} Uhr ergab sich H nach Abzug der Tagesvariation zu 19150 γ und am 16. Juni, 21^{00} Uhr zu 19030 γ gegenüber einem vom magnetischen Observatorium Niemegk angegebenen Wert von 19000 γ. C war also für die Relativmessungen genügend konstant geblieben. Der große zeitliche Abstand zwischen den beiden Anschlußmengen rührt davon her, daß der Flug schon am 9. Juni stattfinden sollte, der Start aber wegen ungünstigen Wetters verschoben werden mußte, und am 16. Juni war die Zeit für eine weitere Anschlußmessung vor dem Start viel zu knapp.

Die im Luftschiff gemessene Horizontalintensität H' ist die Resultierende der Horizontalkomponenten H_n des normalen Erdfeldes, H_L des Luftschiffmagnetismus und H_s des Störfeldes, Bild 5. H_n ist für die Dauer eines jeden Meßfluges als konstant anzusehen, weil die Flugrichtung annähernd parallel zu den Isodynamen verläuft und das Erdfeld in diesem Zeitraum (etwa 15 min) sich praktisch nicht ändert. Auch der Einfluß des unbekannten Schiffsmagnetismus darf für jeden Meßflug als konstant angenommen werden, da ja der Kurs so gut wie möglich beibehalten wurde. Die Änderung von H' während eines Meßflugs ist also nur auf die Änderung von H_s nach Größe und Richtung zurückzuführen.

Zerlegt man in Richtung der beiden horizontalen Achsen, so wird

$$X' = X_n + X_L + X_S$$
$$Y' = Y_n + Y_L + Y_S$$

und

$$H'^2 = H_n^2 + H_L^2 + H_S^2 + 2X_nX_L + 2X_nX_S + 2X_LX_S + 2Y_nY_L + 2Y_nY_S + 2Y_LY_S.$$

Durch Zusammenfassen der konstanten Glieder

$$H_n^2 + H_L^2 + 2X_nX_L + 2Y_nY_L = K^2$$

erhält man nach Anwendung des binomischen Satzes unter Vernachlässigung der Glieder $< 1\,\gamma$ für $X_n = K = 19000\,\gamma$, $Y_n = 1700\,\gamma$, $H_S = X_S = Y_S \leq 700\,\gamma$, $H_L = X_L = Y_L \leq 700\,\gamma$

$$H' = K + \left(\frac{X_n}{K}\cdot X_S + \frac{Y_n}{K}\cdot Y_S + \frac{H_S^2}{2K} + \frac{X_LX_S}{K} + \frac{Y_LY_S}{K} - \frac{X_n^2X_S^2}{2K^3}\right).$$

Ersetzt man in der Klammer K durch H_n, was bei den vorliegenden Messungen zulässig ist, da einem mittleren $\frac{\psi}{2}$ von 50,7° ein H' von 18800 γ entspricht, gegenüber einem H_n von etwa 18900 γ (entnommen der Karte der Isodynamen der Horizontalintensität von A. Nippoldt [9]), so ergibt sich

$$H' = K + X_S\cdot\cos D_n + Y_S\cdot\sin D_n + \frac{Y_S^2}{2H_n} + \frac{X_LX_S}{H_n} + \frac{Y_LY_S}{H_n}.$$

Auch die letzten drei Glieder dürfen gegenüber der Meßgenauigkeit vernachlässigt werden. In Höhe 250 ist $Y_{S\max} = 544\,\gamma$, also $Y_S^2/2H_n = 8\,\gamma$ und der Einfluß des Schiffsmagnetismus kann nach dem oben Gesagten als genügend klein angesehen werden. Damit hat man

$$H' = K + (X_S\cos D_n + Y_S\sin D_n) = K + H_m \qquad (24)$$

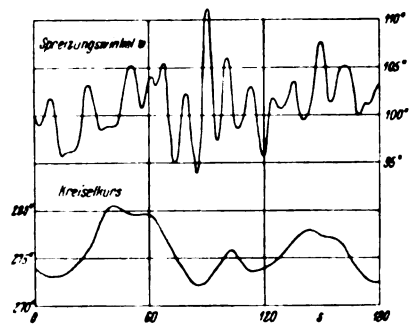


Bild 6. Schwankungen des Spreizungswinkels des Doppelkompasses.

d. h. H' setzt sich praktisch zusammen aus der während eines Meßfluges konstanten Größe K gleich der Resultierenden aus der normalen Horizontalintensität des Erdfeldes und der Horizontalintensität des Schiffsmagnetismus, und der Horizontalkomponente des Störvektors in Richtung des magnetischen Meridians. Da keine Deviationsbestimmungen vorgenommen werden konnten, ist K unbekannt, unterscheidet sich jedoch nicht sehr viel von H_n. Aus den Doppelkompaßmessungen allein läßt sich also nur die Änderung von H_m feststellen. K und damit H_m selbst erhält man durch Vergleich zwischen Messung und Rechnung.

In den Filmen wurden nun die Stellungen der beiden Rosen gegen die Ablesemarke auf $^1/_{10}{}^0$ genau abgelesen und die halben Spreizungswinkel berechnet. Bild 6 gibt einen Überblick über die Schwankungen des Spreizungswinkels. Die Periode beträgt etwa 12 s. Der zeitliche Abstand der Registrierungen ist zweckentsprechend gewählt worden. In der Regel waren die Amplituden $< \pm 5^0$, vereinzelt kamen jedoch auch solche bis zu $\pm 10^0$ vor.

Je 10 aufeinanderfolgende halbe Spreizungswinkel wurden dann gemittelt und für die Mittelwerte $\frac{\psi'}{2}$ ihr Ort im Profil berechnet, unter der Annahme, daß die Filmaufnahmen in konstanten Zeitabständen erfolgten. Je 5 dieser Mittelwerte $\frac{\psi'}{2}$ wurden nochmals gemittelt, und zwar wurden von den Werten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... die Werte 1, 2, 3, 4, 5, dann die Werte 2, 3, 4, 5, 6 usw. zusammengefaßt, mit ihrer Entfernung vom Nullpunkt des Profils als Abszisse aufgetragen und durch eine Kurve verbunden. Diesen Kurven ist $\frac{\psi}{2}$ in Zahlentafel 5 entnommen und entspricht also dem Mittelwert aus 50 Ablesungen über eine Strecke von rund 1 km. Zur weiteren Glättung wurden noch je 3 aufeinander folgende Werte der Zahlentafel 5 zu einem Mittelwert $\frac{\psi_m}{2}$ zusammengefaßt. Ungefähr dieselben Werte hätte man erhalten, wenn man nach folgender Gleichung gerechnet hätte:

$$\frac{\psi_m}{2} = \frac{1}{15}\left[\left(\frac{\psi_1'}{2} + \frac{\psi_2'}{2}\right) + 2\left(\frac{\psi_3'}{2} + \frac{\psi_4'}{2}\right) + 3\frac{\psi_5'}{2} + 2\left(\frac{\psi_6'}{2} + \frac{\psi_7'}{2}\right) + \left(\frac{\psi_8'}{2} + \frac{\psi_9'}{2}\right)\right].$$

Die Gewichtsverteilung verbürgt also wieder einen engen Anschluß an den wahren Kurvenverlauf. Schließlich wurde H' aus den Werten $\frac{\psi_m}{2}$ nach der Gleichung

$$H' = C\cdot\cos\frac{\psi_0}{2} - C\cdot\sin\frac{\psi_0}{2}\cdot\frac{\Delta^{\psi^0/_2}}{\varrho^0}\Big|\frac{\psi_0}{2} = 50^0$$
$$= \left(19100 - 397\,\Delta\frac{\psi^0}{2}\right)\gamma \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

mit dem Rechenschieber berechnet. Einer Änderung des Spreizungswinkels um 1° entsprach also eine Änderung von H um etwa 200 γ. Die obere Rose war durchweg nach Osten abgelenkt. An den Spreizungswinkeln wäre nach den Eichangaben der Seewarte noch eine Verbesserung von

Digitized by Google

— 0,01° anzubringen gewesen, die jedoch vernachlässigt wurde.

Die Wiederholung des Meßflugs 250 W liefert einen wertvollen Aufschluß über die erreichte Meßgenauigkeit. Um beide Meßflüge miteinander vergleichen zu können, mußte ein Meßflug auf den andern reduziert werden, weil die K-Werte infolge der Tagesvariation von H und der verschiedenen Kurse voneinander verschieden sind. Aus der Differenz der Summe aller H'-Werte der beiden Meßflüge ergab sich $K_{II} - K_I = +30\,\gamma$. Um diesen Betrag wurden die H'-Werte von 250 W_I reduziert und mit den entsprechenden Werten von 250 W_{II} verglichen. Aus den Differenzen berechnete sich dann nach der Formel

$$m = \sqrt{\frac{[d\,d]}{2\,n}}$$

der mittlere Fehler einer Messung (ermittelt aus 90 Ablesungen) zu $\pm 82\,\gamma$ und der mittlere Fehler des Mittels aus 2 Messungen zu $\pm 58\,\gamma$.

Der Doppelkompaß wurde schon des öfteren in Luftfahrzeugen verwendet. Bereits 1909 machte Bidlingmaier [10] Messungen im Freiballon zur magnetischen Ortsbestimmung und gibt als erreichbare Genauigkeit für eine magnetische Standlinie (Linie gleicher Horizontalintensität) 20 bis 40 γ an. M. Grotewahl [11] erprobte 1930 den für die Arktisfahrt des Grafen Zeppelin bestimmten Doppelkompaß auf einer Spanienfahrt desselben Luftschiffs und erreichte eine Genauigkeit von etwa 100 γ. Auch stellte er bereits die Forderung, »die Abnahme des Einflusses der oberflächlichen erdmagnetischen Anomalien mit zunehmender Höhe« zu untersuchen. K. Haußmann und A. Nippoldt machten dann im gleichen Jahr eine zweite Versuchsfahrt in Württemberg. Bei allen diesen Messungen wurde der Doppelkompaß unmittelbar 20- bis 40mal hintereinander abgelesen, die Ablesungen aufgeschrieben und gemittelt. Eine vollständige Messung dauerte deshalb auch rund 20 min. Durch die photographische Registrierung des Spreizungswinkels konnte die Meßdauer auf 1 min herabgedrückt werden, unter Einhaltung derselben Genauigkeit.

G. Fanselau [12] bearbeitete die Messungen von Haußmann und Nippoldt und stellte eine Abhängigkeit der Meßgenauigkeit von den Kursschwankungen des Luftschiffes fest. Bei geringen Kursschwankungen während der Messung war die Genauigkeit wesentlich höher. Verfasser muß dies bestätigen. Bild 7 zeigt den Einfluß der Kursänderung zwischen km 10 und 6 beim Meßflug 250 Ost auf den Mittelwert des Spreizungswinkels aus 50 Ablesungen. ψ ändert sich maximal um 11°, also H' um 2180 γ. Der Vorschlag Grotewahls [11], bei den H-Messungen eine Kurve zu fliegen, ist also hinfällig. Die Doppelkompaßmessungen von 250 Ost mußten aus dem oben angeführten Grunde verworfen werden.

Nachstehend soll nun der Fehler, der durch eine Kursänderung während der Doppelkompaßmessung hervorgerufen wird, erstmalig näher untersucht werden. Fliegt das Luftfahrzeug eine Kurve mit der Geschwindigkeit v und der Drehgeschwindigkeit ω, so tritt eine Zentrifugalbeschleunigung $v \cdot \omega$ auf, und die beiden Rosen des Doppelkompasses stellen sich senkrecht zur Richtung des Scheinlots, d. h.

Zahlentafel 5. Zusammenstellung der Ergebnisse der Horizontalintensitätsmessungen mit dem Doppelkompaß.

Abstand vom Nullpunkt in km	Höhe über Grund $h = 250$ m: Kurs W_I $\psi/2$ Grad	$\psi_m/2$ Grad	H' γ	$I = H'' = H' + K_{II} - K_I$ γ	Kurs W_{II} $\psi/2$ Grad	$\psi_m/2$ Grad	$II = H'$ γ	$d = I - II$ γ	$\frac{I+II}{2}$ γ	$H_m = H' - K_1$ γ	$h = 600$ m: $\psi/2$ Grad	$\psi_m/2$ Grad	H' γ	$H_m = H' - K_1$ γ
0,8	50,4				50,9						50,9			
1,3	51,2	50,87	18750	18780	50,8	50,87	18750	+ 30	18770	— 80	50,8	50,83	18770	— 120
1,8	51,0	50,97	720	750	50,9	50,90	740	+ 10	750	— 100	50,8	50,80	780	— 110
2,3	50,7	50,93	730	760	51,0	50,80	780	— 20	770	— 80	50,8	50,80	780	— 110
	51,1	51,03	690	720	50,5	50,70	820	—100	770	— 80	50,8	50,77	800	— 90
3,3	51,3	51,10	660	690	50,6	50,70	820	—130	760	— 90	50,7	50,70	820	— 70
	50,9	50,97	720	750	51,0	50,77	790	— 40	770	— 80	50,6	50,60	860	— 30
4,3	50,7	50,73	810	840	50,7	50,53	890	— 50	870	+ 20	50,5	50,53	890	0
	50,6	50,80	780	810	49,9	50,23	19010	—200	910	+ 60	50,5	50,47	910	+ 20
5,3	51,1	50,90	740	770	50,1	50,17	19030	—260	900	+ 50	50,4	50,40	940	+ 50
	51,0	50,80	780	810	50,5	50,47	18910	—100	860	+ 10	50,3	50,37	950	+ 60
6,3	50,3	50,73	810	840	50,8	50,53	890	— 50	860	+ 10	50,4	50,40	940	+ 50
	50,9	50,77	800	830	50,3	50,53	890	— 60	860	+ 10	50,5	50,43	930	+ 40
7,3	51,1	50,97	720	750	50,5	50,63	850	—100	800	— 50	50,4	50,43	930	+ 40
	50,9	50,97	720	750	51,1	51,00	700	+ 50	730	— 120	50,4	50,43	930	+ 40
8,3	50,9	50,90	740	770	51,4	51,30	580	+190	680	— 170	50,5	50,57	880	— 10
	50,9	51,07	680	710	51,4	51,40	540	+170	620	— 230	50,8	50,73	810	— 80
9,3	51,4	51,20	18630	18660	51,4	51,40	18540	+120	18600	— 250	50,9	50,87	18760	— 130
	51,3	51,07	680	710	51,4	51,23	610	+100	660	— 190	50,9	50,90	740	— 150
10,3	50,5	50,63	850	880	50,9	50,90	740	+140	810	— 40	50,9	50,93	730	— 160
	50,1	50,30	980	19010	50,4	50,53	890	+120	950	+ 100	51,0	50,90	740	— 150
11,3	50,3	50,33	970	19000	50,3	50,37	950	+ 50	970	+ 120	50,8	50,97	720	— 170
	50,6	50,63	850	18880	50,4	50,47	910	— 30	900	+ 50	51,1	51,00	700	— 190
12,3	51,0	50,80	780	810	50,7	50,73	810	0	810	— 40	51,1	50,93	730	— 160
	50,8	50,80	780	810	51,1	50,93	730	+ 80	770	— 80	50,6	50,70	820	— 70
13,3	50,6	50,67	830	860	51,0	51,03	690	+170	770	— 80	50,4	50,53	890	0
	50,6	50,70	820	850	51,0	51,00	700	+150	780	— 70	50,6	50,47	910	+ 20
14,3	50,9	50,63	850	880	51,0	50,76	800	+ 80	840	— 10	50,4	50,40	940	+ 50
	50,4	50,50	900	930	50,3	50,43	930	0	930	+ 80	50,2	50,43	930	+ 40
15,3	50,2	50,43	930	960	50,0	50,10	19060	—100	19010	+ 160	50,7	50,70	820	— 70
	50,7	50,50	900	930	50,0	49,97	19110	—180	19020	+ 170	51,2	51,13	650	— 240
16,3	50,6				49,9						51,5			
Summe			23600	24500			24460	+ 40	24500	—1000			25000	—1700

Digitized by Google

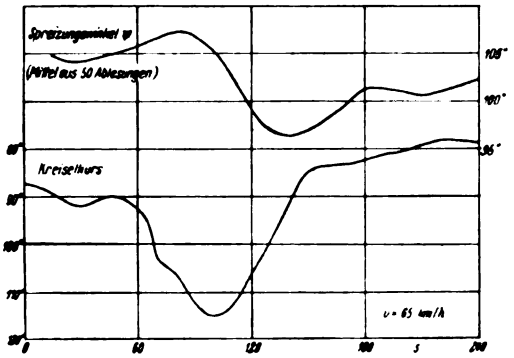


Bild 7. Änderung des Spreizungswinkels des Doppelkompasses durch Kursänderung.

der Resultierenden aus $v \cdot \omega$ und der Erdbeschleunigung g. Das Scheinlot ist hierbei um den Winkel γ gegen das wahre Lot geneigt, den man erhält aus

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v \cdot \omega}{g} \approx \gamma.$$

Man mißt also jetzt nicht mehr die Horizontalintensität, sondern die Komponente der Totalintensität T in der Ebene senkrecht zum Scheinlot.

Ist (Bild 8) γ der Winkel zwischen Scheinlot und wahrem Lot und a das Azimut der Ebene durch Scheinlot und wahres Lot, dann ist der Kosinus der Winkel zwischen Scheinlot und den 3 Koordinatenachsen

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \gamma$$
$$\cos \beta = \sin a \cdot \sin \gamma$$
$$\cos \gamma = \cos \gamma$$

und die Gleichung der Ebene durch den Ursprung senkrecht zum Scheinlot lautet:

$$x \cos a \sin \gamma + y \sin a \sin \gamma + z \cdot \cos \gamma = 0.$$

Der Punkt $P\,(X, Y, Z)$ hat also von dieser Ebene den Abstand

$$d = X \cos a \sin \gamma + Y \sin a \sin \gamma + Z \cos \gamma.$$

Die gesuchte Projektion von T auf die Ebene senkrecht zum Scheinlot ist dann

$$H_\gamma = \sqrt{T^2 - d^2}$$

also

$$\begin{aligned} H_\gamma^2 = {} & X^2 + Y^2 + Z^2 - X^2 \cos^2 a \sin^2 \gamma - \\ & - Y^2 \sin^2 a \sin^2 \gamma - Z^2 \cos^2 \gamma - 2\,X\,Y \sin a \cos a \sin^2 \gamma \\ & - 2\,X\,Z \cos a \sin \gamma \cos \gamma - 2\,Y\,Z \sin a \sin \gamma \cos \gamma \\ = {} & H^2 (1 + \operatorname{tg}^2 J - \cos^2 D \cos^2 a \sin^2 \gamma \\ & - \sin^2 D \sin^2 a \sin^2 \gamma - \operatorname{tg}^2 J \cos^2 \gamma \\ & - 2 \cos D \sin D \sin a \cos a \sin^2 \gamma \\ & - 2 \cos D \operatorname{tg} J \cos a \sin \gamma \cos \gamma \\ & - 2 \sin D \operatorname{tg} J \sin a \sin \gamma \cos \gamma. \end{aligned}$$

Für kleine Winkel γ kann man setzen $\sin \gamma = \gamma$ und $\cos \gamma = 1$ und erhält dann unter Vernachlässigung der Glieder mit γ^2

$$H_\gamma^2 = H^2 (1 - 2 \operatorname{tg} J \cdot \gamma (\cos a \cos D + \sin a \cdot \sin D))$$

also

$$H_\gamma = H - \gamma \cdot H \cdot \operatorname{tg} J \cos (a - D).$$

Ist der Kurs über Grund z und setzt man den Wert für γ ein, so erhält man hieraus den Neigungsfehler

$$\Delta H = \mp H \frac{v \cdot \omega}{g} \operatorname{tg} J \cos (90 + z - D) \quad \text{Drehung n.} \begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix} \quad \ldots \quad (26)$$

ΔH erreicht seinen Höchstwert für $z = D - 90^0$ und $z = D + 90^0$, also auf Kursen senkrecht zum magnetischen Meridian und seinen Kleinstwert, nämlich Null, für $z = D$ und $z = D + 180^0$; also auf Kursen in Richtung des magnetischen Meridians.

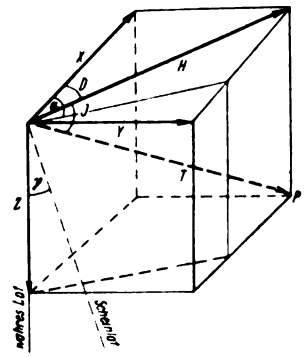


Bild 8.

Für $H = 19000\ \gamma$; $\operatorname{tg} J = 2{,}2$; $g = 10\ \mathrm{m/s^{-2}}$ und einen Kurs senkrecht zum magnetischen Meridian erhält man folgende Zahlentafel der Neigungsfehler ΔH.

Zahlentafel 6. Tafel der Neigungsfehler ΔH.

Drehkreis in Zeitminuten	ω in Grad/s	Fluggeschwindigkeit in km/h 50 γ	100 γ	150 γ	200 γ
5	1,2	1220	2440	3660	4880
10	0,6	610	1220	1830	2440
20	0,3	305	610	915	1220
60	0,1	102	203	305	406

Hieraus geht klar hervor, daß während der Messung der Kurs so gut wie irgend möglich einzuhalten ist und daß, um die verbleibenden unvermeidlichen Kursschwankungen unschädlich zu machen, in Richtung des magnetischen Meridians geflogen werden muß.

Bei der Kursänderung im Meßflug 250 Ost betrug die mittlere Drehgeschwindigkeit der Rechts- und Linksdrehung (Bild 7) 0,75°/s. Mit $v = 65$ km/h berechnen sich für einen Kurs von 100° die Neigungsfehler zu — 970 bzw. + 970 γ, was mit dem gemessenen Unterschied von 2180 γ zwischen den beiden Extremlagen gut übereinstimmt. Nun finden auch die verhältnismäßig großen Fehler der H-Messungen auf den Ost-Westkursen ihre Erklärung, zumal es sehr schwierig ist, über Waldgelände einen vorgeschriebenen Kurs einzuhalten. Der Hauptzweck der Messungen war jedoch die Messung der Deklinationsänderung, die aus zwei Gründen einen Flug ist ost-westlicher Richtung erfordert.

1. Überfliegt man das Störgebiet in ost-westlicher Richtung, dann wird die Magnetnadel einmal nach links und einmal nach rechts vom magnetischen Meridian abgelenkt, die Rose dreht sich also etwa um den doppelten Betrag von D_S, was bei der geringen Meßgenauigkeit von Bedeutung ist, da D_S selbst nur wenige Grade beträgt. Auf nord-südlichen Kursen erhält man bei symmetrischen Störgebieten, wie etwa dem vorliegenden, beim Überfliegen der Mitte überhaupt keinen Ausschlag, da das Störfeld nur eine Stärkung oder Schwächung des Richtmomentes der Nadel, aber keine Drehung hervorruft.

2. Die durch die unvermeidlichen Kursschwankungen hervorgerufenen Neigungsablenkungen der Rose

$$\varepsilon = \frac{v \cdot \omega}{g} \operatorname{tg} J \cdot \cos z$$

werden auf Ost- oder Westkurs Null.

Für Deklinationsmessungen sind also ost-westliche und für Horizontalintensitätsmessungen nord-südliche Kurse notwendig.

V. Berechnung nach dem Malkinschen Verfahren und Vergleich mit der Messung.

An Hand der Karte von G. Siemens [6] der Z-Isanomalen 1 : 50000 der magnetischen Anomalie von Bockwitz-Reudnitz wurden nach den Formeln

$$X_S = \frac{1}{8} [U_0 + 0{,}71\,U_{45} - 0{,}71\,U_{135} - U_{180} - 0{,}71\,U_{225} + 0{,}71\,U_{315}] \quad \ldots \quad (18)$$

Digitized by Google

$$Y_S = \frac{1}{8}[0{,}71\,U_{45} + U_{90} + 0{,}71\,U_{135} - 0{,}71\,U_{225} - U_{270} - 0{,}71\,U_{315}] \quad \ldots \quad (19)$$

$$U = \frac{\Delta u}{3}(Z_0 f_0 + 4 Z_1 f_1 + Z_2 f_2) + \frac{\Delta u}{3}(Z_2 f_2 + 4 Z_3 f_3 + Z_4 f_4) + \ldots = \frac{1}{3}\sum Z_n \cdot \lambda_n \quad \ldots \quad (15a)$$

$$f_n = \frac{(n \cdot \Delta u)^2}{[(n \cdot \Delta u)^2 + 1]^{3/2}} \quad \ldots \quad (15b)$$

$$u = \frac{l}{h} \quad \ldots \quad (14)$$

die beiden Horizontalkomponenten des Störvektors in den Achsenrichtungen berechnet. Das Gelände, dessen Höhe zwischen 90 und 200 m ü. N.N. schwankt, wurde als eben angesehen und eine mittlere Geländehöhe von 150 m ü. N.N. der Berechnung zugrunde gelegt. Der Einfluß des Störvektors auf die normale Deklination ergibt sich dann aus

$$\operatorname{tg}(D_n + D_S) = \frac{Y_n + Y_S}{X_n + X_S} = \frac{Y_n}{X_n + X_S} + \frac{Y_S}{X_n + X_S}.$$

Da X_S und Y_S gegenüber X_n klein sind, darf man schreiben

$$\operatorname{tg} D_n + \frac{D_S}{\cos^2 D_n} = \frac{Y_n}{X_n} + \frac{Y_S}{X_n},$$

woraus mit $\cos^2 D_n = 1$ ($D_n = -4{,}0°$) folgt

$$D^0_S = \frac{Y_S}{X_n} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Mit $X_n = 18800\,\gamma$ und Y_S in γ wird

$$D^0_S = 0{,}00305 \cdot Y_S \quad \ldots \quad (27)$$

Die praktische Durchführung der Berechnung wird am besten an Hand eines Beispiels gezeigt, etwa für den Aufpunkt im Profil AB, in 8,3 km Entfernung vom Anfangspunkt und 250 m Höhe über Grund. Mit Hilfe des auf Pauspapier aufgetragenen Netzes, Bild 9, wurden der Isanomalenkarte die Z_S-Werte in den Entfernungen $n \cdot 0{,}125$ km von der Horizontalprojektion des Aufpunkts ($n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 26 \ldots 46$, z. T. bis 62) längs den 8 Radien 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° entnommen und in eine Zahlentafel geschrieben (Zahlentafel 7). Diese Z_S-Werte wurden dann mit den der Höhe des Aufpunkts entsprechenden Koeffizienten λ multipliziert und addiert. In Zahlentafel 8 sind diese Koeffizienten für Höhen von 1 bis 5000 m über Grund zusammengestellt. Wie man sieht, wandert der Höchstwert von λ mit zuneh-

Zahlentafel 7. Zahlenbeispiel für die Berechnung der beiden Horizontalkomponenten des Störvektors.

Profil AB; km 8,3; Höhe 250 m

α / l_{km}	Z 0° γ	45° γ	90° γ	135° γ	180° γ	225° γ	270° γ	315° γ	λ
0,125	900	730	700	760	900	1 050	1 100	1 020	0,36
0,250	870	670	650	680	950	1 250	1 400	1 220	0,35
0,375	850	600	600	660	1 000	1 600	1 640	1 340	0,77
0,500	850	570	660	630	1 000	1 730	1 730	1 400	0,36
0,625	850	550	720	640	970	1 780	1 870	1 450	0,64
0,750	850	550	760	650	910	1 820	2 000	1 450	0,43
1,00	850	550	800	530	670	1 650	1 950	1 310	0,91
1,25	650	570	790	330	490	1 020	1 900	1 180	0,38
1,50	660	620	470	270	400	680	1 500	1 090	0,64
1,75	500	620	270	200	300	530	1 360	1 030	0,42
2,25	70	400	150	120	180	330	1 140	920	0,87
2,75	— 80	170	100	60	130	220	700	430	0,36
3,25	— 130	— 50	80	40	100	150	370	70	0,61
3,75	— 130	— 90	60	30	80	120	220	380	0,26
4,25	— 70	— 70	50	0	70	90	170	430	0,47
4,75	— 50	— 70	250	0	50	70	170	400	0,21
5,25	— 40	— 70	190	0	30	70	100	160	0,38
5,75	— 40	— 70	120	0	10	60	60	30	0,18
0,125	320	260	250	270	320	380	400	370	
0,250	300	230	230	240	330	440	490	430	
0,375	650	460	460	510	770	1 230	1 260	1 020	
0,500	310	200	240	230	360	620	620	500	
0,625	540	350	460	410	620	1 140	1 200	930	
0,750	360	240	330	290	390	780	860	620	
1,00	770	500	730	480	610	1 500	1 780	1 200	
1,25	250	220	300	130	190	390	720	450	
1,50	420	400	300	170	260	430	960	700	$Z \cdot \lambda$
1,75	210	260	110	80	120	220	570	430	
2,25	60	350	130	100	160	290	990	800	
2,75	— 20	60	40	20	40	80	260	160	
3,25	— 80	— 30	50	20	60	90	230	40	
3,75	— 30	— 20	20	10	20	30	60	100	
4,25	— 30	— 30	20	0	30	40	80	200	
4,75	— 10	— 10	50	0	10	10	40	80	
5,25	— 20	— 30	70	0	10	30	40	60	
5,75	— 10	— 10	20	0	0	10	10	10	
	3 990	3 400	3 810	2 960	4 300	7 710	10 570	8 100	
0,71 ×	2 420		2 420		2 100		5 480		
0,71 ×	5 740		2 100		5 480		5 740		
	12 150		8 330		11 880		21 790		
	11 880						8 330		
	270						13 460		

$X_S = +11\,\gamma$ $\quad Y_S = -561\,\gamma$ $\quad D_S = -1{,}71°$

Digitized by Google

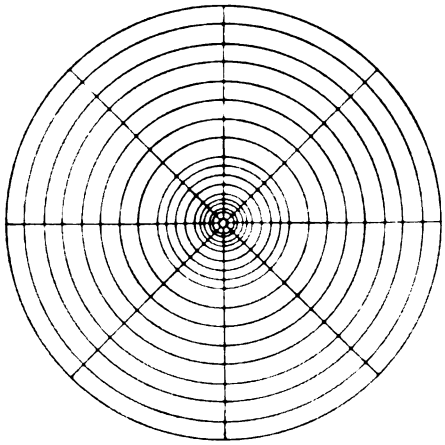


Bild 9. Netz zur Entnahme der Z_s-Werte aus der Isanomalenkarte.

mender Höhe immer weiter weg vom Aufpunkt. Für geringe Höhen beeinflussen also besonders die Z_S-Werte in der Nähe das Ergebnis, für größere Höhen die weiter entfernten Z_S-Werte. Für $h > 250$ m hätten also die Intervalle in der Nähe des Aufpunkts größer gewählt werden können. Das Netz wurde jedoch für sämtliche Höhen des Aufpunkts beibehalten, weil so die Z_S-Werte nur ein einziges Mal der Karte entnommen werden mußten. Die Produkte $Z \cdot \lambda$ (Zahlentafel 7) wurden hierauf addiert und aus den Summen gemäß den Gleichungen (15a), (18) und (19) X_S und Y_S berechnet, woraus sich dann wieder nach (27) D_S ergab. Sämtliche Rechnungen wurden mit dem Rechenschieber gemacht.

In Zahlentafel 9 sind die so für die Profile AB und CD, 400 m nördlich AB, berechneten D_S-Werte zusammengestellt. Das Profil AB entspricht den Bodenmessungen, CD der mittleren Route der 3 Meßflüge 250 W_I, 250 W_{II} und 600 W, auf denen auch die Horizontalintensität gemessen wurde. Die 5 Flugstrecken der Deklinationsmessungen liegen im Mittel 300 m nördlich AB. Die diesem Profil EF entsprechenden D_S-Werte wurden zwischen AB und CD geradlinig interpoliert. Wie man sieht ist die Tatsache, daß die Flugstrecken gegenüber den Bodenmessungen etwas zu weit nach Norden geraten sind, nicht weiter störend, da die Deklinationswerte in den Anschlußstrecken im Profil AB und EF fast die gleichen sind. Weiter kann man Zahlentafel 9 entnehmen, daß sich die Deklination in den Anschlußstrecken bis 1500 m Höhe praktisch nicht ändert. Die oben gemachte Voraussetzung trifft also für die geflogenen Höhen zu.

Für Höhen größer als 1500 m müßte allerdings die Kreiselauswanderung anders bestimmt werden, etwa photogrammetrisch. Hierbei wäre das Gelände am besten mit einer Weitwinkelkamera zu photographieren, wobei die

Zahlentafel 8. Tafel der λ.

l km	n	h = Höhe über Grund in m						
		1	250	600	750	1500	3000	5000
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,125	1	4,00	0,36	0,03	0,02	0,00	0,00	0,00
0,250	2	1,00	0,35	0,06	0,03	0,00	0,00	0,00
0,375	3	1,34	0,77	0,20	0,12	0,02	0,00	0,00
0,500	4	0,50	0,36	0,13	0,09	0,02	0,00	0,00
0,625	5	0,80	0,64	0,30	0,21	0,05	0,01	0,00
0,750	6	0,52	0,43	0,24	0,18	0,04	0.01	0,00
1,00	8	1,00	0,91	0,63	0,51	0,17	0,03	0,01
1,25	10	0,40	0,38	0,29	0,25	0,10	0,02	0,01
1,50	12	0,67	0,64	0,53	0,48	0,24	0,06	0,02
1,75	14	0,43	0,42	0,36	0,33	0,19	0,05	0,02
2,25	18	0,89	0,87	0,80	0,76	0,51	0,19	0,06
2,75	22	0,36	0,36	0,34	0,33	0,25	0,11	0,04
3,25	26	0,62	0,61	0,58	0,57	0,46	0,24	0,10
3,75	30	0,27	0,26	0,26	0,25	0,21	0,13	0,06
4,25	34	0,47	0,47	0,46	0,45	0,39	0,26	0,13
4,75	38	0,21	0,21	0,21	0,20	0,18	0,13	0,07
5,25	42	0,38	0,38	0,37	0,37	0,34	0,25	0,14
5,75	46	0,17	0,18	0,17	0,17	0,16	0,12	0,07
6,25	50	0,32	0,32	0,32	0,31	0,29	0,24	0,15
6,75	54	0,15	0,15	0,15	0,15	0,14	0,11	0,08
7,25	58	0,28	0,28	0,27	0 27	0,26	0,22	0,15
7 75	62	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,10	0,08

Zeitabstände zwischen 2 Aufnahmen so zu wählen wären, daß sich die Bilder gegenseitig überdecken. Gleichzeitig wäre die Stellung des Kreisels mitzuphotographieren. Aus den angenähert senkrechten Aufnahmen und einigen terrestrisch bekannten Paßpunkten ließe sich dann sehr genau nach den Methoden der Luftbildmessung das Azimut der Bildkoordinatenachsen gegen den Meridian bestimmen. Die Änderung des Unterschieds zwischen Bildazimut und Kreiselangabe wäre dann die Auswanderung des Kreisels. Man könnte jetzt sogar einen Flugzeugkurskreisel verwenden, wenn man die Zeitabstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Aufnahmen genügend eng wählen würde. Diese Methode ist meines Erachtens auch die beste zur Messung der Änderung der Deklination mit der Höhe über ungestörten Gebieten.

In Zahlentafel 10 werden nun die gemessenen relativen Deklinationswerte D' mit den berechneten D_s verglichen. Zu diesem Zweck müssen zunächst die Werte

$$D' = D_n + c + D_S = C + D_S,$$

die sich zusammensetzen aus den normalen, für die Meßstrecke als konstant anzusehenden Deklination D_n, einem konstanten Glied c und dem Einfluß des Störgebiets, reduziert werden, d. h. es ist die Additionskonstante C zu ermitteln. Der wahrscheinlichste Wert für C ist aber das Mittel aus den Differenzen $D' - D_S$ sämtlicher Vergleichspunkte. Die Bodenwerte wurden jedoch zur Bestimmung von C nicht herangezogen, weil sich hier die Höhenunterschiede

Zahlentafel 9. Einfluß des Störgebiets auf die Deklination. Zusammenstellung der berechneten Werte D_S.

Profil	Höhe über Grund in m	Abstand vom Nullpunkt in km												
		3,3	4,3	5,3	6,3	7,3	8,3	9,3	10,3	11,3	12,3	13,3	14,3	15,3
AB	1	−0,38°	−0,45°	−0,66°	−1,10°	−1,45°	−2,54°	+0,11°	+1,47°	+2 06°	+1,10°	+0,92°	+0,66°	+0,40°
EF			−0,47°	−0,76°								+0,91°	+0,67°	
CD			−0,47°	−0,79°								+0,91°	+0,67°	
AB	250	−0,38°	−0,45°	−0,63°	−0,97°	−1,21°	−1,71°	+0,03°	+1,23°	+1,59°	+1,04°	+0,80°	+0,62°	+0,40°
EF			−0,47°	−0,67°	−0,95°	−1,10°	−1,58°	−0,13°	+1,16°	+1,64°	+1,03°	+0,84°	+0,60°	
CD			−0,47°	−0,68°	−0,94°	−1,06°	−1,54°	−0,18°	+1,13°	+1,66°	+1,02°	+0,85°	+0,59°	
AB	600	−0,38°	−0,45°	−0,59°	−0,76°	−0,97°	−1,04°	0,00°	+0,87°	+1,13°	+0,85°	+0,64°	+0,50°	+0,40°
EF			−0,45°	−0,60°	−0,76°	−0,90°	−1,00°	−0,11°	+0,83°	+1,15°	+0,85°	+0,74°	+0,54°	
CD			−0,45°	−0,60°	−0,76°	−0,87°	−0,99°	−0,15°	+0,81°	+1,16°	+0,85°	+0,77°	+0,56°	
$AB=EF$	750	−0,35°	−0,43°	−0,56°	−0,73°	−0,89°	−0,89°	−0,04°	+0,76°	+1,01°	+0,82°	+0,61°	+0,49°	+0,40°
AB	1500	−0,34°		−0,43°		−0,52°	−0,42°		+0,36°	+0,53°		+0,51°		+0,37°
AB	3000	−0,24°		−0,26°		−0,22°	−0,15°		+0,11°	+0,20°		+0,30°		+0,25°
AB	5000	−0,14°		−0,13°		−0,09°	−0,05°		+0,04°	+0,08°		+0,14°		+0,16°

Digitized by Google

im Gelände bei den berechneten Werten am stärksten bemerkbar machen. C ergab sich aus den Messungen im Luftschiff zu $-3{,}60^0$ und aus den Bodenmessungen allein zu $-3{,}82^0$. Hierauf wurden sämtliche relativen Deklinationsmessungen, auch die Bodenmessungen, um $-3{,}6^0$ reduziert und die Unterschiede zwischen $D_{s\,\text{berechnet}}$ und $D_{s\,\text{gemessen}}$ gebildet. Hierbei ergab sich eine mittlere Abweichung von nur $\pm 0{,}23^0$. Sogar die Bodenmessungen stimmen auf $\pm 0{,}38^0$ mit der Rechnung überein. Diese große Genauigkeit überrascht um so mehr, wenn man sich daran erinnert, daß die Messungen im Fluge mit seinen vielen Fehlereinflüssen auf Kreisel- und Magnetkompaßkurs gemacht wurden. Auch die Berechnung wurde verhältnismäßig grob durchgeführt. Trotzdem muß ihr eine größere Genauigkeit als der Messung zugesprochen werden, da die mittlere Abweichung zwischen Messung und Rechnung mit $\pm 0{,}23^0$ fast ganz auf die Unsicherheit der Messung mit $\pm 0{,}20^0$ zurückzuführen ist. Dies beweist, daß die Berechnung nach dem Malkinschen Verfahren außerordentlich leistungsfähig ist, so daß schon mit mäßigem Rechenaufwand gute Näherungswerte erhalten werden. Die zweite Dezimalstelle der D_s-Werte in Zahlentafel 9 ist allerdings nur mehr eine Rechengröße. Je mehr sich der Aufpunkt der Erdoberfläche nähert, um so mehr wird das Ergebnis durch die wechselnde Geländehöhe beeinflußt. In Bild 10 sind die Ergebnisse der Messung und Rechnung dargestellt. In den mit einem Kreis bezeichneten Punkten wurde D_s berechnet bzw. am Boden gemessen. Die zwischen km 7 und 8 in Höhe 250 rechnerisch noch vorhandene kleine Einbuchtung kann in den Messungen wegen der Art der Mittelbildung natürlich nicht mehr erscheinen. Die gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung berechtigt uns nun auch, den für die größeren Höhen berechneten D_s-Werten Realität zuzusprechen.

In Bild 11 sind deshalb die Isanomalen der Deklination im Profil $A\,B$ bis zu 5 km Höhe dargestellt. Dem Isanomalenbild liegen die berechneten Werte zugrunde. Am Boden wurden jedoch die gemessenen Werte benutzt, weil sich hier der Einfluß der Geländehöhenunterschiede auf die Rechnung am stärksten bemerkbar macht. Die rasche Abnahme nach oben kommt hier besonders deutlich zum Ausdruck. Schon in 1 km Höhe ist die durch das Störgebiet verursachte Deklinationsänderung kleiner als 1^0.

In Zahlentafel 11 sind die Horizontalkomponenten H_m der Störvektoren in Richtung des normalen magnetischen Meridians nach Gleichung (24) berechnet. D_n wurde dem

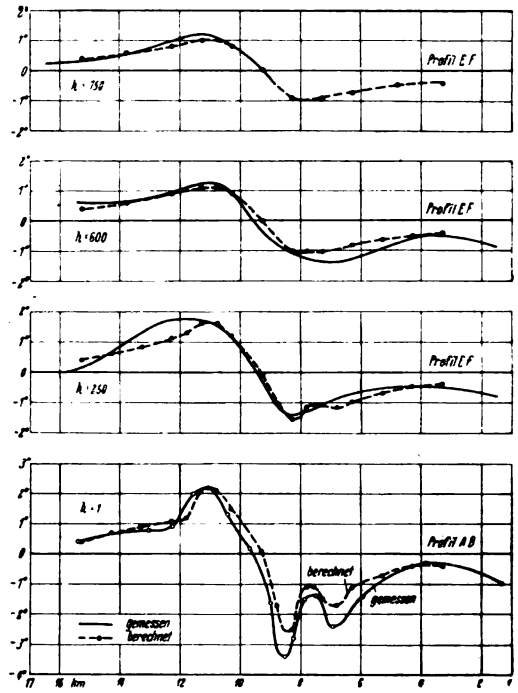


Bild 10. Einfluß des Störgebiets auf die normale Deklination in verschiedenen Höhen. Vergleich zwischen Messung und Rechnung.

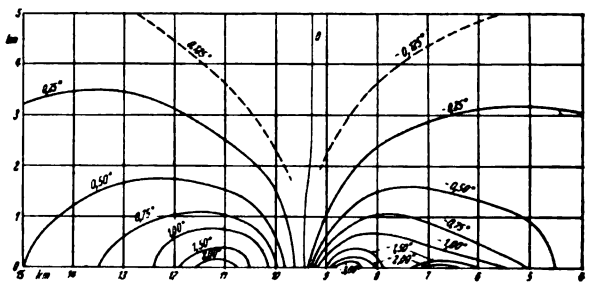


Bild 11. Isanomalen der Deklination im Profil $A\,B$.

Meßtischblatt Belgern 1 : 25000 und der Isogonenkarte 1935 von Nippoldt entnommen und ergab sich beide Male

Zahlentafel 10. Vergleich zwischen dem gemessenen und berechneten Einfluß des Störgebiets auf die Deklination.

Nr.	km	$h = 1$					250					600					750				
		D' Grad	D_s ber. Grad	$C = D' - D_s$ Grad	D_s gem. Grad	v Grad	D' Grad	D_s ber. Grad	C Grad	D gem. Grad	v Grad	D' Grad	D_s ber. Grad	C Grad	D_s gem. Grad	v Grad	D' Grad	D_s ber. Grad	C Grad	D_s gem. Grad	v Grad
1	3,3	− 3,9	−0,4	− 3,5	−0,3	−0,1	− 4,1	−0,4	− 3,7	−0,5	+0,1	− 4,1	−0,4	− 3,7	−0,5	+0,1					
2	4,3	− 4,0	−0,4	− 3,6	−0,4	0,0	− 4,1	−0,5	3,6	−0,5	0,0	− 4,2	−0,5	3,7	−0,6	+0,1					
3	5,3	− 4,5	−0,7	3,8	−0,9	+0,2	− 4,2	−0,7	3,5	−0,6	−0,1	− 4,6	−0,6	4,0	−1,0	+0,4					
4	6,3	− 5,5	−1,1	4,4	−1,9	+0,8	− 4,4	−1,0	3,4	−0,8	−0,2	− 4,9	−0,8	4,1	−1,3	+0,5					
5	7,3	− 5,3	−1,5	3,8	−1,7	+0,2	− 4,7	−1,1	3,6	−1,1	0,0	− 5,0	−0,9	4,1	−1,4	+0,5					
6	7,8	− 5,0	−1,1	3,9	−1,4	+0,3	− 4,9	−1,2	3,7	−1,3	−0,1	− 4,8	−1,0	3,8	−1,2	+0,2					
7	8,3	− 6,7	−2,5	4,2	−3,1	+0,6	− 5,0	−1,6	3,4	−1,4	−0,2	− 4,7	−1,0	3,7	−1,1	+0,1					
8	9,3	− 4,3	+0,1	4,4	−0,7	+0,8	− 3,8	−0,1	3,7	−0,2	+0,1	− 3,9	−0,1	3,8	−0,3	+0,2	− 3,6	0,0	− 3,6	0,0	0,0
9	10,3	− 2,5	+1,5	4,0	+1,1	+0,4	− 2,5	+1,2	3,7	+1,1	+0,1	− 2,7	+0,8	3,5	+0,9	−0,1	− 2,8	+0,8	3,6	+0,8	0,0
10	10,8	− 1,6	+2,1	3,7	+2,0	+0,1	− 2,0	+1,6	3,6	+1,6	0,0	− 2,3	+1,1	3,4	+1,3	−0,2					
11	11,3	− 1,4	+2,1	3,5	+2,2	−0,1	− 1,9	+1,6	3,5	+1,7	−0,1	− 2,4	+1,2	3,6	+1,2	0,0	− 2,4	+1,0	3,4	+1,2	−0,2
12	12,3	− 2,7	+1,1	3,8	+0,9	+0,2	− 1,9	+1,0	2,9	+1,7	−0,7	− 2,7	+0,9	3,6	+0,9	0,0	− 2,6	+0,8	3,4	+1,0	−0,2
13	13,3	− 2,8	+0,9	3,7	+0,8	+0,1	− 2,3	+0,8	3,1	+1,3	−0,5	− 2,9	+0,7	3,6	+0,7	0,0	− 2,9	+0,6	3,5	+0,7	−0,1
14	14,3	− 2,9	+0,7	3,6	+0,7	0,0	− 2,9	+0,6	3,5	+0,7	−0,1	− 3,0	+0,5	3,5	+0,6	−0,1	− 3,2	+0,5	3,7	+0,4	+0,1
15	15,3	− 3,1	+0,4	3,5	+0,5	−0,1	− 3,4	+0,4	3,8	+0,2	+0,2	− 3,0	+0,4	3,4	+0,6	−0,2	− 3,3	+0,4	3,7	+0,3	+0,1
Summe		−56,2	+1,2	−57,4	−2,2	+3,4	−52,1	+0,6	−52,7	+1,9	−1,3	−55,2	+0,3	−55,5	−1,2	+1,5	−20,8	+4,1	−24,9	+4,4	−0,3
Mittel				− 3,82					− 3,51					− 3,70					− 3,56		

Gesamtmittel: $C = -3{,}60^0$

Mittlere Abweichung zwischen Messung und Rechnung

$m = \pm 0{,}38^0$ | $m = \pm 0{,}23^0$

Digitized by Google

zu $-4{,}0^0$. In den magnetischen Angaben der Meßtischblätter kommt das Störgebiet gar nicht zum Vorschein.

Zahlentafel 12 zeigt den Vergleich der gemessenen Horizontalintensitätsänderung mit der berechneten. Die H'-Werte von Höhe 250 wurden mit doppeltem Gewicht eingeführt, da sie das Mittel aus 2 Messungen sind. Für eine einfache Messung (ermittelt aus 90 Ablesungen) ergab sich eine mittlere Abweichung gegenüber den berechneten Werten von $\pm 77\,\gamma$, was mit der nach den Differenzen zwischen 250 W_I und 250 W_{II} zu erwartenden Genauigkeit von $\pm 82\,\gamma$ gut übereinstimmt. Die Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Werten lassen sich demnach auch hier fast ausschließlich als Meßfehler betrachten.

Bild 12 zeigt die gemessenen und berechneten H_m-Werte. Da die zu messenden Größen selbst von der Größenordnung der Meßgenauigkeit sind, können die Kurven natürlich nicht so gut übereinstimmen wie bei den Deklinationsmessungen.

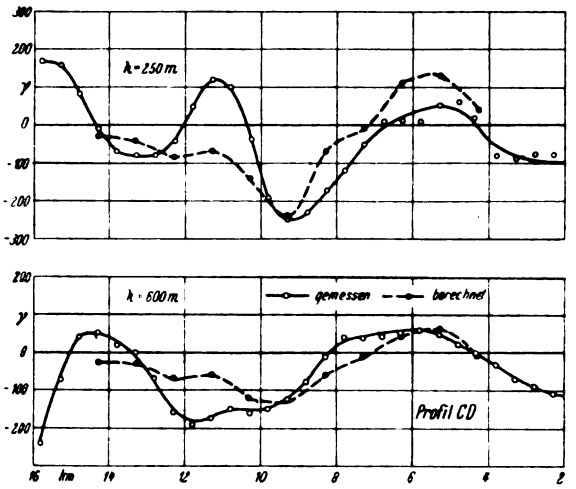


Bild 12. Horizontalkomponente des Störvektors in Richtung des normalen magnetischen Meridians.

VI. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die in verschiedenen Höhen über dem Störgebiet gemessenen Deklinations- und Horizontalintensitätswerte stimmen mit den nach dem Malkinschen Verfahren aus der Karte der Z-Isanomalen berechneten Werten gut überein. Der Vergleich zeigt, daß die Berechnung nach dem Malkinschen Verfahren schon mit mäßigem Rechenaufwand Näherungswerte liefert, die genauer als die Messungen sind, da die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung im wesentlichen auf die Ungenauigkeit der Messungen zurückzuführen sind. Eine Berechnung aus den X- und Y-Komponenten der Störvektoren muß naturgemäß zu demselben Ergebnis führen, da ja die drei Komponenten nicht voneinander unabhängig sind. Es ist also möglich, die Änderung der Elemente magnetischer Störgebiete mit der Höhe mit jeder gewünschten Genauigkeit potentionaltheoretisch zu berechnen, sofern die Werte an der Erdoberfläche entsprechend genau bekannt sind. Ja, es genügt sogar die Kenntnis der Vertikalkomponente allein. Das Malkinsche Verfahren setzt allerdings voraus, daß das Störgebiet als Ebene betrachtet werden kann. Die topographischen Höhenunterschiede dürfen also nicht zu groß sein, während die Erdkrümmung wegen der örtlich engen Begrenzung der Störgebiete immer vernachlässigt werden darf.

Wie die Messung und Rechnung weiter zeigt, nimmt der Einfluß dieser für Deutschland immerhin sehr starken Anomalie mit der Höhe rasch ab, so beträgt z. B. die größte

Zahlentafel 11. Horizontalkomponente des Störfeldes in Richtung des normalen magnetischen Meridians (Profil CD).

Abstand vom Nullpunkt in km	$h = 250$ m					$h = 600$ m				
	X_s γ	Y_s γ	$X_s \cos D_n$ γ	$Y_s \sin D_n$ γ	H_m γ	X_s γ	Y_s γ	$X_s \cos D_n$ γ	$Y_s \sin D_n$ γ	H_m γ
4,3	+ 25	−153	+ 25	+11	+ 36	− 18	−147	− 18	+10	− 8
5,3	+110	−224	+110	+16	+126	+ 43	−196	+ 43	+14	+ 57
6,3	+ 91	−310	+ 91	+22	+113	+ 25	−248	+ 25	+17	+ 42
7,3	− 30	−348	− 30	+24	− 6	− 33	−285	− 33	+20	− 13
8,3	−100	−505	−100	+35	− 65	− 82	−325	− 82	+23	− 59
9,3	−245	− 59	−244	+ 4	−240	−135	− 49	−135	+ 3	−132
10,3	−116	+372	−116	−26	−142	−106	+264	−106	−18	−124
11,3	− 36	+544	− 36	−38	− 34	− 35	+380	− 35	−27	− 62
12,3	− 61	+335	− 61	−23	− 84	− 49	+278	− 49	−19	− 68
13,3	− 20	+280	− 20	−20	− 40	− 12	+252	− 12	−18	− 30
14,3	− 16	+195	− 16	−14	− 30	− 12	+185	− 12	−13	− 25

Zahlentafel 12. Vergleich zwischen der gemessenen und berechneten Horizontalkomponente des Störvektors in Richtung des normalen magnetischen Meridians.

Nr.	km	Höhe über Grund in m: 250					600				
		H' γ	H_m berechnet γ	$K = H_m - H'$ γ	H_m gemessen γ	$v = H_{m\,ber.} - H_{m\,gem.}$ γ	H' γ	H_m berechnet γ	K γ	H_m gemessen γ	v γ
1	4,3	18870	+ 40	−18830	+ 20	+ 20	18890	− 10	−18900	0	− 10
2	5,3	900	+130	710	+ 50	+ 80	940	+ 60	880	+ 50	+ 10
3	6,3	860	+110	750	+ 10	+100	940	+ 40	900	+ 50	− 10
4	7,3	800	− 10	810	− 50	+ 40	930	− 10	940	+ 40	− 50
5	8,3	680	− 70	750	−170	+100	880	− 60	940	− 10	− 50
6	9,3	600	−240	840	−250	+ 10	760	−130	890	−130	0
7	10,3	810	−140	950	− 40	−100	730	−120	850	−160	+ 40
8	11,3	970	− 70	19040	+120	−190	720	− 60	780	−170	+110
9	12,3	810	− 80	890	− 40	− 40	730	− 70	800	−160	+ 90
10	13,3	770	− 40	810	− 80	+ 40	890	− 30	920	− 0	− 30
11	14,4	840	− 30	870	− 10	− 20	940	− 30	970	+ 50	− 80
Summe		8910	−400	− 9310	−440	+ 40	9350	−420	9770	−440	+ 20
Mittel			$K_1 = -18850$					$K_2 = -18890$			

Mittlere Abweichung zwischen einer einfachen Messung und Rechnung: $m = \pm 77\,\gamma$.

Digitized by Google

Deklinationsanomalie in 1000 m Höhe nur mehr 0,8° gegenüber 3,5° am Boden. Ähnlich starke Anomalien sind bei uns nur noch in Ostpreußen anzutreffen. Alle übrigen größeren Störgebiete Deutschlands haben, wie die Haußmannsche Karte der Linien gleicher Mißweisung im Deutschen Reiche von 1930 zeigt, auf die Deklination einen geringeren Einfluß. Einzelvorkommen mit stärkeren Störungen (Harz, Kaiserstuhl usw.) sind örtlich so eng begrenzt, daß sie mit der Höhe noch rascher abklingen müssen wie die Bockwitzer Anomalie, denn bei der Integration wird die »wirksame Fläche« verschwindend klein gegenüber der ganzen Integrationsfläche. Für Deutschland läßt sich also mit Bestimmtheit sagen, daß der Einfluß von magnetischen Störgebieten auf die Kurshaltung von Luftfahrzeugen nach Magnetkompassen in allen Fällen, selbst bei niedrigster Flughöhe, vernachlässigt werden darf gegenüber den viel größeren Fehlern, die durch das Luftfahrzeug selbst hervorgerufen werden, und daß ein »Verfranzen« aus diesem Grunde in das Reich der Fabel zu verweisen ist. In den Fliegerkarten Deutschlands brauchen also magnetische Störgebiete nicht angegeben zu werden. Für so starke Anomalien, wie z. B. Kursk, ist allerdings ein bedeutender Einfluß vorhanden, wie Weinberg [4] gezeigt hat.

Ferner zeigte sich, daß bei Horizontalintensitätsmessungen mit dem Doppelkompaß wegen der unvermeidlichen Kursschwankungen des Luftfahrzeugs Neigungsfehler auftreten, die jedoch auf Kursen in Richtung des magnetischen Meridians ein Minimum werden.

Die Ergebnisse beweisen erneut, wie geeignet das Luftschiff für magnetische Messungen ist, so daß der Ansicht Grotewahls [11], daß das Luftschiff das geeignetste Fahrzeug zur magnetischen Weltaufnahme sei, beigepflichtet werden muß.

VII. Schrifttum.

[1] Geiger u. Scheel, Handbuch der Physik, Bd. XV. Magnetismus, Elektromagnetisches Feld. Berlin, J. Springer 1927.

[2] N. Malkin, Über die Veränderung der Elemente des Erdmagnetismus mit der Höhe. (Angenäherte Lösung des Dirichletschen Problems für den Außenraum.) Arbeiten des Geophysikal. Hauptobservatoriums. Moskau, Bd. 1 (1934), Nr. 3, Lief. 1, S. 22 bis 27 (russisch).

[3] N. Malkin, Über die Anwendung des Neumannschen Problems zur Untersuchung des magnetischen Feldes über anomalen Gebieten. Arbeiten des Geophysikal. Hauptobservatoriums Moskau, Bd. 1 (1934), Nr. 3, Lief. 1, S. 28 bis 43.

[4] K. Weinberg, Der mögliche Einfluß starker magnetischer Anomalien auf die Luftschiffahrt bei der Benutzung von Magnetkompassen. Journal Geophysiki (Journal of Geophysics), Moskau, Bd. 4 (1934), Nr. 1, S. 82 bis 88.

[5] W. Sternberg, Potentialtheorie. 2 Bde. Sammlung Göschen. Nr. 901 u. 944 (1925, 1926).

[6] G. Siemens, Erdmagnetische Untersuchung der Elbtalzone zwischen Torgau und Dresden. Beiträge zur Physikalischen Erforschung der Erdrinde, Heft 7. Herausgegeben von der Preuß. geolog. Landesanstalt. Berlin 1935.

[7] W. Immler, Grundlagen der Flugzeugnavigation. München u. Berlin 1937, Verlag R. Oldenbourg.

[8] G. Fanselau, Über Messungen mit dem Doppelkompaß. Veröffentl. des Preuß. Meteorolog. Instituts Nr. 380. Berlin 1930.

[9] A. Nippoldt, Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. Sammlung Göschen, Nr. 175, 1937.

[10] Bidlingmaier, Über die magnetische Ortsbestimmung im Ballon. Deutsche Zeitschrift f. Luftschiffahrt. (Illustr. Aeronaut. Mitteilgn.) 1909, S. 975.

[11] M. Grotewahl, Bericht über die Versuchsfahrt des Bidlingmaierschen Doppelkompasses mit dem Luftschiff Graf Zeppelin. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, Dezember 1930.

[12] G. Fanselau, Messungen mit dem Doppelkompaß im Luftschiff, ausgeführt von Haußmann und Nippoldt. Arktis (1931), Heft 1/2.

Digitized by Google

E Eng

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 7 enthält Arbeiten von: W. v. Koppenfels S. 189—195, G. Sissingh S. 196—203, R. v. Wolff S. 204—206, M. Neubert und A. Sommer S. 207—210, Dipl.-Ing. H. Weidemann VDI S. 211—215, H. Athen S. 216—220

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 7 SEITE 189 BIS 220 | MÜNCHEN, 20. 7. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:
Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung. Von W. v. Koppenfels . . . . . Seite 189
Beitrag zur Aerodynamik der Drehflügelflugzeuge. Von G. Sissingh . Seite 196
Über die Bestimmung der Torsionseigenfrequenz eingespannter Träger, insbesondere von Flugzeugtragflügeln o. ä. Von R. v. Wolff . . . . . Seite 204
Rechteckige Blechhaut unter gleichmäßig verteiltem Flüssigkeitsdruck. Von M. Neubert und A. Sommer . . . . . Seite 207
Zur Trägheit von Staudruckanlagen. Von H. Weidemann VDI . . . . . Seite 211
Der Bombenwurf aus dem Sturzflug und dem Steigflug. Von H. Athen . Seite 216

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift st zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 20. Juli 1940 Lfg. 7

Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung*).

Von Werner v. Koppenfels, Würzburg.

Versuche im Windkanal haben gezeigt, daß Tragflügelprofile, deren Tangentenverlauf stetig ist, die aber an einem Punkt ihres Umfangs in der weiteren Umgebung der Nase einen Krümmungssprung aufweisen, sich aerodynamisch ungünstig verhalten. Zur Klärung dieses ungünstigen Einflusses des Krümmungssprunges auf die Strömung und insbesondere auf die Grenzschicht hat Frau Flügge-Lotz (DVL) angeregt, das Verhalten einer ebenen Potentialströmung längs einer Wand, die an einer Stelle einen endlichen Krümmungssprung aufweist, mathematisch zu diskutieren.

Im ersten Teil der Arbeit wird der lokale Charakter der analytischen Funktion untersucht, die ein Stück des Randes in der Umgebung der Stelle unstetiger Krümmungsänderung auf ein Stück der reellen Achse abbildet. Insbesondere ergibt sich eine sehr einfache Darstellung für den Fall eines endlichen Krümmungssprunges. Als Beispiele werden die Abbildungsfunktionen verschiedener Kreisbogendreiecke angeführt, die sich »im großen« bestimmen lassen und deren Entwicklung in der Umgebung der kritischen Stelle das allgemein ermittelte Verhalten bestätigt.

Als Grundlage für die Diskussion der Geschwindigkeit in der Umgebung der Stelle unstetiger Krümmungsänderung wird im zweiten Teil der allgemeine Zusammenhang zwischen der Abbildungsfunktion, der Strömungsgeschwindigkeit und der Krümmung der Randkurve aufgedeckt. Es zeigt sich, daß in der Umgebung der kritischen Stelle bis auf einen stetigen Faktor der Imaginärteil der 2. Ableitung der Abbildungsfunktion die Krümmung des Randes und der Realteil die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge liefert. Hiernach ist unmittelbar einleuchtend, daß an der Stelle unstetiger Krümmungsänderung auch die Ableitung der Geschwindigkeit singulär wird. Die weitere Untersuchung zeigt, daß die Geschwindigkeit eine vertikale Wendetangente besitzt. Im einzelnen vgl. die Ausführungen in II 3c.

Da in die Pohlhausen-Gleichung für die Dicke der Grenzschicht die ersten beiden Ableitungen der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge eingehen, so verliert diese Gleichung an der kritischen Stelle ihren Sinn. Das Verhalten der Geschwindigkeit läßt eine Ablösung der Grenzschicht erwarten.

Gliederung.

I. Der lokale Charakter der Abbildungsfunktion an der kritischen Stelle.
1. Allgemeiner Ansatz.
2. Spezialisierung auf den Fall eines endlichen Krümmungssprunges.
3. Beispiele.
a) Kreisbogendreiecke mit einem gestreckten Winkel.
b) Kreisbogendreiecke mit zwei gestreckten Winkeln.
II. Zusammenhang zwischen Abbildungsfunktion, Krümmung der Stromlinie und Geschwindigkeit.
1. Zerlegung des Beschleunigungsvektors.
2. Übertragung auf die Bildebene.
3. Diskussion der Geschwindigkeit in der Umgebung des kritischen Punktes.
a) Das Maß für den Krümmungssprung.
b) Näherungsdarstellung für die Geschwindigkeit.
c) Diskussion.
III. Zusammenfassung.

*) Die Arbeit wurde im Auftrag der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof, durchgeführt.

I. Der lokale Charakter der Abbildungsfunktion an der kritischen Stelle.

1. Allgemeiner Ansatz.

Im Rahmen unserer Fragestellung bedeutet es zunächst keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir als Kontur der Oberfläche, längs deren wir die Strömung untersuchen wollen, einen Kurvenbogen (mit nicht verschwindender Krümmung) wählen, der tangential in eine Gerade einmündet, Bild 1.

Wir fragen nach dem Charakter der Abbildungsfunktion:

$$Z = f(z) \quad z = x + iy, \quad Z = X + iY \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die einem beiderseitig des Nullpunktes verlaufenden Stück der x-Achse die eben beschriebene Kontur in der Z-Ebene entsprechen läßt. Insbesondere setzen wir fest, daß $z = 0$ in $Z = 0$ übergeht und das geradlinige Stück der Kontur in die Achse positivreeller Z fällt, was in den Forderungen:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x) &= X \quad x > 0, \quad X > 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zum Ausdruck kommt. Mit Rücksicht auf den »glatten« Übergang der beiden Randstücke im kritischen Punkt darf dort die Konformität nicht gestört sein, d. h. die erste Ableitung von $f(z)$ muß an der Stelle $z = 0$ existieren. (Dies hat bekanntlich die Gleichheit der beiden Grenzwerte $f'(x)$ von rechts und links bei $x = 0$ zur Folge.) Wir setzen:

$$\lim_{z \to 0} f'(z) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und schließen daraus, daß $f(z)$ sich in der unmittelbaren Nähe von $z = 0$ wie Z verhalten muß. Dies führt dazu, für die Abbildungsfunktion (1) den Ansatz:

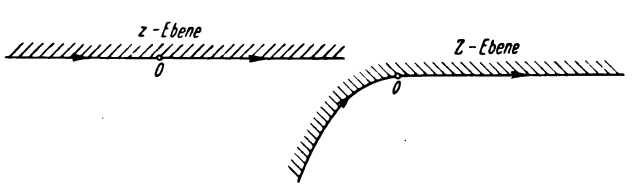


Bild 1.

Digitized by Google

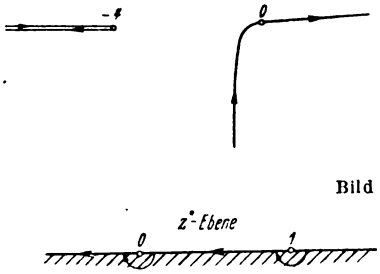


Bild 4.

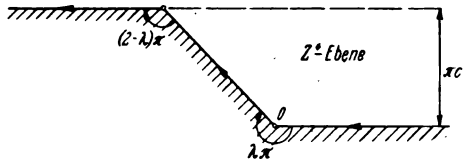


Bild 2.

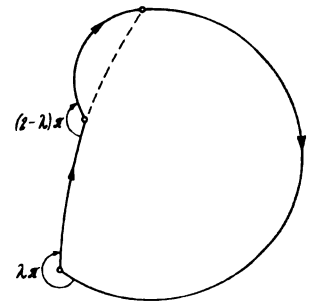


Bild 3.

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} + g(z)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zu machen und nach den Bedingungen zu fragen, denen die Funktion $g(z)$ genügen muß, damit die Abbildung die verlangten Eigenschaften hat. Die weitere Untersuchung wird den inneren Grund dafür aufdecken, warum dieser Ansatz: $1/Z = 1/z + g(z)$ der naturgemäße ist und nicht, wie man zunächst vermuten könnte, $Z = z + g^*(z)$. Wir bilden:

$$f'(z) = \frac{1 - z^2 g'(z)}{[1 + z\, g(z)]^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und stellen fest, daß die Abbildungsfunktion die geforderten Eigenschaften hat, wenn

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } z > 0 \; g(z) \text{ reell-wertig} \\ \text{für } z < 0 \; g(z) \text{ komplex-wertig} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{z \to 0} z\, g(z) = 0 \\ \lim\limits_{z \to 0} z^2 g'(z) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

ist. Die Bedingungen (A) bringen zum Ausdruck, daß das Bild der Achse der reellen z sich zusammensetzt aus der Halbachse der positiv reellen Z und einem gekrümmten Kurvenbogen, die Bedingungen (B) garantieren das glatte Einmünden des Bogens.

Als einfaches Beispiel wählen wir:

$$g(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und betrachten die durch:

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}} = \frac{z}{1 - \sqrt{z}} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

vermittelte Abbildung. Die Kornformität ist gestört bei $z = \infty$ und $z = 4$ (Winkelverdoppelung), Bild 2. Die Achse negativ reeller z wird abgebildet in die Kurve $X^3 + XY^2 + Y^2 = 0$, die im Nullpunkt glatt, aber mit unendlich großer Krümmung in die Achse der positiv reellen Z einmündet.

2. Spezialisierung auf den Fall endlichen Krümmungssprunges.

Im Sinn der eingangs geschilderten Fragestellung ist der Fall eines endlichen Krümmungssprunges für uns von besonderer Wichtigkeit, und es handelt sich nun darum, die noch weitgehend willkürliche Funktion $g(z)$ so zu spezialisieren, daß die Bildkurve im Nullpunkt eine endliche Krümmung besitzt. Zu diesem Zweck denken wir die Bildkurve in der Nähe des Nullpunktes durch ihren Krümmungskreis ersetzt und fragen nach der zusätzlichen Bedingung, der die Funktion $g(z)$ genügen muß, damit die Bildkurve der Achse negativ-reeller z ein Kreisbogen ist. Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Fall $f(z)$ für negativ-reelle z die Gestalt:

$$f(z) = \frac{1}{h(x) + i\pi c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

haben muß, unter $h(x)$ eine beliebige reell-wertige Funktion von x verstanden. In der Tat zerfällt

$$X + iY = \frac{1}{h(x) + i\pi c}$$

in die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} h(x)\, X - \pi c\, Y = 1 \\ \pi c\, X + h(x)\, Y = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9a)$$

und diese bilden die Parameterdarstellung eines Kreises:

$$\pi c\,(X^2 + Y^2) + Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

der den Mittelpunkt $Z = -\frac{1}{2\pi c} i$ und den Radius:

$$\varrho = \frac{1}{2\pi c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

besitzt. Damit $f(z)$ das in (8) geforderte Verhalten zeigt, erweist es sich mit Rücksicht auf (4) als notwendig, daß $g(z)$ die Eigenschaft hat, für negativ-reelle z einen konstanten Imaginärteil zu besitzen. Infolgedessen liegt im Nullpunkt eine logarithmische Singularität der Funktion $g(z)$ vor und wir gewinnen die Darstellung:

$$g(z) = c \ln z + \mathfrak{P}(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{P}(z)$ die Entwicklung einer in $z = 0$ regulären Funktion in eine Potenzreihe, deren Koeffizienten reell sein müssen, damit das geforderte Verhalten auf der Achse der reellen z nicht gestört wird.

Als allgemeine Darstellung für die Abbildungsfunktion in der Umgebung der Übergangsstelle ergibt sich also in dem Fall, daß die Gerade in einen Kreisbogen übergeht:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} + c \ln z + \mathfrak{P}(z)}} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Damit ist mit Rücksicht auf die Approximationseigenschaft des Krümmungskreises zugleich im allgemeinsten Fall eines endlichen Krümmungssprunges der lokale Charakter der Abbildungsfunktion in der Umgebung der kritischen Stelle erkannt. In übersichtlicher Weise tritt der Einfluß des Krümmungssprunges $2\pi c = \frac{1}{\varrho}$ hervor. Die Gestalt der durch $\mathfrak{P}(z)$ dargestellten Funktion, die bei $z = 0$ regulär und für das lokale Verhalten von $f(z)$ nicht von Belang ist, bestimmt wesentlich den weiteren Verlauf der Randkurve.

3. Beispiele.

a) Kreisbogendreiecke mit einem gestreckten Winkel.

Als erstes Beispiel einer Abbildung, die wir »im großen« beherrschen und bei der wir das allgemein festgestellte charakteristische Verhalten in der Umgebung der Stelle unstetiger Krümmungsänderung bestätigen können, wählen wir zunächst eine Schar von Kreisbogendreiecken, die einen gestreckten Winkel besitzen und deren Seiten alle durch einen Punkt gehen, Bild 3. Wird dieser gemeinsame Schnittpunkt, der zugleich der uns interessierende Punkt unstetiger Krümmungsänderung ist, durch eine lineare Transformation in den unendlich fernen Punkt verlegt, so verwandelt sich das Kreisbogendreieck in ein geradlinig begrenztes Dreieck, das zwei parallele Seiten besitzt, Bild 4.

Digitized by Google

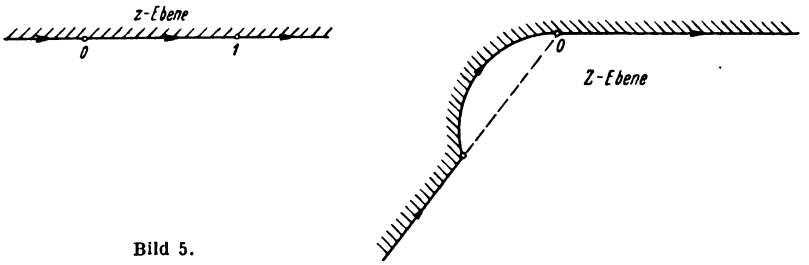


Bild 5.

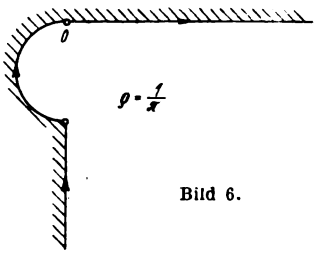


Bild 6.

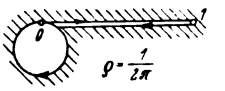


Bild 7.

Nach der Schwarz-Christoffelschen Formel bildet die Funktion:

$$Z^* = \int \left(\frac{z^* - 1}{z^*}\right)^{\lambda - 1} dz^* \quad \ldots\ldots (13)$$

die untere z^*-Halbebene konform ab auf den zur Linken der Kontur liegenden Teil der Z^*-Ebene. Dabei entsprechen die unendlich fernen Punkte beider Ebenen einander und durch passende Wahl der Integrationskonstanten wird erreicht, daß dem Punkt $z^* = 1$ der Punkt $Z^* = 0$ entspricht. Beim Übergang zu den Ebenen der reziproken Veränderlichen:

$$z = \frac{1}{z^*}, \quad Z = \frac{1}{Z^*} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

fällt der kritische Punkt in den Nullpunkt der Z-Ebene und ist das Bild des Nullpunktes der z-Ebene, während der Punkt $z = 1$ einen bei $Z = \infty$ liegenden Eckpunkt liefert. Die Funktion:

$$Z = f(z) = -\frac{1}{\int (1-z)^{\lambda-1} \frac{dz}{z^2}} \quad \ldots\ldots (15)$$

leistet danach eine Abbildung, die der Halbachse der positiv-reellen z das Stück eines Kreisbogens und dem Intervall $0 < z < 1$ die Halbachse der positiv-reellen Z entsprechen läßt, die im Nullpunkt den Kreisbogen berührt, Bild 5. Das Integral läßt sich im allgemeinen nicht mit elementaren Funktionen auswerten, aber in der Umgebung von $z = 0$, wo wir das Verhalten der Abbildungsfunktion untersuchen, ergibt sich durch Entwicklung des Integranden:

$$\frac{1}{f(z)} = -\int \frac{1 - \binom{\lambda-1}{1} z + \binom{\lambda-1}{2} z^2 - + \cdots}{z^2} dz$$
$$= \frac{1}{z} + (\lambda - 1) \ln z - \mathfrak{P}(z) \quad \ldots\ldots (16)$$

so daß wir das in (12) allgemein festgestellte Verhalten bestätigt finden. Wir entnehmen der Darstellung (16) durch Vergleich mit (12) und (10), daß der Bildkreis der Achse der negativ-reellen z den Radius:

$$\varrho = \frac{1}{2\pi(\lambda - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

besitzt[1a]).

Abgesehen von dem trivialen Fall $\lambda = 1$, der die identische Abbildung liefert, erwähnen wir die Sonderfälle, Bild 6 und 7:

$$\lambda = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{f(z)} = \frac{\sqrt{1-z}}{z} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-z}}{1 + \sqrt{1-z}} \quad (18)$$

und[1])

$$\lambda = 2, \quad \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \ln z \quad \ldots\ldots (19)$$

[1]) Es sei darauf hingewiesen, daß sich die Abbildungsfunktion unseres Kreisbogendreiecks mit den Winkeln: $\lambda_1 \pi = \pi$, $\lambda_2 \pi = \lambda \pi$, $\lambda_3 \pi = (2 - \lambda)\pi$ auch ohne die Schwarz-Christoffelsche Formel als Quotient zweier Lösungen der mit $\alpha = -1$, $\beta = 1 - \lambda$, $\gamma = 0$ gebildeten hypergeometrischen Differentialgleichung: $z(1-z)\, u'' + (\lambda - 1)\, z u' - (\lambda - 1)\, u = 0$ hätte gewinnen lassen. Die eine Lösung ist $u_1 = z$, die andere ergibt sich aus: $u_1' u_2 - u_2' u_1 = (1-z)^{\lambda - 1}$.

[1a]) Die Abbildung dieses Profils wurde bereits untersucht von A. Sonnefeld, Über Flüssigkeitsströmungen um zusammengesetzte zylindrische Schalen . . ., Diss. Jena 1911. Zweck der Arbeit war, die Kräfte an einer gebogenen Platte mit abgerundetem Kopf zu berechnen. Deshalb findet sich in der Arbeit keine nähere Untersuchung über den Einfluß des Krümmungssprunges.

Der Aufbau der Abbildungsfunktion (15) hat deutlich gezeigt, aus welchem Grunde sich hier — und das gleiche gilt hinsichtlich der allgemeinen Abbildungsfunktion (12) — für die Abhängigkeit der reziproken Veränderlichen $1/z$ und $1/Z$ ein besonders einfacher Ansatz ergibt: Kreisbogen und Gerade, die in der Z-Ebene aneinanderstoßen, verwandeln sich in der Z^* $(= 1/Z)$-Ebene in parallele Geradenstücke, deren Abstand gleich dem halben Krümmungssprung bei $Z = 0$ ist. (Der Kreis (9) geht bei der Transformation $Z^* = 1/Z$ in die Gerade $Y^* = \pi c$ über.)

b) Kreisbogendreiecke mit zwei gestreckten Winkeln.

Als weiteres Beispiel für die allgemeine Formel (12) betrachten wir kurz die Abbildung der Halbebene auf ein Kreisbogendreieck, das zwei gestreckte Winkel aufweist[2]). Nach der allgemeinen Theorie ist die Abbildungsfunktion der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen der mit

$$\alpha = -\frac{3-\delta}{2}, \quad \beta = \frac{1-\delta}{2}, \quad \gamma = 0 \quad \ldots (20)$$

gebildeten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z(1-z)\, u''(z) + \frac{(1-\delta)(3-\delta)}{4} u(z) = 0 \quad \ldots (21)$$

wobei $\delta\pi$ der dritte Winkel des Dreiecks ist. Die Lösungen dieser Differentialgleichung können in Form bestimmter Integrale gewonnen werden, die längs geschlossener Wege in der z-Ebene zu erstrecken sind. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Es genügt, das charakteristische Verhalten an einer der beiden »glatten« Ecken nachzuweisen. In der Umgebung von $z = 0$ ergeben sich in bekannter Weise[3]) als linear unabhängige Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= z F\left(-\frac{1-\delta}{2}, \frac{3-\delta}{2}; 2; z\right) \\ u_2 &= z\left[F_1\left(-\frac{1-\delta}{2}, \frac{3-\delta}{2}; 2; z\right) \right. \\ &\qquad \left. + F\left(-\frac{1-\delta}{2}, \frac{3-\delta}{2}; 2; z\right) \ln z\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (22)$$

wobei F die hypergeometrische Reihe bedeutet und mit F_1 eine bestimmte Potenzreihe bezeichnet, die mit dem Glied: $\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{z}$ beginnt und dann nach positiven Potenzen von z fortschreitet. Der Quotient dieser beiden Lösungen:

$$f(z) = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\frac{F_1}{F}\left(-\frac{1-\delta}{2}, \frac{3-\delta}{2}; 2; z\right) + \ln z} \quad \ldots (23)$$

zeigt das allgemein festgestellte Verhalten.

[2]) Vgl. E. Wolff, Einfluß der Abrundung scharfer Eintrittskanten auf den Widerstand von Flügeln, Ing.-Archiv Bd. 4 (1933), S. 521.

[3]) Vgl. L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I (Leipzig 1895), S. 257/258.

Digitized by Google

II. Zusammenhang zwischen Abbildungsfunktion, Krümmung der Stromlinie und Geschwindigkeit.

1. Zerlegung des Beschleunigungsvektors.

Um eine Grundlage für die Diskussion der Strömungsgeschwindigkeit im Zusammenhang mit der Krümmung der Stromlinie zu gewinnen, bestimmen wir zunächst allgemein den Beschleunigungsvektor einer Potentialströmung. Die Strömung sei in der z-Ebene durch das komplexe Potential:

$$\omega(z) = \varphi + i\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

gegeben, aus dem sich durch Differentiation der an der reellen Achse gespiegelte Geschwindigkeitsvektor:

$$\frac{d\omega}{dz} = u - iv = \frac{d\bar{z}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

vom Absolutbetrag:

$$w = |\omega'(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ergibt. Mit den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors[4]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x,y) = \varphi_x \\ \frac{dy}{dt} &= v(x,y) = \varphi_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und denen des Beschleunigungsvektors:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= u\,u_x + v\,v_x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= u\,v_x - v\,u_x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

bilden wir die Krümmung der Stromlinie:

$$k = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}^3} = \frac{(u^2 - v^2)\,v_x - 2\,u\,v\,u_x}{\sqrt{u^2 + v^2}^3} \quad (29)$$

und die zeitliche Änderung der Absolutgeschwindigkeit:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{(u^2 - v^2)\,u_x + 2\,u\,v\,v_x}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (30)$$

Die Gleichungen (29) und (30) lassen sich in die eine komplexe Gleichung:

$$\frac{\overline{\omega'^2(z)}\,\omega''(z)}{|\omega'(z)|} = \frac{dw}{dt} - i\,k\,w^2 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

zusammenfassen und stellen die Zerlegung des Beschleunigungsvektors tangential und normal zur Stromlinie dar.

2. Übertragung auf die Bildebene.

Bei der Abbildung der Strömungsebene durch eine analytische Funktion:

$$Z = f(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist das komplexe Potential zu transformieren und aus dem transformierten Potential:

$$\Omega(Z) = \omega(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

ergibt sich durch Differentiation die komplexe Geschwindigkeit:

$$\Omega'(Z) = \frac{1}{f'(z)}\,\omega'(z) = \frac{d\bar{Z}}{d\tau} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

wobei τ die in der Bildebene gemessene Zeit bedeutet. Diese Formel macht deutlich, daß bei der Übertragung der Strömung auf die Bildebene eine Zeittransformation vorgenommen werden muß, denn durch Vergleich von (25) und (33) ergibt sich:

$$\frac{d\bar{Z}}{d\tau} = \frac{1}{f'(z)}\,\frac{d\bar{z}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

[4]) Es ist zu beachten, daß mit Rücksicht auf (25) die Funktionen u und $(-v)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen.

und daraus weiter:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Unter Berücksichtigung dieser neuen Zeit τ sind in der Bildebene die Absolutgeschwindigkeit W und die Krümmung K der Stromlinie durch die der Darstellung (31) entsprechende Beziehung:

$$\frac{\overline{\Omega'^2(Z)}\,\Omega''(Z)}{|\Omega'(Z)|} = \frac{dW}{d\tau} - i\,K\,W^2 \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

verknüpft. Nehmen wir in der z-Ebene eine Parallelströmung längs der x-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit 1 an, so ist

$$\omega(z) = W_0\,z, \qquad \omega'(z) = W_0 = \frac{d\bar{z}}{dt} \quad \ldots \quad (37)$$

d. h.

$$W_0\,t = x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37\,a)$$

zu setzen. In der Bildebene ergibt sich dann nach (33):

$$\Omega'(Z) = \frac{W_0}{f'(z)}, \qquad |\Omega'| = W = \frac{W_0}{|f'(z)|} \quad \ldots \quad (38)$$

so daß (36) sich in

$$-\frac{W_0^2\,f''(z)}{|f'(z)|^3\,f'(z)} = \frac{dW}{d\tau} - i\,K\,W^2 \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

oder mit Rücksicht auf

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{dW}{dt}\,\frac{1}{|f'(z)|^2} = \frac{dW}{dx}\,\frac{W_0}{f'(z)^2} \quad \ldots \quad (40)$$

in

$$-\frac{f''(z)}{f'(z)\,\overline{f'(z)}} = \frac{1}{W_0}\,\frac{dW}{dx} - i\,K \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

verwandelt. Wenn wir noch die Bogenlänge

$$\sigma = \int |f'(z)|_{y=\text{konst}}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

der Stromlinie einführen, in die sich die Stromlinie $y = \text{konst}$ abbildet, so gewinnen wir längs dieser die Darstellung:

$$\boxed{-\frac{1}{f'(z)}\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big|_{y=\text{konst}} = |f'(z)|_{y=\text{konst}}\,\frac{1}{W_0}\,\frac{dW}{d\sigma} - i\,K} \quad (43)$$

Diese Formel legt bereits die Vermutung nahe, daß an einer Stelle, an der die Krümmung der Stromlinie sich unstetig ändert, die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge unendlich wird, denn Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion werden im allgemeinen gleichzeitig singulär.

3. Diskussion der Geschwindigkeit in der Umgebung des kritischen Punktes.

a) Das Maß für den Krümmungssprung.

Um eine brauchbare Näherungsdarstellung für die Geschwindigkeit in der Umgebung der kritischen Stelle zu erhalten, ist es zweckmäßig, von dem Fall »Kreisbogen—Gerade« überzugehen zu dem allgemeineren Fall »Kreisbogen—Kreisbogen«, denn im ersten Fall bereitet es Schwierigkeit, den Begriff der »Größe des Krümmungssprunges« einzuführen. Kann man doch immer eine Ähnlichkeitstransformation angeben, die dem Krümmungssprung jeden beliebigen Wert erteilt. Dies gilt natürlich ebenso in dem Fall, daß zwei Kreisbogen mit den endlichen Radien ϱ_1, ϱ_2 im Nullpunkt zusammenstoßen, aber man kann sich dann in der dimensionslosen Größe

$$\lambda = 1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

ein geeignetes Maß für den Krümmungssprung schaffen. Insbesondere charakterisiert $\lambda \ll 1$ den Fall, daß die Krümmungen der Kreise sich nur wenig voneinander unterscheiden. Die Größe λ ist nichts anderes als der Krümmungssprung $K_1 - K_2 = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ gemessen an der Länge des Kreisradius ϱ_1.

Digitized by Google

Bild 8a und b.

Die lineare Funktion

$$Z^* = \frac{2\varrho_2 Z}{2\varrho_2 + iZ} = \frac{1}{\frac{1}{Z} + \frac{i}{2\varrho_2}} \quad \ldots\ldots (45)$$

führt die Kontur Bild 8a in die Kontur Bild 8b über, ohne die Umgebung des Nullpunktes zu verzerren und liefert[5]) die Kreisradien:

$$\varrho_1 = \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_2}}, \quad \varrho_2 \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

Die Abbildungsfunktion (12), in der $c = \frac{1}{2\pi\varrho}$ war, erhält nach Ausführung der Transformation (45) die Gestalt:

$$Z^* = \frac{1}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\ln\frac{z}{E} + \mathfrak{P}(z) + \frac{i}{2\varrho_2}} \quad (47)$$

unter E die Längeneinheit in der z-Ebene verstanden. Wählen wir als diese Einheit den Radius ϱ_1 und führen in Original- und Bildebene

$$\frac{z}{\varrho_1} = z_1, \quad \frac{Z^*}{\varrho_1} = Z_1 \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

als neue Veränderliche ein, so ergibt sich die dimensionslose Darstellung

$$\boxed{Z_1 = f_1(z_1) = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + \frac{\lambda}{2\pi}\ln z_1 + \frac{1-\lambda}{2} i + \mathfrak{P}_1(z_1)}} \quad (49)$$

die wir der folgenden Diskussion zugrunde legen wollen. Insbesondere fassen wir den Fall ins Auge, daß der Parameter λ, der den Krümmungssprung mißt und allgemein im Intervall $0 < \lambda < 1$ liegt, klein gegen Eins ist.

b) Näherungsdarstellung der Geschwindigkeit.

Schreiben wir (49) in der Form

$$f_1(z_1) = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + g_1(z_1)} \quad \ldots\ldots (49a)$$

mit

$$g_1(z_1) = \frac{\lambda}{2\pi}\ln z_1 + \frac{1-\lambda}{2} i + \mathfrak{P}_1(z_1) \quad \ldots (49b)$$

und bilden wir:

$$f_1'(z_1) = \frac{1 - z_1^2 g_1'(z_1)}{[1 + z_1 g_1(z_1)]^2} \quad \ldots\ldots (50)$$

so ergibt sich die logarithmische Ableitung

$$-\frac{f_1''(z_1)}{f_1'(z_1)} = \frac{2 z_1 g_1' + z_1^2 g_1''}{1 - z_1^2 g_1'} + 2\,\frac{g_1 + z_1 g_1'}{1 + z_1 g_1} \quad \ldots (51)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{cases} \lim\limits_{z_1 \to 0} z_1\, g_1(z_1) = 0 \\ \lim\limits_{z_1 \to 0} z_1^2\, g_1'(z_1) = 0 \end{cases}$$

(vgl. S. 190) folgt in der Umgebung des kritischen Punktes die Näherungsdarstellung

$$-\frac{f_1''(z_1)}{f_1'(z_1)} = 2\,g_1(z_1) + 4\,z_1 g_1'(z_1) + z_1^2 g_1''(z_1) \quad \ldots (52)$$

Ist z_1 ein Punkt der reellen Achse ($z_1 = x_1$), so wird

$$\Re\left(-\frac{f_1''(x_1)}{f_1'(x_1)}\right) = 2\,\Re(g_1(x_1)) + 4\,x_1\,\Re(g_1'(x_1)) + x_1^2\,\Re(g_1''(x_1)) \quad \ldots (52a)$$

und mit (49b) ergibt sich unter Beschränkung auf das konstante Glied der hinzutretenden Entwicklung, wie es im Rahmen unserer Näherung sinnvoll ist,

$$\Re\left(-\frac{f_1''(x_1)}{f_1'(x_1)}\right) = 2a_0 + \frac{\lambda}{2\pi}(3 + 2\ln|x_1|) \quad \ldots (53)$$

Für den Imaginärteil ergibt sich mit (49b):

$$\Im\left(-\frac{f_1''(x_1)}{f_1'(x_1)}\right) = 2\,\Im(g_1(x_1)) - \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 < 0 \\ 1-\lambda & \text{für } x_1 > 0 \end{cases} \quad (52b)$$

Mit Rücksicht auf

$$f'(0) = f_1'(0) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

haben wir nach (42) in der Umgebung der kritischen Stelle die Bogenlänge

$$\sigma = x = \varrho_1 x_1 \quad \ldots\ldots\ldots (55)$$

und erhalten damit schließlich aus (43)

$$\frac{dW/W_0}{d\sigma/\varrho_1} = \varrho_1\,\Re\left(-\frac{f''(x)}{f'(x)}\right) = \Re\left(-\frac{f_1''(x_1)}{f_1'(x_1)}\right) = 2a_0 + \frac{\lambda}{2\pi}\left(3 + 2\ln\left|\frac{\sigma}{\varrho_1}\right|\right) \quad \ldots (55a)$$

$$K = \Im\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right) = \frac{\varrho_1}{1}\,\Im\left(\frac{f_1''(x_1)}{f_1'(x_1)}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\varrho_1} & (x_1 < 0) \\ \frac{1}{\varrho_1}(\lambda - 1) = -\frac{1}{\varrho_2} & (x_1 > 0) \end{cases} \quad (55b)$$

Die negativen Vorzeichen der Krümmungen rühren daher, daß das Gebiet, in dem die Strömung untersucht wird, das Außengebiet der Kreise ist.

Aus (55a) folgt durch Integration für die Geschwindigkeit in der Umgebung des kritischen Punktes die Näherungsdarstellung

$$\frac{W}{W_0} = 1 + 2a_0\,\frac{\sigma}{\varrho_1} + \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\sigma}{\varrho_1}\left(1 + 2\ln\left|\frac{\sigma}{\varrho_1}\right|\right) \quad \ldots (56)$$

c) Diskussion.

Die Darstellung

$$\frac{dW/W_0}{d\sigma/\varrho_1} = 2a_0 + \frac{\lambda}{2\pi}\left(3 + 2\ln\left|\frac{\sigma}{\varrho_1}\right|\right) \quad \ldots (55a)$$

ermöglicht zunächst, im kritischen Punkt eine präzise Aussage zu machen. Sie läßt erkennen, daß die Strömungsgeschwindigkeit in dem kritischen Punkt ($\sigma = 0$), in dem die Krümmung einen endlichen Sprung erfährt, eine vertikale Tangente besitzt. Infolge des symmetrischen Verhaltens der Ableitung für positive und negative σ ist dieser Punkt ein Wendepunkt (keine Spitze).

Als Näherungsformeln sind (55a) und (56) so zu verstehen: Auf der Kontur eines vorgegebenen Profils, d. h. für jede bestimmte Funktion g_1 der Gestalt (49b) läßt sich um den kritischen Punkt ein Intervall abgrenzen, in dem die Formeln (55a) und (56) gelten. Sie gelten in diesem Bereich im Rahmen der Genauigkeit, in dem $z_1 g_1(z_1)$ und $z_1^2 g_1'(z_1)$ gegen 1 vernachlässigt werden dürfen, also im Rahmen der Genauigkeit, in dem nach (50) $f_1'(z_1) = 1$ gesetzt werden darf. Man sieht, daß der Geltungsbereich durch die in (49b) hinzutretende reguläre Funktion $\mathfrak{P}_1(z_1)$ mitbestimmt wird und diese wieder hängt wesentlich von dem weiteren Verlauf des Profils ab. Es ist also nicht möglich, ohne Kenntnis des weiteren Verlaufes allgemein gültige Aussagen über den Geltungsbereich dieser Darstellungen zu machen. Schon das konstante Glied a_0 der Potenzreihenentwicklung $\mathfrak{P}_1(z)$ in (49) übt, wie an einem Beispiel gezeigt werden wird, einen wesentlichen Einfluß

[5]) Man erkennt dies, wenn man den ϱ-Kreis der Z-Ebene als Bild der reellen Achse einer Z'-Ebene auffaßt: $Z = \frac{2\varrho}{2\varrho + iZ'}$, und darauf die Transformation (45) anwendet:

$$Z^* = \frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho + \varrho_2} \frac{Z'}{\frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho + \varrho_2} + iZ'}.$$

Es ist also:

$$2\varrho_1 = \frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho + \varrho_2}.$$

Digitized by Google

aus. Aus diesem Grunde können wir keine Aussagen machen, die unabhängig von dem Längenmaßstab sind (der in Abschnitt II 3a gleich dem Radius ϱ_1 gewählt wurde), denn eine andere Wahl der Längeneinheit (E' statt E) ändert mit Rücksicht auf $\ln\frac{z}{E'} = \ln\frac{z}{E} - \ln\frac{E'}{E}$ das konstante Glied a_0 der zusätzlichen Entwicklung. Diese Tatsache ist vom mathematischen Standpunkt aus nicht verwunderlich, denn es liegt in der Natur der Sache, daß bei alleiniger Vorgabe des Krümmungssprunges, d. h. auf Grund einer Aussage, die das unstetige Verhalten der Abbildungsfunktion an einer bestimmten Stelle betrifft, bindende Folgerungen nur für die Verhältnisse an dieser Stelle selbst gezogen werden können. Die präzise Folgerung ist hier die Tatsache, daß die Entwicklung der Geschwindigkeit in der Umgebung der kritischen Stelle das charakteristische logarithmische Glied (vgl. (56)) enthält, woraus insbesondere die Existenz der vertikalen Wendetangente folgt. Mehr und weiterreichende allgemeingültige Aussagen zu machen, ist mathematisch nicht möglich.

Trotz dieses grundsätzlichen Vorbehaltes über die Reichweite der Näherungsdarstellungen (55a), (56) bleibt es von Interesse, den Verlauf der Näherungskurve zu verfolgen. Im Falle $\lambda = 0$, der der stetigen Krümmungsänderung bei $\sigma = 0$ entspricht, verläuft die Näherungskurve geradlinig mit der Steigung

$$m = 2\,a_0 = \left(\frac{d\,W/W_0}{d\,\sigma/\varrho_1}\right)_{\lambda=0} \quad \ldots\ldots (57)$$

so daß (56) in der Form

$$\frac{W}{W_0} = 1 + \left(\frac{d\,W/W_0}{d\,\sigma/\varrho_1}\right)_{\lambda=0}\frac{\sigma}{\varrho_1} + \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left(1+2\ln\left|\frac{\sigma}{\varrho_1}\right|\right)\frac{\sigma}{\varrho_1} \quad \ldots (56a)$$

geschrieben werden kann. Liegt dagegen ein endlicher Krümmungssprung vor, so weist sie einen charakteristischen antisymmetrischen Knick auf mit einer vertikalen Tangente im kritischen Punkt, Bild 9. Die Stelle des Randes, an der die Ordinate der Näherungskurve am stärksten von der Geraden abweicht, befindet sich dort, wo $\frac{d\,W/W_0}{d\,\sigma/\varrho_1} = m = 2\,a_0$ ist, also nach (55a) bei

$$\sigma^* = \pm e^{-3/2}\varrho_1 = \pm 0{,}233\,\varrho_1 \quad \ldots\ldots (58)$$

Die Größe der Abweichung ist für die Näherungskurve $\left[\lambda = \left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \ll 1\right]$ dem Krümmungssprung proportional und hat lotrecht zur Geraden gemessen den Betrag

$$\frac{\Delta W}{W_0} = \frac{1-\varrho_1/\varrho_2}{\pi\sqrt{1+m^2}}\,\frac{\sigma^*}{\varrho_1} = 0{,}075\,\frac{1-\varrho_1/\varrho_2}{\sqrt{1+m^2}} \quad \ldots (59)$$

Die Längen sind auf ϱ_1 bezogen und es ist vorausgesetzt, daß das Verhältnis der Krümmungsradien klein gegen 1 ist.

Es zeigt sich also, daß die Ausbuchtung der Näherungskurve für kleine Krümmungssprünge klein ist, sich aber verhältnismäßig weit hin erstreckt. Die größte Abweichung von der Geraden liegt nach (58) etwa um ein Viertel des Krümmungsradius von der Übergangsstelle entfernt. Die geknickte Kurve gleicht sich langsam der normalen an.

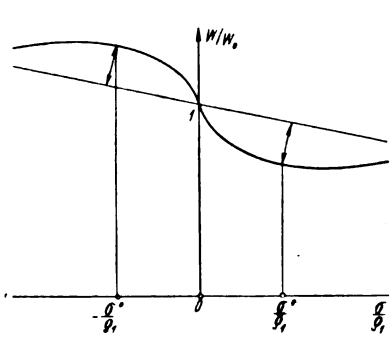


Bild 9.

Es sei noch einmal nachdrücklich darauf hingewiesen, daß eine allgemeine Aussage darüber, wie weit die wahre Geschwindigkeitskurve dieser Näherungskurve folgt, grundsätzlich nicht möglich ist, da diese von dem weiteren Verlauf des Profils abhängt. Dies kommt in unseren Gleichungen durch die in (49) eingehende, im kritischen Punkt reguläre Funktion zum Ausdruck, deren Koeffizienten von Fall zu Fall zu bestimmen sind. Betrachten wir z. B. das in Bild 7 angegebene Profil und setzen wir die Abbildungsfunktion einmal in der Form

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{z} + c\ln(c\,z)} \quad \ldots\ldots (I)$$

das anderemal in der Form

$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{z} + c\ln z} \quad \ldots\ldots (II)$$

an. In der Darstellung (I) sind die Längen auf $\frac{1}{c}$, in der Darstellung (II) auf 1 bezogen. Dies bewirkt die zusätzliche additive Konstante $c\ln c$ im Nenner. In beiden Fällen liegt der kritische Punkt im Nullpunkt und der Bildkreis der Achse der positiv-reellen z hat den Radius $\varrho = \frac{1}{2\pi c}$. Die beiden Abbildungen unterscheiden sich nur dadurch, daß die Länge der Hinterkante in beiden Fällen verschieden ausfällt, da sich als Bild des Verzweigungspunktes $z = \frac{1}{c}$ einmal: $Z_1\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}$, das andere Mal: $Z_2\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c\,(1-\ln c)}$ ergibt. Bei der ersten Abbildung ist das Verhältnis des Radius zur Länge der Hinterkante konstant $= \frac{1}{2\pi}$, bei der zweiten Abbildung ändert es sich mit c und ist $= \frac{1}{2\pi}(1-\ln c)$ Beim Grenzübergang $c \longrightarrow 0$ wächst es über alle Grenzen, obwohl beide Abbildungen dann in die identische übergehen. Bestimmt man die Geschwindigkeit, so zeigt sich, daß diese im ersten Fall, in dem das Verhältnis des Radius zur Hinterkante gleich $\frac{1}{2\pi}$ ist, nur rechts von der kritischen Stelle, nicht aber links ein Maximum aufweist. Im zweiten Fall tritt dagegen für kleine c auch links von der kritischen Stelle ein Maximum auf, wie man erkennt, wenn man den genauen Wert der Geschwindigkeit nach Potenzen von c entwickelt und mit dem linearen Glied abbricht, was für genügend kleine c zulässig ist. Der wirkliche Verlauf der Geschwindigkeitskurve ist im Fall (II) sowohl für $c = 0{,}25$ wie für $c = 0{,}1$ in Bild 10 gezeichnet. Jede der beiden Kurven kommt von $+\infty$ (für $x = -\infty$) und besitzt für $x < 0$ einen Wendepunkt. Ist $c = 0{,}1$, so finden wir bestätigt, daß die Kurve weitgehend dem Verlauf der Näherungskurve folgt, die sich für kleine c in der Form $W/W = 1 + c\sigma\,(1 + 2\ln\sigma)$ ergibt. Man erhält sie aus (56a), wenn man $\varrho_2 = \infty$, $\varrho_1 = \frac{1}{2\pi c}$ und $m = -2\,c\ln 2\,c\pi$ setzt. Dabei ist zu beachten, Bild 7, daß es in diesem Beispiel keinen Sinn hat, den Krümmungssprung gleich Null zu setzen und von der Geschwindigkeitskurve des normalen Verlaufes zu sprechen. Dieses Beispiel macht deutlich,

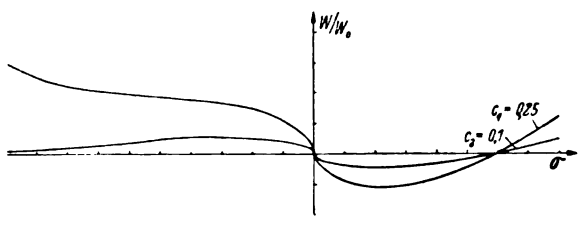


Bild 10.

Digitized by Google

daß ohne Kenntnis des weiteren Verlaufes des Profils keine bündigen Schlüsse darüber gezogen werden können, wie weit die Näherungskurve, Bild 9, die wahre Geschwindigkeitskurve approximiert.

III. Zusammenfassung.

Die Geschwindigkeit einer ebenen Potentialströmung längs einer glatten Wand, die an einer Stelle einen endlichen Krümmungssprung aufweist und in der Umgebung dieser Stelle durch zwei Kreisbogen approximiert wird, hat als Funktion der Bogenlänge der Randkurve im kritischen Punkt eine vertikale Wendetangente. In der Umgebung dieses Punktes stellt sich die Geschwindigkeit als Funktion der Bogenlänge σ in der Form

$$\frac{W}{W_0} = 1 + \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \ln\left|\frac{\sigma}{\varrho_1}\right| + \mathfrak{P}(\sigma)$$

dar, wobei $\mathfrak{P}(\sigma)$ eine mit dem linearen Glied beginnende Potenzreihenentwicklung ist, die im Einzelfall den weiteren Verlauf der Geschwindigkeit bestimmt.

Das festgestellte Verfahren zeigt, daß in der Umgebung des Krümmungssprunges die Voraussetzungen für die Aufstellung der Pohlhausen-Gleichung für die Grenzschicht, in die die ersten beiden Ableitungen der Geschwindigkeit eingehen, nicht mehr gegeben sind. Infolge der starken Druckänderung an der kritischen Stelle muß eine Ablösung der Grenzschicht erwartet werden.

Digitized by Google

Beitrag zur Aerodynamik der Drehflügelflugzeuge.

Von G. Sissingh.

II. Teil[1]).

Bericht der Anton Flettner G. m. b. H., Flugzeugbau, Berlin-Johannisthal.

Mit Hilfe der im I. Teilbericht gewonnenen Beziehungen werden die günstigsten Voraussetzungen für das Schweben am Ort und den Waagerechtflug untersucht. Es wird der Einfluß des verwundenen und trapezförmigen Blattes auf die Gütegrade des Rotors behandelt und ein Vergleich der Gleitzahlen bei den verschiedenen Flugzuständen (Hub-, Tragschrauber) des Horizontalfluges durchgeführt. Soweit Messungen an Modellen oder Großausführungen vorliegen, werden sie zum Vergleich herangezogen. Es ergibt sich dabei in den grundsätzlichen Fragen eine gute Übereinstimmung.

Gliederung.

VIII. Bezeichnungen.
IX. Allgemeines.
X. Bestimmung der Gütegrade.
1. Annahmen über die Rotorausbildung und das benutzte Profil.
2. Standschubgütegrad.
3. Gleitzahl des günstigsten Horizontalfluges.
XI. Schlußwort.
XII. Zahlentafeln.

VIII. Bezeichnungen.

Außer den im I. Teilbericht angeführten Bezeichnungen werden folgende Abkürzungen benutzt:

G kg Fluggewicht der Maschine,

N PS Vom Rotor aufgenommene Leistung,

N_z PS Dem Zugpropeller eines Trag- oder Flugschraubers zugeführte Leistung,

ν Faktor zur Kennzeichnung des Flugzustandes[2])

$$\nu = \frac{N}{N + N_z}$$

$\nu = 0$ Tragschrauber.

$\nu = 1$ Hubschrauber,

$1 > \nu > 0$ Flugschrauber.

η Standschubgütegrad

$$\eta = \frac{k_{sa}^{3/2}}{2\,k_d}$$

ε Gleitzahl eines Drehflügelflugzeuges, Getriebewirkungsgrad des Rotors und Wirkungsgrad der Zugschraube gleich 1 gesetzt:

$$\varepsilon = \frac{k_{sh} + f \cdot \lambda^2}{k_{sv}} + \frac{k_d}{\lambda \cdot k_{sv}}$$

mit $\lambda = V/U \cong \mu$,

f Verhältnis der schädlichen Fläche aller nichttragenden Teile des Flugzeuges zur Rotorkreisfläche F,

$\sigma_{0.7}$ Reduzierte Flächendichte eines Trapezblattes, σ bezogen auf die Blattiefe in $0{,}7 \cdot R$

$$\sigma_{0.7} = \frac{z \cdot t_0\,(1 + 0{,}7\,p)}{\pi \cdot R}$$

[1]) Fortsetzung von Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 290. Von der Fakultät für Maschinenwesen an der T. H. Hannover genehmigte Dissertation. D 89. (Erweiterte Fassung).

[2]) Die Anregungen zur Einführung eines Faktors für die Kennzeichnung des Flugzustandes verdanke ich Herrn Hohenemser.

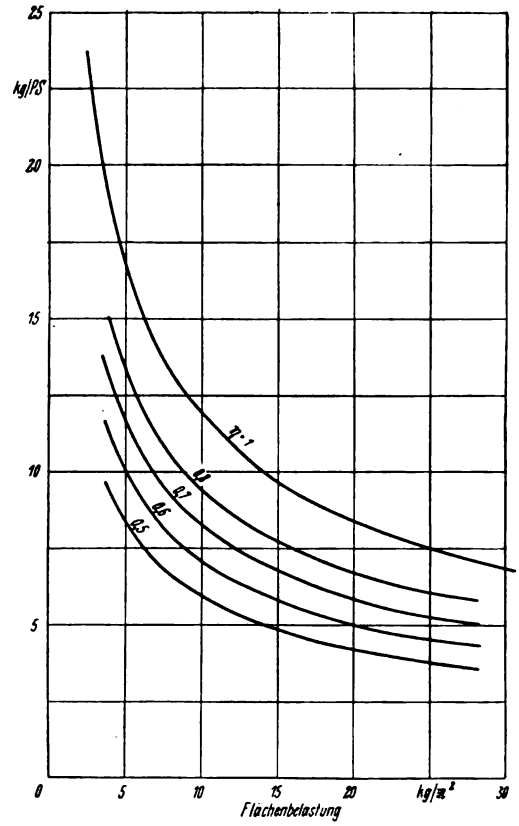


Bild 8. Tragkraft im Schwebezustand als Funktion der Flächenbelastung.

IX. Allgemeines.

Je nach dem Verwendungszweck des Drehflügelflugzeuges als Lastenträger, bei dem die Geschwindigkeit eine untergeordnete Rolle spielt, oder als Verkehrsflugzeug mit möglichst hoher Reisegeschwindigkeit wird man den Hauptwert auf eine große Tragkraft des Rotors oder eine gute Gleitzahl des gesamten Flugzeuges legen. Da man jedoch immer von einem Drehflügler verlangen wird, daß er senkrecht zu starten und landen vermag, ist mit dem Fluggewicht und der dem Rotor zur Verfügung stehenden Leistung der Mindestdurchmesser des Rotorkreises festgelegt. Maßgebend ist letzten Endes der mit der Leistungseinheit erzielte Schub, für den folgende Beziehung gilt.

$$G/N = 75 \cdot \eta \sqrt{\frac{2\varrho}{G/F}}\ \text{kg/PS} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Über den Standschubgütegrad η sei zunächst nur ausgesagt, daß er zwischen 60 bis 75% schwankt und von der aerodynamischen Ausbildung des Rotors abhängt.

Wie aus Gl. (78) und ihrer Darstellung in Bild 8 hervorgeht, nimmt das Hubvermögen eines Rotors mit abnehmender Flächenbelastung zu. Diese beträgt bei den heute

Digitized by Google

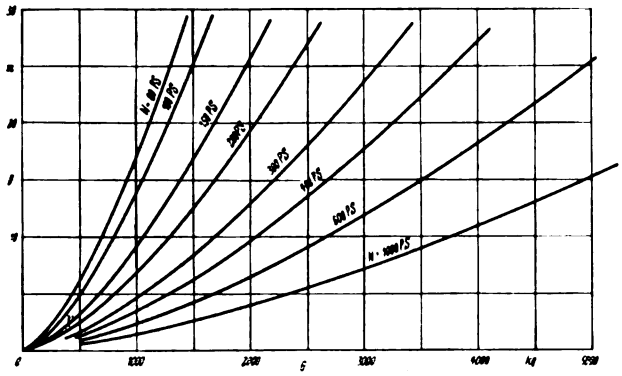


Bild 9. Mindestdurchmesser des Rotorkreises für das Schweben am Ort ($\varrho = 0{,}7$).

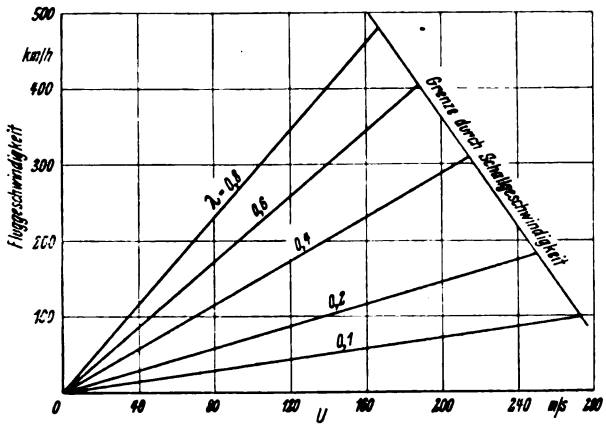


Bild 11. Geschwindigkeitsgrenze bei einer höchstzulässigen Machschen Zahl von 0,9.

üblichen Flugzeugen von etwa 800 bis 1000 kg Fluggewicht 6 bis 10 kg/m² und wird bei dem Übergang zu größeren und schnelleren Maschinen weiter ansteigen.

Bild 9 zeigt in anschaulicher Weise den Zusammenhang zwischen Durchmesser, Fluggewicht und Leistung nach Gl. (78). Als Standschubgütegrad wurde $\eta = 0{,}7$ angesetzt. Der sich aus Bild 9 ergebende Durchmesser würde also gerade ausreichen, um das Flugzeug ohne Wirkung des Bodeneinflusses[3]) in der Schwebe zu halten. Selbstverständlich ist für das Steigen usw. ein gewisser Auftriebsüberschuß erforderlich, der eine entsprechende Durchmesservergrößerung verlangt. Löst man Gl. (78) nach D auf, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$D = 0{,}01065 \cdot \frac{G^{3/2}}{\eta \cdot N \cdot \sqrt{\varrho}} \quad \text{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78\text{a})$$

Er sagt aus, daß für eine gewünschte prozentuale Änderung des Auftriebes etwa die 1,5fache des Rotordurchmessers erforderlich ist. So bringt beispielsweise bei konstantem Standschubgütegrad η eine Vergrößerung des Durchmessers um 15% eine Erhöhung der Tragkraft um 10%. Mit Rücksicht auf das Gewicht der Blätter und ihren Durchhang im Stand[4]) kann diese Rotorvergrößerung jedoch nicht beliebig weit getrieben werden.

Von allgemeiner Bedeutung ist ferner die Umfangsgeschwindigkeit am Spitzenkreis, die bei den heute üblichen Flugzeugen in Art der C 30 zwischen 100 und 150 m/s schwankt und — wie wir später sehen werden — aus verschiedenen Gründen nicht wesentlich geändert werden kann.

[3]) In unmittelbarer Bodennähe erhöht sich bei gleicher Leistungszufuhr der Schub. Diese Vergrößerung der Tragkraft wird wirksam bei einem Abstand von 0,6 bis 0,8 D zwischen Rotorkreis und Erdboden und kann für Flugzeuge der heute üblichen Bauarten im Stand bis zu 30% betragen.

[4]) Um die Beanspruchung der Blätter im Fluge möglichst klein zu halten, werden sie senkrecht zu ihrer Umlaufebene zweckmäßig biegeweich gebaut. Auf diese Weise kann durch die Entlastung aus der Zentrifugalkraft die Biegebeanspruchung auf etwa 20% der des unelastischen Flügels herabgesetzt werden.

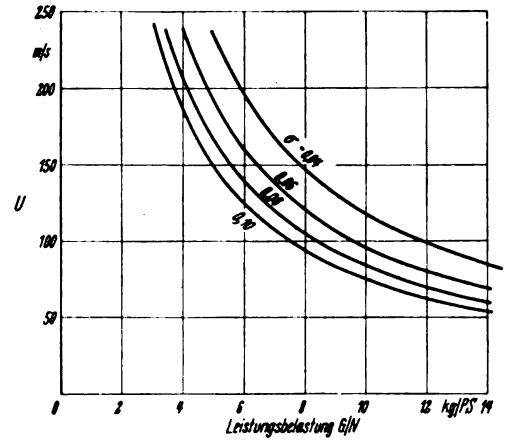


Bild 10. Günstigste Umfangsgeschwindigkeit am Spitzenkreis für das Schweben am Ort

$$\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}2,\ \eta = 0{,}7\right).$$

Für die überschlägige Bestimmung des günstigsten Wertes soll ein Ergebnis der späteren Rechnung vorweg genommen werden, welches aussagt, daß das Optimum des Standschubgütegrades bei einer Blattbelastung von $k_{sa}/\sigma \cong 0{,}2$ erreicht wird. Mit diesem Wert und D nach Gl. (78a) läßt sich aus der Gleichung für den Axialschub ($G = k_{sa} \cdot F \cdot U^2 \cdot \varrho/2$) folgende Beziehung für die günstigste Umfangsgeschwindigkeit des Schwebens am Ort ableiten:

$$U = \frac{335 \cdot \eta \cdot N}{G \cdot \sqrt{\sigma}} \quad \text{m/s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Bild 10 zeigt die Umfangsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Leistungsbelastung nach Gl. (79) für die praktisch vorkommenden Flächendichten $\sigma = 0{,}04$ bis 0,10. Es sei bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, daß die hohen Flächendichten etwas günstigere Standschubgütegrade ergeben, während die kleineren Werte besser für den Waagerechtflug geeignet sind. In Bild 10 ist die Leistungsbelastung auf das Fluggewicht bezogen worden. Verlangt man, daß der Rotor das n-fache dieses Fluggewichtes zu tragen vermag, so ist die Umfangsgeschwindigkeit weiter im Verhältnis $1 : n$ zu verringern. Der so für U gefundene Wert berücksichtigt nur den Schwebezustand bzw. das Steigen. Soll das Flugzeug außerdem im Horizontalflug hohe Geschwindigkeiten erreichen, so kommen weitere Gesichtspunkte hinzu, die den Bereich wesentlich einschränken.

Da für normale Profile beim Arbeiten in Nähe der Schallgeschwindigkeit der Widerstandsbeiwert stark ansteigt, müssen nach Möglichkeit hohe Machsche Zahlen[5]) vermieden werden. Die größte Relativgeschwindigkeit tritt bei dem Drehflügler an der Flügelspitze des voreilenden Blattes ($\psi = 90^0$) auf, wo sich Flug- und Umfangsgeschwindigkeit addieren. Nimmt man an, daß die Summe dieser beiden einen bestimmten Wert nicht überschreiten darf, so ergibt sich für jede Umfangsgeschwindigkeit eine maximale Fluggeschwindigkeit.

Bild 11 zeigt diesen Zusammenhang für verschiedene Fortschrittsgrade λ (Verhältnis der Flug- zur Umfangsgeschwindigkeit). Ferner wurde die Grenze eingezeichnet, die sich aus der Forderung einer höchstzulässigen Machschen Zahl ergibt. Es wurde angenommen, daß die größte Relativgeschwindigkeit an der Blattspitze 90% der Schallgeschwindigkeit nicht überschreiten darf. Da diese hohe Geschwindigkeit nur an einem kleinen Teil des Rotorkreises auftritt, kann die zulässige Machsche Zahl vielleicht etwas erhöht werden, ohne daß die Gleitzahl des Rotors sich wesentlich verschlechtert. Grundsätzlich ändert sich aber damit an der bei Drehflüglern auftretenden Geschwindigkeitsbegrenzung nichts.

[5]) Stack, v. Doenhoff, Tests of 16 related airfoils at high speeds. NACA-Report 492.

Digitized by Google

Da der für den horizontalen Vorwärtsflug maßgebende Gütegrad, die Gleitzahl des Drehflügelflugzeuges nach den bisherigen Erkenntnissen ihren Bestwert bei einem Fortschrittsgrad von $= 0{,}35$ bis $0{,}40$ erreicht, ergibt sich aus Bild 11 die Geschwindigkeitsgrenze des günstigsten Horizontalfluges mit etwa 300 km/h. Selbstverständlich ist es unter Verzicht auf die kleinste Gleitzahl sehr wohl möglich, Drehflügelflugzeuge mit Geschwindigkeiten bis zu 400 km/h und mehr zu bauen. Die hierfür erforderlichen Fortschrittsgrade von 0,6 bei etwa 180 m/s Umfangsgeschwindigkeit liegen durchaus im Bereich des möglichen.

Es sei bei dieser Gelegenheit jedoch darauf hingewiesen, daß im ausgesprochenen Schnellflug die Leistungen des Drehflüglers wegen der damit verbundenen hohen Fortschrittsgrade wohl immer der des normalen Drachenflugzeuges unterlegen bleiben werden. Der Vorteil des Drehflügelflugzeuges besteht eben zur Hauptsache darin, daß es trotz ausreichender Höchstgeschwindigkeit seine Vorwärtsbewegung bis zum Schweben am Ort reduzieren kann. Durch diese Eigenschaft wird es für viele Verwendungszwecke auch dann noch dem normalen Drachenflugzeug vorzuziehen sein, wenn es dessen Höchstgeschwindigkeit nicht erreichen sollte.

X. Bestimmung der Gütegrade.

1. Annahmen über die Rotorausbildung und das benutzte Profil.

Der Rechnung wurden folgende Ersatzfunktionen für die Luftkraftbeiwerte des Blattelementes zugrunde gelegt

$$c_a = 5{,}6\,\alpha_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

$$c_w = 0{,}011 - 0{,}0572 \cdot \alpha_p + 0{,}89 \cdot \alpha_p^2 \quad \ldots \quad (81)$$

Diese Daten entsprechen etwa dem amerikanischen Profil M 12 bei einem Seitenverhältnis 1 : 30. Die Parabel für c_w ist so gewählt worden, daß bei den Arbeitswinkeln $\alpha_p = 0$, 6,5 und 13° die Ersatzfunktion mit dem eigentlichen Widerstandsbeiwert übereinstimmt[6]).

Der Schubabminderungsfaktor B wird unabhängig von der Schraubenbelastung und Flügelzahl mit 0,98 angesetzt, d. h. die äußersten 2% des Rotorblattes haben keinen Anteil an der Auftriebserzeugung. Der Einfachheit halber soll ferner angenommen werden, daß das Schlaggelenk mit der Drehachse zusammenfällt. Das Profil ist in Übereinstimmung mit den im I. Teilbericht abgeleiteten Beziehungen von $r = 0$ bis R durchgehend angenommen worden. Der Nabenwiderstand wird zunächst nicht berücksichtigt.

Für die Blattmassenkonstante wird bei dem Rechteckblatt entsprechend der heute üblichen Bauweise $\gamma = 12$ angesetzt. Ein Trapezblatt 3 : 1 ($p = -{}^2/_3$) gleicher Ausführung, welches bei 0,7 R dieselbe Blattiefe aufweist wie das Rechteckblatt, hat erfahrungsgemäß etwa $\gamma = 23{,}4$. Dieser Wert ist auch der Rechnung zugrunde gelegt worden.

2. Standschubgütegrad.

Für das Schweben am Ort besteht die Aufgabe darin, die Voraussetzungen für einen optimalen Standschubgütegrad

$$\eta = \frac{k_{sa}^{3/2}}{2\,k_d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

zu bestimmen. Als erstes ist die günstigste (spezifische) Blattbelastung k_{sa}/σ zu ermitteln, die ein Maß für den mittleren Arbeitswinkel am Blattelement darstellt[7]). Diese

[6]) Da bei der Bestimmung des Arbeitswinkels am Blattelement der Abwind in λ_i bereits enthalten ist und außerdem die Polare für ein endliches Seitenverhältnis angesetzt wird, ist also das endliche Seitenverhältnis doppelt berücksichtigt. Der Verfasser hat diesen Weg bewußt gewählt, da auf diese Weise am einfachsten die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch erzielt werden kann. Dieses Verfahren ist als eine — allerdings sehr brauchbare — Hilfslösung anzusehen, bis einwandfreie Abwindmessungen und die Polaren eines unter verschiedenen Schiebewinkeln angeströmten Profiles eine exakte Rechnung ermöglichen.

[7]) Für das Rechteckblatt ergibt sich beispielsweise aus Gl. (13) für den mittleren Arbeitswinkel

$$\alpha_p^\circ = \frac{3 \cdot 57{,}3}{c_a' \cdot B^3} \cdot k_{sa}/\sigma \cong 32{,}6 \cdot k_{sa}/\sigma.$$

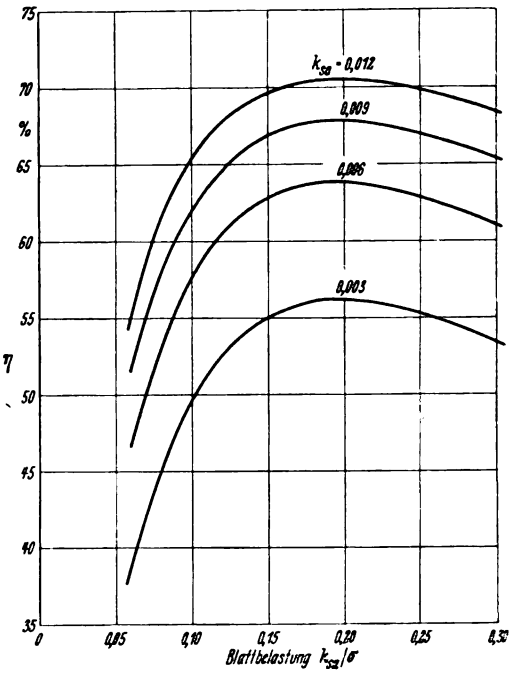


Bild 12. Standschubgütegrad eines unverwundenen Rechteckblattes.

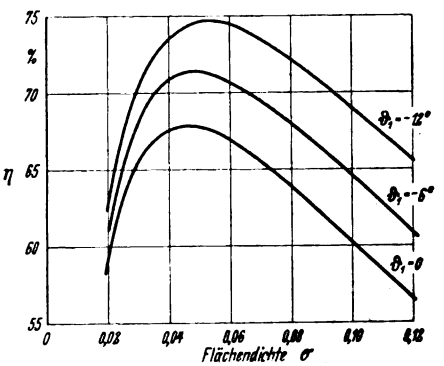


Bild 13. Verbesserung des Standschubgütegrades eines Rechteckblattes durch Verwindung ($k_{sa} = 0{,}009$).

Rechnung ist mit Hilfe der Gleichungen (11, 13, 14, 82) zunächst für ein unverwundenes Rechteckblatt durchgeführt worden. Das Ergebnis wurde für verschiedene Schubbeiwerte über der Blattbelastung in Bild 12 aufgetragen. Wir ersehen daraus, daß der Gütegrad η mit zunehmendem Schubbeiwert steigt. Das Maximum liegt unabhängig von k_{sa} bei einer Blattbelastung von $k_{sa}/\sigma = 0{,}195$.

Die weiteren Untersuchungen befassen sich mit der Verbesserung des Gütegrades durch eine zweckmäßige Blattgestaltung. Für diese Überlegung ist $k_{sa} = 0{,}009$ zugrunde gelegt worden. Diese Annahme entspricht ungefähr dem Schubbeiwert der heute üblichen Drehflügelflugzeuge.

Bild 13 zeigt den Einfluß der Verwindung bei einem Rechteckblatt. Als Abszisse ist hier und in Bild 14 statt der Blattbelastung die Flächendichte gewählt worden. In Bild 13 ergibt sich als günstigste Flächendichte für $k_{sa} = 0{,}009$ $\sigma \cong 5\%$. Das entspricht also auch wieder einer Blattbelastung von $\sim 0{,}2$. Bild 13 ist zu entnehmen, daß durch eine Verwindung von 12° der Standschubgütegrad von 67,8% auf 74,8%, also um 10,3% gegenüber dem unverwundenen Blatt gesteigert werden kann.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß man im allgemeinen mit Rücksicht auf den Vorwärtsflug und die bei einer größeren Verwindung in Frage gestellte Autorotationsfähigkeit, die grundsätzlich jedem Drehflügelflugzeug für den Fall eines Triebwerkschadens erhalten bleiben muß, nur gering verwundene Blätter wählen wird. Praktisch

Digitized by Google

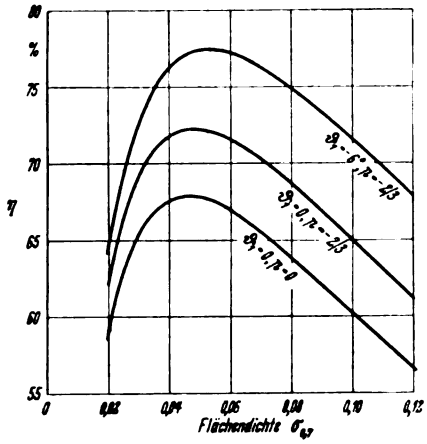


Bild 14. Verbesserung des Standschubgütegrades durch Übergang vom einfachen Rechteckblatt zum unverwundenen und verwundenen Trapezblatt ($k_{sa} = 0{,}009$).

wird man deshalb über 8 bis 10° Verwindung kaum hinausgehen.

Als weiteres Mittel zur Verbesserung des Standschubgütegrades steht die trapezförmige Gestaltung des Blattes, d. h. Verjüngung der Blattiefe nach außen hin, zur Verfügung. Auch hier wird die Verbesserung durch eine gleichmäßigere Verteilung des Auftriebes über die Blattlänge hervorgerufen, wodurch die Resultierende der für das Antriebsmoment maßgebenden Tangentialkräfte nach innen wandert und somit an einem kleineren Hebelarm wirksam wird.

Bild 14 zeigt die Verbesserung, die durch Übergang vom einfachen Rechteckblatt zum unverwundenen und verwundenen Trapezblatt erzielt werden kann. Die günstigste Flächendichte liegt auch hier wieder bei etwa 5%, d. h. bei einer Blattbelastung von $k_{sa}/\sigma \cong 0{,}2$. Dabei ist zu bemerken, daß zur Bestimmung der Flächendichte des Trapezblattes die Blattiefe in 0,7 R angesetzt wurde. Nach Bild 14 steigt der Gütegrad bei günstigster Flächendichte von 67,8% eines Rechteckblattes auf 72,2% beim unverwundenen und weiter auf 77,6% bei einem um 6° negativ verwundenen Trapezblatt. Als Verjüngungsfaktor wurde $p = -2/3$ angenommen, d. h. bei einem bis zur Rotormitte durchgehenden Flügel würde sich die Tiefe des innersten Blattelementes zur theoretischen Blattiefe (ohne Berücksichtigung der Abrundung) an der Flügelspitze wie 3 : 1 verhalten. Dieses um 6° verwundene Blatt entspricht ungefähr der Flügelform, die heute bei modernen Blattkonstruktionen Verwendung findet.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß für das Schweben am Ort (ohne Rücksicht auf den noch zu behandelnden Vorwärtsflug) ein Rotor kleiner Flächenbelastung mit geringen Umfangsgeschwindigkeiten günstig ist. Als zweckmäßige Blattbelastung ist für das der Rechnung zugrunde gelegte Profil $k_{sa}/\sigma \cong 0{,}2$ anzusehen. Durch Verwendung eines verwundenen Trapezblattes kann der Gütegrad gegenüber dem einfachen Rechteckblatt um rd. 15% verbessert werden. Das bedeutet praktisch eine Erhöhung der Tragkraft um 10% bei gleichem Leistungsaufwand.

Im folgenden soll noch kurz auf das Optimum der Flächendichte eingegangen werden, das mit der bisherigen Annahme $B = 0{,}98$ = konst. rechnungsmäßig nicht in Erscheinung tritt. Übernimmt man aus Bild 12 die für die günstigste Blattbelastung $k_{sa}/\sigma = 0{,}2$ zu den verschiedenen Schubbeiwerten k_{sa} gehörigen η-Werte und trägt diese über der Flächendichte auf, so ergibt sich — Bild 16 — ein stetiges, schwaches Ansteigen des Standschubgütegrades mit der Flächendichte, das nicht den Tatsachen entspricht.

Setzt man den Zirkulationsabfall an der Blattspitze nach Prandtl[8]) mit

$$B = 1 - \frac{\sqrt{k_{sa}}}{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

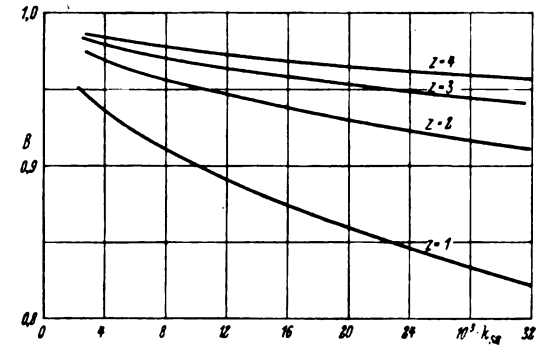


Bild 15. Einfluß der endlichen Flügelzahl und der Schraubenbelastung auf den Schubabminderungsfaktor B.

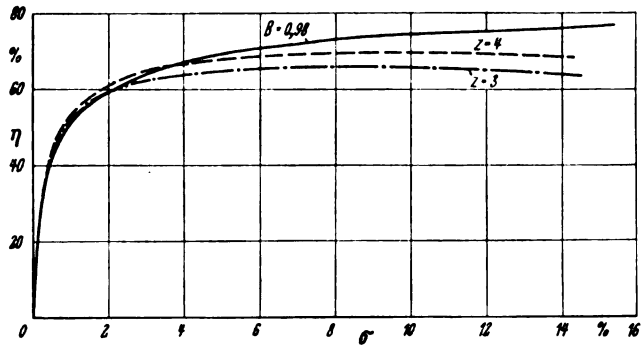


Bild 16. Standschubgütegrad eines unverwundenen Rechteckblattes bei günstigster Blattbelastung $\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}2\right)$ als Funktion der Flächendichte.

an, so erhält man die in Bild 15 in Abhängigkeit von k_{sa} für verschiedene Flügelzahlen z dargestellten Werte und damit ein Maximum des Standschubgütegrades, das in Übereinstimmung mit Versuchen bei Flächendichten von 8 bis 12% liegt, s. Bild 16.

Da das Optimum aber sehr schwach ausgeprägt ist, geht man mit Rücksicht auf das Gewicht der Blätter und ihren Durchhang im Stand ungern über Flächendichten von 6% hinaus. Man erhält dann immer noch Flügel mit ausreichendem Standschubgütegrad, die gleichzeitig für den Schnellflug geeignet sind.

3. Gleitzahl des günstigsten Horizontalfluges.

Nach der Behandlung des Schwebezustandes folgt die Bestimmung des Gütegrades des bestmöglichen Horizontalfluges. Es ist also ohne Rücksicht auf die Geschwindigkeit die normalerweise erreichbare kleinste Gleitzahl zu berechnen. Wir gehen dabei von dem Fortschrittsgrad $\mu = 0{,}35$ aus, es ist derjenige Wert, für den nach den bisherigen Erkenntnissen die optimale Gleitzahl zu erwarten ist. Die damit nach Bild 11 verbundene Geschwindigkeitsbegrenzung auf rd. 280 km/h interessiert in diesem Zusammenhang nicht.

Als Flächendichte sei in Übereinstimmung mit modernen Drehflügelkonstruktionen $\sigma = 0{,}05$ angesetzt. Es ist der gleiche Wert, der bei der Behandlung des Schwebezustandes für $k_{sa} = 0{,}009$ den besten Standschubgütegrad ergab. Analog der Untersuchung des Schwebens am Ort ist zunächst wieder die günstigste Blattbelastung zu bestimmen. Bei einer vorgegebenen Flächendichte ist eine Änderung der Blattbelastung identisch mit einer Variation des Schubbeiwertes. Es wurden deshalb für $k_{sa} = 0{,}005$, 0,0075,

[8]) Prandtl, Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Nachsatz Prandtl zu Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Göttingen 1927.
In Gl. (4) S. 90 wird v durch v_d ersetzt und im Nenner v^3 gegenüber $R^2 \cdot \omega^2$ vernachlässigt. Mit $\lambda_d = \sqrt{k_{sa}}/1{,}4$ erhält man

$$a = 1 - B = \frac{2 \cdot \ln 2}{1{,}4 \cdot z} \cdot \sqrt{k_{sa}}$$

$$B \cong 1 - \frac{\sqrt{k_{sa}}}{z}.$$

Digitized by Google

0,010 (entsprechend einer Blattbelastung $k_{sa}/\sigma = 0{,}10,\ 0{,}15,\ 0{,}20$) die Beiwerte des Horizontalschubes und des Drehmomentes berechnet und in Bild 17 bis 21 über α aufgetragen. Gleichzeitig wurde dort der für jede Neigung der Normalebene zur Erzeugung des geforderten Schubes (Tragkraft) notwendige Blattanstellwinkel ϑ_0 wiedergegeben.

Bild 17 bis 19 zeigen dieses Ergebnis für einen Rotor mit einem unverwundenen Rechteckblatt.

Bild 20 und 21 geben das Ergebnis der entsprechenden Rechnung für die günstigste der drei untersuchten Blattbelastungen, $k_{sa}/\sigma = 0{,}15$, unter Zugrundelegung eines um 6° negativ verwundenen Rechteckblattes und eines unverwundenen Trapezblattes ($p = -2/3$) wieder.

Die Ergebnisse sind auf folgende Weise gewonnen worden. Aus der Gleichung für den Axialschub Gl. (13) bzw. (41) wird λ_d als Funktion der Blattbelastung und des Blattanstellwinkels erhalten und in die Formeln für die Beiwerte des Drehmomentes und Normalschubes eingesetzt. Mit λ_d und k_{sa} kann auch der zugehörige α-Wert nach Gl. (1) bestimmt werden, so daß nur noch die Koordinaten-Transformation vorzunehmen ist. Bei diesem Übergang zum schrauben- zum strömungsfesten System wurde bei der Berechnung von k_{sh} (Horizontalschub) $\cos\alpha = 1$ und der Vertikal- gleich dem Axialschub gesetzt, s. Bild 4. Da für die praktisch interessierenden Fälle α maximal etwa 10 bis 14° erreicht, ist diese Vernachlässigung für das Ergebnis ohne Bedeutung. Das Abreißen der Strömung wurde bei $k_{sa}/\sigma = 0{,}15$ mit $b = 0{,}7$ und bei $k_{sa}/\sigma = 0{,}20$ mit $b = 0{,}98$ berücksichtigt.

Die weitere Auswertung des so gewonnenen Zahlenmaterials besteht in der Berechnung der Gleitzahl ε nach der Beziehung

$$\varepsilon = \frac{k_{sh} + f \cdot \lambda^2}{k_{sv}} + \frac{k_d}{\lambda \cdot k_{sv}} \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

Darin berücksichtigt das Glied $f \cdot \lambda^2$ den Einfluß zusätzlicher Widerstände wie Rumpf, Fahrwerk usw. Der Faktor f kennzeichnet das Verhältnis der schädlichen Widerstände aller nichttragenden Teile eines Drehflügelflugzeuges zur Rotorkreisfläche. Sämtliche mechanische Wirkungsgrade

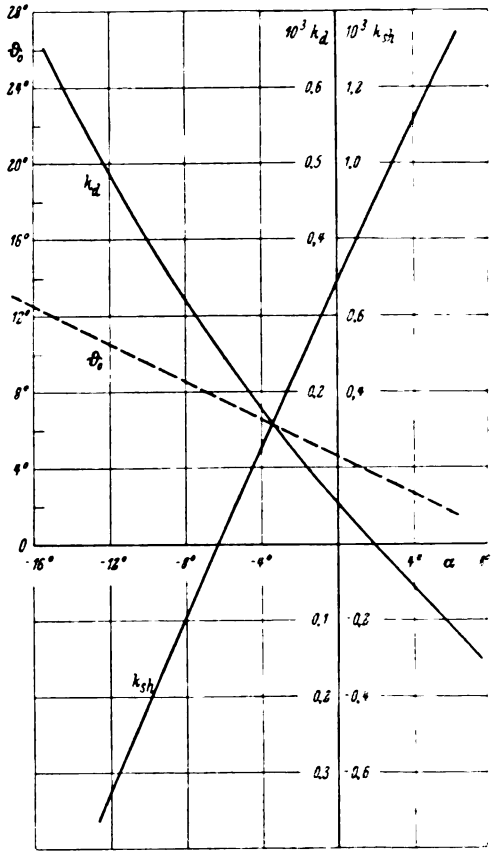


Bild 18. Unverwundenes Rechteckblatt $\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}15 \quad \mu = 0{,}35\right)$.

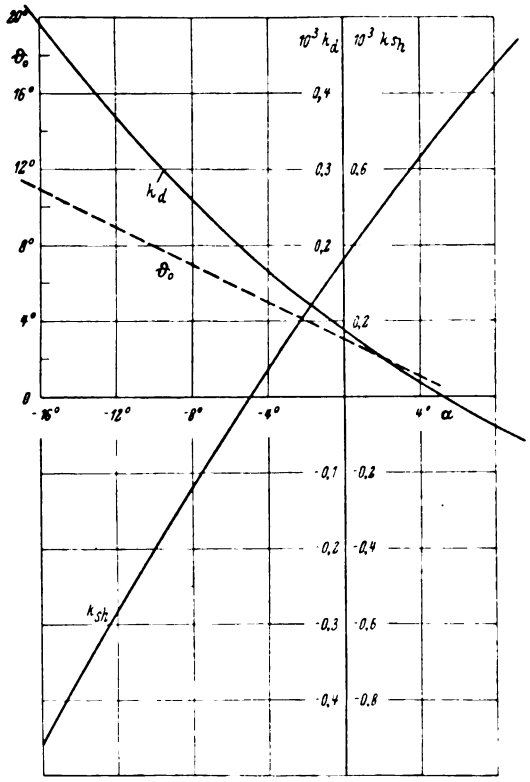


Bild 17. Unverwundenes Rechteckblatt $\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}10 \quad \mu = 0{,}35\right)$.

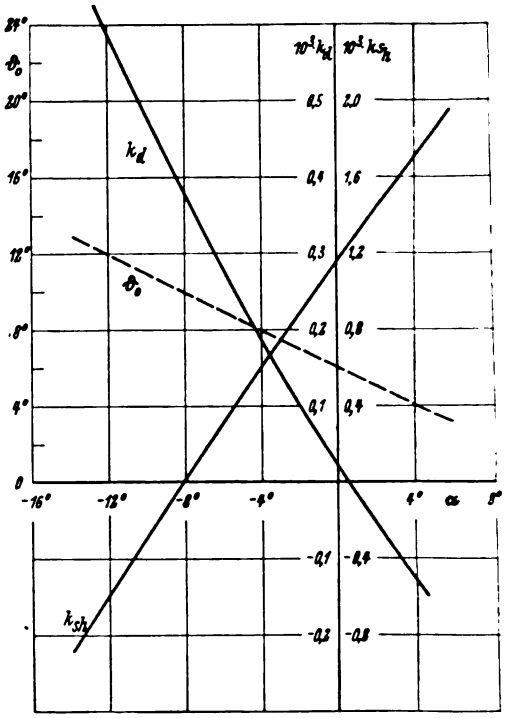


Bild 19. Unverwundenes Rechteckblatt $\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}20 \quad \mu = 0{,}35\right)$.

Digitized by Google

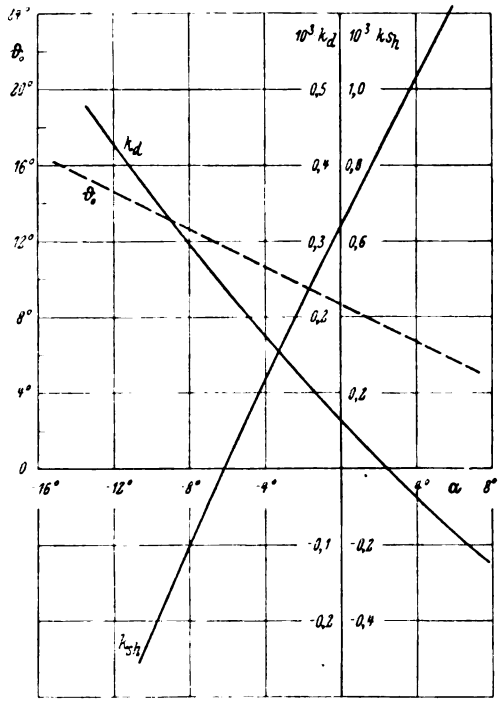


Bild 20. Verwundenes Rechteckblatt $\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}15 \quad \mu = 0{,}35 \quad \vartheta_1 = -6°\right)$.

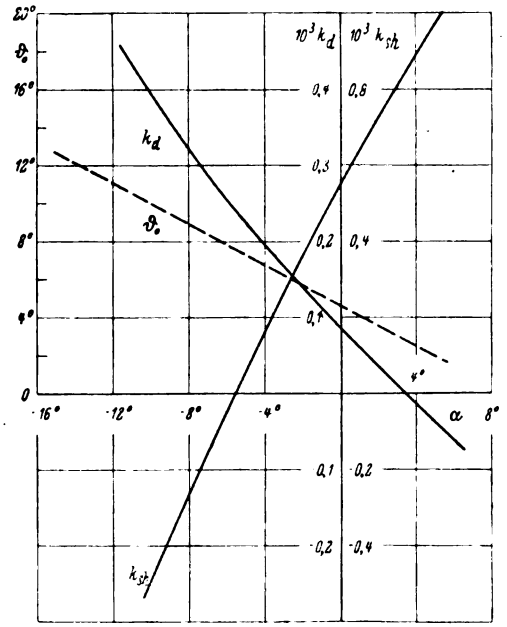


Bild 21. Unverwundenes Trapezblatt $\left(\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}15 \quad \mu = 0{,}35 \quad p = -2/3\right)$.

der Kraftübertragung und der Propellerwirkungsgrad sind in Gl. (84) vernachlässigt worden, weil sie an dieser Stelle eine untergeordnete Rolle spielen.

Im I. Teilbericht ist schon darauf hingewiesen worden, daß die erforderliche Tragkraft bei gleicher Drehzahl des Rotors durch verschiedene Flugzustände erreicht werden kann. Die beiden Grenzfälle seien nochmals kurz gekennzeichnet:

Tragschrauber. Bei kleinem Blattanstellwinkel (bis etwa 5°) und positiver Anstellung der Normalebene zur Strömung wird der Rotor vom Fahrtwind angetrieben. Eine normale Zugschraube dient zur Überwindung der gesamten Widerstände.

Hubschrauber. Die Normalebene eines durch eine Kraftmaschine angetriebenen Rotors wird in Flugrichtung so weit nach vorn (α negativ) geneigt, daß der Rotor selbst seinen eigenen Widerstand und den des Flugzeuges überwindet. Die Blattanstellwinkel müssen auf etwa 10 bis 12° erhöht werden, eine besondere Zugschraube ist nicht mehr erforderlich.

Bild 22 gibt für diese beiden Grenzzustände den Gütegrad des Horizontalfluges bei 0,35 Fortschrittsgrad wieder, ohne zusätzliche Widerstände zu berücksichtigen. Die Kurven zeigen als Funktion der Blattbelastung die reziproke Gleitzahl eines Rotors mit unverwundenem Rechteckblatt. Zur Beurteilung des Einflusses von Verwindung und Trapezform sind ferner für $k_{sa}/\sigma = 0{,}15$ die Punkte für ein verwundenes Rechteck- und ein unverwundenes Trapezblatt eingezeichnet worden. Für den alleinfahrenden Rotor ($f = 0$) ergibt sich zunächst eine Überlegenheit des Hubschraubers gegenüber dem Tragschrauber. Da aber eine Beurteilung der verschiedenen Flugzustände praktisch nur dann einen Sinn hat, wenn auch zusätzliche Widerstände berücksichtigt werden, kommen wir auf diesen Vergleich später zurück.

Die für das einfache, d. h. unverwundene, Rechteckblatt gefundenen optimalen Gleitzahlen liegen für den Tragschrauber bei $k_{sa}/\sigma = 0{,}16$ und für den Hubschrauber bei 0,14. Dies bedeutet, daß beim Übergang vom Schwebezustand (Bestwert bei $k_{sa}/\sigma = 0{,}20$) zum Vorwärtsflug theoretisch die Drehzahlen erhöht werden müßten, falls man auf dem Optimum bleiben will. Nach den Ergebnissen

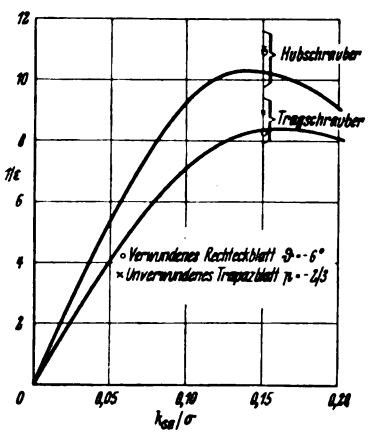


Bild 22. Gütegrad eines alleinfahrenden Rotors ($f = 0$) im Trag- und Hubschraubenzustand (unverwundenes Rechteckblatt, $\mu = 0{,}35$).

von Bild 22 wäre ausgehend vom Schweben am Ort die Drehzahl für den Tragschrauber um 12 und für den Hubschrauber um 20% zu steigern.

Diese für den Tragschrauber bekannte Verschiebung der günstigsten Blattbelastung stimmt mit dem Ergebnis von Windkanalversuchen überein. Die sehr umfangreichen Messungen von Wheatley [13], ausgewertet bei Hohenemser[9]), ergeben beispielsweise die besten Gleitzahlen bei Blattbelastungen von $k_{sa}/\sigma = 0{,}15$. Für den Hubschrauber fehlt es z. Z. noch an entsprechenden Versuchen, die an dieser Stelle zum Vergleich herangezogen werden könnten.

Hinsichtlich der Beurteilung der absoluten Werte der errechneten maximalen Gütegrade kann für den Tragschrauber wieder auf verschiedene an Großausführungen durchgeführte Messungen zurückgegriffen werden, die Cierva[10]) in einem am 15. März 1935 vor der Royal Aeronautical Society gehaltenen Vortrag zusammenfaßt. Danach kommt Wheatley zu dem Ergebnis, daß die Rotoren der von ihm untersuchten amerikanischen Tragschrauber Gleitzahlen von 1 : 8 bis 1 : 10 aufweisen. Diese Zahlen würden mit der vorliegenden Rechnung in Einklang stehen, die für

[9]) Hohenemser, Zur Frage der Flugleistungen von Drehflüglern. Ing.-Arch. Bd. 8 (1937), S. 433.
[10]) Cierva †, Neuere Fortschritte des Autogiros. Luftwissen Bd. 2 (1935), Nr. 5, S. 113.

Digitized by Google

das Rechteckblatt als besten Wert 1 : 8,4 ergibt. Die trapezförmige Blattgestaltung liefert rechnungsmäßig eine Verbesserung auf etwa 1 : 9 und fällt damit auch in den Bereich der von Wheatley gefundenen Versuchswerte, die ebenfalls vom einfachen Rechteckblatt abweichende Blattformen einschließen. Es sei bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam gemacht, daß beim Trapezflügel mit derselben Vergleichsflächendichte $\sigma_{0,7}$ die maßgebenden äußeren Blattelemente bei kleinerer Kennzahl arbeiten als beim Rechteckblatt. Da diese Tatsache in der Rechnung nicht berücksichtigt wurde, wird vermutlich die hier rechnerisch ermittelte Gleitzahlverbesserung nicht voll in Erscheinung treten.

Cierva führt in seinem oben erwähnten Vortrag als eigene erreichte Bestwerte Gleitzahlen von 1 : 13 bis 1 : 14 an. Da jedoch diese oder ähnliche günstige Gleitzahlen bis zum heutigen Tage weder an Großausführungen noch an Modellen einwandfrei ermittelt wurden, hält der Verfasser sie für etwas zu optimistisch.

Wesentlich ungünstiger liegen selbstverständlich die allgemein bei den Modellversuchen erreichten Gleitzahlen, die maximal etwa 1 : 6 betragen und zur Beurteilung der für Großausführungen erreichbaren Bestwerte nicht unmittelbar herangezogen werden können. Die bei diesen Modellversuchen sich ergebenden ungünstigeren Werte sind zur Hauptsache auf die kleinen Kennzahlen zurückzuführen. Hinzu kommt noch, daß die im Verhältnis zur Großausführung gewöhnlich etwas unförmigen Dämpfer, Gelenke usw. zusätzliche Verluste ergeben, die nicht immer einwandfrei erfaßt werden können.

Um den Einfluß der Verwindung zu zeigen, wurde für $k_{sa}/\sigma = 0{,}15$ die Berechnung eines negativ verwundenen Rechteckblattes ($\vartheta_1 = -6°$) durchgeführt. Es ergibt sich für den Hubschrauber eine Verbesserung der Gleitzahl von 1 : 10,3 auf 1 : 10,9. Bei dem Tragschrauber mit entgegengesetzter Durchströmung ist diese negative Verwindung von Nachteil, weil durch die schlechtere Autorotationsfähigkeit die Normalebene für den Freilaufzustand zu stark angestellt werden muß.

Die trapezförmige Blattgestaltung bringt ebenso wie beim Trag- auch beim Hubschrauber eine Verbesserung, wobei wieder auf die bereits angeführte Vernachlässigung der Rechnung hingewiesen wird. Als absoluter Bestwert wurde bei Annahme eines Trapezblattes 3 : 1 ($p = -2/3$) $\varepsilon = 1 : 11$ errechnet. Es ist zu vermuten, daß dieser Wert bei gleichzeitiger Verwindung des Blattes auf etwa 1 : 12 gesteigert werden kann, womit nach Ansicht des Verfassers zunächst die obere Grenze erreicht sein dürfte.

Um schließlich den Einfluß von zusätzlichen Widerständen zu zeigen, sind in Bild 23 über dem Leistungsfaktor ν (Kennzeichnung des Flugzustandes) die reziproken Gleitzahlen eines Rotors unter Berücksichtigung verschiedener schädlicher Flächen aufgetragen. Der Leistungsfaktor wurde definiert als das Verhältnis der vom Rotor aufgenommenen Leistung zur Gesamtleistung. Ist die Gleitzahl eines Drehflügelflugzeuges bekannt, so kann der Leistungsfaktor ν ermittelt werden nach der Beziehung

$$\nu = \frac{k_d}{\lambda \cdot \varepsilon \cdot k_{sv}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

In Bild 23 sind ferner die verschiedenen Anstellwinkel der Normalebene eingetragen worden, die nötig sind, um die Widerstände des Flugzeuges im Hubschraubenflug zu überwinden. Die gewählte Darstellung hat den Vorteil, daß für α = konst. alle möglichen Flugzustände auf einer Geraden liegen, die mit der Neigung $\lambda \cdot k_{sv}/k_d$ durch den Koordinatennullpunkt geht.

Den Kurven für die Gleitzahl wurden schädliche Flächen von $f = 0{,}003$ und $f = 0{,}006$ zugrunde gelegt. Der letzte Wert entspricht für heutige Größenverhältnisse etwa einem normalen Drehflügelflugzeug in Art der C 30. $f = 0{,}003$ kennzeichnet einen aerodynamisch besonders sorgfältig durchgebildeten Drehflügler. Bild 23 ergibt für den Tragschrauber ($\nu = 0$) durch die schädlichen Flächen eine Verschlechterung der Gleitzahl von 1 : 8,4 auf 1 : 6,0 bzw. 1 : 4,6. Im reinen Hubschraubenflug ($\nu = 1$) erhöht sich die Gleitzahl von 1 : 10,3 auf 1 : 6,9 bzw. 1 : 5,1. Dabei muß infolge der zusätzlichen Widerstände die Vorneigung der Normalebene von $\alpha = -6{,}3°$ des alleinfahrenden Rotors auf $-9{,}5°$ bzw. $-12{,}7°$ verstärkt werden.

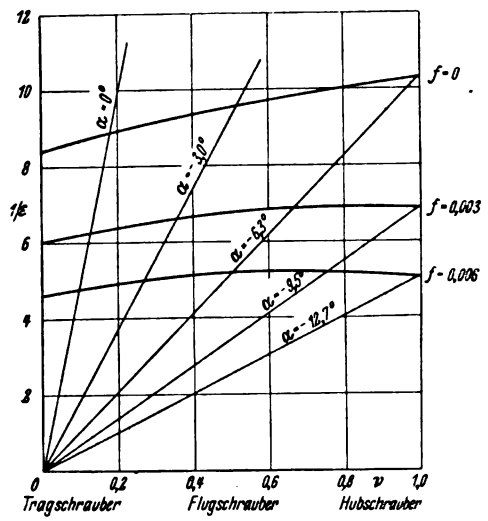


Bild 23. Einfluß der schädlichen Widerstandsfläche bei 0,35 Fortschrittsgrad (unverwundenes Rechteckblatt, $\frac{k_{sa}}{\sigma} = 0{,}15$).

Während für $f = 0$ der Hubschrauber überlegen ist, liegt das Optimum der Gleitzahl für $f = 0{,}006$ bei dem Flugschrauber. Mit zunehmendem schädlichen Widerstand verringert sich also die Überlegenheit des Hubschraubers gegenüber den anderen Flugzuständen.

In den bisherigen Untersuchungen sind die Wirkungsgrade des Rotorgetriebes und eines unter Umständen (Trag- oder Flugschrauber) erforderlichen Zugpropellers vernachlässigt. Da normalerweise der Getriebewirkungsgrad wesentlich höher liegen wird als der Wirkungsgrad des Zugpropellers, tritt also die hier in der Rechnung ermittelte Überlegenheit des Hubschraubers gegenüber dem Tragschrauber praktisch noch stärker in Erscheinung. Dieses Ergebnis entspricht auch den Flugversuchen des von Prof. Focke gebauten kombinierten Hub-Tragschraubers, der nach Kenntnis des Verfassers im Hubschraubenflug die größere Horizontalgeschwindigkeit erreichte.

XI. Schlußwort.

Die Untersuchung des Schwebens am Ort ergibt die besten Standschubgütegrade bei Blattbelastungen von $k_{sa}/\sigma = 0{,}2$. Durch Benutzung eines verwundenen Trapezblattes kann dieser Gütegrad gegenüber dem einfachen Rechteckflügel noch um rd. 15% verbessert werden.

Beim Übergang vom Schweben zum Horizontalflug verschiebt sich die günstigste Blattbelastung für den untersuchten Fortschrittsgrad von 0,35 auf $k_{sa}/\sigma = 0{,}16$ beim Tragschrauber und auf $k_{sa}/\sigma = 0{,}14$ beim Hubschrauber, so daß also zweckmäßig die Drehzahlen zu erhöhen wären.

Der absolute Bestwert der Gleitzahl ist bei Geschwindigkeiten unter 300 km/h zu erwarten. Er dürfte bei Benutzung eines auch für das Schweben günstigen Blattes etwa 1 : 12 für den Rotor ohne zusätzliche Widerstände betragen. Ein Vergleich der verschiedenen Flugzustände ergibt für 0,35 Fortschrittsgrad in Übereinstimmung mit Flugversuchen eine Überlegenheit des Hubschraubers, die zwar noch nicht verallgemeinert werden darf, aber vermuten läßt, daß der Hubschrauber infolge seiner überragenden Start- und Landungseigenschaften in absehbarer Zeit sich durchgesetzt haben wird.

Da zusätzliche Widerstände sich beim Hubschrauber stärker in einer Verschlechterung der Gleitzahl auswirken als beim Tragschrauber, ist besonders für den Hubschrauber der größte Wert auf eine aerodynamisch günstige Ausbildung des gesamten Flugzeuges zu legen.

Digitized by Google

XII. Zahlentafeln.

Zahlentafel 1 (Bild 12).

	k_{sa}/σ	$10^3\,k_d$	η %		k_{sa}/σ	$10^3\,k_d$	η %
$k_{sa} = 0{,}003$	0,06	0,213	38,5	$k_{sa} = 0{,}006$	0,06	0,495	46,9
	0,09	0,173	47,5		0,09	0,418	55,5
	0,12	0,156	52,6		0,12	0,384	60,4
	0,18	0,147	55,8		0,18	0,364	63,8
	0,24	0,148	55,5		0,24	0,368	63,0
	0,30	0,154	53,3		0,30	0,380	61,0

Zahlentafel 1 (Fortsetzung).

	k_{sa}/σ	$10^3\,k_d$	η %		k_{sa}/σ	$10^3\,k_d$	η %
$k_{sa} = 0{,}009$	0,06	0,825	51,7	$k_{sa} = 0{,}012$	0,06	1,195	55,0
	0,09	0,708	60,2		0,09	1,028	63,8
	0,12	0,659	64,7		0,12	0,970	67,7
	0,18	0,630	67,8		0,18	0,932	70,4
	0,24	0,635	67,2		0,24	0,938	70,0
	0,30	0,652	65,4		0,30	0,961	68,4

Zahlentafel 2 (Bild 13).

k_{sa}	ϑ_1	p	σ	$10^3\,k_d$	η %
0,009	0	0	0,02	0,721	59,2
			0,03	0,651	65,5
			0,04	0,631	67,6
			0,05	0,628	67,8
			0,06	0,637	67,0
			0,07	0,650	65,6
			0,08	0,668	63,8
			0,10	0,708	60,2
			0,12	0,754	56,6
0,009	-6^0	0	0,02	0,701	60,9
			0,03	0,627	68,0
			0,04	0,603	70,8
			0,05	0,598	71,3
			0,06	0,604	70,6
			0,07	0,614	69,5
			0,08	0,628	68,0
			0,10	0,663	64,5
			0,12	0,702	60,8
0,009	-12^0	0	0,02	0,683	62,5
			0,03	0,606	70,5
			0,04	0,579	73,5
			0,05	0,571	74,7
			0,06	0,573	74,5
			0,07	0,581	73,5
			0,08	0,591	72,3
			0,10	0,620	68,8
			0,12	0,652	65,5

Zahlentafel 3 (Bild 14).

k_{sa}	ϑ_1	p	$\sigma_{0,7}$	$10^3\,k_d$	η %
0,009	0	0	0,02	0,721	59,2
			0,03	0,651	65,5
			0,04	0,631	67,6
			0,05	0,628	67,8
			0,06	0,637	67,0
			0,07	0,650	65,6
			0,08	0,668	63,8
			0,10	0,708	60,2
			0,12	0,754	56,6
0,009	0	$-2/3$	0,02	0,685	62,2
			0,03	0,616	69,3
			0,04	0,593	71,8
			0,05	0,590	72,2
			0,06	0,595	71,6
			0,07	0,607	70,2
			0,08	0,621	68,7
			0,10	0,656	65,0
			0,12	0,697	61,1
0,009	-6^0	$-2/3$	0,02	0,659	64,8
			0,03	0,586	72,8
			0,04	0,559	76,3
			0,05	0,551	77,4
			0,06	0,553	77,2
			0,07	0,560	76,2
			0,08	0,570	74,9
			0,10	0,597	71,5
			0,12	0,628	67,9

Zahlentafel 4.

	ϑ_0	λ_d	α^0	$10^3 \cdot k_d$	$10^3 \cdot k_{sn}$	$10^3 \cdot k_{sh}$	
$k_{sa}/\sigma = 0{,}15,\ \vartheta_1 = 0^0,\ p = 0$	2	+0,0269	+5,3	−0,089	+0,534	+1,255	s. Bild 18
	5	−0,0111	−0,9	+0,081	+0,725	+0,602	
	8	−0,0488	−7,1	+0,291	+0,854	−0,086	
	11	−0,0868	−13,1	+0,543	+0,920	−0,782	
	14	−0,1246	−18,9	+0,837	+0,923	−1,524	
$k_{sa}/\sigma = 0{,}15,\ \vartheta_1 = -6^0,\ p = 0$	6	+0,0290	+5,6	−0,072	+0,456	+1,191	s. Bild 20
	9	−0,0092	−0,6	+0,080	+0,668	+0,586	
	12	−0,0470	−6,8	+0,258	+0,818	−0,074	
	15	−0,0852	−12,8	+0,455	+0,906	−0,754	
	18	−0,1232	−19,4	+0,703	+0,931	−1,569	
$k_{sa}/\sigma_{0,7} = 0{,}15,\ \vartheta_1 = 0^0,\ p = -2/3$	2	+0,024	+4,8	−0,032	+0,325	+0,955	s. Bild 21
	4	+0,001	+1,0	+0,062	+0,504	+0,641	
	6	−0,022	−2,7	+0,159	+0,645	+0,289	
	8	−0,045	−6,5	+0,271	+0,750	−0,105	
	10	−0,068	−10,1	+0,401	+0,818	−0,502	
	12	−0,091	−13,8	+0,557	+0,849	−0,931	
	14	−0,114	−17,3	+0,711	+0,844	−1,391	
$k_{sa}/\sigma = 0{,}10,\ \vartheta_1 = 0^0,\ p = 0$	−1	+0,0474	+8,3	−0,042	+0,156	+0,886	s. Bild 17
	1	+0,0220	+4,2	+0,015	+0,274	+0,639	
	3	−0,0032	+0,1	+0,085	+0,364	+0,369	
	5	−0,0288	−4,1	+0,166	+0,426	+0,066	
	7	−0,0538	−8,2	+0,264	+0,461	−0,259	
	9	−0,0791	−12,2	+0,375	+0,468	−0,585	
	11	−0,1043	−16,1	+0,497	+0,447	−0,938	
$k_{sa}/\sigma = 0{,}20,\ \vartheta_1 = 0^0,\ p = 0$	4	+0,0188	+4,3	−0,139	+1,000	+1,742	s. Bild 19
	6	−0,0064	+0,1	+0,018	+1,163	+1,184	
	8	−0,0318	−4,1	+0,193	+1,299	+0,592	
	10	−0,0571	−8,1	+0,387	+1,409	−0,020	
	12	−0,0826	−12,1	+0,600	+1,491	−0,600	
	14	−0,1076	−16,0	+0,831	+1,545	−1,215	

Digitized by Google

Über die Bestimmung der Torsionseigenfrequenz eingespannter Träger, insbesondere von Flugzeugtragflügeln o. ä.

Von R. v. Wolff, Kassel.

Die Arbeit befaßt sich damit, für die rasche und überschlägige Abschätzung der Torsionseigenfrequenz eines einseitig eingespannten Trägers eine für den Praktiker brauchbare Näherungslösung zu entwickeln. Insbesondere soll versucht werden, die für die Frequenzbestimmung maßgeblichen Einflüsse wie Trägerlänge, Zuspitzung usw. grundsätzlich zu erfassen und formelmäßig darzustellen. Die hierbei getroffenen Voraussetzungen (stetiger Verlauf der Verdrehsteifigkeit und Massenträgheitsmomente) liegen im Rahmen der praktisch üblichen Konstruktionen und bilden die Grundlage für die Gewinnung einer allgemeinen Lösung.

Gliederung.

I. Der Träger allgemeinster Art.
II. Der Träger besonderer Art (Flugzeugtragflügel o. ä.).
III. Zusammenfassung.

Die Vorausbestimmung der Torsionseigenfrequenz eingespannter Träger ist in solchen Fällen von Bedeutung, in welchen auf Grund der vorhandenen Eigenfrequenz Rückschlüsse auf das dynamische Verhalten des Trägers gezogen werden sollen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eine versuchsmäßige Bestimmung der fraglichen Frequenz nicht möglich ist, wie dies bei Projekten verschiedenster Art häufig genug vorzukommen pflegt. Im Flugzeugbau spielt die Vorausbestimmung der Torsionseigenfrequenz von Tragwerk und Leitwerk insofern eine besondere Rolle, als von deren Beschaffenheit die richtige Abschätzung der zu erwartenden »Kritischen Geschwindigkeit« weitgehendst abhängig ist. Es soll daher im folgenden versucht werden, ein Verfahren zu entwickeln, welches eine möglichst rasche und genaue Bestimmung der zu erwartenden Drehfrequenz eines an seinem einen Ende starr eingespannten Trägers gestattet. Die Betrachtung erstreckt sich zunächst auf einen Träger allgemeinster Art, um dann späterhin auf einen solchen besonderer Art, wie ihn ein Flugzeugtragflügel im allgemeinen darstellt, überzugehen.

I. Der Träger allgemeinster Art.

Unter einem »Träger allgemeinster Art« verstehen wir im folgenden einen Träger beliebigen veränderlichen Querschnitts, dessen polares Trägheitsmoment von einem Ende zum anderen kontinuierlich zunimmt oder abnimmt, Bild 1. Den Verlauf des polaren Trägheitsmomentes über die Trägerlänge x nähern wir durch folgende allgemeine Exponentialfunktion an:

$$J_p(x) = J_{p_1} \cdot x^p.$$

Hierin bedeutet J_{p1} das im Außenabstande $x = 1$ vorhandene polare Trägheitsmoment, und p den durch den Verlauf des Trägheitsmomentes bedingten Funktionsexponenten. Letzterer läßt sich aus der vorgegebenen Exponentialfunktion durch Logarithmieren derselben unschwer bestimmen und ergibt sich zu:

$$p = \frac{\lg \frac{J_2}{J_3}}{\lg \frac{x_2}{x_3}},$$

worin J_2 und J_3 das im Außenabstand x_2 und x_3 vorhandene Trägheitsmoment darstellen. Die Wahl von x_2 und x_3

Bild 1.

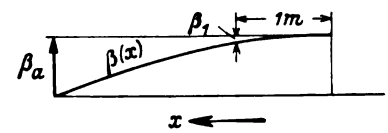


Bild 2.

bzw. J_2 und J_3 erfolgt zweckmäßigerweise so, daß eine möglichst genaue Übereinstimmung mit dem vorgegebenen Verlauf erzielt wird. Für den Fall einer raschen und überschlägigen Abschätzung genügt es die Werte x_2 und x_3 durch die Werte $x_2 = 1$ m und $x_3 = l$ zu ersetzen. Bei der Ausführung genauer Rechnungen empfiehlt es sich die entsprechenden Exponentialfunktionen graphisch auszuwerten und die vorgegebene Verteilung in ein derartiges Kurvenblatt einzustufen.

Ferner legen wir unserer Betrachtung den allgemeinsten Ausdruck der Frequenzbestimmung eines eingespannten Trägers, wie er sich aus den dynamischen Gleichgewichtsbedingungen unter Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen[1]) ergibt, zugrunde, nämlich:

$$\nu^2 = -\frac{\int \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx}{\int \beta^2 \Theta \, dx}$$

In diesem Ausdruck stellt ν die zu bestimmende Eigenfrequenz, $\beta(x)$ den Amplitudenverlauf der mit der Eigenfrequenz ν hervorgerufenen Schwingung, G den Gleitmodul des verwendeten Werkstoffes, $G \cdot J_d(x)$ und $\Theta(x)$ die Verdrehsteifigkeit bzw. das Massenträgheitsmoment des Trägers als Funktion der Länge x dar. Durch geeignete Wahl der Funktion $J_d(x)$ und $\beta(x)$ läßt sich für den oben genannten Ausdruck eine Form finden, welche den praktischen Erfordernissen einer schnellen und überschlägigen Abschätzung der zu bestimmenden Eigenfrequenz in ausreichendem Maße Genüge leistet.

Wie bereits erwähnt, nähern wir den Verlauf des polaren Trägheitsmomentes unseres Trägers durch eine Exponentialfunktion von der Art $J_p(x) = J_{p1} \cdot x^p$ an. Eine ähnliche Annäherung treffen wir für den Verlauf der Verdrehsteifigkeit $G \cdot J_d$ und der Drehamplitude β über die Trägerlänge, wobei wir eine einseitig starre Einspannung des Trägers voraussetzen. Es ergibt sich alsdann:

$$G J_d(x) = G \cdot J_{d_1} \cdot x^z$$
$$\beta(x) = \beta_a - \beta_1 x^q \text{ (Bild 2)},$$

[1]) S. Timoshenko, Schwingungsprobleme der Technik. S. 240.

Digitized by Google

worin q den für den Amplitudenverlauf maßgebenden Exponenten darstellt.

Führt man die Funktionen $G \cdot J_d\,(x)$ und $\beta\,(x)$ in der genannten Weise in die durch die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen entstandene Grundgleichung ein, so folgt daraus:

$$\nu^2 = -\frac{\int \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx}{\int \beta^2 \Theta\, dx}$$

$$G J_d \frac{d\beta}{dx} = -G J_{d_1} q \beta_1 x^{z+q-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) = -G J_{d_1} q \beta_1 (z+q-1)\, x^{z+q-2}$$

$$\beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) = -G J_{d_1} q \beta_1 (z+q-1)\, x^{z+q-2} (\beta_a - \beta_1 x^q)$$

$$\int_0^l \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx = -G J_{d_1} q \beta_1 (z+q-1)\left[\frac{\beta_a}{z+q-1} l^{z+q-1} - \frac{\beta_1}{z+2q-1} l^{z+2q-1}\right]$$

$$\beta_a = \beta_1 l^q$$

$$\int_0^l \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx = G J_{d_1} q \beta_1^2 (z+q-1)\left[\frac{1}{z+2q-1} - \frac{1}{z+q-1}\right] l^{z+2q-1}$$

$$\beta^2 \Theta = \frac{\gamma}{g} (\beta_a - \beta_1 x^q)^2 J_{p_1} x^p$$

$$\beta^2 \Theta = \frac{\gamma}{g} J_{p_1} (\beta_a^2 x^p - 2\beta_a \beta_1 x^{q+p} + \beta_1^2 x^{2q+p})$$

$$\int_0^l \beta^2 \Theta\, dx = \frac{\gamma}{g} J_{p_1}\left[\frac{\beta_a^2}{p+1} l^{p+1} - \frac{2\beta_a \beta_1}{p+q+1} l^{p+q+1} + \frac{\beta_1^2}{p+2q+1} l^{p+2q+1}\right]$$

$$\beta_a = \beta_1 x^q$$

$$\int_0^l \beta^2 \Theta\, dx = \frac{\gamma}{g} J_{p_1} \beta_1^2 \left[\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+q+1} + \frac{1}{p+2q+1}\right] l^{p+2q+1}$$

$$\nu^2 = -\frac{\int \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx}{\int \beta^2 \Theta\, dx}$$

$$\nu^2 = -\frac{G J_{d_1} q \beta_1^2 (z+q-1)\left[\frac{1}{z+2q-1} - \frac{1}{z+q-1}\right] l^{z+2q-1}}{\frac{\gamma}{g} J_{p_1} \beta_1^2 \left[\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+q+1} + \frac{1}{p+2q+1}\right] l^{p+2q+1}}$$

Setzt man für den Exponenten q entsprechend einer ~ sinusförmigen Amplitudenverteilung (Bild 3) den Wert 2 ein, so ergibt sich:

$$\nu^2 = \frac{4 G \cdot J_{d_1} \cdot g\,(p+1)\,(p+3)\,(p+5)}{8 \gamma \cdot J_{p_1} (z+3)} \cdot l^{z-p-2}$$

$$\boxed{\nu^2 = \frac{G \cdot J_{d_1} \cdot g \cdot (p+1)\,(p+3)\,(p+5)}{2 \gamma\, J_{p_1} (z+3)} \cdot l^{z-p-2}} \qquad (1)$$

Für den Träger kreisförmigen bzw. kreisringförmigen Querschnitts wird $J_d = J_p$ und hiermit:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{l} \sqrt{(p+1)\,(p+5)\,\frac{G \cdot g}{2\gamma}}} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Vorstehende Gleichung zeigt deutlich den Einfluß des Trägheitsmomentenverlaufes (p) auf die zu erwartende Eigenfrequenz. So wird z. B. ein sich nach außen verjüngender Träger eine höhere Eigenfrequenz aufzuweisen haben als ein solcher gleichbleibenden oder nach außen hin anwachsenden Querschnitts. Für den Träger über die Länge

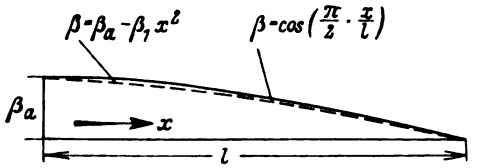


Bild 3.

gleichen Querschnitts wird der Exponent p zu Null und hiermit Gl. (2) zu:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{2{,}5\,\frac{G \cdot g}{\gamma}}} \qquad \ldots\ldots (3)$$

Von besonderem Interesse ist, daß in vorliegendem Falle das Trägheitsmoment selbst keinerlei Einfluß auf die Torsionseigenfrequenz des Trägers auszuüben vermag, daß also eine durchlaufende Versteifung oder Schwächung desselben ohne Einfluß auf seine Eigenfrequenz bleiben würde. Dies erklärt sich logischerweise durch die mit einer Versteifung verbundene Massenanreicherung, welche ihrerseits wieder die durch die Versteifung erzielte primäre Frequenzerhöhung sekundär auszugleichen bestrebt ist. Es ist hierbei auch gleichgültig, ob es sich um einen Vollträger oder um einen Hohlträger handelt, in jedem Falle ist die zu erwartende Drehfrequenz querschnittsunabhängig. Trägt man schließlich der Tatsache Rechnung, daß der Wert $\frac{G}{\gamma}$ für die meisten der in Frage kommenden Baustoffe ungefähr gleich einer Konstanten K ist, so zeigt sich, daß die Torsionseigenfrequenz eines eingespannten Trägers vorstehender Art letzten Endes nur noch von dessen Länge l und dessen Trägheitsmomentenverteilung p abhängig ist. Diese Betrachtung hat allerdings nur für beulfeste Schalen Gütigkeit, bei welchen der Gleitmodul G unabhängig von der Blechstärke als konstant angenommen werden kann. Bei beulfähigen Schalen ist es erforderlich den Gleitmodul als Funktion des Schalendurchmessers und der voraussichtlichen Blechstärke im voraus zu bestimmen und in die entsprechende Gleichung einzufügen.

II. Der Träger besonderer Art (Flugzeugtragflügel o. ä.)

Unter »Träger besonderer Art« soll im folgenden ein mit zusätzlichen Massen behafteter Träger verstanden werden. Hierbei sei vorausgesetzt, daß der Verlauf des durch die zusätzlichen Massen bedingten zusätzlichen Massenträgheitsmomentes in bezug auf die elastische Achse des Trägers ähnlich demjenigen des Massenträgheitsmomentes des Trägers selbst erfolgen soll. Diese Voraussetzung gilt insbesondere für Flugzeugtragflügel, bei denen infolge der Ruder oder sonstiger am Flügel befindlichen durchlaufenden Lasten ein zusätzliches Massenträgheitsmoment des Flügels selbst vorhanden ist. Anders liegen die Verhältnisse bei Berücksichtigung örtlicher Einzellasten, wie Motoren, Flügeltanks o. ä. Hier scheint es geboten, die im Abschnitt I angeführte Grundgleichung durch direktes Ausrechnen der betreffenden Integrale zu lösen, wobei für $\beta\,(x)$ zweckmäßigerweise $\beta = \cos\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}\right]$ zu setzen ist. Dieses Verfahren bietet u. a. auch die Möglichkeit solche Träger zu berücksichtigen, bei denen entgegen unserer obigen Voraussetzung, das Massenträgheitsmoment des Trägers und dasjenige der Zusatzmassen verschiedenen Verlauf aufzuweisen haben.

Legen wir unserer Betrachtung eine Torsionsröhre vom Querschnitt des um seine Ruder verminderten Flügelprofils zugrunde, so ergibt sich das polare Trägheitsmoment dieser Röhre in bezug auf ihre Schwerachse (Holm) gemäß unserer im ersten Abschnitt getroffenen Annahme zu:

$$J_p\,(x) = J_{p_1} x^p$$

Desgleichen ergibt sich das polare Trägheitsmoment des ganzen Flügels als Funktion der Flügellänge zu:

$$J_p\,(x)_{ges} = J_p\,(x) + J_p'\,(x)$$

Digitized by Google

wobei $J_p'(x)$ das durch die Ruder hervorgerufene zusätzliche Trägheitsmoment bedeutet. Führt man diese Werte in die im ersten Abschnitt behandelte dynamische Grundgleichung ein, so zeigt sich, daß der Zähler des genannten Ausdrucks hierdurch keine Änderung erfährt. Es ist nach wie vor:

$$\int \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx = G J_{d_1} q \beta_1^2 (z+q-1)\left[\frac{1}{z+2q-1} - \frac{1}{z+q-1}\right] l^{z+2q-1}.$$

Der Nenner $\int \beta^2 \Theta\, dx$ wird gemäß der obigen Ableitung folgende Form annehmen:

$$\int \beta^2 \Theta_{ges}\, dx = \int \beta^2 (\Theta + \Theta')\, dx = \int \beta^2 \left(\frac{\gamma}{g} J_p(x) + \frac{\gamma'}{g} J_p'(x)\right)$$

$$\int \beta^2 \Theta_{ges}\, dx = \frac{1}{g} \beta_1^2 (\gamma J_{p_1} + \gamma' J_{p_1}') \left[\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+q+1} + \frac{1}{p+2q+1}\right] l^{p+2q+1}$$

und die Frequenz ν:

$$\nu^2 = \frac{\int \beta \frac{d}{dx}\left(G J_d \frac{d\beta}{dx}\right) dx}{\int \beta^2 (\Theta + \Theta')\, dx} = \frac{G J_{d_1} q \beta_1^2 (z+q-1)\left[\frac{1}{z+2q-1} - \frac{1}{z+q-1}\right] l^{z+2q-1}}{\frac{1}{g} \beta_1^2 (\gamma J_{p_1} + \gamma' J_{p_1}') \left[\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+q+1} + \frac{1}{p+2q+1}\right] l^{p+2q+1}}$$

$$\boxed{\nu^2 = \frac{G g J_{d_1} (p+1)(p+3)(p+5)}{2(\gamma J_{p_1} + \gamma' J_{p_1}')(z+3)} \cdot l^{z-p-2}} \quad (4)$$

Obige Gleichung zeigt den Einfluß zusätzlicher Trägheitsmomente auf die Drehfrequenz eines eingespannten Trägers. Bezüglich des Trägheitsmomentenverlaufes (p) über die Spannweite, sowie des Einflusses der Trägerlänge (l) auf die Torsionseigenfrequenz bestehen dieselben Gesetze wie beim Träger allgemeinster Art. Dieses gilt insbesondere für den Träger gleichbleibenden Querschnitts ($z = 0$), bei welchem die Formkonstante K in beiden Fällen denselben Wert aufzuweisen hat. Die Wahl des Gleitmoduls G erfolgt am besten auf Grund von Erfahrungswerten bestehender Baumuster ähnlicher Art. Sie richtet sich je nach Beschaffenheit und Verarbeitungsgrad des verwendeten Baustoffes und beträgt im Flugzeugbau im allgemeinen einen Bruchteil des Wertes des unverarbeiteten Werkstoffes.

III. Zusammenfassung.

Es sollte versucht werden, für die rasche und möglichst genaue Abschätzung der Drehfrequenz eines eingespannten Trägers ein Verfahren zu entwickeln, welches insbesondere bei der Vorausbestimmung der kritischen Geschwindigkeit von Flugzeugen seine Anwendung finden soll. Hierbei wurde von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Verdrehsteifigkeit und die polaren Trägheitsmomente des betrachteten Trägers von einem Ende zum anderen stetig ansteigen oder fallen sollen. Für den Fall des Flugzeugtragflügels mit angelenktem Ruder bzw. mit eingebauten Lasten, wurde der Träger besonderer Art behandelt. In beiden Fällen erwies sich der »Ausdruck der allgemeinsten Frequenzbestimmung« durch die Einführung geeigneter Exponentialfunktionen von $J(x)$ und $\beta(x)$ über die Spannweite zur Auflösung geeignet. Eine weitere Betrachtung über die Biegefrequenz des eingespannten Trägers wird im Rahmen der Abschätzung der kritischen Geschwindigkeit von Flugzeugtragflügeln Aufgabe einer gesonderten Betrachtung sein.

Digitized by Google

Rechteckige Blechhaut unter gleichmäßig verteiltem Flüssigkeitsdruck.

Von M. Neubert und A. Sommer.

Bericht der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen a. B.

Gliederung.

A. Allgemeines.
B. Berechnung der rechteckigen Haut unter Flüssigkeitsdruck.
I. Rechenverfahren nach Föppl.
II. Rechenverfahren nach Hencky.
C. Vergleich von Versuchsergebnissen mit Rechnung.
D. Zusammenfassung.

A. Allgemeines.

Die Kenntnis der Beanspruchungen, die rechteckige Bleche unter Flüssigkeitsdruck erfahren, ist für den Flugzeugbauer wichtig, da er häufig mit solchen Bauteilen zu tun hat. In erster Linie sind es Boote oder Schwimmer, die beim Starten und Landen oder beim Manövrieren in hohem Seegang durch Wellenschlag ganz bedeutenden Wasserdrücken standhalten müssen. Außerdem kommen auch Benzinbehälter und Benzinräume in Frage, die infolge großer Beschleunigungen beträchtliche Innendrücke erhalten. Über die Berechnung sind bisher Arbeiten von Föppl[1]) und Hencky[2]) erschienen, über deren Brauchbarkeit und Zuverlässigkeit durch Vergleich mit Versuchsergebnissen einiges mitgeteilt wird.

B. Berechnung der rechteckigen Haut unter Flüssigkeitsdruck.

Beide Verfasser gehen von der Annahme aus, daß die Haut keine Biegesteifigkeit ($J = 0$) besitzt und im unbelasteten Zustand nicht angespannt ist. Unter dieser Annahme hat Föppl Differentialgleichungen für dünne Platten mit großen Durchbiegungen aufgestellt. Im Jahre 1920 veröffentlichte Föppl eine Näherungslösung, deren Ausrechnung aber nur für die quadratische Haut durchgeführt wurde. Ein Jahr später gab Hencky eine Lösung der Differentialgleichungen mit Hilfe der Differenzenrechnung an.

1. Rechenverfahren nach Föppl.

Die Auswertung der Näherungslösung für rechteckige Hautfelder, Bild 1, führt zu nachstehenden einfachen, für den Gebrauch recht handlichen Formeln. Die von Föppl angegebene Bedingung für die Gültigkeit der Formeln, daß die Durchbiegung der Platte erheblich größer als die Blechdicke sein muß, ist bei den im Flugzeugbau verwendeten Blechstärken wohl immer erfüllt.

Durchbiegung in Hautfeldmitte (Punkt m):

$$f = n_1 \, a \sqrt[3]{\frac{p\,a}{E\,s}}.$$

Spannungen in Hautfeldmitte (Punkt m):

$$\sigma_{z_m} = n_2 \sqrt[3]{p^2 E \frac{a^2}{s^2}}$$

$$\sigma_{y_m} = n_3 \sqrt[3]{p^2 E \frac{a^2}{s^2}}.$$

[1]) A. u. L. Föppl, Drang und Zwang.
[2]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921).

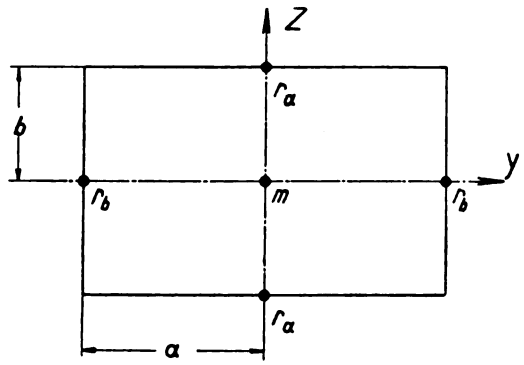


Bild 1. Bezeichnungen der rechteckigen Haut.

Spannungen am Rande in Mitte der kurzen Rechteckseite b (Punkt r_b):

$$\sigma_{z_{r_b}} = n_4 \sqrt[3]{p^2 E \frac{a^2}{s^2}}$$

$$\sigma_{y_{r_b}} = n_5 \sqrt[3]{p^2 E \frac{a^2}{s^2}}.$$

Spannungen am Rande in Mitte der langen Rechteckseite a (Punkt r_a):

$$\sigma_{z_{r_a}} = n_6 \sqrt[3]{p^2 E \frac{a^2}{s^2}}$$

$$\sigma_{y_{r_a}} = n_7 \sqrt[3]{p^2 E \frac{a^2}{s^2}}.$$

In den Formeln bedeuten:

p = gleichmäßig verteilter Flüssigkeitsdruck in kg/cm²,
E = Elastizitätsmodul in kg/cm²,
a u. b = halbe Rechteckseiten in cm,
s = Bleckdicke in cm,
n_1 bis n_7 = Beiwerte.

Die Beiwerte n_1 bis n_7 wurden auch für rechteckige Platten ermittelt und können aus Bild 2 für ein beliebiges Seitenverhältnis des Rechteckes $\lambda = \frac{b}{a}$ entnommen werden.

Die größten Spannungen treten demnach in der Mitte des Randes der langen Rechteckseite in z-Richtung auf. Auch die quadratische Platte hat ihre Größtspannung nicht in Plattenmitte, wie es von Föppl in »Drang und Zwang« angenommen wurde, sondern in Randmitte. Herr Professor Föppl hat auf unseren Hinweis die Richtigstellung in einer Neuauflage vorgesehen. Zur Vermittlung eines anschaulichen Bildes der Spannungsverteilung über die ganze Platte wurden für die quadratische Platte in Bild 3 und 4 die Spannungsbeiwerte n über den entsprechenden Plattenpunkten dargestellt.

Digitized by Google

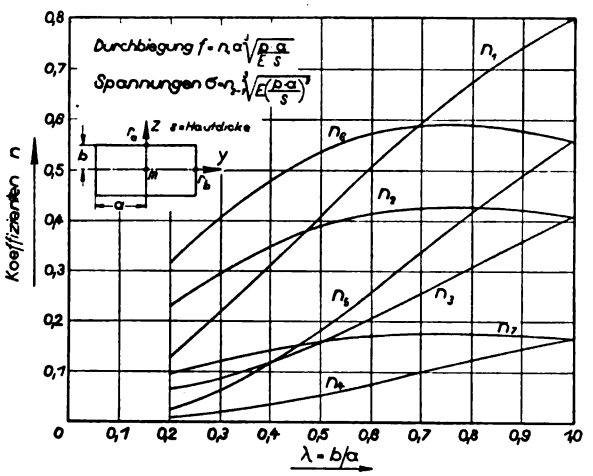


Bild 2. n-Werte für beliebige Seitenverhältnisse $\frac{b}{a}$ des Rechtecks.

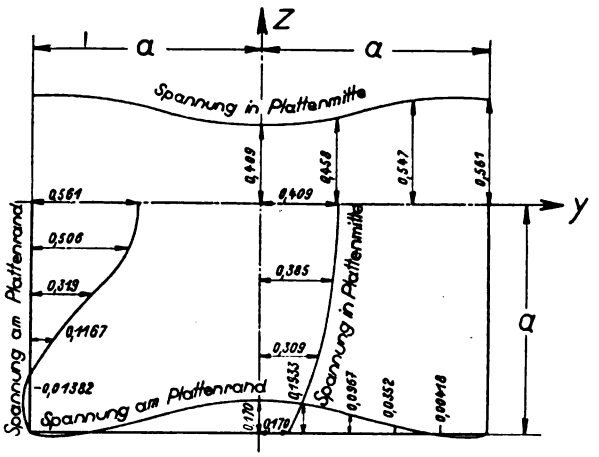


Bild 4. Spannungsbeiwerte n für σ_y.

Rechenbeispiel.

Plattengröße 60 × 60 cm, Bleckdicke s = 1,4 mm,
E = 740000 kg/cm², Belastung p = 20 t/m².

Zu berechnen ist Durchbiegung f in Plattenmitte und Größtspannung σ am Rande.

$$f = 0{,}8 \cdot a \sqrt[3]{\frac{p a}{E s}} = 0{,}8 \cdot 30 \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 30}{740000 \cdot 0{,}14}} = 1{,}99 \text{ cm}$$

$$\sigma_{z_{r_a}} = \sigma_{y_{r_b}} = 0{,}56 \sqrt[3]{E\left(\frac{p a}{s}\right)^2}$$

$$= 0{,}56 \cdot \sqrt[3]{740000\left(\frac{2 \cdot 30}{0{,}14}\right)^2} = 2700 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Rechenverfahren nach Hencky.

Das Rechenverfahren nach Hencky ist in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (1921) S. 81 und 423 in der Abhandlung »Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegesteifigkeit« erschienen. Für die quadratische Platte ergibt sich mittels der Differenzenrechnung:

$$\text{Durchbiegung } f = n_1 a \sqrt[3]{\frac{p a}{E s}}.$$

Die Beiwerte n_1 können aus Bild 5 entnommen werden.

Spannungen:

$$\sigma_z = n_2 \sqrt[3]{E\left(\frac{p a}{s}\right)^2} \qquad \sigma_y = n_3 \sqrt[3]{E\left(\frac{p a}{s}\right)^2}.$$

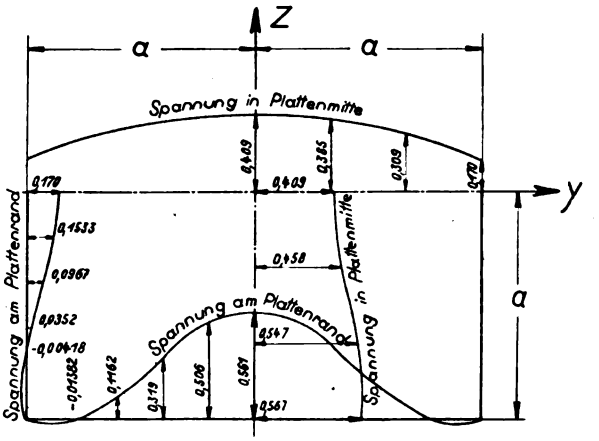


Bild 3. Spannungsbeiwerte n für σ_z.

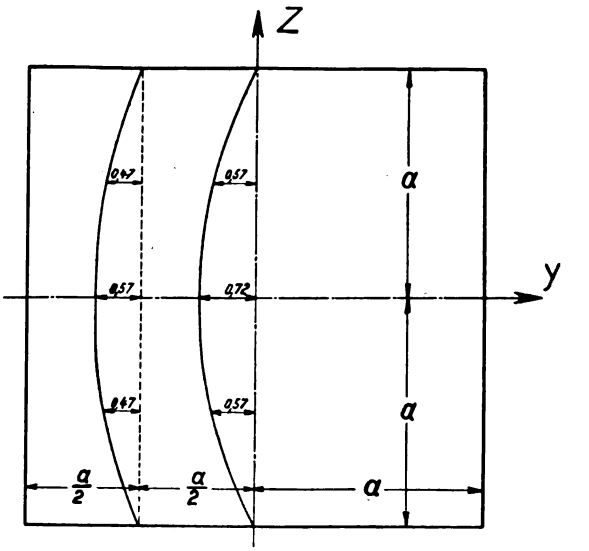


Bild 5. n_1-Beiwerte.

Die Beiwerte n_2 und n_3 sind in Bild 6 und 7 aufgetragen. Die Ermittlung der Beiwerte für rechteckige Platten verursacht sehr umfangreiche Zahlenrechenarbeit und ist daher bis heute noch nicht ausgeführt worden.

Für das gleiche Rechenbeispiel wie unter 1. errechnet sich die Durchbiegung und Größtspannung zu:

$$f = 1{,}99 \cdot \frac{0{,}72}{0{,}80} = 1{,}8 \text{ cm}$$

$$\sigma_{z_{r_a}} = \sigma_{y_{r_b}} = 2700 \cdot \frac{0{,}436}{0{,}56} = 2100 \text{ kg/cm}^2.$$

C. Vergleich von Versuchsergebnissen mit Rechnung.

Zur Prüfung der angegebenen Rechenverfahren auf ihre Brauchbarkeit und Zuverlässigkeit wurden 60 × 60 cm große Blechplatten verschiedener Stärke bis zum Bruch auf Flüssigkeitsdruck belastet. Die benützte Versuchseinrichtung zeigen die schematische Skizze Bild 8 und das Lichtbild 9.

Behälter und Deckel hatten sehr starke Abmessungen und waren reichlich versteift, um eine Beeinflussung der Hautdurchbiegung infolge Behälterverformung möglichst gering zu halten.

Auf Grund der Messungen ergab sich, daß die errechneten Spannungen und Durchbiegungen mit den Versuchsergebnissen gut übereinstimmen, solange rein elastisches Verhalten des Werkstoffes vorhanden ist und somit die Grundlagen der Theorie voll erfüllt werden. Dieser Beanspruchungsbereich ist für unsere Konstruktionen maßgebend,

Digitized by Google

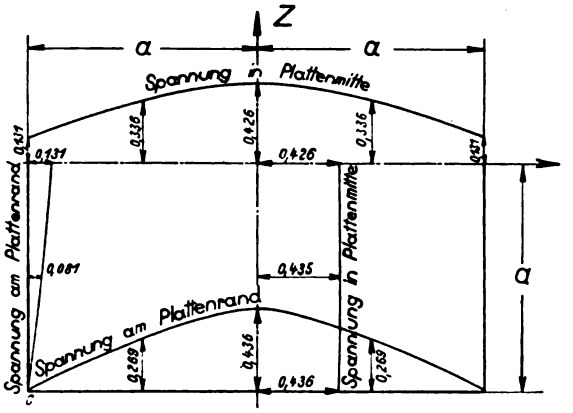


Bild 6. Spannungsbeiwerte n_z für σ_z.

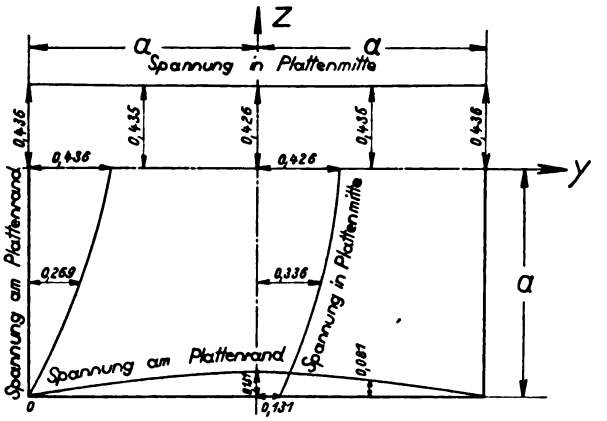


Bild 7. Spannungsbeiwerte n_y für σ_y.

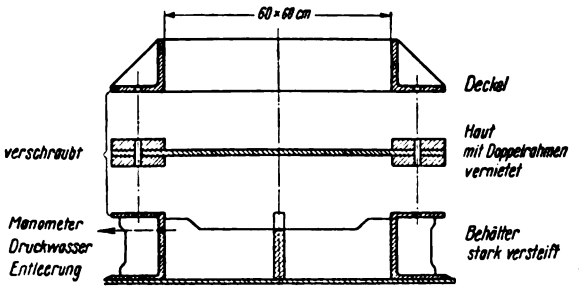


Bild 8. Schematische Darstellung der Prüfvorrichtung.

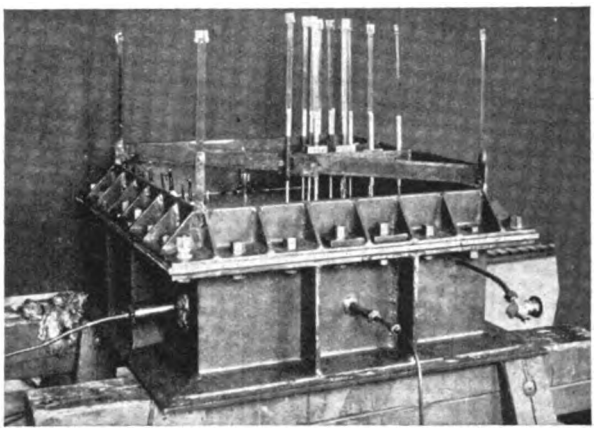


Bild 9. Prüfvorrichtung.

da nach den Bauvorschriften die unter den Gebrauchslasten ($j = 1{,}0$) entstehenden Anstrengungen innerhalb der Elastizitätsgrenze liegen sollen und daher nur unbedeutende (5%) bleibende Formänderungen auftreten dürfen. Die Versuche zeigten aber ferner, daß rein elastisches Verhalten an verhältnismäßig enge Grenzen der Beanspruchung gebunden ist. Die plastischen Formänderungen beginnen schon sehr bald. In diesem Bereich liefert die Rechnung natürlich falsche Werte, zu kleine Durchbiegungen und zu große Spannungen. Bleche unter Zugspannungen, wie wir sie hier haben, sind bekanntlich sehr starker bildsamer (plastischer) Formänderungen fähig und können bedeutende bleibende Formänderungen ertragen. Durch diese Plastizierung der Querschnitte baucht sich die Platte mehr aus, was auf eine Verminderung der Spannungen hinwirkt. Die Tragfähigkeit kann daher weit über die rechnerischen Werte gesteigert werden. Neuerdings befaßt sich die Plastizitätstheorie mit der Berechnung der Beanspruchungen im plastischen Bereich, die Theorie befindet sich jedoch noch im Anfangsstadium. Zur Bestätigung obiger Ausführungen folgen noch die Versuchsergebnisse mit einer 60 × 60 cm großen Haut, 1,4 mm stark. In Bild 10 sind über der Belastung die beim Versuch gemessenen Durchbiegungen in Mitte Hautfeld aufgetragen und mit den rechnerischen verglichen.

Außerdem sind die bleibenden Verformungen, die bei den verschiedenen Belastungen nach Rückkehr der Last auf 0 geblieben waren, eingetragen. Man sieht, daß die plastischen Verformungen schon zwischen 1 und 2 at beginnen und in dieser Gegend auch die Durchbiegungskurven von Versuch und Rechnung stärker auseinander gehen. Der Bruch der Platte erfolgte erst bei 11,2 at, so daß der elastische Bereich bis höchstens 2 at verglichen mit der Bruchlast recht klein ist. Nach Rechnung hätten sich für $\sigma_z = 4400$ kg/cm² folgende Bruchlasten ergeben:

Nach Föppl:

$$p = \sqrt{\frac{\sigma^3 s^2}{n^3 E a^2}} = \sqrt{\frac{4400^3 \cdot 0{,}14^2}{0{,}56^3 \cdot 740000 \cdot 30^2}} = 3{,}8 \text{ at}$$

nach Hencky:

$$p = \sqrt{\frac{4400^3 \cdot 0{,}14^2}{0{,}44^3 \cdot 740000 \cdot 30^2}} = 7{,}14 \text{ at}$$

Die erreichten Bruchlasten liegen aus den angegebenen Gründen wesentlich höher. Die Näherungslösung von

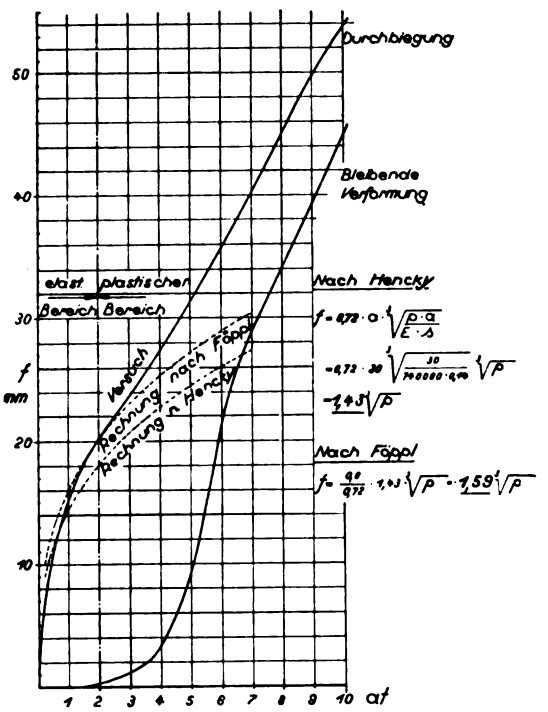


Bild 10. Durchbiegungen in Feldmitte, abhängig von der Belastung. Hautfeld: 600 × 600 × 1,4 mm.

Digitized by Google

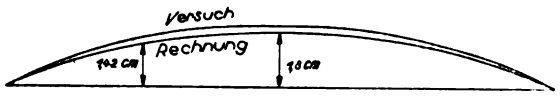


Bild 11. Gerechnete und gemessene Biegelinien bei 2 at in Hautfeldmitte.

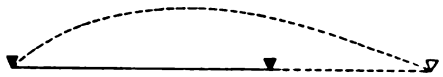


Bild 12. Tensometerschneide.
▼ vor der Dehnung, ▽ nach der Dehnung.

Föppl gibt im elastischen Bereich gegenüber der Lösung nach Hencky wesentlich kleinere Werte, liegt also stark auf der sicheren Seite. In Bild 11 ist noch für 2 at die nach Hencky gerechnete Biegelinie in Hautmitte der gemessenen gegenübergestellt.

Die Differenz ist bei dieser Laststufe klein, da entsprechend Bild 10 nur geringe bleibende Verformungen vorhanden sind (in der Nähe des elastischen Bereiches).

Die am Rande mittels Tensometer gemessenen Spannungen ergaben sich zu klein, da infolge der nicht ganz vernachlässigbaren Biegesteifigkeit des Bleches das Einspannmoment an der Meßstelle noch von Einfluß war und in geringerem Maße wohl dadurch, daß das Tensometer nur die Längenänderung der Sehne, nicht aber die Längung infolge Krümmung des Bleches mißt, Bild 12. Für 2 at Belastung wurden in Mitte Plattenrand nur 1700 kg/cm² gemessen, also viel weniger als nach Abschnitt B. 1. und 2. errechnet.

Werden die Spannungen aus den gemessenen Verformungen der Bleche ermittelt, so stimmen sie besser mit der Rechnung überein. Die Biegelinie, Bild 11, erfüllt sehr gut die Parabelgleichung

$$x = \frac{4f}{l^2}\, y\,(l-y),$$

so daß sich die Bogenlänge nach der Beziehung finden läßt, Bild 13:

$$b = l + \frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l}.$$

Die gesamte Dehnung auf die Länge l beträgt:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l}{l} = \frac{b-l}{l} = \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{f}{l}\right)^2.$$

Unter der Annahme, daß die Spannungen σ_y und σ_z über die Symmetrieachse des Quadrates konstant sind und daß σ_z im Mittel $\frac{3}{4}\cdot\sigma_y$ ist, was auf Grund der n-Werte von Bild 6 und 7 näherungsweise berechtigt ist, gilt für den elastischen Bereich nach dem Hookeschen Gesetz:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z}{m}\right) = \frac{13}{16}\cdot\frac{\sigma_y}{E}.$$

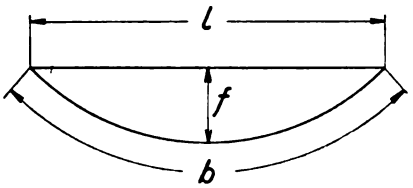


Bild 13. Parabelbezeichnungen.

Im vorliegenden Beispiel wurde $f = 2{,}0$ cm gemessen und es wird daher:

$$\sigma_y = \frac{16}{13}\cdot E\,\varepsilon_y = \frac{16}{13}\cdot 740000\cdot\frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2 = 2700\ \text{kg/cm}^2.$$

Die Übereinstimmung mit der gerechneten Spannung nach Föppl ist wohl zufällig so gut. Der Bruch der Bleches trat in Mitte des Blechrandes ein, wo auch im elastischen Bereich die Spannungen am größten sind, Bild 14.

D. Zusammenfassung.

Die Prüfung der Rechenverfahren von Föppl und Hencky zur Untersuchung von Blechen unter Flüssigkeitsdruck auf ihre Zuverlässigkeit hat ergeben, daß die Formeln im elastischen Bereich des Werkstoffes brauchbare Ergebnisse liefern. Die Näherungsrechnung von Föppl liegt auf der sicheren Seite. Auf Grund der großen Bildsamkeit der Bleche unter Zugbeanspruchung hat sich ferner gezeigt, daß die Tragfähigkeit um 50 bis 100% höher liegt als nach den beiden Rechenverfahren für den elastischen Bereich erwartet wird.

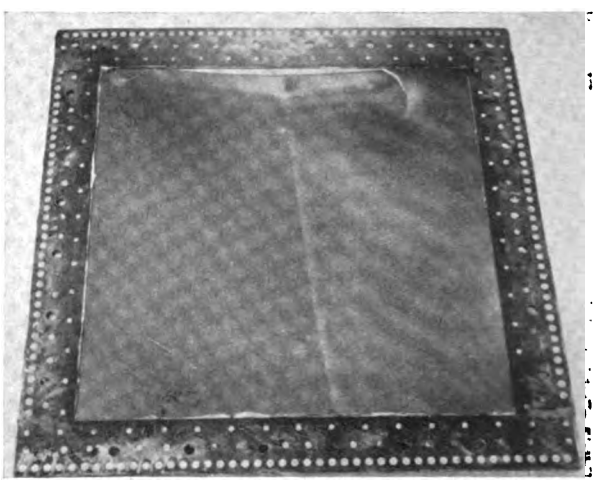


Bild 14. Bruchbild des 1,4 mm starken Blechs 600 × 600 mm bei 11,2 at.

Digitized by Google

Zur Trägheit von Staudruckanlagen.

Von Dipl.-Ing. Hans Weidemann VDI*).

Bei Staudruckänderungen verstreicht eine gewisse Zeit, ehe sie durch das Anzeigegerät dem Flugzeugführer sichtbar werden. Dieses Nachhinken ist von den Abmessungen der jeweiligen Rohrleitung und von den Eigenschaften des Anzeigegerätes abhängig. Um verschiedene Staudruckanlagen untereinander vergleichen zu können, wird ein nur von den Dimensionen der Rohrleitung und des Anzeigegerätes abhängiger mathematischer Ausdruck, die pneumatische Zeitkonstante, gefunden. Die pneumatische Zeitkonstante ist ein Maß für die Trägheit einer Staudruckanlage.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Definition der Trägheit.
   a) pneumatische und elektrische Analogie und Zeitkonstante.
   b) Definition des Widerstandes R^*.
   c) » der Kapizität C^*.
   d) » der Induktivität L^*.
3. Kritische Betrachtung.
   a) günstigste Rohrleitung.
   b) Wellengleichung.
4. Messung der Trägheit und Berechnung.
   a) Meßapparatur.
   b) Messung.
   c) Ergebnisse.
   d) Ju 52.
   e) Krümmungen.
   f) Staurohre.
5. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Die Grundlagen zu dieser Arbeit bilden Messungen, die ich im Jahre 1936 im Institut für Luftfahrtmeßtechnik und Flugmeteorologie der Technischen Hochschule zu Braunschweig im Rahmen einer Diplomarbeit anstellte. Ich habe heute die Möglichkeit, die damaligen Messungen durch die Rechnung zu kontrollieren und zu erweitern.

Die Anzeige der Geschwindigkeit eines Flugzeuges gegenüber dem es umgebenden Medium, der Luft, geschieht ausschließlich in der Weise, daß man den Staudruck $q = \frac{1}{2} \varrho v^2$ mißt. Als Geber wird entweder eine Düse oder ein Staurohr benutzt, das über eine Rohrleitung mit einem Anzeigegerät, dem Fahrtmesser, in Verbindung steht. Letzteres findet in Form einer Membrandose Verwendung.

Von der Geschwindigkeit der Luft gegenüber der Erde soll abgesehen werden, sie spielt für die folgenden Überlegungen und Untersuchungen keine Rolle. Tritt nun aus irgendeinem Grunde, etwa infolge einer Bö, an der Meßstelle eine Geschwindigkeitsänderung Δv auf, so hat das eine Staudruckänderung Δq zur Folge. Die Druckänderung setzt sich durch die Rohrleitung hindurch fort, wobei bei einer positiven Druckänderung $+\Delta q$ ein Einströmen, bei einer negativen Druckänderung $-\Delta q$ ein Ausströmen einer bestimmten Luftmenge erfolgt. Sie beträgt $\pm \Delta V = \pm \frac{\Delta q \cdot V}{p_0}$, wenn V das Volumen der gesamten Staudruckanlage und p_0 der statische Druck der Luft ist. Diese Luftmenge benötigt eine gewisse Zeit, um in die Staudruckanlage hinein bzw. aus ihr herauszuströmen. Selbst wenn die Membrandose mit ihrem Zeigersystem der Druckänderung fast trägheitslos folgt — wir wollen die Trägheit der Membrandose als so klein annehmen, daß wir sie praktisch vernachlässigen können — so verstreicht doch eine bestimmte Zeit, bis sich der Zeiger des Anzeigeinstrumentes auf den neuen Staudruck $(q + \Delta q)$ eingestellt hat. Die Staudruckanlage ist also mit einer Trägheit behaftet.

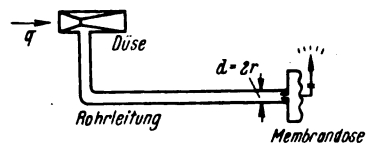


Bild 1. Schematische Skizze einer Staudruckanlage.

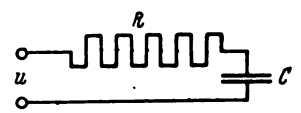


Bild 2. Ladung eines Kondensators über einen Widerstand. (Vereinf. elektr. Ersatzschema für eine Staudruckanlage.)

Diese Trägheit soll nun im folgenden definiert und berechnet werden.

2. Definition der Trägheit.

a) Pneumatische und elektrische Analogie. Im allgemeinen besteht eine Staudruckanlage aus einem Geber, der Düse oder dem Staurohr, der Rohrleitung und dem Anzeigegerät, einer Membrandose, Bild 1. Um den Begriff der Trägheit verständlich zu machen, ersetzen wir die Staudruckanlage durch ein analoges elektrisches System. Düse bzw. Staurohr und Rohrleitung entsprechen elektrisch einem ohmschen Widerstand R, die Membrandose einem Kondensator C, der Staudruck q der Spannung u.

Wenn sich ein aufgeladener Kondensator, Bild 2, von der Kapazität C über einen Widerstand R entlädt, so erfolgt das Abklingen der Kondensatorspannung u nach einer Exponentialfunktion. In gleicher Weise folgt der Druck in der Membrandose der Staudruckanlage beim Ausgleich durch die Rohrleitung einer Exponentialfunktion; wir haben es also mit einem Ausgleichsvorgang zu tun, für den wir eine pneumatische Zeitkonstante angeben können, die ein Maß für die Schnelligkeit des Abklingens des jeweiligen Vorganges — Ladung oder Entladung eines Kondensators — ist. Die pneumatische Zeitkonstante gleicht in ihrem Aufbau vollkommen der elektrischen Zeitkonstanten und gibt an, in welcher Zeit die Meßgröße auf ihren e-ten Teil abgeklungen ist bzw. nach welcher Zeit sie sich ihrem Endwert bis auf den e-ten Teil angenähert hat. Diese Zeitkonstante ist also ein Maß für die Trägheit des Ausgleichsvorganges und soll daher als »die Trägheit« definiert werden. Elektrisch gesehen lautet die Formel für die Trägheit:

$$t' = R \cdot C \text{ [s]}.$$

Wenn man den Strömungswiderstand der Rohrleitung mit R^* und die Kapazität der Membrandose mit C^* bezeichnet, so ist »die Trägheit« der Staudruckanlage

$$t' = R^* \cdot C^* \text{ [s]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

b) Der Berechnung des Strömungswiderstandes R^* liegt folgende Betrachtung zugrunde. Legt man an einen ohmschen Widerstand R eine Spannungsdifferenz Δu an, so fließt nach dem ohmschen Gesetz in ihm ein Strom i,

*) Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Digitized by Google

dessen Größe $i = \Delta u/R$ ist. Legt man an eine Rohrleitung eine Druckdifferenz Δp an, so strömt in ihr eine sekundliche Flüssigkeits- bzw. Luftmenge, deren Größe sich aus dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz bestimmen läßt. Sie beträgt

$$Q = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \Delta p.$$

Diese Formel, in der die Menge Q dem Strom i und die Druckdifferenz Δp der Spannungsdifferenz Δu entspricht, ist genau so gebaut wie die Formel $i = u/R$; es entspricht also $\pi r^4/8 \eta l$ einem reziproken Widerstand $1/R$. Demnach ist der Strömungswiderstand der Rohrleitung

$$R^* = \frac{8 \eta l}{\pi r^4} \left[\frac{\text{kg s}}{\text{m}^5} \right] \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Darin ist l die Länge und r der Radius der Rohrleitung und η die Zähigkeit des strömenden Mediums.

c) Die Kapazität C^* ist definiert als das Fassungsvermögen irgendeines Körpers vom Volumen V bei einer Druckänderung dp. Sie errechnet sich aus der allgemeinen Gasgleichung.

Sie ist

$$C^* = -\frac{dV}{dp}.$$

Führt man die Differentiation aus, so erhält man

$$-\frac{dV}{dp} = \frac{V_0^{\varkappa} \cdot p_0}{V^{\varkappa - 1} \cdot \varkappa \cdot p^2},$$

und unter der Annahme, daß p nur wenig von p_0 abweicht, was bei Drucken von etwa 100 mm WS noch zulässig ist, kann man auch $V_0 = V$ setzen. Dann ergibt sich die Kapazität

$$C^* = -\frac{dV}{dp} = \frac{V_0}{\varkappa p_0} \left[\frac{\text{m}^5}{\text{kg}} \right] \quad \ldots\ldots (3)$$

Bei der Berechnung der Kapazität einer Fahrtmesserdose ist noch der Umstand zu berücksichtigen, daß die Membrane sich ausbiegt und dadurch ein größeres Luftvolumen aufzunehmen imstande ist, als wenn sie unbeweglich wäre. Es strömt also außer dem Volumen ΔV infolge der Druckänderung Δp noch ein weiteres Volumen $\Delta V'$ ein, bedingt durch die Nachgiebigkeit der Wand der Membrandose, Bild 3. Wir können jetzt das Ersatzvolumen V^* berechnen, das die Membrandose haben müßte, wenn in sie das Gesamtvolumen $(\Delta V + \Delta V')$ einströmte, ohne daß ihre Wand nachgiebig wäre.

Es beträgt

$$V^* = \left(\frac{\Delta V + \Delta V'}{\Delta p} \right) \cdot p_0.$$

Die Nachgiebigkeit der Membrandosenwand bedingt also eine Vergrößerung der Kapazität C^*. Dann ist:

$$C^* = -\frac{dV^*}{dp} = \frac{V^*}{\varkappa p_0}.$$

Bei der Ringwaage, wo die nachgiebige Wand die Sperrflüssigkeit ist, tritt diese Kapazitätsvergrößerung ganz besonders stark in Erscheinung).

d) Eine dritte Größe, die elektrisch der Induktivität L^* entspricht, und die hauptsächlich bei schnell und periodisch veränderlichen Drucken in Erscheinung tritt, ist die Massenträgheit des in der Rohrleitung strömenden Mediums. Sie ist der Dichte desselben proportional und beträgt:

$$L^* = \frac{\varrho \cdot l}{F} = \frac{\varrho \cdot l}{r^2 \pi} \left[\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^5} \right]^{1}) \quad \ldots\ldots (4)$$

Sie ist meist so klein, daß man sie vernachlässigen kann.

Wie eine Dimensionsbetrachtung zeigt, ergibt sich die Zeitkonstante L^*/R^* bzw. $R^* \cdot C^* = t'$ folgerichtig in s.

[1]) Definition von L^* und C^* siehe F. Trendelenburg, Einführung in die Akustik. J. Springer, Berlin, 1939. Definition von R^*, entspr. einer unveröffentlichten Arbeit von W. Kerris, Braunschweig, ferner s. Fußnote 2.

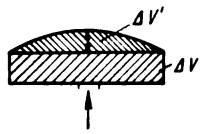


Bild 3. Schematische Darstellung des zusätzlich einströmenden Volumens V' infolge Nachgiebigkeit der Membranwand.

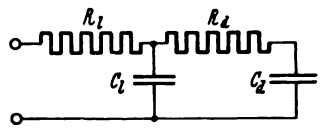


Bild 4. Elektrisches Ersatzschema einer Staudruckanlage.

8. Kritische Betrachtung.

Bei den vorhergehenden Überlegungen waren gewisse vereinfachende Annahmen unvermeidlich. So wurde beispielsweise angenommen, daß die Rohrleitung nur einen Widerstand besitzt, aber keine Kapazität. Diese Annahme ist für enge Rohre auch zulässig, da ihre Kapazität außerordentlich klein ist, während ihr Widerstand groß ist; bei weiten Rohren liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Die meisten Staudruckmesser sind mit einer Dämpfungskapillaren versehen; infolgedessen ist der Widerstand bei letzteren ebenfalls in Rechnung zu setzen.

Das vollständige Ersatzschema ergibt sich aus der Hintereinanderschaltung des Rohrleitungswiderstandes mit dem der Dämpfungskapillaren und aus der Parallelschaltung der Kapazität der Membrandose und der Rohrleitungskapazität, Bild 4.

Es ist also

$$R^* = R_l + R_d \text{ und}$$
$$C^* = C_l + C_d$$

mithin ist

$$t' = R^* \cdot C^* = (R_l + R_d) \cdot (C_l + C_d).$$

Es können demnach drei Fälle auftreten:

1. enge Rohrleitung

$$R_l > R_d \text{ und } C_l < C_d,$$

d. h. als Kapazität ist im wesentlichen die der Membrandose wirksam, während der Widerstand der Rohrleitung den der Dämpfungskapillaren überwiegt. Dann ist

$$t' = R_l \cdot C_d,$$

2. mittlere Rohrleitung

$$R_l = R_d \text{ und } C_l = C_d,$$

d. h. beide Widerstände und Kapazitäten besitzen etwa die gleiche Größenordnung. Dann ist

$$t' = R^* C^* = 4 R_d \cdot C_d = 4 R_l \cdot C_l,$$

3. weite Rohrleitung

$$R_l < R_d \text{ und } C_l > C_d,$$

d. h. die Kapazität der Rohrleitung überwiegt die der Membrandose, während der Widerstand der Rohrleitung gegenüber dem der Dämpfungskapillaren vernachlässigt werden kann. Dann ist

$$t' = C_l \cdot R_d.$$

a) Günstigste Rohrleitung.

Die Frage, ob bei gegebener Größe der Dosenkapazität und des Dämpfungswiderstandes eine günstigste Rohrleitung existiert, deren Trägheit ein Minimum ist, kann durch Differentiation der Gleichung

$$t' = (R_l + R_d) \cdot (C_l + C_d)$$

geklärt werden.

Man erhält, wenn man t' nach r differenziert und $r^2 = x$ setzt, eine kubische Gleichung

$$x^3 - \frac{8 \eta l}{\pi R_d} x - \frac{16 \eta \varkappa p_0 \cdot C_d}{\pi^2 \cdot R_d} = 0 \text{ oder } x^3 - 3 p x - 2 q = 0,$$

wobei

$$p = \frac{8 \eta l}{3 \pi R_d} \text{ und } q = \frac{8 \eta \varkappa p_0 \cdot C_d}{\pi^2 \cdot R_d}$$

ist, die eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen besitzt, und aus der reellen Lösung ergibt sich ein Rohrradius, bei dem die Zeitkonstante ein Minimum ist.

Digitized by Google

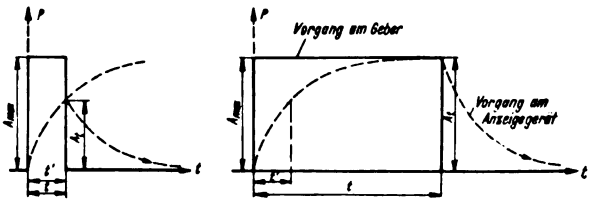


Bild 5. Verlauf zweier verschieden langer rechteckförmiger Staudruckänderungen am Geber und am Anzeigegerät.

Durch Einsetzen entsprechender Zahlenwerte, beispielsweise für

$$R_d = 62 \cdot 10^6 \frac{\text{kg s}}{\text{m}^5} \quad \text{und} \quad C_d = 44{,}5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^5}{\text{kg}}$$

erhält man einen günstigsten Radius von $r = 1{,}22 \cdot 10^{-3}$ m. Die dazugehörige Zeitkonstante beträgt 0,406 s. Für einen doppelt so großen Rohrradius, $r = 2{,}44 \cdot 10^{-3}$ m, errechnete sich die Zeitkonstante zu 0,61 s, für den halben Radius, $r = 0{,}61 \cdot 10^{-3}$ m, ergab sie sich zu 0,945 s. Der günstigste Rohrradius beträgt also

$$r_{opt} = \sqrt{x} = \sqrt{2\sqrt{p} \cdot \mathfrak{Cof}\,\varphi/3}, \text{ wobei } \varphi = \frac{q}{p\sqrt{p}} \text{ ist.}$$

Um den Einfluß der Trägheit auf einen Vorgang zu veranschaulichen, sei angenommen, daß der an der Meßstelle auftretende Vorgang einem rechteckförmigen Funktionsverlauf entspricht. Aus Bild 5 geht hervor, daß die Amplitude des Vorganges nur dann richtig vom Anzeigeinstrument wiedergegeben wird, wenn dieser mindestens 5 Zeitkonstanten (»Trägheiten«) dauert. Nach etwa 5 Zeitkonstanten hat sich die Amplitude dem Endwert bis auf etwa 0,67% angenähert, hat ihn also praktisch erreicht. Ist die Dauer des Vorganges kürzer als 5 Zeitkonstanten, so ist die Amplitude entsprechend verfälscht. Sie bleibt hinter dem Maximalwert um so mehr zurück, je kürzer der betreffende Vorgang ist.

Aus den Skizzen kann man für die Amplitude, die sich bei bekannter Zeitkonstante t' und bei bekannter Dauer des Vorganges t ablesen läßt, folgende Beziehung ableiten:

$$A_t = A_{max} \cdot \left(1 - \frac{1}{n \cdot e}\right),$$

wenn t in n Vielfachen von t' gemessen wird, und $e = 2{,}71828$ ist. Daraus folgt:

$$A_{max} = \frac{e \cdot n}{e \cdot n - 1} \cdot A_t.$$

b) Wellengleichung.

Wenn man exakt vorgehen will, so muß man die Kapazität C über die ganze Rohrleitung gleichmäßig verteilt annehmen, ebenso den Widerstand R; die Induktivität L kann meist also vernachlässigbar klein angenommen werden, ebenfalls wird die Ableitung G — elektrisch das Reziproke eines Isolationswiderstandes, pneumatisch die Prorosität der Rohrleitung — gleich Null gesetzt. Man kommt dann, wenn man die Rohrleitung allein berücksichtigt, auf die Wellengleichung

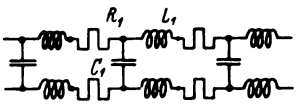
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = L_1 \cdot C_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + R_1 \cdot C_1 \frac{\partial p}{\partial t}$$

(L_1, R_1, C_1 sind auf die Längeneinheit bezogen).

Bild 6 zeigt das elektrische Ersatzschema bei der Rohrleitung. Eine solche Leitung besitzt den Wellenwiderstand $Z = \sqrt{L_1/C_1}$ und die Druckwellen pflanzen sich auf ihr mit der Geschwindigkeit $v = 1/\sqrt{L_1 \cdot C_1}$ fort. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten errechnen sich, wie aus Tafel 1 zu entnehmen ist, alle zu 338 m/s, das ist die Schallgeschwindigkeit. Der Widerstand der Rohrleitung hat eine Abdämpfung der Druckamplitude zur Folge, sie erfolgt exponentiell und es ist

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{R \cdot x}{2 \cdot Z}}.$$

Bild 6. Elektrisches Ersatzschema einer Rohrleitung.



Zahlentafel 1.

		$r = 0{,}75 \cdot 10^{-3}$	$r = 3 \cdot 10^{-3}$	$r = 5 \cdot 10^{-3}$
R_1	$\frac{\text{kg s}}{\text{m}^6}$	$14{,}7 \cdot 10^6$	$0{,}575 \cdot 10^6$	$0{,}00745 \cdot 10^6$
L_1	$\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^6}$	$0{,}0695 \cdot 10^6$	$0{,}00435 \cdot 10^6$	$0{,}00156 \cdot 10^6$
C_1	$\frac{\text{m}^4}{\text{kg}}$	$1{,}26 \cdot 10^{-10}$	$20{,}2 \cdot 10^{-12}$	$56{,}2 \cdot 10^{-10}$
R_l	$\frac{\text{kg s}}{\text{m}^5}$	$59 \cdot 10^6$	$0{,}23 \cdot 10^6$	$0{,}0298 \cdot 10^6$
L_l	$\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^5}$	$0{,}278 \cdot 10^6$	$0{,}0174 \cdot 10^6$	$0{,}00624 \cdot 10^6$
C_l	$\frac{\text{m}^5}{\text{kg}}$	$5{,}05 \cdot 10^{-10}$	$80{,}8 \cdot 10^{-10}$	$224{,}8 \cdot 10^6$
Z	$\frac{\text{kg s}}{\text{m}^5}$	$23{,}4 \cdot 10^6$	$14{,}7 \cdot 10^6$	$0{,}527 \cdot 10^6$
v	m/s	338	338	338
t_1	s	0,0118	0,0118	0,0118
$\frac{R_l}{2Z}$	1	1,26	0,0782	0,0283
$p_0 \frac{e^{-\frac{R_l}{2Z}}}{p_0}$	%	72	8	3

$\varkappa = 1{,}4 \quad p_0 = 10^4 \text{ kg/m}^2 \quad \eta = 1{,}83 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$

$\varrho = 0{,}123 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4} \quad l = 4 \text{ m}$

$$C^*_{(\text{Fahrtmesser})} = -\frac{dV^*}{dp} = \frac{V^*}{\varkappa p_0}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta p}{p_0} \cdot V = \frac{200 \cdot 12{,}31 \cdot 10^{-6}}{10^4} = 0{,}246 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$\Delta V'_{\text{gem.}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad V = 12{,}310^{-6} \text{ m}^3$

$\Delta V + \Delta V' = (1 + 0{,}246) \cdot 10^{-6} = 1{,}246 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

$$V^* = \frac{p_0}{p} \cdot (\Delta V + \Delta V') = \frac{1{,}246 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{200} = 62{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$C^* = \frac{V^*}{\varkappa p_0} = \frac{62{,}3 \cdot 10^{-6}}{1{,}4} \cdot 10^{-4} = 44{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^5/\text{kg}.$$

Die prozentuale Abdämpfung der Druckamplitude beträgt für die engste gemessene Rohrleitung ($r = 0{,}75 \cdot 10^{-3}$ m) 72%, für die weiteste gemessene Rohrleitung ($r = 5 \cdot 10^{-3}$ m) nur 3%, unter der Voraussetzung, daß es sich um eine einzelne Druckwelle handelt. Man kann jetzt von einer pneumatischen Zeitkonstanten nicht mehr sprechen, da sie vom Ort abhängig ist, so daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit in Rechnung zu setzen ist, ferner ist die exponentielle Abdämpfung der Druckamplitude zu berücksichtigen.

Für praktische Bedürfnisse wird es jedoch ausreichend sein, nach dem angegebenen Verfahren zu rechnen, wenn es sich darum handelt, beispielsweise die Länge und den Durchmesser der Rohrleitung bei gegebenen Abmessungen eines Fahrtmessers so zu dimensionieren, daß die Trägheit in bestimmten geforderten Grenzen bleibt.

4. Messung der Trägheit und ihre Berechnung.

a) Meßapparatur.

Die seinerzeit von mir benutzte Meßapparatur, Bild 7, setzte sich folgendermaßen zusammen:

In einem 12 l großen Ausgleichsgefäß wurde mit Hilfe einer Wasserstrahlpumpe ein an einem Wassermanometer ablesbarer Unterdruck erzeugt. Beim Öffnen eines mit einer Sperrklinke versehenen und mit einer starken Feder vorgespannten Hahnes setzte sich eine Unterdruckwelle durch

Digitized by Google

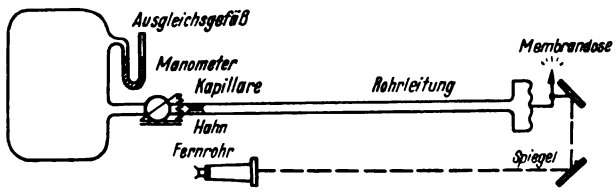


Bild 7. Schematische Skizze der Meßapparatur.

die Rohrleitung fort und bewirkte an dem Zeiger des am Ende der Rohrleitung angeschlossenen handelsüblichen Fahrtmessers der Firma Askania einen Ausschlag. Der Durchgang des Zeigers durch bestimmte Marken wurde mit Hilfe eines Fernrohres beobachtet und die Zeit mit einer Stoppuhr gemessen.

b) Messung.

Der Messung wurde folgende Überlegung zugrunde gelegt. Fliegt ein Flugzeug mit einem bestimmten Staudruck, und trifft plötzlich eine Bö auf die Maschine auf, so hat dies eine plötzliche Staudruckerhöhung zur Folge. Es ist nun für den Flugzeugführer von größter Wichtigkeit, zu wissen, welche Zeit verstreicht, bis die Staudruckänderung am Fahrtmesser angezeigt wird. Praktisch wurden Unterdrucke von 10 bis 80 mm Q.-S. hergestellt, was am Fahrtmesser einer Anzeige von 100 bis 250 km/h entsprach, und dann wurden die Zeiten gemessen, nach denen der Ausschlag des Zeigers auf den e-ten Teil seiner ursprünglichen Größe abgefallen war.

Aus noch näher zu erläuternden Gründen wurden nur die Messungen bei 10 mm Q.-S. $\approx$ 100 km/h berücksichtigt, und die Zeit gemessen, nach der der Fahrtmesserausschlag auf 63 km/h abgesunken war.

Da die Trägheiten so klein waren, daß eine Messung mit der Stoppuhr zwecklos erschien, mußten sie künstlich vergrößert werden. Dies geschah durch Dazwischenschalten von Kapillaren, die am Anfang der Rohrleitung angebracht waren. Der Gesamtwiderstand der Rohrleitung ergibt sich dann aus der Hintereinanderschaltung des Widerstandes der Kapillare und des der Leitung, während sich die Gesamtkapazität aus einer Parallelschaltung der Kapazität der Leitung und der des Fahrtmessers ergibt.

Die Widerstände der Dämpfungskapillaren, die der Einfachheit halber numeriert sind, sind in Tafel 2 zusammengestellt.

Zahlentafel 2.

Kapillare Nr.	r [m]	R_{Kap} [kgs/m^5]
VI	$0{,}45 \cdot 10^{-3}$	$115 \cdot 10^6$
V	$0{,}345 \cdot 10^{-3}$	$65{,}6 \cdot 10^6$
IV	$0{,}35 \cdot 10^{-3}$	$62{,}0 \cdot 10^6$
III	$0{,}355 \cdot 10^{-3}$	$58{,}7 \cdot 10^6$
II	$0{,}45 \cdot 10^{-3}$	$22{,}7 \cdot 10^6$

Länge jeder Kapillare: 0,2 m

Wie vorn bereits erwähnt, wurde bei der Berechnung der Kapazität eine Druckdifferenz von 100 mm W.-S. = 1/100 at zugrunde gelegt. Bei größeren Drucken ist die Kapazität C^* keine Konstante mehr, sondern sie ist eine Funktion des Druckes, ebenso ist die Induktivität L^* wegen der Abhängigkeit der Dichte ϱ vom Druck nicht mehr konstant und der Widerstand R^* läßt sich nicht mehr nach dem Poiseuilleschen Gesetz berechnen, da die Strömung nicht mehr laminar ist. Aus diesem Grunde waren die Messungen bei Drucken von 20 bis 80 mm Q.-S. zunächst nicht zu verwerten; es ist also nur für die Meßergebnisse bei 10 mm Q.-S. eine rechnerische Nachprüfung möglich.

c) Ergebnisse.

Tafel 3 zeigt die rechnerisch erhaltenen und die Meßergebnisse für die Trägheit bei verschiedenen Durchmessern der Rohrleitung und verschiedenen Dämpfungskapillaren.

Zahlentafel 8.

Druck p = 10 mm Q.-S., Fahrmesseranzeige: 100/63 km/h, Trägheit t' [s].

Kapillare Nr.	$r = 5 \cdot 10^{-3}$ m		$r = 3 \cdot 10^{-3}$ m		$r = 0{,}75 \cdot 10^{-3}$ m	
	gemess.	gerechn.	gemess.	gerechn.	gemess.	gerechn.
VI	2,85	2,85	2,98	1,55	1,45	0,9	0,775
V	1,95	2,0	1,96	1,2	0,825	0,85	0,555
IV	1,8	1,8	1,86	1,05	0,78	0,8	0,54
III	1,45	1,5	1,75	1,0	0,74	0,75	0,525
II	1,25	1,2	0,61	0,95	0,288	0,75	0,405

Daraus ist eine gute Übereinstimmung der gerechneten und der seinerzeit gemessenen Werte zu erkennen.

d) Ju 52.

Ein weiteres Beispiel soll die Berechnung der Trägheit einer Staudruckanlage etwa einer Ju 52 sein; bei Annahme einer 10 m langen Rohrleitung von $6 \cdot 10^{-3}$ m Dmr. ergibt sich der Widerstand der Leitung R^* zu $0{,}573 \cdot 10^6$ kg s/m^5, die Kapazität C^* zu $202 \cdot 10^{-10}$ m^5/kg.

Der Widerstand der Rohrleitung ist gegenüber dem der Kapillaren zu vernachlässigen; die Kapazität überwiegt jedoch die des Fahrtmessers; beide liegen parallel, so daß sich C^*_{ges} zu $246{,}5 \cdot 10^{-10}$ m^5/kg berechnet.

Zahlentafel 4.

Nr.	R_{Kap} [kgs/m^4]	t' gerechnet [s]	t' gemessen [s]
II	$23{,}27 \cdot 10^6$	0,585	1,0
III	$59{,}35 \cdot 10^6$	1,46	1,3
IV	$62{,}57 \cdot 10^6$	1,54	1,4
V	$66{,}17 \cdot 10^6$	1,63	1,5
VI	$115{,}57 \cdot 10^6$	2,85	2,35

Auch hier ist eine befriedigende Übereinstimmung festzustellen. Bei der seinerzeit vorgenommenen Messung wurde das Rohrleitungsvolumen durch Dazwischenschalten eines entsprechenden Glasgefäßes auf $284 \cdot 10^{-6}$ m^3 vergrößert.

e) Krümmungen.

Ich habe seinerzeit nicht nur ungekrümmte Rohrleitungen untersucht, sondern auch den Einfluß von Krümmungen festzustellen versucht. Bei allen in dieser Richtung vorgenommenen Versuchen konnte ein Einfluß von Krümmungen in der Rohrleitung auf die Trägheit der Anzeige mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln nicht festgestellt werden.

f) Staurohre.

Zu einer kompletten Staudruckanlage gehört auch der Geber, also das Staurohr oder die Düse. Demzufolge wurden auch Rohrleitungen mit einem Staurohr am Leitungsanfang untersucht. Nur bei der Verwendung des Prandtlschen Nadelstaurohres war eine Vergrößerung der Trägheit um wenige Zehntel Sekunden zu bemerken, bei allen anderen Staurohren war eine Vergrößerung der Trägheit mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht festzustellen. Daraus geht hervor, daß der Widerstand der Staurohre nicht ins Gewicht fällt und somit die Trägheit der Anlage nicht beeinflußt. Die Untersuchungen an Staurohren ergaben, daß man ihnen einen Widerstand im Sinne einer Rohrleitung nicht zuordnen darf, da scharfe Knicke, Verengungen u. dgl. im Inneren der Staurohre zusätzliche Druckabfälle hervorrufen, was einer Vergrößerung des Widerstandes gleichkommt. Es wurde daher, wie bei der elektrischen Messung des Widerstandes durch Strom- und Spannungsmessungen der Druckabfall und die Durchflußmenge der Luft bei verschiedenen Staurohren gemessen und dann wurde dieselbe Messung an einem Rohr gleichen Durchmessers und gleicher Länge wie die eines Staurohres wiederholt. Das Verhältnis beider Widerstände wurde als Gütefaktor k eines Staurohres definiert. Der Gütefaktor gibt also an, wievielmal der

Digitized by Google

Widerstand eines gestreckten Rohres größer sein muß als der eines Staurohres, um bei gleicher sekundlicher Durchflußmenge den gleichen Druckabfall wie letzteres hervorzurufen. Der Gütefaktor k, der bei den meisten Staurohren zwischen 1,3 und 1,6 lag, erwies sich bei Reynoldszahlen von 600 bis 16000 als konstant.

5. Zusammenfassung.

Aus den seinerzeit von mir vorgenommenen Messungen und aus den Berechnungsbeispielen läßt sich entnehmen, daß man mit genügender Genauigkeit die Trägheit von Staudruckanlagen berechnen kann bzw. daß man die Rohrleitung entsprechend dimensionieren kann, wenn an die Trägheit der Anlage bestimmte Forderungen gestellt werden.

Schließlich soll noch eine Formel angeführt werden, nach der man die Trägheit ebenfalls berechnen kann und die einen ähnlichen Aufbau zeigt wie die Formel $t' = R^* \cdot C^*$. Sie lautet:

$$t' = \text{konst.} \cdot \frac{l}{r^4} \cdot V \cdot \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{1}{T}$$

$$= 0{,}087 \cdot \frac{1}{r^4} \cdot V \cdot \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{1}{T} \text{ [s]}^2).$$

Die Trägheit, die angibt, in welcher Zeit eine Druckschwankung auf den e-ten Teil ihrer Anfangsamplitude abgeklungen ist, gibt uns die Möglichkeit, Staudruckanlagen untereinander zu vergleichen, ohne Rücksicht auf die eventuelle Verschiedenheit der Rohrleitungslänge, des Rohrleitungsdurchmessers und des Fahrtmesservolumens.

[1]) s. W. Oppelt und F. Wenke, Theoretische Betrachtung des Luftdruckvariometers und Richtlinien für Entwurf und Prüfung. Luft-Forschung Bd. 14 (1937) Lfg. 10 S. 537.

Digitized by Google

Der Bombenwurf aus dem Sturzflug und dem Steigflug.

Von H. Athen, Berlin.

Mit Hilfe der Elemente des Bombenwurfs aus dem Horizontalflug werden die Elemente des Bombenwurfs aus beliebigem Anflug (Sturz- oder Steigflug) bestimmt. Dabei wird der Luftgewichtsabnahme mit der Höhe Rechnung getragen. Das Verfahren bedient sich des in der Ballistik sog. »Flugbahnschwenkens nach dem Angelrutenprinzip«; die beim Schwenken entstehenden Fehler werden auf Grund der von Popoff angegebenen Parameterentwicklungen der äußeren Ballistik ausgeglichen. Es ist so nicht nur möglich, aus den Endelementen der Bahnen des Horizontalfluges diejenigen beliebigen Anfluges zu ermitteln, sondern auch Funktionen abzuleiten, die es erlauben, Zwischenpunkte jeder beliebigen Bahn der betrachteten Bombenart anzugeben.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Der luftleere Raum.
3. Berücksichtigung des Luftwiderstandes.
4. Bestimmung der Korrekturen beim Schwenken.
5. Numerisches Beispiel.
6. Schlußbetrachtung.

1. Einleitung.

In fast allen Veröffentlichungen über die Ballistik des Bombenwurfes vom Flugzeug wird die Voraussetzung gemacht, daß es sich dabei um den Horizontalflug handelt. Allgemeingültige Abhandlungen über den Sturz-, Horizontal- und Steigflug sind dem Verfasser nicht bekannt geworden. Die vorliegende Untersuchung soll daher den allgemeinen Fall beliebigen Anflugs, d. h. beliebigen Abwurfswinkels behandeln. Sturz- und Steigflug beim Bombenabwurf verdienen deswegen ein besonderes Interesse, da bei ersterem größere Geschwindigkeiten und kleinere Bombenflugzeiten, d. h. kleinere mittlere Abweichungen des Bombeneinschlags vom Ziel (»Streuungen«) erreicht werden können, während im zweiten Fall unter bestimmten Voraussetzungen eine ins Gewicht fallende Vergrößerung der Wurfweite gegenüber dem Horizontalflug erzielt werden kann. Bei der rechnerischen Aufstellung der Größenbeziehungen zwischen den für die Zielgeräte nötigen Elementen ist man auf praktische Versuche angewiesen, die nur aus dem Horizontalflug erfolgen können, wenn Versuchsaufwand und -umfang nicht zu groß werden sollen. Zudem sind für viele Bombenarten bereits die ballistischen Elemente für den Horizontalflug ermittelt, aus denen nachträglich die Unterlagen für den Sturzflug oder Steigflug bestimmt werden müssen. Im folgenden soll daher eine Methode aufgezeigt werden, die es gestattet, aus den für den Horizontalflug gewonnenen Ergebnissen bzw. aus den für den Horizontalflug gültigen Wurftafeln auch die für beliebigen Anflug gültigen Elemente zu ermitteln. Es handelt sich dabei um ein Näherungsverfahren, von dem jedoch gezeigt werden kann, daß es für bestimmte Luftwiderstandsverhältnisse streng richtig und in den übrigen Fällen für die Praxis von durchaus genügender Genauigkeit wird.

2. Der luftleere Raum.

Um zunächst einmal einen Überblick über das gestellte Problem und den einzuschlagenden Weg zu erhalten, müssen einige Betrachtungen bei Voraussetzung eines luftleeren Raumes angestellt werden.

Verlegt man in den Abwurfpunkt der Bombe ein feststehendes Koordinatensystem (x, y), bei dem x die Horizontalprojektion der Flugrichtung, y die nach oben zeigende Vertikale bedeuten, so lauten bekanntlich die Bahngleichungen der Bombe

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = 0\\
&\qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g \quad [\dot{x}(0) = v_0 \cdot \cos\varphi;\ \dot{y}(0) = v_0 \cdot \sin\varphi;\\
&\qquad\qquad\qquad x(0) = y(0) = 0]\\
&\text{b)}\quad x = v_0 \cdot \cos\varphi \cdot t\\
&\qquad y = v_0 \cdot \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\\
&\text{c)}\quad y = x \cdot \operatorname{tang}\varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x^2
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In diesen Gleichungen bezeichnen: φ den gegen den Uhrzeiger positiv gezählten Winkel der Abwurfrichtung gegen die x-Achse, v_0 die Flugzeuggeschwindigkeit im Augenblick des Abwurfs, t die vom Auslösungszeitpunkt der Bombe an gezählte Bombenflugzeit und g die als konstant ($\sim 9{,}8$ m s) vorausgesetzte Schwerebeschleunigung.

Im Falle des Horizontalfluges wird $\varphi = 0$ und somit die Wurfweite $x = X$ bei vorgegebener Abwurfhöhe $(-y) = H$:

$$X = \frac{v_0}{g} \cdot \sqrt{2\,g \cdot H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Fragt man nun nach dem Winkel $\varphi = \varphi_m$, bei dem $x = X_m$ bei vorgegebener Höhe $(-y) = H$ seinen größten Wert erreicht, so ermittelt man durch Bestimmung von $\frac{dx}{d\varphi} = 0$ aus (1a) sofort die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\varphi_m &= \frac{1}{v_0} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2\,g \cdot H};\\
X_m &= \frac{v_0}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2\,g \cdot H};\\
X_m \cdot \operatorname{tang}\varphi_m &= \frac{v_0^2}{g}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die prozentuale (und absolute) Zunahme der Wurfweite X_m gegenüber X wird also besonders groß bei kleineren Abwurfhöhen H, wenn im Steigflug geworfen wird. Ein Zahlenbeispiel soll das erläutern:

$$\left.\begin{aligned}
&v_0 = 150\ \text{m/s};\ H = 1000\ \text{m};\ X = 2141{,}7\ \text{m};\\
&v_0 = 150\ \text{m/s};\ H = 5000\ \text{m};\ X = 4789{,}1\ \text{m};\\
&X_m = 3138{,}1;\ \Delta X = 996{,}4 = 46{,}52\,\%;\ \varphi_m = 36^\circ\,10';\\
&X_m = 5310{,}1;\ \Delta X = 521{,}0 = 10{,}88\,\%;\ \varphi_m = 23^\circ\,22'
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Eine bemerkenswerte Eigenschaft, die der Ausgangspunkt der folgenden Ausführungen wird, leitet sich sofort aus den Gleichungen (1) ab. Führt man nämlich ein neues Koordinatensystem (ξ, η) ein, bei dem ξ in die Abwurfrichtung und η vertikal nach unten zeigt, so gehen die Gleichungen (1) vermöge der Beziehungen

$$\xi = x \cdot \sec\varphi \qquad \eta = x \cdot \operatorname{tang}\varphi - y \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

über in

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \ddot{\xi} = 0 \quad \ddot{\eta} = g \text{ mit } \xi(0) = \eta(0) = \dot{\eta}(0) = 0\\
&\qquad \dot{\xi}(0) = v_0\\
&\text{b)}\quad \xi = v_0 \cdot t \qquad \eta = \frac{g}{2} \cdot t^2\\
&\text{c)}\quad \eta = \frac{g}{2 v_0^2} \cdot \xi^2
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Digitized by Google

Das bedeutet also: In den Differential- und endlichen Gleichungen der Bewegung für das System (ξ, η) tritt der Abgangswinkel φ überhaupt nicht mehr auf. Es genügt also, die Bestimmung der Elemente für den Horizontalflug ($\varphi = 0$, d. h. $\xi = x, -\eta = y$) vorzunehmen, um daraus mit Hilfe von (5) die Elemente x und y für beliebigen Abwurfwinkel zu erhalten. — Zusammenfassend ergeben sich zwei wichtige Folgerungen aus diesem Abschnitt:

1. Kann das Flugzeug bei feindlicher Abwehr durch kleinkalibrige Waffen eine niedrige Anflughöhe einhalten, so empfiehlt sich der Abwurf aus dem Steigflug, um dadurch die Wurfweite zu vergrößern, d. h. um dadurch auch möglichst weit außerhalb des Wirkungsbereiches der Abwehr zu fliegen. Sturzflug ist angebracht bei größeren Flughöhen, um die Flugzeiten herabzudrücken und die Anfluggeschwindigkeit zu vergrößern, d. h. um daher die »Streuungen« zu verringern.

2. Bei Einführung eines schiefwinkligen Koordinatensystems (ξ, η) ist die Lösung der Bahngleichungen unabhängig vom Abwurfwinkel φ, wenn es sich um den luftleeren Raum handelt. Die Bahnen können also nach dem »Angelrutenverfahren« verschwenkt werden. Die Möglichkeit solcher Schwenkungen im lufterfüllten Raum muß untersucht werden, insbesondere die Frage, welche Korrekturen u. U. bei diesen Schwenkungen nötig sind.

3. Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Bei Einbeziehung des Luftwiderstandes in die Gleichungen der fallenden Bombe geht das System der Differentialgleichungen (6a) über in das folgende:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -c \cdot e^{-k \cdot (y + H)} \cdot \dot{\xi} \cdot G(v), \\ \ddot{\eta} &= g - c \cdot e^{-k \cdot (y + H)} \cdot \dot{\eta} \cdot G(v), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)^1)$$

mit den Anfangsbedingungen $\xi(0) = \eta(0) = \dot{\eta}(0) = 0$; $\dot{\xi}(0) = v_0$.

Hierin haben die auftretenden Größen c, k, v, $G(v)$ folgende Bedeutung:

c = ballistischer Beiwert der Bombe,

k = konstanter Faktor, der die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe regelt, wenn die Everlingsche Formel $\delta(h) = \delta(0) \cdot e^{-k \cdot h}$ den funktionalen Zusammenhang zwischen Luftgewicht δ und Höhe h über dem Meeresspiegel darstellt. k hat den Wert $k = 0{,}0001036$.

v = Geschwindigkeit der Bombe zur Zeit t im Bahnpunkt (ξ, η). Sie steht in Beziehung zu $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ gemäß der Formel

$$v = (\dot{\xi} + \dot{\eta}) \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot \dot{\xi} \cdot \dot{\eta}}{(\dot{\xi} + \dot{\eta})^2} \cdot \lambda}, \quad \text{wo } \lambda = \frac{1 + \sin\varphi}{2}, \quad (8)$$

die man mit Hilfe von (5) leicht aus $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ ableitet.

$G(v)$ stellt ein Maß für die Verzögerung $c \cdot f(v)$ der Bombe durch den Luftwiderstand dar. Es ist $c \cdot G(v) \cdot v = c \cdot f(v)$.

In dem obigen System (7) tritt der Abgangswinkel in den Anfangsbedingungen nicht auf. Dagegen ist er noch enthalten in v und $c(y)$. Ein Schwenken nach dem Angelrutenverfahren ist also in voller Allgemeinheit wie im luftleeren Raum hier nicht mehr möglich. — Führt man nun den Ausdruck (8) für v und $y = \xi \cdot \sin\varphi - \eta = (2\lambda - 1) \cdot \xi - \eta = 2\lambda \cdot \xi - (\xi + \eta)$ in (7) ein, so erkennt man, daß in diesem System von Differentialgleichungen λ als Parameter auftritt. Nach dem Satz von Poincaré, dessen Voraussetzungen hier zutreffen (was ohne nähere Erörterung nur angegeben sei)[2]), läßt sich also die Lösung dieses Systems in die Reihen

$$\left.\begin{aligned} \xi(\lambda, t) &= \xi_0(t) + \lambda \cdot \xi_1(t) \\ &\quad + \lambda_2 \cdot \xi_2(t) + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda^n \cdot \xi_n(t), \\ \eta(\lambda, t) &= \eta_0(t) + \lambda \cdot \eta_1(t) \\ &\quad + \lambda^2 \cdot \eta_2(t) + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda^n \cdot \eta_n(t) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

entwickeln, wobei die $\xi_n(t)$ und $\eta_n(t)$ vom Abwurfswinkel φ nicht mehr abhängen. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten nun, wenn man noch die Hilfsgröße $w_n = \xi_n + \eta_n$ einführt:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_0 &= -c \cdot e^{k(w_0 - H)} \cdot G(\dot{w}_0) \cdot \dot{\xi}_0; \\ \ddot{\xi}_1 &+ c \cdot e^{k w_0} \cdot [\dot{\xi}_1 \cdot G(\dot{w}_0) + \dot{w}_1 \cdot G'(\dot{w}_0) + k \cdot w_1 \cdot \dot{\xi}_0 \cdot G(\dot{w}_0)] \\ &= 2 \cdot c \cdot e^{k w_0} \cdot \left[\frac{\dot{\xi}_0 \cdot \dot{\eta}_0}{\dot{w}_0} \cdot \dot{\xi}_0 \cdot G'(\dot{w}_0) + k \cdot \xi_0 \cdot \dot{\xi}_0 \cdot G(\dot{w}_0)\right] \\ \ddot{\eta}_0 &= g - c \cdot e^{k(w_0 - H)} \cdot G(\dot{w}_0) \cdot \dot{\eta}_0; \\ \ddot{\eta}_1 &= \ddot{w}_1 - \ddot{\xi}_1; \\ \ddot{w}_0 &= g - c \cdot e^{k(w_0 - H)} \cdot f(\dot{w}_0); \\ \ddot{w}_1 &+ c \cdot e^{k w_0} \cdot [\dot{w}_1 \cdot f'(\dot{w}_0) + k \cdot w_1 \cdot f(\dot{w}_0)] \\ &= 2 \cdot c \cdot e^{k w_0} \cdot [\dot{\xi}_0 \cdot \dot{\eta}_0 \cdot G'(\dot{w}_0) + k \cdot \xi_0 \cdot f(\dot{w}_0)] \\ &\text{Anfangsbedingungen } \dot{\xi}_0(0) = v_0;\ \xi_0(0) = \eta_0(0) \\ &= \xi_1(0) = \eta_1(0) = \dot{\xi}_1(0) = \dot{\eta}_0(0) = \dot{\eta}_1(0) = \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Auf die Integration dieser Gleichungen soll hier nicht eingegangen werden[3]). An dieser Stelle interessiert vielmehr die am Schluß des Abschnitts 2 angeschnittene Frage der Schwenkungsmöglichkeit der Bahnen bei verschiedenen φ, d. h. verschiedenen λ.

Man erkennt aus (9) nun sofort, daß unter der Voraussetzung, daß alle $\xi_n(t)$ und $\eta_n(t)$ für $n > 1$ verschwinden, das im Abschnitt 2 dargestellte Schwenken möglich ist, da dann $\xi(\lambda, t) = \xi_0(t)$ und $\eta(\lambda, t) = \eta_0(t)$ vom Abgangswinkel unabhängig werden. Aus den Differentialgleichungen (10) erkennt man aber weiter, daß die $\xi_n(t)$ und $\eta_n(t)$ ($n > 1$) z. B. dann verschwinden,

1. wenn $c = 0$ ist, d. h. wenn die Verhältnisse des luftleeren Raumes vorliegen,
2. wenn zugleich $c \cdot G'(\dot{w}_0) = 0$ und $k = 0$ sind. $c \cdot G'(\dot{w}_0) = 0$ bedeutet aber $c \cdot G(\dot{w}_0) = \text{const}$ oder allgemein $c \cdot f(v) = \text{const} \cdot v$, d. h. der Luftwiderstand wächst linear mit der Geschwindigkeit. $k = 0$ bedeutet $c \cdot e^{-k \cdot y} = c$ bzw. $\delta(y) = \delta(0)$, d. h. daß eine Atmosphäre konstanter Luftdichte vorliegt.

Ohne an dieser Stelle weiter auf diese Dinge einzugehen, läßt sich aber zeigen, daß diese Fälle auch die einzigen sind.

In Wirklichkeit liegt indessen keine der Bedingungen 1. oder 2. vor: Die Atmosphäre ist nicht konstant bezüglich des Luftgewichts und der Bombenwiderstand durch Luft wächst im allgemeinen mit etwa dem Quadrat oder z. T. höheren Potenzen der Geschwindigkeit. Bei der Berechnung der Wurfelemente für Sturz- oder Steigflug ist also darauf Rücksicht zu nehmen, daß ein einfaches Verschwenken der Bahnen nicht mehr möglich ist, da die $\xi_n(t)$ und $\eta_n(t)$ ($n > 1$) nicht verschwinden. Vielmehr kann man zunächst nur aussagen, daß die Schwenkmöglichkeit für $\xi(\lambda, t)$ und $\eta(\lambda, t)$ nur bezüglich des Teiles $\xi_0(t)$ bzw. $\eta_0(t)$ besteht, der allen $\xi(\lambda, t)$ und $\eta(\lambda, t)$ bei beliebigem λ gemeinsam ist. Die Reste

$$\left.\begin{aligned} \lambda \cdot R_\xi &= \xi(\lambda, t) - \xi_0(t) = \lambda \cdot [\xi_1(t) + \lambda \cdot \xi_2(t) + \ldots], \\ \lambda \cdot R_\eta &= \eta(\lambda, t) - \eta_0(t) = \lambda \cdot [\eta_1(t) + \lambda \cdot \eta_2(t) + \ldots] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

stellen also Korrekturen dar, die beim Schwenken nach den Formeln (5) berücksichtigt werden müssen. — Theorie und

[1]) c muß für die verschiedenen Abwurfhöhen H_r mit dem entsprechenden Luftdichtenfaktor $e^{-k \cdot H_r}$ (Everlingsche Höhenformel für das Luftgewicht!) multipliziert werden, da der Anfangspunkt des jeweiligen Koordinatensystems (x, y) in der Höhe H_r liegt und somit auch der Anfangswert des ball. Koeffizienten $c(0) = c \cdot e^{-k \cdot H_r}$ ist. In den Differentialgleichungen (7) ist daher $c(y) = c \cdot e^{-k \cdot (y + H)}$ angesetzt worden.

[2]) Vgl. Popoff, Das Hauptproblem der äußeren Ballistik, Leipzig 1932.

[3]) Vgl. die Untersuchungen des Verfassers in Zs. f. Ang. Math. u. Mech. Bd. 19 (1939) Nr. 6.

Digitized by Google

Praxis zeigen nun, daß man ohne größeren Fehler ansetzen darf:

$$\lambda \cdot R_\xi = \lambda \cdot \xi_1(t) \qquad \lambda \cdot R_\eta = \lambda \cdot \eta_1(t).$$

Wegen Einzelheiten zu dieser Frage muß auf eine an anderer Stelle veröffentlichte Untersuchung des Verfassers verwiesen werden[4]).

Hat man nun etwa für den Horizontalflug ($\varphi_1 = 0$, $\lambda_1 = 0{,}5$) bereits die Ergebnisse vorliegen, so kann man die Bombenflugbahn bezüglich ξ und η in die neue Abwurfrichtung φ_2 $\left(\text{d. h. } \lambda_2 = \frac{1+\sin\varphi_2}{2}\right)$ verschwenken, muß aber dann an ξ und η vor dem Übergang auf rechtwinklige Koordinaten (x, y) noch die Korrekturen

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_2 - \lambda_1)\cdot R_\xi &= \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{2}\cdot R_\xi = \frac{\sin\varphi_2}{2}\cdot R_\xi,\\ (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot R_\eta &= \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{2}\cdot R_\eta = \frac{\sin\varphi_2}{2}\cdot R_\eta\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

anbringen. Dazu kommen dann allerdings noch die Einflüsse der Luftgewichtsverringerung, wenn zu anderen Abwurfhöhen übergegangen wird.

4. Bestimmung der Korrekturen beim Schwenken.

Um nun aus den Elementen des Horizontalfluges diejenigen beliebigen Anfluges zu bestimmen, kommt es also vor allem darauf an, die Korrekturglieder $\xi_1(t)$, $\eta_1(t)$, d. h. $w_1(t) = \xi_1(t) + \eta_1(t)$ zu ermitteln. Ein Weg zur Lösung dieser Aufgabe soll hier aufgezeigt werden.

Einerseits ergibt sich für das Verhältnis

$$\frac{w_1(t)}{w_0(t)} = \frac{\xi_1(t)}{\xi_0(t)} = \frac{\eta_1(t)}{\eta_0(t)} = \frac{1}{3}\cdot\Big\{[g\cdot c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot G'(v_0) + k\cdot c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f(v_0)] + \ldots\Big\} t^2 = \alpha\cdot t^2, \quad (12\,a)$$

wenn man diese Quotienten in eine Taylorreihe entwickelt und alle Glieder, die mit höheren Potenzen als t^2 multipliziert sind, vernachlässigt. — Andrerseits ist in den Zielgeräten für den Horizontalwurf die sogenannte Rücktrift

$$p = \frac{v_0\cdot t - X}{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

eingearbeitet. p ist hier als Funktion von H oder t zu deuten. Wir setzen hier $p = p(t)$ als Funktion von t voraus[5]). — Verallgemeinern wir nun den Begriff der Rücktrift für die schiefwinkligen Koordinaten (ξ, η), d. h. schreiben wir

$$p = \frac{v_0\cdot t - \xi}{\eta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13\,a)$$

so kann man genau wie bei ξ und η für p die folgende Reihe ansetzen:

$$p(\lambda, t) = p_0(t) + \lambda\cdot p_1(t) + \lambda^2\cdot p_2(t) + \ldots$$

Eine Taylorentwicklung unter Benutzung der Differentialgleichungen (7) und (10) liefert dann sofort

$$p(\lambda, t) - p_0(t) = -\lambda\cdot\frac{2}{3}v_0 \times\left[c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot G'(v_0) + \frac{k}{g}\cdot c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f(v_0)\right]\cdot t + - \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

Andrerseits gilt aber auch (unter Voraussetzung, daß näherungsweise alle $\xi_n = \eta_n = 0$ für $n > 1$):

$$p(\lambda, t) - p_0(t) = \frac{v_0\cdot t - \xi_0(t)\,[1 + \lambda\cdot\alpha(t)\cdot t^2]}{\eta_0(t)\cdot[1 + \lambda\cdot\alpha(t)\cdot t^2]} - \frac{v_0\cdot t - \xi_0(t)}{\eta_0(t)} \approx -\frac{v_0\cdot t}{\eta}\cdot\lambda\cdot\alpha(t)\cdot t^2 \quad (15)$$

Somit ergibt sich aus (14) und (15) die Beziehung

$$\alpha(t) = \frac{\eta}{t^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left\{c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot G'(v_0) + \frac{k}{g}\cdot c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f(v_0)\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Die Berechnung der in der Klammer $\{\ldots\}$ stehenden Glieder wird weiter unten beschrieben.

Mit Hilfe der für (16) berechneten Koeffizienten läßt sich daher α bestimmen und daran anschließend $\xi_0(t)$, $\xi_1(t)$ usw. aus den Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(\lambda, t) = \Phi_0(t) + \lambda\cdot\Phi_1(t) = \Phi_0(t)\cdot[1 + \lambda\cdot\alpha(t)\cdot t^2],\\ &\text{wo für } \Phi \text{ zu setzen ist: } \xi, \eta \text{ oder } w\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Im Falle des Horizontalfluges ist $\varphi = 0$, d. h. $\lambda = 0{,}5$ zu setzen. Die Berechnung des Ausdrucks

$$\left\{c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot\left[G'(v_0) + k\cdot\frac{f(v_0)}{g}\right]\right\}$$

erfolgt nun so: Aus den Taylorentwicklungen für $p(\lambda, t)$ und $p_0(t)$ erkennt man sofort, daß

$$p(\lambda, 0) = p_0(0) = \frac{c\cdot f(v_0)}{g}.$$

Extrapoliert man also die Werte $p(\lambda, t)_{\lambda = 0{,}5}$ der Endwerte des horizontalen Bombenwurfs auf $t = 0$, so erhält man (näherungsweise) $\frac{c\cdot f(v_0)}{g}$ und daraus $c\cdot K(v_0) = \frac{c\,f(v_0)}{v_0^2}$. Andrerseits ist $c\cdot G'(v_0) = c\cdot K(v_0)\,[n(v_0) - 1]$, wo $n(v_0) = v_0\cdot\frac{f'(v_0)}{f(v_0)}$ für den Geschwindigkeitsbereich des Bombenwurfs den fast konstanten Wert $n(v_0) \sim 1{,}8$ (für $70 \leq v < 180$ m/s) hat. Nunmehr liegen alle Werte zur Berechnung von α vor.

Eine Verbesserung der α-Werte könnte noch auf folgende Weise herbeigeführt werden: Für $w_0(t)$ gilt die Taylorentwicklung

$$w_0(t) = v_0\cdot t + \frac{g - c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f(v_0)}{2}\cdot t^2 - \frac{1}{6}\times\left\{c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f'(v_0)\,[g - c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f(v_0)] + k\cdot v_0\cdot c\cdot e^{-k\cdot H}\cdot f(v_0)\right\} t^3 + \ldots \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Setzt man einmal $c\cdot f(v_0)$, das andre Mal $c\cdot f'(v_0)$ als bekannt voraus (auf Grund der vorhergehenden Entwicklungen!), so ergeben sich aus dieser Gleichung (18) zwei neue Werte $c\cdot\overline{f}(v_0)$ und $c\cdot\overline{f}'(v_0)$, mit denen man ein neues $\bar{\alpha}$ berechnen kann. Den Mittelwert

$$\alpha_m = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$$

setzt man dann zur endgültigen Bestimmung von $w_0(t)$ ein, aus dem man schließlich für den nunmehr nicht mehr so stark veränderlichen Wert $c\cdot f'(v_0)$ die Größe $c\cdot f(v_0)$ endgültig bestimmt. Durch Multiplikation der $c\cdot f(v_0)$ und $c\cdot f'(v_0)$ mit dem der Abwurfhöhe H_ν entsprechenden Faktor $e^{-k\cdot H_\nu}$ in c findet man dann auch ohne weiteres die Koeffizienten der Reihe für $\overline{w}_0(t)$, das dem Bombenwurf aus beliebiger Höhe H_ν entspricht. Schließlich kann man noch zur Bestimmung von $\overline{\eta}_0(t)$ ansetzen

$$\frac{w_0(t) - v_0\cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2}{\eta_0(t) - \frac{g}{2}\cdot t^2} = \frac{\overline{w}_0(t) - v_0\cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2}{\overline{\eta}_0(t) - \frac{g}{2}\cdot t^2}, \quad (19)$$

wie eine leichte Reihenentwicklung unschwer ergibt; endlich ist dann

$$\overline{\xi}_0(t) = \overline{w}_0(t) - \overline{\eta}_0(t).$$

$\overline{w}_1(t)$, ... findet man nach Formel (17); nur ist auch hier α mit dem Faktor $e^{-k\cdot H_\nu}$ zu multiplizieren, wie man aus (16) erkennt. Damit sind alle Elemente $\overline{w}_0(t)$, $\overline{w}_1(t)$, $\overline{\xi}_0(t)$, $\overline{\xi}_1(t)$, ... bekannt, so daß die Bahnbestimmung für beliebige Anflugwinkel und Abwurfhöhen auf Grund des Ansatzes

$$\overline{\xi}(\lambda, t) = \overline{\xi}_0(t) + \lambda\cdot\overline{\xi}_1(t), \ \ldots, \ \ldots$$

keine Schwierigkeiten mehr macht. Die numerische Durchführung der Berechnung kann weitgehend schematisiert werden. Im folgenden Abschnitt soll ein Beispiel in seinen wesentlichsten Teilen durchgeführt werden.

[4]) Siehe Fußnote [3]).

[5]) Das ist zweckmäßig, da ja die Flugzeit in die Zielgeräte verarbeitet wird. Daher sind auch unsere Untersuchungen auf die Flugzeit als unabhängige Veränderliche abgestellt.

Digitized by Google

5. Numerisches Beispiel.

Das folgende Beispiel bezieht sich auf eine Bombe von etwa 60 kg Gewicht und einer Abwurfgeschwindigkeit von $v_0 = 120$ m/s. Die Werte für den Horizontalwurf wurden durch numerische Integration gewonnen; dabei wurde die Luftgewichtsabnahme gemäß der Everlingschen Formel angesetzt, und Luftwiderstand und Bahnelemente dem amerikanischen Werk »Ext. Ball. Tabl.« (Funktion von Gâvre) entnommen. Dabei ist die Fallbeschleunigung $g = 9{,}8$ m/s². Der durch Extrapolation gewonnene Wert p für $t = 0$ ist $p(0) = 0{,}08486$, während richtig wäre $p(0) = 0{,}08468$.

Die Rechnung erfolgt nach dem Schema der Zahlentafel 1.

Die Verbesserungsrechnung für α ist in diesem Beispiel nicht durchgeführt.

Erläuterung zur Zahlentafel: In den Spalten 0 bis 3 sind die aus der Wurftafel für den Horizontalwurf bekannten Elemente eingetragen; durch Addition der Werte aus Spalte 1 und 2 ergeben sich die Werte w der Spalte 8. In den Spalten 5 und 6 sind die Werte $c \cdot e^{-k \cdot H} \cdot f(v_0)$ und $c \cdot e^{-k \cdot H} \cdot K(v_0)$ eingetragen, die aus $p(0)$ gewonnen wurden. Aus Formel (17) ergeben sich die Werte der Spalte 9 und daraus in der obengeschilderten Weise die Werte der Spalten 10 bis 15.

Zahlentafel 2 gibt die Bahnberechnung für die Abwurfhöhe 2777,8 m.

Hierin bedeuten: Spalte 0 Abwurfhöhe H, 1 bis 3 Flugzeit und Widerstandswerte der Höhe H. In Spalte 4 steht der nach Formel (18) berechnete $\overline{w}_0$-Wert. Die Spalten 5 bis 7 enthalten die Werte

$$\psi(t) = w_0(t) - v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2,$$

$$\varphi(t) = \eta_0(t) - \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad \varepsilon(t) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

Zahlentafel 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	X	H	p	$e^{-k \cdot H}$	$c \cdot e^{-k \cdot H} \times f(v_0)$	$c \cdot e^{-k \cdot H} \times K(v_0)$	$\lambda \cdot \alpha \cdot t^2$	w	w_0	$c \cdot \overline{f}(v_0)$	$c \cdot \overline{f}'(v_0)$	α_m	w_0	$c \cdot f(v_0)$	η_0
0	0	0	0,08486	1,0000	0,8316	0,0000 5775	0	0	0						0
10,67	1234	555,6	0,08313	0,9441	0,7851	5452	0,00961	1789,6	1776,7						551,5
15,26	1740	1111,1	0,08180	0 8913	0,7412	5147	0,01815	2851,1	2500,3						1091,3
18,83	2125	1666,7	0,08066	0,8414	0,6997	4859	0,02570	3791,7	3696,7						1624,9
21,86	2446	2222,2	0,07974	0,7943	0,6606	4587	0,03233	4668,2	4523,3						2152,6
24,55	2427	2777,8	0,07902	0,7499	0,6236	4331	0,03817	5504,8	5302,4						2675,7
26,99	2977	3333,3	0,07866	0,7080	0,5887	4088	0,04325	6310,3	6049,0						3195,3
31,36	3416	4444,4	0,07812	0,6310	0,5247	3644	0,05140	7860,4	7476,1						4227,1
35,34	3810	5555,6	0,07750	0,5623	0,4676	3248	0,05725	9365,6	8858,5						5254,8
38,99	4162	6666,7	0,07752	0,5012	0,4168	2894	0,06124	10828,7	10203,8						6282,0
42,46	4483	7777,8	0,07877	0,4467	0,3715	2579	0,06366	12260,8	11527,0						7312,3
45,82	4778	8888,9	0,08105	0,3981	0,3311	2299	0,06782	13666,9	12798,9						8324,3

Zahlentafel 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
H	t	$c \cdot e^{-k \cdot H} \times f(v_0)$	$c \cdot e^{-k \cdot H} \times f'(v_0)$	$\overline{w}_0(t)$	$-\psi(t)$	$-\varphi(t)$	$\varepsilon(t)$	$-\overline{\psi}(t)$	$-\overline{\varphi}(t)$	$\overline{\eta}_0(t)$	$\overline{\xi}_0(t)$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\eta}_1(t)$	$\overline{\xi}_1(t)$	$\overline{w}_1(t)$
2777,8	0			0	0	0		0	0	0	0		0	0	0
	10,67			1789,4	61,6	6,4		48,9	5,1	552,8	1236,6		8,4	18,9	27,3
	15,26			2827,6	171,9	49,7		144,6	41,8	1099,2	1728,4		33,6	52,8	86,4
	18,83			3729,1	297,9	110,1		265,5	98,1	1636,9	2092,2		75,0	95,8	170,8
	21,86			4547,9	440,3	187,8		415,7	177,3	2163,1	2384,8		132,1	145,6	277,7
	24,55			5302,4	596,9	277,6		596,9	277,6	2675,7	2626,7		204,2	200,5	404,7
	26,99			6004,0	759,2	374,1		804,2	396,3	3173,1	2830,9		290,7	259,4	550,1
	31,36			7267,6	1106,1	591,9		1314,6	703,5	4115,5	3152,1		502,8	385,1	887,9
	35,34			8357,5	1502,2	865,1		2003,2	1153,6	4966,3	3391,2		758,3	517,8	1276,1
	38,99			9249,0	1924,0	1167,0		2878,8	1746,1	5702,9	3546,1		1045,0	649,8	1694,8
	42,46			9896,4	2402,2	1521,7		4032,8	2554,7	6279,3	3617,1		1342,2	773,2	2115,4
	45,82			10366,1	2753,1	1729,3		5185,9	3257,4	6796,2	3569,9		1736,4	912,1	2648,5

Zahlentafel 3.

0	1	2	3	4	5	6	7	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8
H	φ	η	ξ	x	y	Δx	Δy	φ	η	ξ	x	y	Δx	Δy	t
2777,8	+30°	0	0	0	0	0	0	−30°	0	0	0	0	0	0	0
	$\lambda = 0{,}75$	559,1	1250,8	1081	+ 66	+ 2	+ 5	$\lambda = 0{,}25$	554,9	1241,3	1075	− 1175	+ 2	+ 4	10,67
		1124,4	1768,0	1531	− 240	+ 5	+ 3		1107,6	1741,6	1508	− 1978	+ 4	+ 8	15,26
		1693,2	2164,1	1874	− 611	± 0	+ 2		1655,7	2116,2	1833	− 2714	+ 2	− 1	18,83
		2262,2	2494,0	2160	− 1015	− 2	+ 2		2196,1	2421,2	2097	− 3406	+ 5	− 15	21,86
		2828,7	2777,1	2405	− 1440	− 1	− 3		2726,6	2676,8	2318	− 4065			24,55
		3391,2	3025,5	2620	− 1878	+ 1	− 8		3245,8	2895,8					26,99
		4492,6	3441,0	2980	− 2772	+ 17	− 10		4241,2	3248,4					31,36
		5535,1	3779,6						5155,9	3520,7					35,34
		6486,7	4033,5						5964,2	3708,6					38,99
		7286,0	4197,0						6614,9	3810,4					42,46
		8098,5	4254,0						7230,3	3797,9					45,82

X (Aufschlagweite) = 2986 m (Fehler = −0,37 %) | X = 1869 m (Fehler = +0,48 %)
T (Aufschlagflugzeit) = 31,39 s (Fehler = +0,13 %) | T = 19,16 s (Fehler = +0,26 %).

Digitized by Google

Zahlentafel 4.

0	1	2	3	4	5
	x	y	Δx	Δy	t
$H = 2778$	0	0	0	0	0
$\varphi = 0^0$	1246	— 557	— 1	— 7	10,67
$\lambda = 0{,}5$	1755	— 1116	— 1	— 13	15,26
	2140	— 1674	0	— 7	18,83
	2458	— 2228	+ 3	— 6	21,86
	2727	— 2778	0	0	24,55

wobei w_0 und η_0 den Spalten 13 und 15 der Zahlentafel 1 entnommen sind. Spalte 8 enthält

$$\overline{\psi}(t) = \overline{w}_0(t) - v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

aus dem sich $\overline{\varphi}(t) = \varepsilon(t) \cdot \overline{\psi}(t)$ ergibt (Spalte 9). $\overline{\eta}_0(t)$ ergibt sich aus $\overline{\eta}_0(t) = \overline{\varphi}(t) + \frac{g}{2} \cdot t^2$ (Spalte 10) und aus Spalte 11: $\overline{\xi}_0 = \overline{w}_0 - \overline{\eta}_0$. Die beim Schwenken zu berücksichtigenden Korrekturglieder $\overline{\xi}_1(t)$ und $\overline{\eta}_1(t)$ (Spalten 13 und 14) entstehen gemäß Formel (12a) durch die Produkte $\overline{\eta}_1(t) = \overline{\alpha} \cdot \overline{\eta}_0(t)$ und $\overline{\xi}_1(t) = \overline{\alpha} \cdot \overline{\xi}_0(t)$, wobei $\overline{\alpha}$ (Spalte 12) durch Multiplikation von α mit $e^{-k \cdot (H - H_r)}$ bestimmt wurde.

Zahlentafel 3 enthält die Werte für Bahnen im Steigflug ($\varphi = +30^0$, $\lambda = 0{,}75$) und im Sturzflug ($\varphi = -30^0$, $\lambda = 0{,}25$) bei einer Abwurfhöhe $H = 2777{,}8$ m; Zahlentafel 4 zeigt die ganze Bahn für $\varphi = 0$, Abwurfhöhe 2778 m, bei der nur der Endpunkt aus der Wurftafel bekannt war.

Die Bedeutung der Spalten bedarf hier keiner weiteren Erläuterung. In den Spalten 6 und 7 sind die Differenzen gegen die durch exakte Rechnung gefundenen Werte eingetragen.

Die hier berechneten Werte stellen die Elemente der gesamten Flugbahn dar. Für die Praxis braucht man allerdings nur die Werte für den Auftreffpunkt der Bombe auf dem Erdboden; man braucht daher nicht die ganze Flugbahn zu berechnen, sondern nur einige Punkte, mit denen man den Aufschlagpunkt auf dem Erdboden interpolieren kann. Welche t-Werte hierfür in Frage kommen, kann man leicht durch das Angelrutenschwenken der unveränderten Elemente des Horizontalfluges abschätzen.

6. Schlußbetrachtung.

Das im vorangehenden geschilderte Verfahren stellt ein Problem von großer Allgemeinheit dar[6]). Es ist uns nicht nur gelungen, die Bodenelemente des Bombenwurfs für beliebigen Anflug zu ermitteln, sondern darüber hinaus auch noch den gesamten Flugbahnverlauf zu bestimmen. Entsprechend kann man natürlich mit Hilfe der hier entwickelten Funktionen speziell auch den Bahnverlauf des Horizontalwurfes berechnen[7]). Erwähnung verdient noch die Tatsache, daß es durch den beschriebenen Ansatz weiterhin möglich ist, für andere Bombenarten die Wurfelemente zu berechnen, wenn nur diese Bomben gleiche Form, aber anderes Gewicht haben, d. h. wenn auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze der Widerstand proportional dem der bekannten Bombe ist. — Die Rechnungen der vorangehenden Entwicklungen vereinfachen sich wesentlich, wenn außer den Bodenelementen des Horizontalfluges noch der Gesamtverlauf einer Bahn, möglichst aus der größten Abwurfhöhe, bekannt ist; die Vereinfachung kann dann noch weiter getrieben werden, wenn schließlich noch eine Gesamtbahn bei Sturz- oder Steigflug aufgenommen ist. Auf diese Verhältnisse einzugehen, verbietet der Rahmen dieser Arbeit; ihre Behandlung soll aber später gesondert ausgeführt werden.

[6]) Das gilt mit den entsprechenden, hier nicht zu besprechenden Abänderungen auch für die Artillerieballistik. Dort läßt sich ein dem hier beschriebenen Verfahren im Prinzip ähnliches entwickeln.

[7]) Wie es in Zahlentafel 4 geschehen ist.

Digitized by Google

JAN 22 1947

Luftfahrt-forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über
Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 8 enthält Arbeiten von: Chr. Dahmen S. 221—235, W. Stieß S. 236—238, F. Schultz-Grunow S. 239—246, E. Hottenrott S. 247—250, J. Lense S. 251—255

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 8 SEITE 221 BIS 256 | MÜNCHEN, 20. 8. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:
Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Eine einfache Methode zur Untersuchung allgemeinerer Längsbewegungen eines Flugzeuges. Von Chr. Dahmen . . . . . Seite 221

Nullschub-Anzeigegerät und Ruderblockierung, zwei neue Hilfsmittel für Flugmessungen. Von W. Stieß . . . . . Seite 236

Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten. Von F. Schultz-Grunow . . . . . Seite 239

Zur Dauerfestigkeit von Duralblech-Nietungen. Von E. Hottenrott . . Seite 247

Bemerkungen zur Lehre von den Kartenentwürfen. Von J. Lense . . . Seite 251

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift st zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 | 20. August 1940 | Lfg. 8

Eine einfache Methode zur Untersuchung allgemeinerer Längsbewegungen eines Flugzeuges.

Von Chr. Dahmen.

Bericht des Instituts für Mechanik der Techn. Hochschule Aachen.

Systematische Untersuchungen von beschleunigten Flugvorgängen sind sowohl für die Beurteilung der dynamischen Beanspruchung eines Flugzeuges wie für die unter einem vergleichenden Gesichtspunkte zu gewinnenden Erkenntnisse über den Einfluß gewisser Konstruktionsgrößen von Wert. Im folgenden wird die Integration der Kräftegleichungen der Längsbewegung für eine umfassende Bewegungsklasse durchgeführt, mit deren Ergebnissen auch allgemeinere Längsbewegungen mit ausreichender Genauigkeit ermittelt werden können.

Gliederung.

I. Bezeichnungen.
II. Einleitung.
III. Die Bewegungsgleichungen.
IV. Der Fall $|n| > 1$.
V. Der Fall $|n| = 1$.
VI. Der Fall $|n| < 1$.
VII. Der gerade Gleit- und Steigflug ($n = \cos\varphi$).
VIII. Allgemeinere Längsbewegungen.
IX. Berücksichtigung des gegen die Bewegungsrichtung geneigten Schraubenzuges.
X. Beispiel (Abfangen aus dem Sturzflug).
XI. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen.
XII. Tafelwerk.
XIII. Schrifttum.

I. Bezeichnungen.

α		Anstellwinkel,
c_a		Auftriebsbeiwert,
c_w		Widerstandsbeiwert,
ε		Gleitzahl $= \frac{c_w}{c_a}$.
η		Schraubenwirkungsgrad,
S	(kg)	Schraubenzug,
S_0	(kg)	Konstanter Teil des Schraubenzugs [Gl. (10)],
s_0		Konstanter Teil des Schraubenzugs [Gl. (30)],
σ	$\left(\frac{kg/s^2}{m^2}\right)$	Abnahmefaktor des Schraubenzugs [Gl. (10)],
$\bar{\sigma}$		Abnahmefaktor des Schraubenzugs [Gl. (30)],
ϱ	$\left(\frac{kg/s^2}{m^4}\right)$	Luftdichte,
γ	(kg/m³)	Luftwichte,
φ		Bahnneigungswinkel,
β		Winkel zwischen Schraubenzug und Flugbahn,
ϑ		Winkel zwischen Profilsehne und Horizontalen,
G	(kg)	Fluggewicht,
F	(m²)	Flügelfläche,
A	(kg)	Flügelauftrieb,
n		Lastvielfaches $= \frac{A}{G}$.
N	(PS)	Motorleistung,
v_1	(m/s)	Waagerechtgeschwindigkeit mit bestem Schraubenwirkungsgrad,
v	(m/s)	Fluggeschwindigkeit,
p	(kg/m²)	Luftdruck,
p_0	(kg/m²)	Luftdruck der Normalatmosphäre in Bodenhöhe,
J	(m⁴)	Trägheitsmoment des Flugzeugs um die Querachse durch den Schwerpunkt,
M	(kgm)	Flugzeugmoment.

II. Einleitung.

Die Integration der Bewegungsgleichungen für die Längsbewegung eines Flugzeuges kann von zwei Problemstellungen her in Angriff genommen werden. Entweder untersucht man den Ablauf der Bewegung bei vorgegebener konstanten oder veränderlichen Abhängigkeit des Steuerausschlages von der Zeit oder anderen Größen, oder man macht bestimmte Annahmen über die Änderung des Anstellwinkels oder des Bahnneigungswinkels während des Bewegungsverlaufes. Das erste Integrationsproblem, dessen allgemeine Behandlung wegen der Koppelung der drei Bewegungsgleichungen mathematische Schwierigkeiten bereitet, interessiert zur Hauptsache für Stabilitätsbetrachtungen. Für mehr oder weniger vereinfachende Annahmen sind Näherungslösungen bekannt [1][1]) bis [6]. Das andere Problem ist einer Behandlung zugänglicher, da man die Schwerpunktsbewegung unabhängig vom Momentenausgleich behandeln kann. Von den Annahmen, die man in diesem Fall treffen kann, vereinfacht die Vorgabe des Bahnneigungswinkels, d. h. der Bewegungsbahn, das Integrationsproblem noch insofern, als jetzt nur die erste Gleichung integriert zu werden braucht [7].

Eine große Mannigfaltigkeit von Bewegungen erhält man, wenn über eine Änderung des Anstellwinkels verfügt wird. Während Lanchester [8] bei den »Phygoiden« mit der Annahme eines konstanten Anstellwinkels den Widerstand noch vernachlässigt, findet man diesen unter derselben Voraussetzung in Arbeiten von A. Pröll [9], W. Müller [11] und Richter [10] berücksichtigt.

Durch mehrere grundlegende Arbeiten von W. Müller [12], [13] wird die Entwicklung fortgesetzt, indem über eine Anstellwinkeländerung in Verbindung mit der Bahngeschwindigkeit bestimmt wird. Darin werden erstmalig geschlossene Formeln für die Geschwindigkeit und die Bahnkoordinaten aufgestellt. Bei den erwähnten Arbeiten wird der Widerstand entweder vernachlässigt oder mit einer mittleren Gleitzahl gerechnet.

In dieser Arbeit soll nun eine Bewegungsklasse, die durch ein konstantes Verhältnis des Auftriebs zum Fluggewicht

[1]) Die Zahlen in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis, Abschnitt 13.

Digitized by Google

gekennzeichnet ist, und für welche Lösungen unter der Annahme einer konstanten mittleren Gleitzahl zum Teil schon von W. Müller angegeben sind, mit einer höheren Annäherung des Widerstandsgesetzes untersucht werden. Neben der Einsicht in eine Vielfalt von grundlegenden Bewegungen dieser Klasse gewinnen wir zudem eine Methode zur Berechnung und Erörterung auch allgemeinerer Längsbewegungen und verwandter Probleme.

III. Die Bewegungsgleichungen.

Für die natürlichen Richtungen der Längsbewegung eines Flugzeuges gelten unter der Annahme, daß der Schraubenzug in die Bewegungsrichtung fällt, die beiden Kräftegleichungen, Bild 1

$$G/g\,\dot{v} = S - G\sin\varphi - c_w\,\varrho/2\,F\,v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$G/g\,v\,\dot{\varphi} = c_a\,\varrho/2\,F\,v^2 - G\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und die Momentengleichung um die Querachse durch den Schwerpunkt

$$J\,\ddot{\vartheta} = -M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für unsere Problemstellung brauchen wir nur die beiden ersten Gleichungen zu betrachten. Die dritte liefert uns nachträglich den Steuerungsverlauf.

Die Gl. (1) und (2) schreiben sich mit den Abkürzungen

$$k_a = \frac{1}{2}\,\gamma\,c_a\,F/G \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$n = \frac{A}{G} = \frac{k_a \cdot v^2}{g} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

in der Form

$$\dot{v} = g\,(S/G - \sin\varphi - n\,\varepsilon) \quad . \quad . \quad (6)$$

$$v\,\dot{\varphi} = g\,(n - \cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Durch Division dieser Gleichungen erhalten wir

$$\frac{d\,v}{v\,d\,\varphi} = \frac{S/G - \sin\varphi - n\,\varepsilon}{n - \cos\varphi} \quad . \quad . \quad (8)$$

als Hauptgleichung unseres Problems, die integriert werden muß. Multiplizieren wir Gl. (8) mit $-\frac{1}{v^2}$, dann können wir diese in die Form bringen

$$\frac{d\left(\frac{1}{v^2}\right)}{d\,\varphi} = \frac{-2\,(S/G - \sin\varphi - n\,\varepsilon)}{n - \cos\varphi} \cdot \frac{1}{v^2} \quad . \quad . \quad (9)$$

Für den Schraubenzug machen wir den bekannten Ansatz

$$S = S_0 - \sigma \cdot v^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

worin nach H. Blenk

$$S_0 = \frac{3}{2}\,\frac{75 \cdot N \cdot \eta_{max}}{v_1}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{75 \cdot N \cdot \eta_{max}}{v_1^3}$$

zu setzen ist. Liegt eine gemessene Abhängigkeit des Schraubenzuges von der Geschwindigkeit vor, wollen wir diese ebenfalls durch eine in v^2 lineare Funktion intervallweise annähern. Nach Bild 3, in der die Flugzeugpolare eines Sportflugzeuges entsprechend dem Luftkraftdiagramm, Bild 2, aufgetragen ist, wollen wir die lineare Beziehung

$$c_w = a \cdot c_a + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

als intervallweise Annäherung gelten lassen. Damit erhalten wir mit Benutzung von (4) und (5) für ε die Näherung

$$\varepsilon = a + \frac{b \cdot \varrho}{2\,n\,G/F} \cdot v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Mit den angegebenen Ansätzen für S und ε bleibt die Differentialgleichung (9) linear und wird

$$\frac{d\left(\frac{1}{v^2}\right)}{d\,\varphi} + \frac{2\,(A_1 - \sin\varphi)}{n - \cos\varphi} \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{2\,A_2}{n - \cos\varphi} \quad . \quad . \quad (13)$$

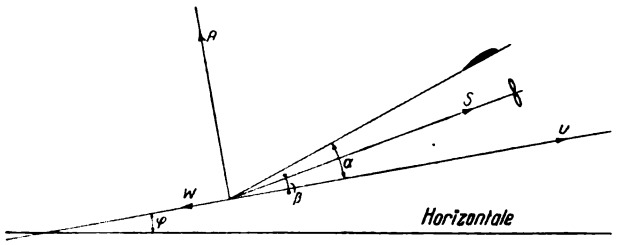


Bild 1. Erklärung der Bezeichnungen.

Darin bedeuten

$$A_1 = S_0/G - n\,a$$

$$A_2 = \sigma/G + \frac{b\,\varrho}{2\,G/F}.$$

In der Differentialgleichung (13) erscheint n als Parameter, und wir werden im folgenden die Integration für drei Wertbereiche von n, nämlich $|n| > 1$, $|n| = 1$ und $|n| < 1$

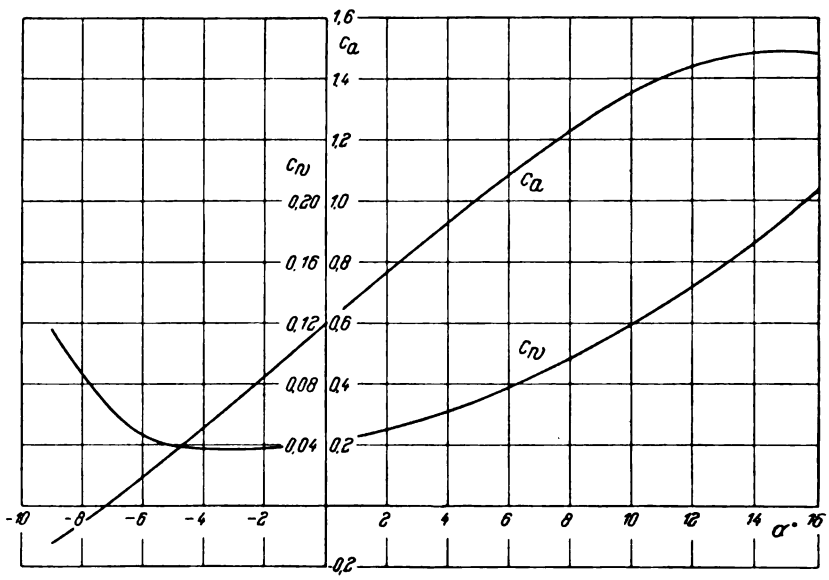


Bild 2. Luftkraftbeiwerte für ein Sportflugzeug.

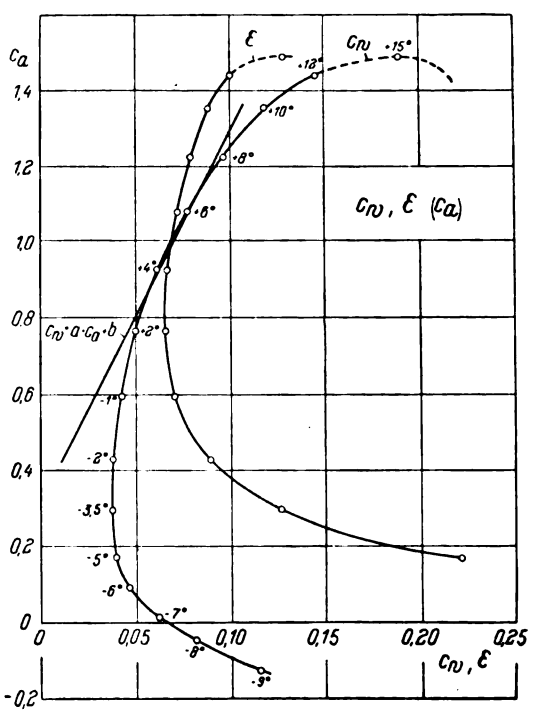


Bild 3. Flugzeugpolare entsprechend den Luftkraftbeiwerten des Bildes 2.

Digitized by Google

durchführen. Bei positivem n werden die Bewegungen im positiven c_a-Bereich verlaufen und umgekehrt. Die Lösung der linearen Diffenrentialgleichung 1. Ordnung in der allgemeinen Form

$$\frac{dy}{dx} + P \cdot y = Q$$

lautet

$$y = e^{-\int_{x_1}^{x} P\,dx} \left(C + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_1}^{x} P\,dx} \cdot Q \cdot dx \right), \quad \ldots \quad (14)$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist, und die Werte x_0 und x_1 beliebig gewählt werden können.

Zur Auffindung der Lösungen unserer Differentialgleichung (13) kommt es also darauf an, Lösungen der Integrale

$$\int \frac{e^{\int \frac{A_1 - \sin\varphi}{n - \cos\varphi} d\varphi}}{n - \cos\varphi} d\varphi$$

für die verschiedenen Wertebereiche des Parameters n zu finden. Die hierfür notwendigen Substitutionen werden wir von vornherein in die Differentialgleichung einführen, wodurch die Integrationen übersichtlich werden.

IV. Der Fall $|n| > 1$ [2].

Substituieren wir in Gl. (13)

$$\arccos \frac{n\cos\varphi - 1}{n - \cos\varphi} = \tau \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

mit den Beziehungen

$$\cos\varphi = \frac{n\cos\tau + 1}{n + \cos\tau}, \quad \sin\varphi = \frac{\sin\tau\sqrt{n^2-1}}{n+\cos\tau},$$

$$n - \cos\varphi = \frac{n^2-1}{n+\cos\tau}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n+\cos\tau},$$

und setzen

$$\lambda = \frac{2A_1}{\sqrt{n^2-1}},$$

so können wir die Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{d\left(\frac{1}{v^2}\right)}{d\tau} + \left(\lambda - \frac{2\sin\tau}{n+\cos\tau}\right) \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{2A_2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Ihre Lösung ist, wenn wir den Anfangszustand durch den Index 0 bezeichnen,

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n+\cos\tau_0}{n+\cos\tau}\right)^2 e^{-\lambda(\tau-\tau_0)} \cdot \frac{1}{v_0^2} + \frac{2A_2 e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{n^2-1}\,(n+\cos\tau)^2} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\lambda\tau}\,(n+\cos\tau)^2\,d\tau \quad (16)$$

und nach weiterer Integration mit Benutzung der Formel

$$\int \cos m\tau\, e^{\lambda\tau}\,d\tau = \frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda^2+m}(m\sin m\tau + \lambda\cos m\tau)$$

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n+\cos\tau_0}{n+\cos\tau}\right)^2 e^{-\lambda(\tau-\tau_0)} \cdot \frac{1}{v_0^2} + \frac{A_2 e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{n^2-1}\,(n+\cos\tau)^2} \left\{ e^{\lambda\tau}\left[\frac{2n^2+1}{\lambda} + \frac{4n}{1+\lambda^2}(\sin\tau + \lambda\cos\tau) + \frac{2\sin 2\tau + \lambda\cos 2\tau}{4+\lambda^2}\right]\right\}_{\tau_0}^{\tau} \quad \ldots \ldots \quad (16a)$$

[2]) In den folgenden Abschnitten sollen die Lösungen für $n > 0$ entwickelt werden. Wie diese sich für $n < 0$ verhalten, wird am Ende eines jeden Abschnittes besprochen.

Für das numerische Rechnen ist es besser, die Lösung in dieser Gestalt, in der die Grenzen noch nicht eingesetzt sind, zu belassen. In den Zahlentafeln I, II, III findet man die Funktionen τ, $\sin\tau$, $\cos\tau$, $\sin 2\tau$, $\cos 2\tau$ für $n = 1\frac{1}{2}$, 2, ..., 7 berechnet. Für $n = 2$ und 7 sind sie in Bild 4, 5 und 6 dargestellt. Für den gesamten Bereich $1\frac{1}{2} \leqq n \leqq 7$ entnehmen wir ihre Werte einer Darstellung der Funktionen über der Abszisse n, Bild 7. Mit diesen Mitteln ist die Formel (16), die man wegen der guten Näherung über größere Intervalle erstrecken kann, ohne viel rechnerische Mühe auswertbar. Dabei wird man am besten die Näherung (11) den einzelnen Intervallen der Rechnung anpassen.

Für c_w und ε = konst. erhalten wir vereinfachte Formeln, die für kleinere Intervalle mit Vorteil gebraucht werden können.

Mit c_w = konst. und $S = 0$ wird (16)

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n+\cos\tau_0}{n+\cos\tau}\right)^2 \cdot \frac{1}{v_0^2} + \frac{c_w \cdot \varrho}{2G/F\sqrt{n^2-1}\,(n+\cos\tau)^2} \left[(2n^2+1)\tau + 4n\sin\tau + \frac{1}{2}\sin 2\tau\right]_{\tau_0}^{\tau} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit v^2 und benutzen unsere Beziehung (5), erhalten wir nach kurzer Umrechnung

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A - B \cdot \varepsilon(v) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

mit

$$A = \left(\frac{n+\cos\tau}{n+\cos\tau_0}\right)^2$$

und

$$B = \frac{n\left[(2n^2+1)\tau + 4n\sin\tau + \frac{1}{2}\sin 2\tau\right]_{\tau_0}^{\tau}}{\sqrt{n^2-1}\,(n+\cos\tau_0)^2}.$$

Wir haben damit eine bequeme Formel zur angenäherten Berechnung der Geschwindigkeit, wenn wir mit einem mittleren $\varepsilon(v)$ iterierend rechnen, indem wir zunächst in erster Näherung ε_0 setzen und dann aus einer graphischen Darstellung $\varepsilon(v)$ die mittleren ε-Werte entnehmen. Wenn man die lineare Funktion (18) aufzeichnet, Bild 8, dann wird die Iteration übersichtlich und in wenigen Schritten gerechnet sein. In Zahlentafel VII und VIII sind die Größen A und B für das Intervall $\Delta\varphi = 15^0$ und einige Werte von n berechnet. Für Zwischenwerte von n erhalten wir diese Größen durch eine Darstellung über der Abszisse n, Bild 9.

Mit ε = konst.[3]) vereinfacht sich Formel (16) zu

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n+\cos\tau_0}{n+\cos\tau}\right)^2 e^{-\lambda(\tau-\tau_0)} \cdot \frac{1}{v_0^2}$$

oder

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A \cdot e^{B'\left[\frac{S(v)}{G} - n\,\varepsilon(v)\right]} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

mit

$$A = \left(\frac{n+\cos\tau}{n+\cos\tau_0}\right)^2$$

und

$$B' = \frac{2(\tau-\tau_0)}{\sqrt{n^2-1}}.$$

B' findet man in Zahlentafel IX für dieselben Intervalle $\Delta\varphi$ und Werte von n berechnet.

Die Einschränkung $S = 0$, die wir bei c_w = konst. gemacht haben, besteht bei (19) nicht. Der Rechnungsgang ist derselbe wie bei Formel (18), nur daß wir mit den mittleren Funktionswerten von $\frac{S(v)}{G} - n\,\varepsilon(v)$ zu rechnen haben. Dabei gilt in bezug auf die Schraubenkraft das im Abschnitt III Gesagte.

Die Genauigkeit der Formeln (18) und (19) ist für die meisten Untersuchungen ausreichend. Der Forderung nach

[3]) Siehe auch W. Müller [13].

Digitized by Google

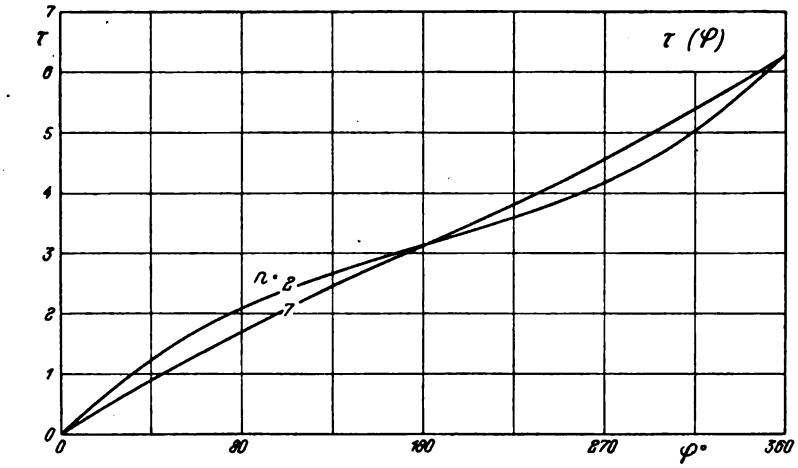


Bild 4. Funktionsverlauf der Substitution $\tau = \arccos \frac{n \cos \varphi - 1}{n - \cos \varphi}$.

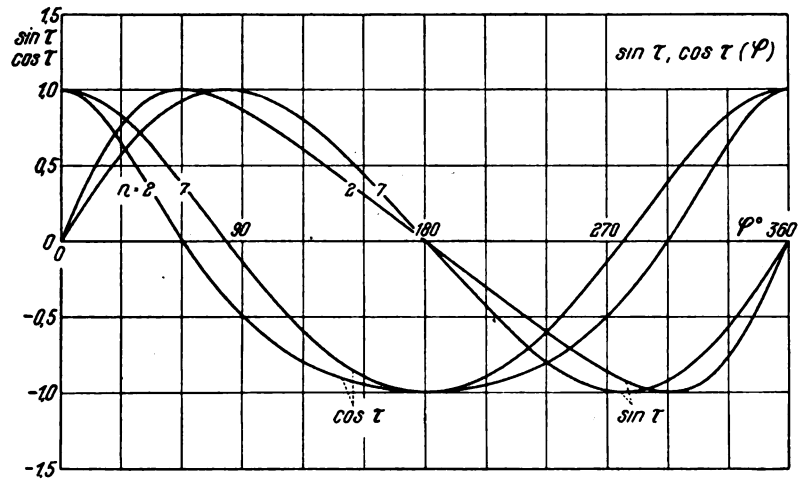


Bild 5 (links in der Mitte). Funktionen sin τ und cos τ der Substitution $\tau = \arccos \frac{n \cos \varphi - 1}{n - \cos \varphi}$.

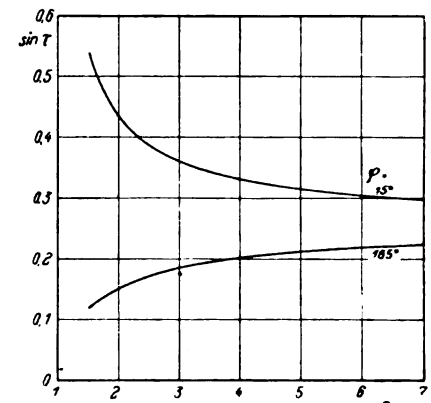


Bild 7. Darstellung der Funktion sin τ in Abhängigkeit von n für $\varphi = 15°$ und 165°.

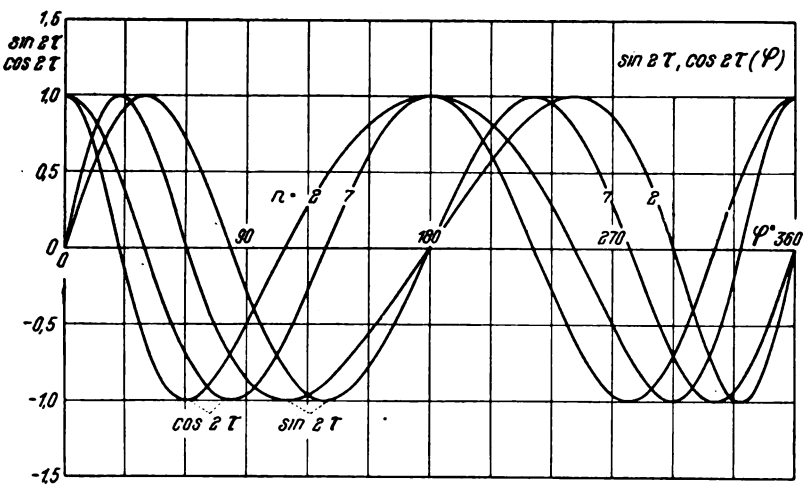


Bild 6. Funktionen sin 2 τ und cos 2 τ der Substitution $\tau = \arccos \frac{n \cos \varphi - 1}{n - \cos \varphi}$.

einer höheren Genauigkeit kann mit Formel (16a) genügt werden. Wir haben die Lösung unter der Voraussetzung, daß der Bewegungsvorgang im positiven c_a-Bereich verläuft, d. h. für $n > 0$ entwickelt. Für Bewegungen im negativen c_a-Bereich ($n < 0$) bleiben die Lösungen erhalten. Wir haben nur für $n = -n'$ einzusetzen. Wie sich die Funktionen der Substitution (15) und die Größen A, B und B' verhalten, ist aus der Zahlentafel zu ersehen. Durch die Lösung des behandelten Falles $|n| > 1$ sind die periodischen Bewegungen des Looping ($n > 0$) und des Sturzlooping ($n < 0$) erfaßt, und damit können diese selbst und Teilbewegungen von ihnen (z. B. Abfangen aus dem Sturzflug [siehe Beispiel], Übergang aus dem Horizontalflug in den Sturzflug u. a.) untersucht werden.

Die Kenntnis der Geschwindigkeiten während eines Bewegungsablaufes vermittelt uns nun alle anderen wissenswerten Bewegungsfunktionen. So läßt sich aus (4) und (5) der c_a- bzw. Anstellwinkelverlauf errechnen. Durch eine graphische Integration der Gl. (6) erhalten wir den Zeitverlauf der Bewegung. Aus Gl. (7) berechnen wir die Krümmungsradien der Flugbahnen und können damit diese konstruieren.

V. Der Fall $|n| = 1$.

Es ist ohne weiteres einzusehen, daß die Bewegungen dieses Falles wie die des vorhergehenden in dem Bereich $0° \leqq \varphi \leqq 360°$ verlaufen können, nur mit dem Unterschied, daß sie nicht mehr periodisch sind, sondern die horizontale

Digitized by Google

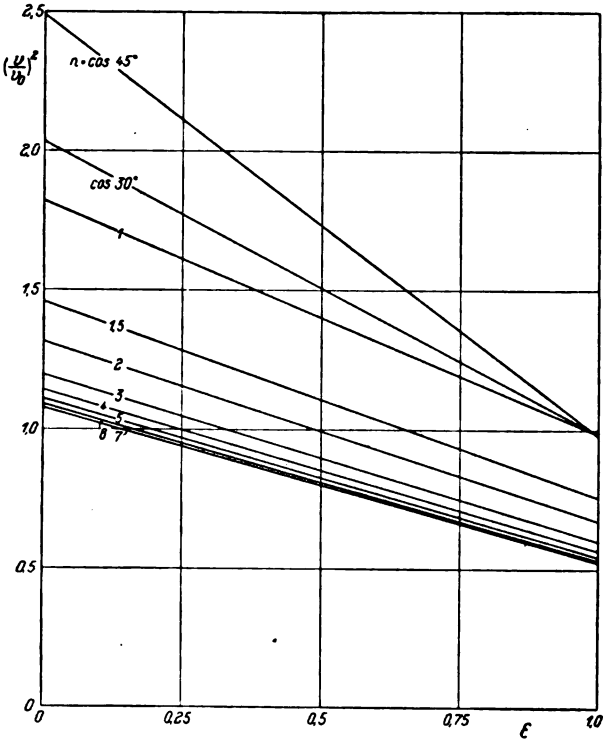


Bild 8. Darstellung der Funktion $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A - B \cdot \varepsilon\,(v)$ bzw. $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A - B \cdot n\,\varepsilon\,(v)$ für das Intervall $\Delta\varphi^\circ = 270-285$.

Flugbahn (normale oder in Rückenlage) für sie eine Asymptote bildet[4]).

Zur Ausführung der Integration von (13) substituieren wir

$$\operatorname{cotg} \varphi/2 = \tau.$$

Es wird dann

$$\cos\varphi = \frac{\tau^2-1}{\tau^2+1},\quad \sin\varphi = \frac{2\tau}{\tau^2+1},$$

$$1-\cos\varphi = \frac{2}{\tau^2+1},\quad \frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{2}{\tau^2+1}.$$

Die Differentialgleichung geht damit über in

$$\frac{d\left(\frac{1}{v^2}\right)}{d\tau} - \left(\lambda - \frac{4\tau}{\tau^2+1}\right)\cdot\frac{1}{v^2} = -2A_2,$$

wo $\lambda = 2A_1$ gesetzt ist.

Ihre Lösung ist

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{1+\tau_0^2}{1+\tau^2}\right)^2 e^{\lambda(\tau-\tau_0)}\cdot\frac{1}{v_0^2} - \frac{2A_2 e^{\lambda\tau}}{(1+\tau^2)^2}\int e^{-\lambda\tau}(1+\tau^2)^2\,d\tau$$

und mit Benutzung der Rekursionsformel

$$\int \tau^m e^{-\lambda\tau}\,d\tau = -\frac{\tau^m e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \frac{m}{\lambda}\int \tau^{m-1} e^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

nach weiterer Integration

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{1+\tau_0^2}{1+\tau^2}\right)^2 e^{\lambda(\tau-\tau_0)}\cdot\frac{1}{v_0^2} + \frac{2A_2 e^{\lambda\tau}}{(1+\tau^2)^2\lambda^5}$$
$$\left\{e^{-\lambda\tau}\left[(\lambda^4+4\lambda^3+24) + (4\lambda^3+24\lambda)\tau\right.\right.$$
$$\left.\left. + (2\lambda^4+12\lambda^2)\tau^2 + 4\lambda^3\tau^3 + \lambda^4\tau^4\right]\right\}_{\tau_0}^{\tau} \quad \ldots\ldots (21)$$

Für diese Lösung und ihre möglichen Vereinfachungen gelten dieselben Überlegungen wie im vorigen Abschnitt, so daß wir uns hier kurz fassen können.

Mit c_w = konst. und $S = 0$ erhalten wir

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A - B\,\varepsilon\,(v)$$

[4]) Über die Grenzwertfragen dieses und des nächsten Abschnittes sei auf die Arbeit von W. Müller [13] verwiesen, in der diese Fragen eingehend erörtert sind.

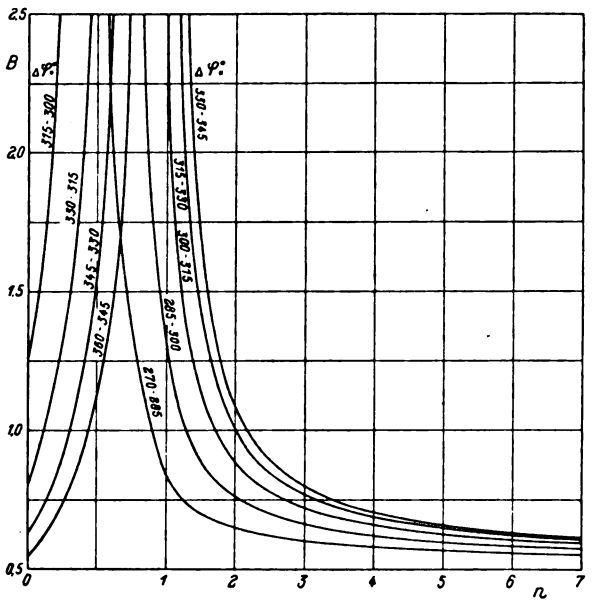


Bild 9. Darstellung der Größe B für verschiedene Intervalle $\Delta\varphi^\circ$ nach Zahlentafel VIII.

und mit ε = konst.

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A\cdot e^{B'\left[\frac{S(v)}{G} - \varepsilon(v)\right]}$$

mit

$$A = \left(\frac{1+\tau^2}{1+\tau_0^2}\right)^2$$

$$B = -\frac{\left(2\tau + 4/3\,\tau^3 + 2/5\,\tau^5\right)_{\tau_0}^{\tau}}{(1+\tau_0^2)^2}$$

und $$B' = -2(\tau - \tau^0).$$

Die Größen A, B und B' sind ebenfalls in Zahlentafel VII, VIII und IX für die aus diesen zu ersehenden Intervalle enthalten. Für $n = -1$ ist die Substitution $\operatorname{tg}\varphi/2 = \tau$ in Gl. (13) einzuführen. Die Gestalt der Lösungen bleibt dieselbe.

VI. Der Fall $|n| < 1$.

Auch die Bewegungen dieses Falles haben einen asymptotischen Charakter. Die Asymptoten bilden die Geraden, die mit der Horizontalen den Winkel $\varphi = \arccos n$ einschließen. Dabei können die Bewegungen, je nachdem $n \lessgtr \cos\varphi$ ist, von zwei Seiten gegen die Asymptoten verlaufen, Bild 10. Wir sind daher auch genötigt, zwecks Integration der Gl. (13) zwei Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} (\alpha)\ \operatorname{Ar\,Cof}\frac{n\cos\varphi - 1}{n - \cos\varphi} &= \tau \\ (\beta)\ \operatorname{Ar\,Cof}\frac{n\cos\varphi - 1}{\cos\varphi - n} &= \tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

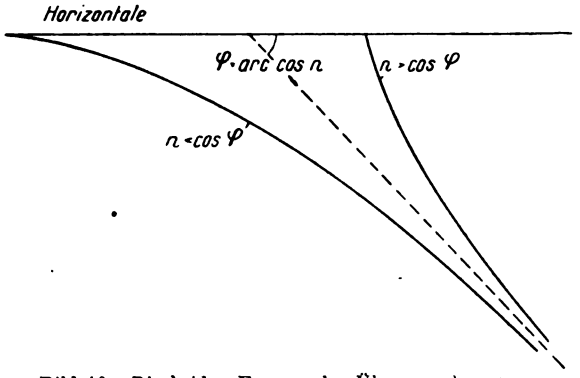


Bild 10. Die beiden Formen der Übergangsbewegung in den geraden Gleitflug.

Digitized by Google

zu machen, deren Gültigkeitsbereich aus nachstehender Zahlentafel ersichtlich ist.

Quadrant von φ	$n < \cos\varphi$	$n > \cos\varphi$
I	(α)	(β)
II	(β)	(β)
III	(β)	(β)
IV	(α)	(β)

Mit der Substitution (α) wird

$$\cos\varphi = \frac{n\,\mathfrak{Cof}\,\tau + 1}{n + \mathfrak{Cof}\,\tau},\quad \sin\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\tau\sqrt{1-n^2}}{n+\mathfrak{Cof}\,\tau},$$

$$n - \cos\varphi = \frac{-(1-n^2)}{n+\mathfrak{Cof}\,\tau},\quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n+\mathfrak{Cof}\,\tau},$$

und mit (β) haben wir

$$\cos\varphi = \frac{1 - n\,\mathfrak{Cof}\,\tau}{n - \mathfrak{Cof}\,\tau},\quad \sin\varphi = -\frac{\mathfrak{Sin}\,\tau\sqrt{1-n^2}}{n-\mathfrak{Cof}\,\tau},$$

$$n - \cos\varphi = \frac{-(1-n^2)}{n-\mathfrak{Cof}\,\tau},\quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n-\mathfrak{Cof}\,\tau}.$$

Wir erhalten somit die beiden Differentialgleichungen

$$(\alpha)\qquad \frac{d\left(\frac{1}{v^2}\right)}{d\tau} - \left(\lambda - \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\tau}{n+\mathfrak{Cof}\,\tau}\right)\cdot\frac{1}{v^2} = -\frac{2A_2}{\sqrt{1-n^2}}$$

$$(\beta)\qquad \frac{d\left(\frac{1}{v^2}\right)}{d\tau} - \left(\lambda + \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\tau}{n-\mathfrak{Cof}\,\tau}\right)\cdot\frac{1}{v^2} = -\frac{2A_2}{\sqrt{1-n^2}}$$

mit $\lambda = \dfrac{2A_1}{\sqrt{1-n^2}}$.

Ihre Lösungen sind

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau_0}{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau}\right)^2 e^{\lambda(\tau-\tau_0)}\cdot\frac{1}{v_0^2} - \frac{2A_2 e^{\lambda\tau}}{\sqrt{1-n^2}\,(n\pm\mathfrak{Cof}\,\tau)^2}\int e^{-\lambda\tau}(n\pm\mathfrak{Cof}\,\tau)^2\,d\tau,$$

wo das $\pm$-Zeichen entsprechend den Substitutionen $\begin{matrix}(\alpha)\\(\beta)\end{matrix}$ zu nehmen ist.

Mit Benutzung der Formeln

$$\int \mathfrak{Cof}\,m\tau\, e^{-\lambda\tau}\,d\tau = \frac{e^{\lambda\tau}}{m^2-\lambda^2}(m\,\mathfrak{Sin}\,m\tau + \lambda\,\mathfrak{Cof}\,m\tau)$$

$$\mathfrak{Cof}^2\tau = \frac{1}{2}(1+\mathfrak{Cof}\,2\tau)$$

erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau_0}{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau}\right)^2 e^{\lambda(\tau-\tau_0)}\cdot\frac{1}{v_0^2} + \frac{A_2 e^{\lambda\tau}}{\sqrt{1-n^2}\,(n\pm\mathfrak{Cof}\,\tau)^2}\left\{e^{-\lambda\tau}\left[\frac{2n^2+1}{\lambda} \mp \frac{4n}{1-\lambda^2}(\mathfrak{Sin}\,\tau + \lambda\,\mathfrak{Cof}\,\tau) - \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,2\tau + \lambda\,\mathfrak{Cof}\,2\tau}{4-\lambda^2}\right]\right\}_{\tau_0}^{\tau} \quad (25)$$

Die Vereinfachungen dieser Lösungen werden mit $c_w = \text{konst.}$ und $S = 0$

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau_0}{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau}\right)^2\cdot\frac{1}{v_0^2} - \frac{c_w\cdot\varrho}{2G/F\sqrt{1-n^2}\,(n\pm\mathfrak{Cof}\,\tau)^2}\left[(2n^2+1)\tau \pm 4n\,\mathfrak{Sin}\,\tau + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\,2\tau\right]_{\tau_0}^{\tau} \quad (26)$$

oder

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A - B\cdot n\cdot\varepsilon(v), \quad (27)$$

und mit $\varepsilon = \text{konst.}$

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = A\cdot e^{B'\left[\frac{S(v)}{G} - n\,\varepsilon(v)\right]} \quad (28)$$

worin

$$A = \left(\frac{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau}{n \pm \mathfrak{Cof}\,\tau_0}\right)^2$$

$$B = -\frac{\left[(2n^2+1)\tau \pm 4n\,\mathfrak{Sin}\,\tau + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\,2\tau\right]_{\tau_0}^{\tau}}{\sqrt{1-n^2}\,(n\pm\mathfrak{Cof}\,\tau_0)^2}$$

und

$$B' = -\frac{2(\tau-\tau_0)}{\sqrt{1-n^2}}$$

bedeuten.

In Zahlentafel IV, V und VI haben wir die Funktionen τ, $\mathfrak{Sin}\,\tau$, $\mathfrak{Cof}\,\tau$, $\mathfrak{Sin}\,2\tau$, $\mathfrak{Cof}\,2\tau$ für $n = \cos 30^0, 45^0, 60^0, 75^0$ und $\cos 90^0$ berechnet. Darin sind die Gültigkeitsbereiche der verschiedenen Substitutionen augenfällig. Für $n = \cos 45^0$ sind einige Funktionen in Bild 11 dargestellt.

Für Bewegungen in der Nähe $c_a = 0$ empfiehlt sich eine Iteration mit mittleren c_w-Werten, d. h. eine Anwendung der Formel (26), da in diesem Anstellwinkelbereich die ε-Werte groß werden. Aus diesem Grunde wollen wir auch bei den in diesem Abschnitt behandelten Falle allgemein mit mittleren $n\cdot\varepsilon$-Werten iterieren, Bild 12.

Die Grenzgeschwindigkeiten kann man den Kurven $n\,\varepsilon(v)$ bzw. —, wenn die Schraubenkraft wirksam ist — den Kurven $\dfrac{S(v)}{G} - n\cdot\varepsilon(v)$ entnehmen. Zu der Endgeschwindigkeit v_e gehört nach Gl. (6) die Ordinate $S/G - n\,\varepsilon = \sin\varphi_e$, wo $\varphi_e = \text{arc cos}\,n$ ist.

Die Größen A, B und B' finden wir für die obigen Werte von n in Zahlentafel VII, VIII und IX, aus denen insgesamt eindeutig hervorgeht, daß diese Größen für $n < 0$ sich nur in dem Intervall $\Delta\varphi$ unterscheiden.

Für den Sonderfall $n = 0$ hat Formel (26) exakte Gültigkeit[5]).

VII. Der gerade Gleit- und Steigflug ($n = \cos\varphi$).

Das Integrationsproblem vereinfacht sich in diesem Falle, da nur die Gl. (6) integriert zu werden braucht. Ein Integral ist durch Trennung der Variablen sofort angebbar. Behandeln wir jedoch die Gleichung als Differentialgleichung nach der bisherigen Methode, dann läßt sich auch noch in Anlehnung an eine Arbeit von F. N. Scheubel [15] die Veränderlichkeit der Luftdichte berücksichtigen. In der erwähnten Arbeit hat der Verfasser folgendes Näherungsgesetz für die Änderung des Luftdruckes in Abhängigkeit von der Höhe h angegeben:

$$p(h) = p_0 c_1 \ln(c_2 + c_3\cdot h) \quad (29)$$

mit den Werten

$$c_1 = -0{,}85219,$$
$$c_2 = 0{,}30849,$$
$$c_3 = 0{,}451066\ 10^{-4}\ \text{m}^{-1}.$$

Aus Bild 13, wo die Fehler der Näherung gegen die Normalatmosphäre aufgetragen sind, ersieht man die gute Brauchbarkeit dieses Gesetzes in den praktischen Höhen.

Für den Schraubenzug S machen wir hier den Ansatz

$$S/G = s_0 - \bar{\sigma}\,F/G\cdot\gamma\cdot v^2/2g \quad (30)$$

und erhalten, wenn wir noch die Höhe h — positiv nach oben gerichtet — als unabhängige Veränderliche einführen, die Gleichung

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2g}\right)}{dh} = A_1\gamma\,\frac{v^2}{2g} - A_2$$

mit

$$A_1 = -\frac{(b+\bar{\sigma})\,F/G}{\sin\varphi} \quad\text{und}\quad A_2 = \frac{n\,a - s_0}{\sin\varphi} + 1,$$

[5]) Siehe auch W. Müller [11].

Digitized by Google

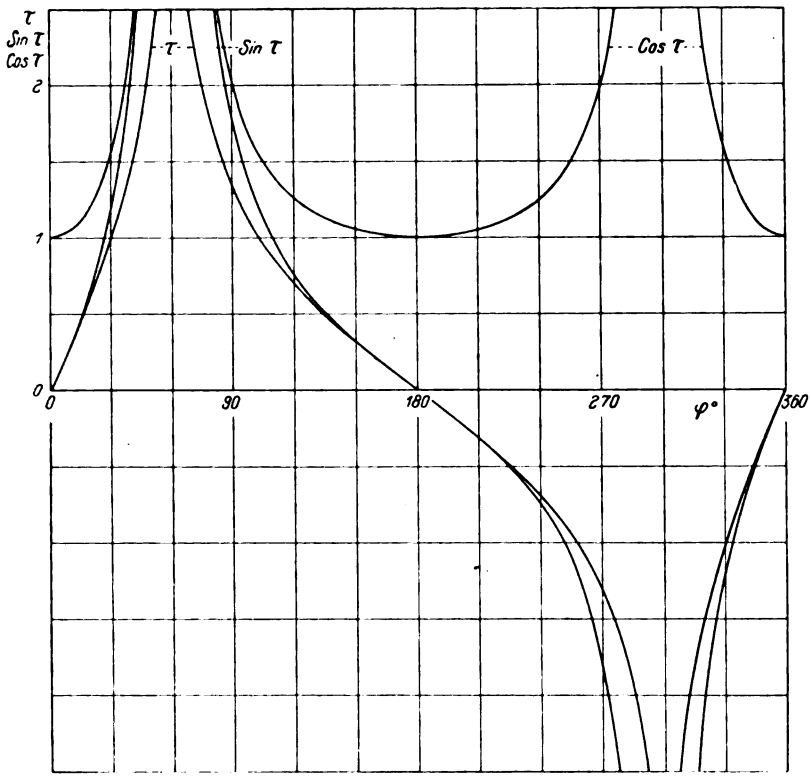


Bild 11. Verlauf der Substitution $\tau = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\frac{n\cos\varphi - 1}{n - \cos\varphi}$ bzw. $\tau = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\frac{n\cos\varphi - 1}{\cos\varphi - n}$ und der Funktionen $\mathfrak{Sin}\,\tau$ und $\mathfrak{Cof}\,\tau$ für $n = \cos 45°$.

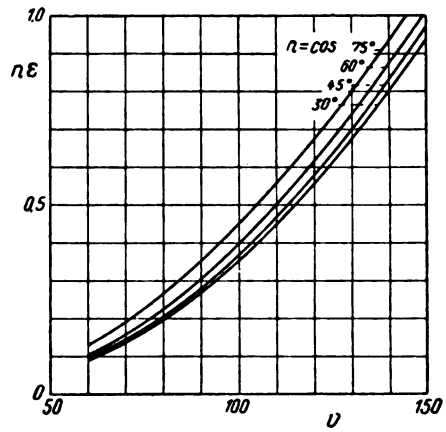


Bild 12. Darstellung der Funktion $n\,\varepsilon\,(v)$ für verschiedene Werte von n.
(Zugrunde gelegt wurde die Flugzeugpolare der Bilder 3 mit $G/F = 80$ kg/m².

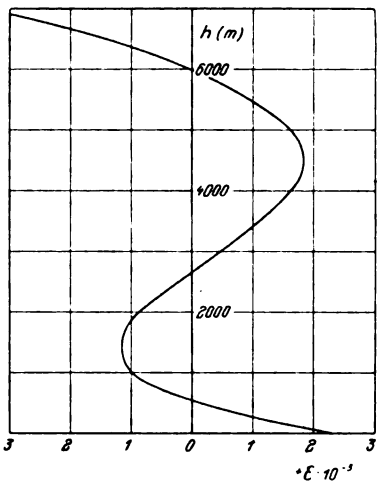


Bild 13.*)
Fehler ε der Luftdruckverteilung der Näherung gegenüber der Luftdruckverteilung der internationalen Normalatmosphäre.
$\varepsilon = \frac{p}{p_0}\Big|_{\text{Näherung}} - \frac{p}{p_0}\Big|_{\text{Intern. Normalatm.}}$

deren Lösung nach Gl. (14), wenn wir für x_0, x_1 die Grenzen $h = h_A$ (Anfangshöhe) und $h = \infty$ setzen, lautet:

$$\frac{v^2}{2g} = e^{-A_1\int_{\infty}^{h}\gamma\,dh}\left(C + A_2\int_{h}^{h_A} e^{A_1\int_{\infty}^{h}\gamma\,dh}\cdot dh\right)$$

oder

$$\frac{v^2}{2g} = C\cdot e^{-A_1 p(h)} + A_2 e^{-A_1 p(h)}\int_{h}^{h_A} e^{A_1 p(h)}\,dh$$

mit

$$\int_{\infty}^{h}\gamma\,dh = p\,(h).$$

Soll für $h = h_A$ die Geschwindigkeit $v = v_0$ sein, und führen wir die Integration mit Hilfe des Gesetzes (29) weiter aus, dann erhalten wir

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{c+h}{c+h_A}\right)^{\bar n} + A_2\frac{c+h}{\bar n+1}\left[1 - \left(\frac{c+h}{c+h_A}\right)^{\bar n - 1}\right] \quad (31)$$

wo $c = c_2/c_3 = 6839{,}2$ m und $\bar n = -A_1 p_0 c_1$ ist.

Mit der Abkürzung $C' = 1 - \frac{\bar n - 1}{A_2\,(c+h_A)}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$ wird Formel (31) einfacher

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{A_2\,(c+h)}{\bar n - 1}\left[1 - C'\left(\frac{c+h}{c+h_A}\right)^{\bar n - 1}\right] \quad . \quad (32)$$

Die maximale Geschwindigkeit liefert die Formel

$$v_{max} = C''\sqrt{2g\,(c+h_A)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

mit

$$C'' = \sqrt{A_2\,C'\,(\bar n\,C')^{\frac{\bar n}{1-\bar n}}},$$

die für eine anfänglich beschleunigte Bewegung in der Gleichgewichtshöhe h_G erreicht wird, in der

$$\frac{c+h_G}{c+h_A} = (\bar n\,C')^{\frac{1}{1-\bar n}}$$

ist. Im weiteren Verlauf wird die Geschwindigkeit dann wieder abnehmen. Dabei kann für den Steigflug nur bei einer gewissen Größe der Zugkraft eine beschleunigte Bewegung eintreten. Eine Abnahme der Geschwindigkeit im Steigflug wird im Zusammenhang mit der vorliegenden Polare begrenzt sein durch Forderungen der Stabilität.

VIII. Allgemeinere Längsbewegungen.

Die Voraussetzung einer konstanten Auftriebsbeschleunigung wird bei gewissen Flugbewegungen (z. B. Looping) nicht aufrechterhalten werden können, da diese an die Polare gebunden ist. Wir werden also, sobald wir bei der Durchrechnung einer Bewegung in den Bereich großer Anstellwinkel kommen, und eine Tendenz zu weiterem Anwachsen des Anstellwinkels vorhanden ist, mit veränderlichen Werten von n weiterrechnen müssen. Oft gibt auch eine Verbindung der beiden Annahmen n = konst. und $n = n\,(\varphi)$ bei der Untersuchung von Flugvorgängen vertiefte Aufschlüsse. Wenn man die Intervalle $\Delta\varphi$ klein nimmt, wird die Rechnung mit mittleren Werten von n in den meisten Fällen genau genug sein.

Auch wird die Vorgabe eines bestimmten Anstellwinkelverlaufes während einer Bewegung manchmal von großem Interesse sein. So kann man z. B. die Frage nach der größtmöglich erreichbaren Höhe einer Loopingbahn, wenn mit der horizontal gerichteten Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Auftriebsbeiwert c_{a0} im Gipfel der Bewegung etwa $c_a = c_{a\,max}$ vorgeschrieben wird, näherungsweise dadurch beantworten, daß man einen Funktionsverlauf von c_a im Bereich $c_{a0} \leqq c_a \leqq c_{a\,max}$ variiert. Wir werden dabei einer exakten Lösung der Fragestellung, die eigentlich ein Varia-

*) Entnommen der Arbeit von F. N. Scheubel [15].

Digitized by Google

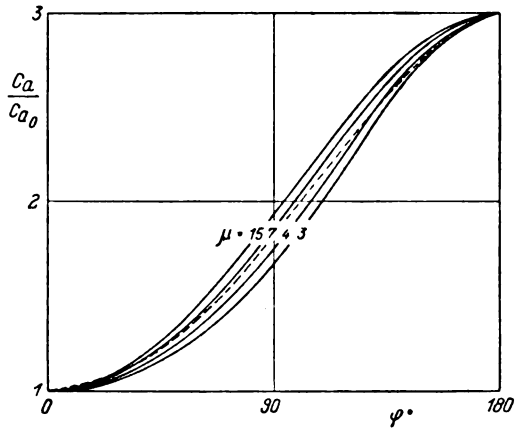


Bild 14. Zur Frage nach der größtmöglich erreichbaren Höhe einer Loopingbahn, s. Abschnitt VIII.

tionsproblem darstellt, um so näher kommen, je mehr der Funktionsverlauf demjenigen einer genauen Lösung sich angleichen wird. Die Methoden n = konst. und $k_a \cdot v$ = konst.[6]) bieten eine Möglichkeit, sich einen Anhalt über einen plausiblen Funktionsverlauf zu verschaffen. In Bild 14 sehen wir z. B. mehrere Kurven

$$\frac{c_a}{c_{a_0}} = \frac{2(\mu - 1/2) - (\mu - 2)\cos\varphi}{\mu + \cos\varphi}$$

für verschiedene Werte von μ dargestellt.

Die gestrichelte Linie, die einem »idealen« Looping mit $k_a \cdot v = 0{,}523\ s^{-1}$ entspricht[7]), diente für die Herstellung einer mittels des Parameters μ variierbaren Gesetzmäßigkeit als Grundlage. Es wird auf diese Weise möglich sein, eine Lösung des Problems in engere Grenzen einzuschließen.

Der Rechnungsgang bei der Vorgabe von $c_a = c_a(\varphi)$ ist so, daß man in dem ersten Intervall mit einem zu c_{a0} bzw. k_{a0} und v_0 gehörenden n_0 eine angenäherte Geschwindigkeit des Intervallendes rechnet, und dann diese erste Näherung mit einem mittleren Wert n verbessert. Meistens wird man mit wenigen Korrekturen zum Ziele kommen, und die Näherung wird um so günstiger sein, je besser die Voraussetzung n = konst. intervallweise zutrifft.

IX. Berücksichtigung des gegen die Bewegungsrichtung geneigten Schraubenzuges.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen haben wir angenommen, daß der Schraubenzug mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt. Aus Bild 1 ersehen wir jedoch, daß nur im Bereich mittlerer Anstellwinkel diese Annahme als zutreffend gelten, und daß für große positive und insbesondere negative Anstellwinkel eine Vernachlässigung der wirklichen Verhältnisse für genaue Untersuchungen von Bedeutung sein kann. Eine exakte Berücksichtigung wird indessen auch nicht möglich sein, und wir werden uns deshalb mit einer guten Näherung begnügen. Wir setzen $\cos\beta \sim 1$, so daß nur noch die Komponente der Schraubenkraft senkrecht zur Bahn in die zweite Kraftgleichung (2) eintritt. Wenn wir nun intervallweise mit mittleren Werten von $S/G \cdot \sin\beta$ rechnen wollen, dann werden die Lösungen der vorherigen Abschnitte nur dadurch geändert, daß wir in ihnen — außer in dem Ausdruck A_1 — den Wert n durch $n^* = n + S/G \cdot \sin\beta$ zu ersetzen haben.

X. Beispiel (Abfangen aus dem Sturzflug).

Wir haben im folgenden eingehend das Wiederaufrichten des Flugzeuges aus dem Sturzflug untersucht. Unter Zugrundelegung der Polare, Bild 3, werden die Bewegungsfunktionen und die Flugbahnen für die drei Flächenbelastungen 50, 80 und 110 kg/cm², und die Lastvielfachen n = 7,6, ..., 2 berechnet. Wir sind dadurch in der Lage, den Einfluß dieser Größen auf die verschiedenen Funktionen zu vergleichen. Die Berechnung der Geschwindigkeit erfolgte

[6]) Siehe W. Müller [12].
[7]) Entnommen W. Müller [12], Bild 8. (Die Bahnneigungswinkel wurden nach Bild 9 auf die Zeiten umgerechnet.)

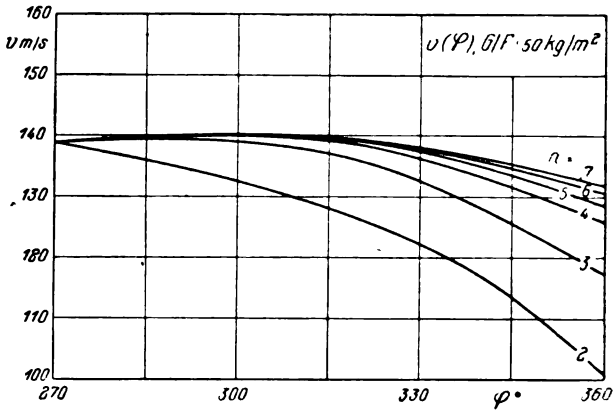


Bild 15.

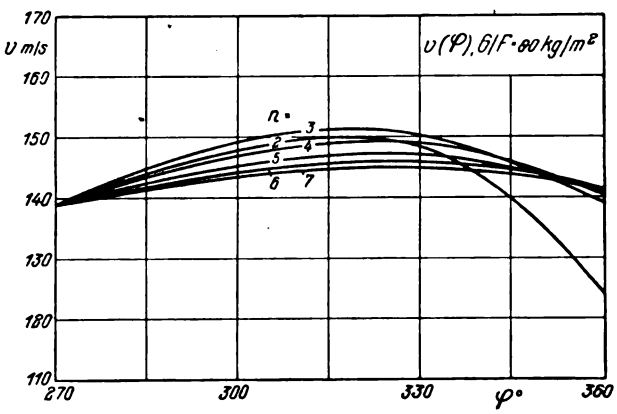


Bild 16.

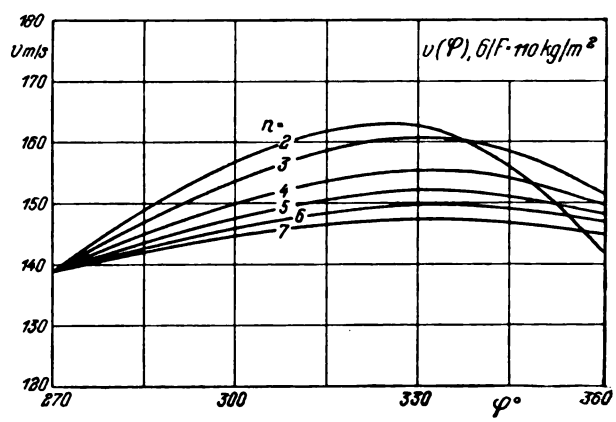


Bild 17.

Bild 15 bis 17. Geschwindigkeiten während des Abfangens aus dem Sturzflug.

nach Formel (16a) für das Intervall $\Delta\varphi = 30^0$. Es wird dabei angenommen, daß das Flugzeug durch eine Steuerbewegung jeweils in den Anfangszustand versetzt wird. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 500 km/h ist so gewählt, daß mit der Luftdichte $\varrho = 0{,}115$ die Höhe h = 1000 m für die Flächenbelastung G/F = 50 kg/m² die ungefähre Gleichgewichtshöhe ist. In Bild 15, 16 und 17 sind die Geschwindigkeiten über dem Bahnneigungswinkel dargestellt. Bild 15 zeigt den erheblichen Einfluß des Widerstandes auf die Geschwindigkeiten. Während für die höheren Werte von n die Geschwindigkeit noch etwas zunimmt, fällt sie für n = 2 sofort stark ab, da die c_w-Werte für n = 2 größer sind als für die anderen Lastvielfachen.

Während die Endgeschwindigkeiten für G/F = 50 mit dem Lastvielfachen abnehmen, zeigt Bild 16 für G/F = 80 eine fast gänzliche Übereinstimmung der Endgeschwindigkeiten für die höheren Werte von n, und Bild 17 bei G/F = 110 kg/cm² für alle n, außer n = 2 ein Anwachsen der Geschwindigkeit in der Horizontallage. Eine Übersicht

Digitized by Google

Bild 18 bis 20. Anstellwinkel beim Abfangen aus dem Sturzflug.

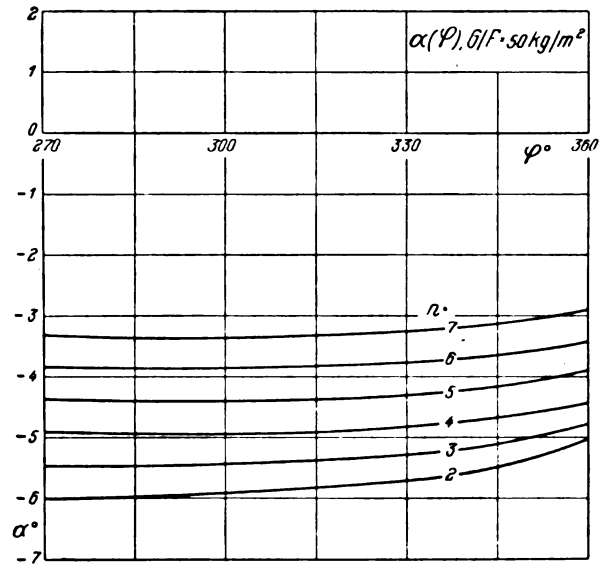


Bild 18.

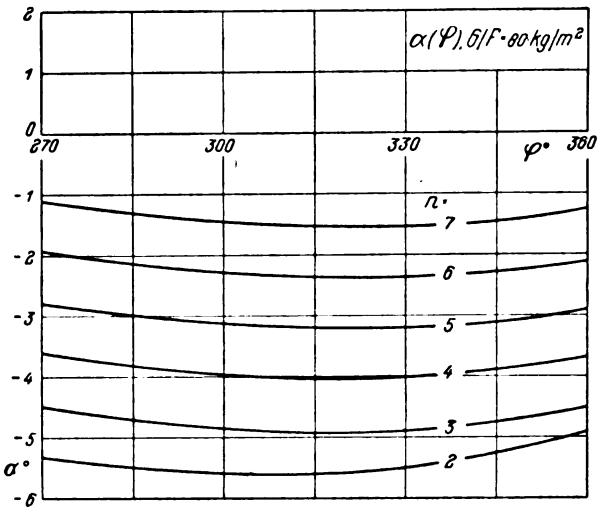


Bild 19.

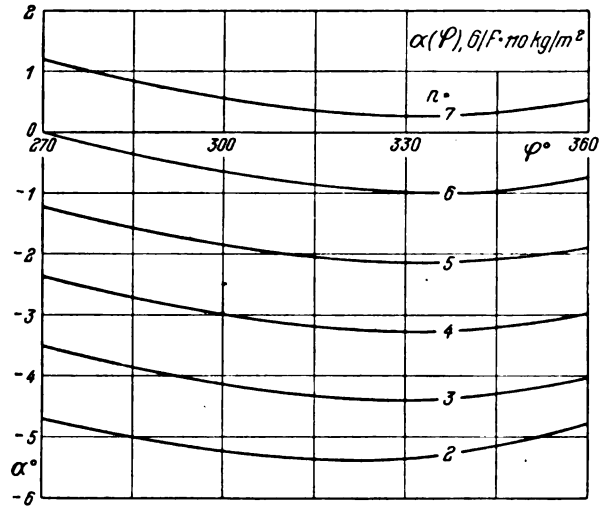


Bild 20.

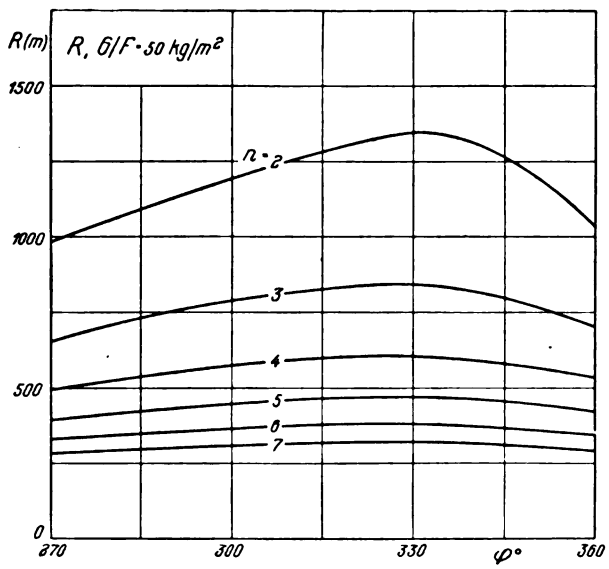


Bild 21.

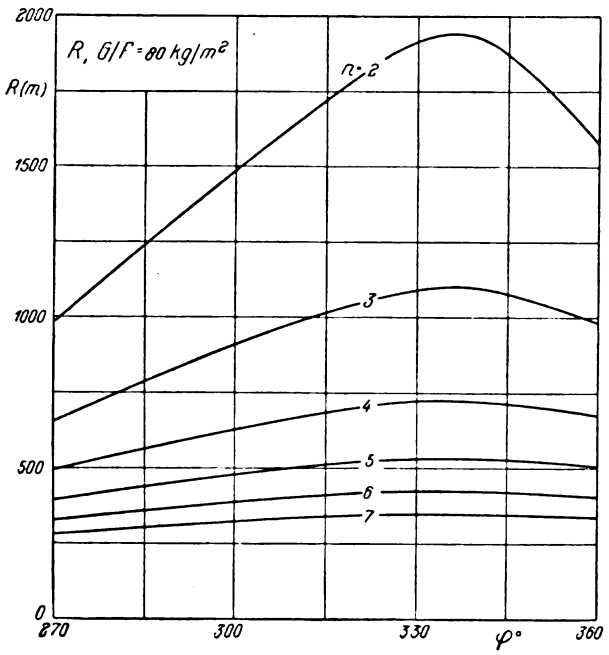


Bild 22.

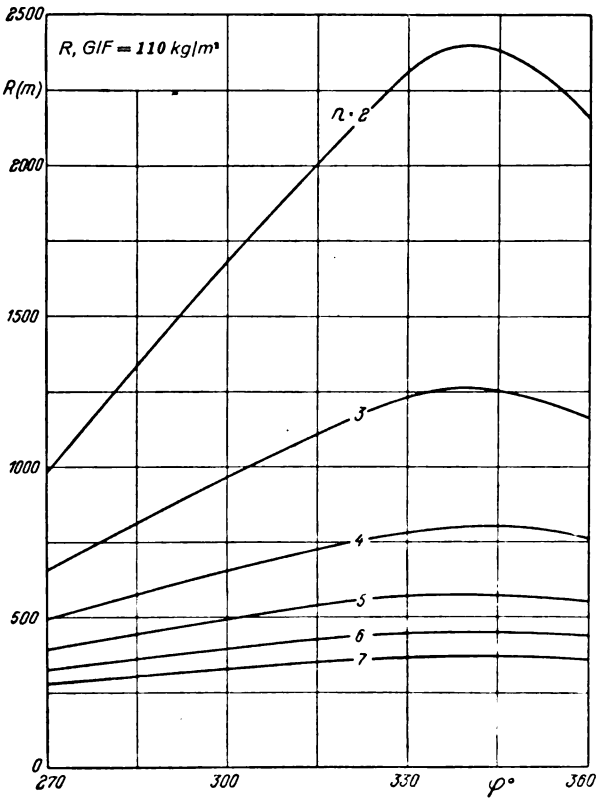


Bild 23.

Bild 21 bis 23. Krümmungsradien der Flugbahnen beim Abfangen aus dem Sturzflug.

Digitized by Google

über den Verlauf der Anstellwinkel bieten Bild 18, 19 und 20. Mittels der berechneten Geschwindigkeiten können wir nun aus Gl. (7) die Krümmungsradien der Flugbahnen, Bild 21, 22 und 23, ausrechnen, und damit diese konstruieren, Bild 24, 25 und 26. Wie wir aus den Bildern ersehen, ändern für hohe Lastvielfache die Krümmungsradien sich nicht bedeutend, d. h. die entsprechenden Flugbahnen unterscheiden sich nicht viel von Kreisbögen mit dem mittleren Krümmungsradius. In Bild 27 ist für $G/F = 50$ der Zeitverlauf der Bewegungen dargestellt, der durch graphische Integration der Gl. (6) gewonnen wurde. In Bild 28, 29 und 30 haben wir nun die »Abfang«-Zeiten T, -Höhen H und -Weiten W als Funktion von n für alle Flächenbelastungen aufgetragen. Sie vermitteln uns ein anschauliches Bild dieser Funktionen, die von praktischer Bedeutung sind.

Schließlich liefert uns Bild 31 nach Gl. (7) noch den Verlauf der Zentrifugalbeschleunigungen.

Wir haben die Bewegung unter der Voraussetzung konstanter Luftdichte untersucht. Jedoch läßt sich die Veränderlichkeit dieser Größe in der Weise einbeziehen, daß man mit ihrem mittleren Wert über die »Abfang«-Höhe rechnet. Diese schätzt man näherungsweise so ab, daß man mit den anfänglichen Konstanten, die für die hier untersuchten Bewegungen im allgemeinen auch noch für den Endzustand gelten, die Endgeschwindigkeit errechnet und das Mittel der Krümmungsradien für den Anfangs- und Endzustand gleich der ungefähren »Abfang«-Höhe setzt.

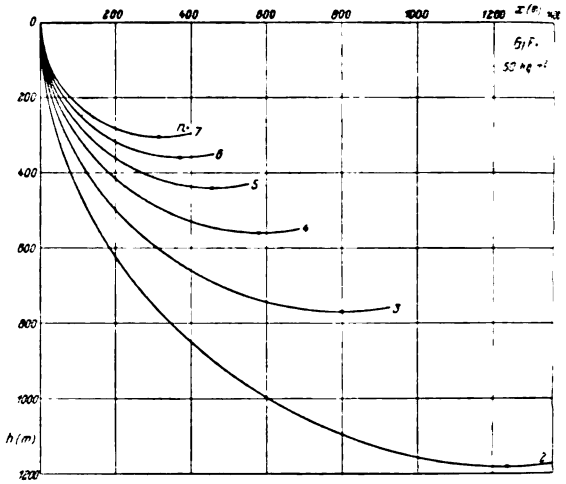
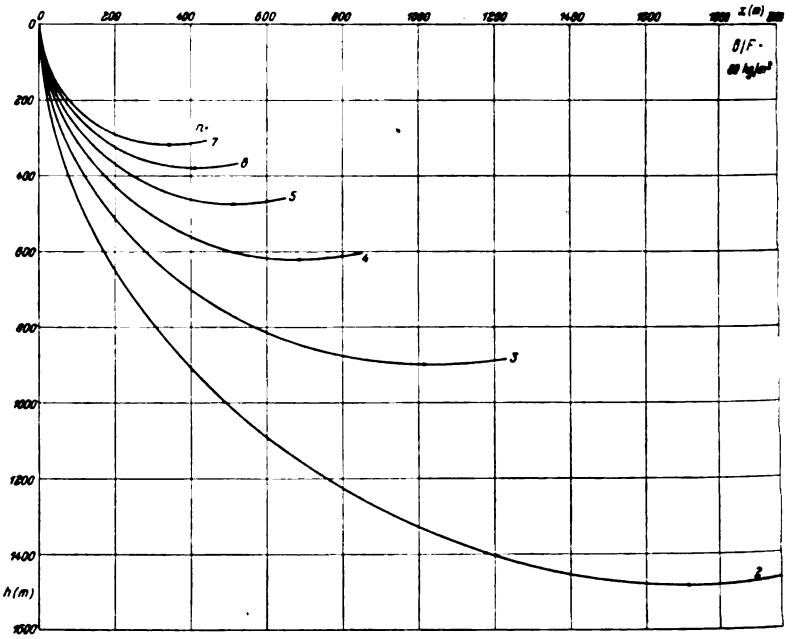


Bild 24.



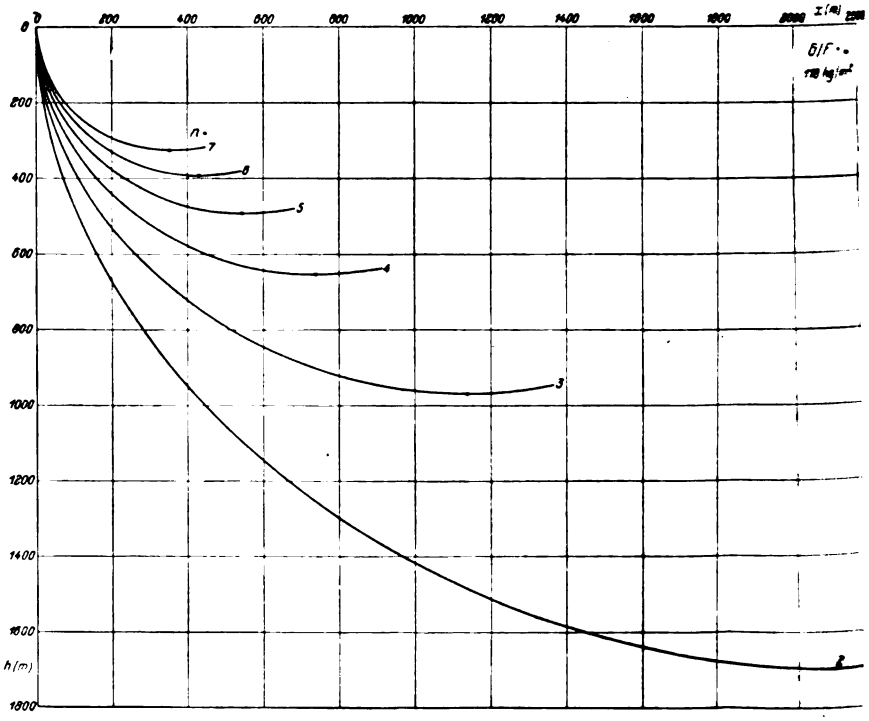


Bild 24 bis 26. Flugbahnen beim Abfangen aus dem Sturzflug.

Bild 25 und 26.

XI. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen.

Es werden für eine Bewegungsklasse, die periodische wie asymptotische Bewegungen umfaßt, mit einer höheren Annäherung des Widerstandsgesetzes Lösungen der Kräftegleichungen entwickelt, die auch allgemeinere Schwerpunktsbewegungen einer Berechnung zugänglich machen. Die Rechnungen sind mit Hilfe von Zahlentafeln bequem durchzuführen. In einem Beispiel wird der Gang einer systematischen Untersuchung der Abfangbewegung aus dem Sturzflug dargelegt.

Nach Lösung der Kräftegleichungen bietet eine Berechnung des Steuerungsverlaufes aus der Momentengleichung (3) keine Schwierigkeiten mehr.

Es wird beabsichtigt, in einer ergänzenden Untersuchung die Steuerbarkeit für einige der berechneten Flugbewegungen nachzuprüfen.

Digitized by Google

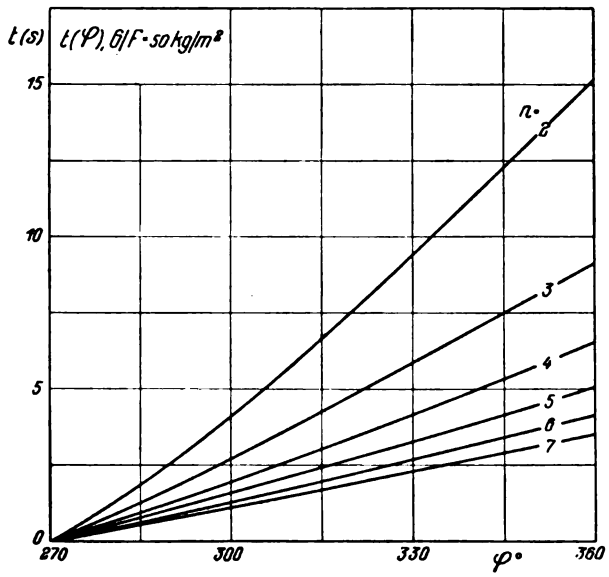


Bild 27. Teilverlauf während des Abfangens aus dem Sturzflug.

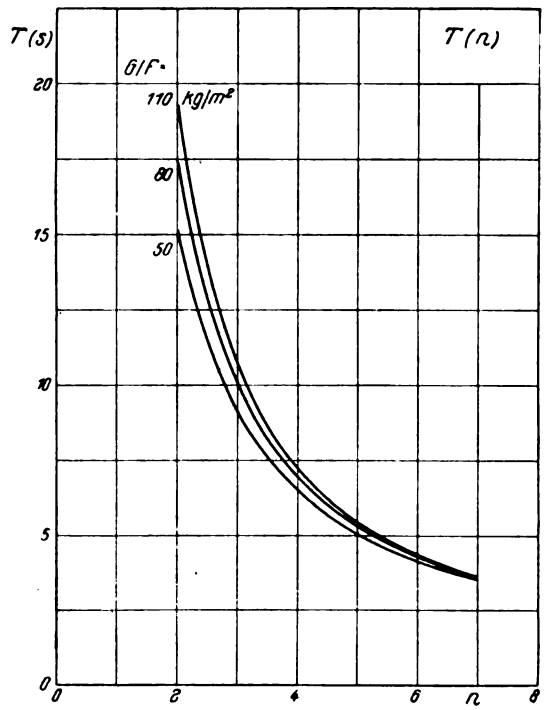
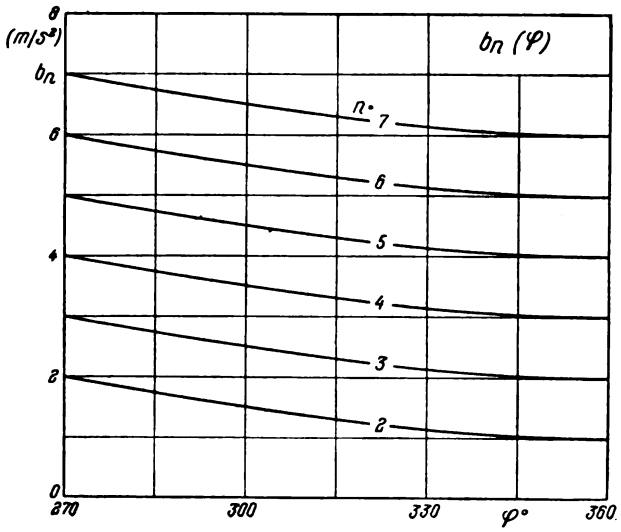


Bild 28. Diagramm der »Abfang«-Zeiten.



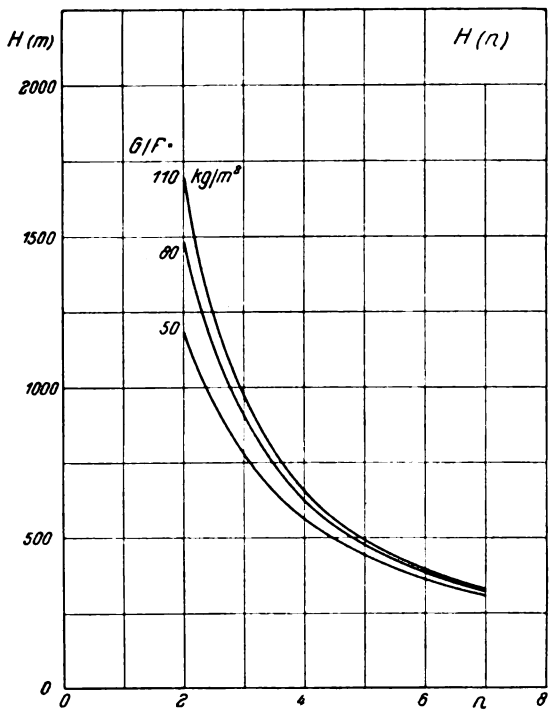


Bild 29. Diagramm der »Abfang«-Höhen.

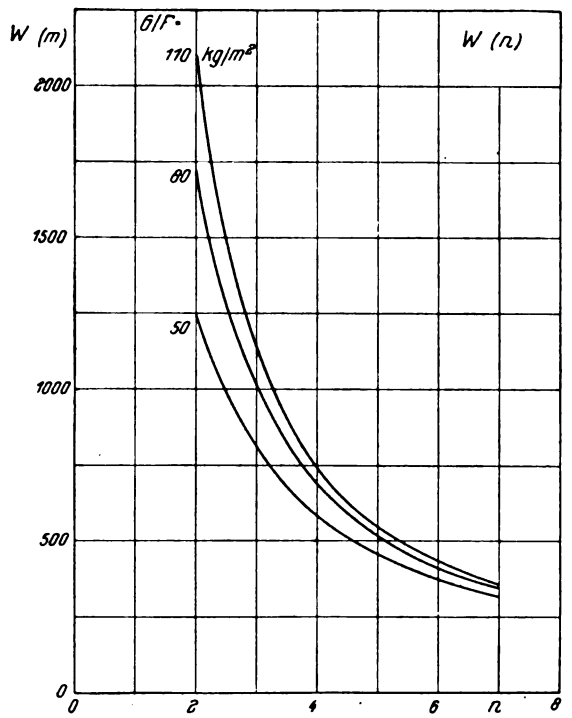


Bild 30. Diagramm der »Abfang«-Weiten.

Bild 31 (links). Zentrifugalbeschleunigungen während des Abfangens aus dem Sturzflug.

Digitized by Google

XII. Tafelwerk.

Zahlentafel I.

$(n>0)$ $\varphi°$	$(n<0)$[1] $\varphi°$	τ | n = 1,5	2	3	4	5	6	7	$(n>0)$ $\varphi°$	$(n<0)$[2] $\varphi°$	τ | n = 1,5	2	3	4	5	6	7
0	180	0	0	0	0	0	0	0	180	360	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416
15	165	0,5726	0,4484	0,3681	0,3367	0,3197	0,3090	0,3017	195	345	3,2591	3,2933	3,3272	3,3449	3,3558	3,3632	3,3686
30	150	1,0795	0,8690	0,7244	0,6660	0,6342	0,6140	0,6001	210	330	3,3801	3,4486	3,5161	3,5509	3,5724	3,5870	3,5976
45	135	1,4942	1,2447	1,0598	0,9821	0,9390	0,9114	0,8923	225	315	3,5079	3,6111	3,7115	3,7625	3,7939	3,8151	3,8304
60	120	1,8235	1,5708	1,3694	1,2810	1,2310	1,1986	1,1760	240	300	3,6470	3,7851	3,9168	3,9827	4,0226	4,0495	4,0689
75	105	2,0862	1,8515	1,6524	1,5614	1,5087	1,4743	1,4501	255	285	3,8027	3,9757	4,1359	4,2141	4,2610	4,2923	4,3146
90	90	2,3005	2,0944	1,9106	1,8235	1,7722	1,7382	1,7142	270	270	3,9827	4,1888	4,3726	4,4597	4,5110	4,5450	4,5690
105	75	2,4805	2,3075	2,1473	2,0691	2,0222	1,9909	1,9686	285	255	4,1970	4,4317	4,6308	4,7218	4,7745	4,8089	4,8331
120	60	2,6362	2,4981	2,3664	2,3005	2,2606	2,2337	2,2143	300	240	4,4597	4,7124	4,9138	5,0022	5,0522	5,0846	5,1072
135	45	2,7753	2,6721	2,5717	2,5207	2,4893	2,4681	2,4528	315	225	4,7890	5,0385	5,2234	5,3011	5,3442	5,3718	5,3909
150	30	2,9031	2,8346	2,7671	2,7323	2,7108	2,6962	2,6856	330	210	5,2037	5,4142	5,5588	5,6172	5,6490	5,6692	5,6831
165	15	3,0241	2,9899	2,9560	2,9383	2,9274	2,9200	2,9146	345	195	5,7106	5,8348	5,9151	5,9465	5,9635	5,9742	5,9815
180	0	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	360	180	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832

[1]) Für $n<0$ sind die Werte um π zu erhöhen. [2]) Für $n<0$ sind die Werte um π zu vermindern.

Zahlentafel II.

$(n>0)$ $\varphi°$	$(n<0)$[1] $\varphi°$	$\cos\tau$ | n = 1,5	2	3	4	5	6	7	$\sin\tau$[2]) n = 1,5	2	3	4	5	6	7	$(n<0)$[1]) $\varphi°$	$(n>0)$ $\varphi°$
0	180	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	180	360
15	165	0,8405	0,9012	0,9330	0,9439	0,9493	0,9526	0,9548	0,5418	0,4335	0,3599	0,3304	0,3143	0,3042	0,2972	195	345
30	150	0,4717	0,6456	0,7489	0,7863	0,8056	0,8173	0,8253	0,8818	0,7637	0,6627	0,6179	0,5925	0,5762	0,5647	210	330
45	135	0,0765	0,3204	0,4890	0,5553	0,5906	0,6126	0,6277	0,9971	0,9473	0,8723	0,8317	0,8069	0,7904	0,7785	225	315
60	120	−0,25	0	0,2	0,2857	0,3333	0,3636	0,3846	0,9682	1,0	0,9798	0,9583	0,9428	0,9315	0,9231	240	300
75	105	−0,4929	−0,2770	−0,0816	0,0094	0,0620	0,0963	0,1204	0,8701	0,9609	0,9967	1,0	0,9980	0,9954	0,9927	255	285
90	90	−0,6667	−0,5	−0,3333	−0,25	−0,2	−0,1667	−0,1429	0,7454	0,8661	0,9428	0,9683	0,9798	0,9860	0,9897	270	270
105	75	−0,7893	−0,6719	−0,5451	−0,4779	−0,4362	−0,4079	−0,3874	0,6140	0,7407	0,8384	0,8784	0,8998	0,9130	0,9219	285	255
120	60	−0,8750	−0,8	−0,7143	−0,6667	−0,6364	−0,6154	−0,6	0,4841	0,6	0,6999	0,7454	0,7714	0,7882	0,8	300	240
135	45	−0,9336	−0,8918	−0,8420	−0,8133	−0,7947	−0,7817	−0,7720	0,3582	0,4524	0,5395	0,5818	0,6070	0,6237	0,6356	315	225
150	30	−0,9717	−0,9533	−0,9307	−0,9174	−0,9086	−0,9024	−0,8978	0,2363	0,3022	0,3658	0,3980	0,4176	0,4308	0,4404	330	210
165	15	−0,9931	−0,9885	−0,9828	−0,9794	−0,9772	−0,9755	−0,9743	0,1173	0,1512	0,1846	0,2019	0,2125	0,2198	0,2251	345	195
180	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	360	180

[1]) Für $n<0$ gelten alle Tafelwerte mit umgekehrtem Vorzeichen. [2]) Für $180° < \varphi < 360°$ gelten die Werte mit negativem Vorzeichen.

Zahlentafel III.

$(n>0)$ $\varphi°$	$(n<0)$ $\varphi°$	$\cos 2\tau$ | n = 1,5	2	3	4	5	6	7	$\sin 2\tau$[1]) n = 1,5	2	3	4	5	6	7	$(n<0)$ $\varphi°$	$(n>0)$ $\varphi°$
0	180	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	180	360
15	165	0,4129	0,6241	0,7409	0,7817	0,8024	0,8150	0,8234	0,9108	0,7814	0,6716	0,6237	0,5968	0,5795	0,5675	195	345
30	150	−0,5550	−0,1665	0,1216	0,2364	0,2978	0,3361	0,3621	0,8318	0,9861	0,9926	0,9717	0,9546	0,9418	0,9321	210	330
45	135	−0,9883	−0,7947	−0,5217	−0,3834	−0,3023	−0,2493	−0,2121	0,1526	0,6070	0,8531	0,9236	0,9532	0,9684	0,9772	225	315
60	120	−0,8750	−1	−0,92	−0,8367	−0,7778	−0,7355	−0,7041	−0,4841	0	0,3919	0,5476	0,6285	0,6775	0,7101	240	300
75	105	−0,5141	−0,8465	−0,9867	−0,9998	−0,9923	−0,9815	−0,9710	−0,8577	−0,5324	−0,1626	0,0189	−0,1238	−0,1917	−0,2391	255	285
90	90	−0,1111	−0,5	−0,7778	−0,8750	−0,92	−0,9444	−0,9592	−0,9938	−0,8661	−0,6285	−0,4841	−0,3919	−0,3287	−0,2828	270	270
105	75	0,2458	−0,0972	−0,4057	−0,5432	−0,6194	−0,6673	−0,6999	−0,9693	−0,9953	−0,9140	−0,8396	−0,7851	−0,7448	−0,7142	285	255
120	60	0,5313	0,28	0,0204	−0,1111	−0,1901	−0,2426	−0,28	−0,8472	−0,96	−0,9998	−0,9938	−0,9818	−0,9701	−0,96	300	240
135	45	0,7434	0,5906	0,4179	0,3230	0,2632	0,2220	0,1919	−0,6689	−0,8070	−0,9085	−0,9464	−0,9648	−0,9750	−0,9814	315	225
150	30	0,8884	0,8174	0,7324	0,6832	0,6513	0,6288	0,6121	−0,4592	−0,5761	−0,6809	−0,7302	−0,7588	−0,7776	−0,7908	330	210
165	15	0,9725	0,9543	0,9319	0,9185	0,9096	0,9034	0,8987	−0,2331	−0,2988	−0,3628	−0,3954	−0,4154	−0,4289	−0,4387	345	195
180	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	360	180

[1]) Für $180° < \varphi < 360°$ gelten die Werte mit umgekehrtem Vorzeichen.

Zahlentafel IV.

$(n>0)$ $\varphi°$	$(n<0)$ $\varphi°$	τ[1]) n = $\cos 30°$	$\cos 45°$	$\cos 60°$	$\cos 75°$	$\cos 90°$	$(n<0)$ $\varphi°$	$(n>0)$ $\varphi°$
0	180	0	0	0	0	0	180	360
15	165	1,0756	0,6585	0,4642	0,3466	0,2648	195	345
30	150	∞	1,5399	1,0051	0,7291	0,5493	210	330
45	135	1,5399	∞	1,8047	1,2078	0,8814	225	315
60	120	1,0051	1,8047	∞	1,9570	1,3170	240	300
75	105	0,7291	1,2078	1,9570	∞	2,0276	255	285
90	90	0,5493	0,8814	1,3170	2,0276	∞	270	270
105	75	0,4172	0,6585	0,9520	1,3516	2,0276	285	255
120	60	0,3119	0,4877	0,6931	0,9520	1,3170	300	240
135	45	0,2229	0,3466	0,4877	0,6585	0,8814	315	225
150	30	0,1438	0,2229	0,3119	0,4172	0,5493	330	210
165	15	0,0706	0,1092	0,1523	0,2027	0,2648	345	195
180	0	0	0	0	0	0	360	180

[1]) Für $180 < \varphi < 360$ gelten die Werte mit negativem Vorzeichen.

Digitized by Google

Zahlentafel V.

Cos τ							Sin τ[1]						
$(n>0)$ φ°	$(n<0)$ φ°	$\lvert n\rvert =$ cos 30°	cos 45°	cos 60°	cos 75°	cos 90°	$\lvert n\rvert =$ cos 30°	cos 45°	cos 60°	cos 75°	cos 90°	$(n<0)$ φ°	$(n>0)$ φ°
0	180	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	180	360
15	165	1,6365	1,2247	1,1097	1,0607	1,0353	1,2954	0,7071	0,4811	0,3536	0,2679	195	345
30	150	∞	2,4392	1,5490	1,2777	1,1547	∞	2,2248	1,1830	0,7954	0,5774	210	330
45	135	2,4392	∞	3,1213	1,8225	1,4142	2,2248	∞	2,9568	1,5236	1,0	225	315
60	120	1,5490	3,1213	∞	3,6097	2,0	1,1830	2,9568	∞	3,4684	1,7321	240	300
75	105	1,2777	1,8225	3,6097	∞	3,8637	0,7954	1,5236	3,4684	∞	3,7321	255	285
90	90	1,1547	1,4142	2,0	3,8637	∞	0,5774	1,0	1,7321	3,7321	∞	270	270
105	75	1,0883	1,2247	1,4884	2,0611	3,8637	0,4294	0,7071	1,1024	1,8024	3,7321	285	255
120	60	1,0490	1,1213	1,25	1,4884	2,0	0,3170	0,5073	0,75	1,1024	1,7321	300	240
135	45	1,0249	1,0607	1,1213	1,2247	1,4142	0,2247	0,3536	0,5073	0,7071	1,0	315	225
150	30	1,0104	1,0249	1,0490	1,0883	1,1547	0,1443	0,2247	0,3170	0,4294	0,5774	330	210
165	15	1,0025	1,0060	1,0116	1,0206	1,0353	0,0706	0,1094	0,1529	0,2041	0,2679	345	195
180	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	360	180

[1]) Für $180^\circ < \varphi < 360^\circ$ gelten die Werte mit negativem Vorzeichen.

Zahlentafel VI.

Cos 2 τ							Sin 2 τ[1]						
$(n>0)$ φ°	$(n<0)$ φ°	$n =$ cos 30°	cos 45°	cos 60°	cos 75°	cos 90°	$n =$ cos 30°	cos 45°	cos 60°	cos 75°	cos 90°	$(n<0)$ φ°	$(n>0)$ φ°
0	180	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	180	360
15	165	4,3560	2,0	1,4629	1,25	1,1436	4,2397	1,7321	1,0677	0,75	0,5548	195	345
30	150	∞	10,8991	3,7990	2,2653	1,6667	∞	10,8531	3,6651	2,0326	1,3333	210	330
45	135	10,8991	∞	18,4853	5,6427	3,0	10,8531	∞	18,4582	5,5534	2,8284	225	315
60	120	3,7990	18,4853	∞	25,0599	7,0	3,6651	18,4582	∞	25,0399	6,9282	240	300
75	115	2,2653	5,6427	25,0599	∞	28,8564	2,0326	5,5534	25,0399	∞	28,8390	255	285
90	90	1,6667	3,0	7,0	28,8564	∞	1,3333	2,8284	6,9282	28,8390	∞	270	270
105	75	1,3687	2,0	3,4306	7,4965	28,8564	0,9345	1,7321	3,2816	7,4301	28,8390	285	255
120	60	1,2010	1,5147	2,1250	3,4306	7,0	0,6651	1,1377	1,8750	3,2816	6,9292	300	240
135	45	1,1010	1,25	1,5147	2,0	3,0	0,4607	0,75	1,1377	1,7321	2,8284	315	225
150	30	1,0417	1,1010	1,2010	1,3687	1,6667	0,2917	0,4607	0,6651	0,9345	1,3333	330	210
165	15	1,0100	1,0240	1,0523	1,0834	1,1436	0,1416	0,2201	0,3094	0,4167	0,5548	345	195
180	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	360	180

[1]) Für $180^\circ < \varphi < 360^\circ$ gelten die Werte mit negativem Vorzeichen.

Zahlentafel VII.

A

$(n>0)$ $\Delta\varphi^\circ$	$(n<0)$ $\Delta\varphi^\circ$	$\lvert n\rvert =$ cos 90°	cos 75°	cos 60°	cos 45°	cos 30°	1	1.5	2	3	4	5	6	7
		$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$								
0—15	180—165	0,9330	0,9102	0,8683	0,7809	0,5560	—	0,8765	0,9352	0,9668	0,9777	0,9832	0,9865	0,9887
15—30	165—150	0,8038	0,7374	0,6171	0,3770	—	0,0647	0,7097	0,8316	0,9086	0,9373	0,9523	0,9615	0,9677
30—45	150—135	0,6667	0,5451	0,3202	—	—	0,2092	0,6393	0,7693	0,8662	0,9058	0,9273	0,9409	0,9501
						$-\Delta\varphi^0$								
45—60	135—120	0,5	0,2894	—	—	0,1885	0,3431	0,6287	0,7429	0,8412	0,8852	0,9101	0,9261	0,9373
					$-\Delta\varphi^0$									
60—75	120—105	0,2679	—	—	0,2134	0,3634	0,4551	0,6491	0,7422	0,8318	0,8752	0,9008	0,9177	0,9297
				$-\Delta\varphi^0$										
75—90	105—90	—	—	0,2327	0,4019	0,4916	0,5493	0,6847	0,7579	0,8349	0,8748	0,8992	0,9156	0,9274
			$-\Delta\varphi^0$											
90—105	90—75	—	0,25	0,4342	0,5359	0,5928	0,6311	0,7273	0,7840	0,8475	0,8821	0,9040	0,9190	0,93
		$-\Delta\varphi^0$												
105—120	75—60	0,2679	0,4653	0,5758	0,6403	0,6781	0,7043	0,7734	0,8164	0,8669	0,8957	0,9142	0,9272	0,9367
120—135	60—45	0,5	0,6171	0,6863	0,7286	0,7540	0,7721	0,8211	0,8528	0,8914	0,9139	0,9287	0,9392	0,9470
135—150	45—30	0,6667	0,7374	0,7809	0,8082	0,8249	0,8369	0,8702	0,8922	0,9195	0,9357	0,9466	0,9542	0,96
150—165	30—15	0,8038	0,8435	0,8683	0,8841	0,8939	0,9009	0,9206	0,9338	0,9503	0,9602	0,9668	0,9715	0,9751
165—180	15—0	0,9330	0,9466	0,9551	0,9605	0,9638	0,9662	0,9729	0,9774	0,9830	0,9864	0,9887	0,9903	0,9915
180—195	360—345	1,0718	1,0564	1,0470	1,0412	1,0375	1,0350	1,0278	1,0231	1,0173	1,0138	1,0115	1,0098	1,0086
195—210	345—330	1,2440	1,1855	1,1516	1,1310	1,1187	1,1099	1,0862	1,0709	1,0523	1,0415	1,0344	1,0293	1,0256
210—225	330—315	1,5	1,3561	1,2806	1,2374	1,2122	1,1949	1,1492	1,1209	1,0876	1,0687	1,0565	1,0480	1,0417
225—240	315—300	2,0	1,6204	1,4571	1,3726	1,3262	1,2952	1,2178	1,1725	1,1218	1,0942	1,0767	1,0647	1,0560
240—255	300—285	3,7321	2,1489	1,7367	1,5617	1,4748	1,4199	1,2931	1,2249	1,1535	1,1165	1,0938	1,0786	1,0676
255—270	285—270	—	4,0	2,3032	1,8660	1,6870	1,5846	1,3749	1,2756	1,1800	1,1336	1,1062	1,0881	1,0753
270—285	270—255	—	—	4,2979	2,4880	2,0342	1,8203	1,4605	1,3194	1,1978	1,1431	1,1122	1,0922	1,0783
		$-\Delta\varphi^0$												
285—300	255—240	3,7321	—	—	4,6851	2,7520	2,1974	1,5405	1,3474	1,2025	1,1426	1,1101	1,0896	1,0756
			$-\Delta\varphi^0$											
300—315	240—225	2,0	3,4548	—	—	5,3049	2,9142	1,5906	1,3460	1,1888	1,1297	1,0988	1,0798	1,0669
				$-\Delta\varphi^0$										
315—330	225—210	1,5	1,8347	3,1234	—	—	4,7794	1,5642	1,2999	1,1545	1,1040	1,0784	1,0629	1,0525
					$-\Delta\varphi^0$									
330—345	210—195	1,2440	1,3561	1,6204	2,6524	—	15,4590	1,4091	1,2026	1,1006	1,0669	1,0501	1,0401	1,0334
						$-\Delta\varphi^0$								
345—360	195—180	1,0718	1,0987	1,1516	1,2806	1,7985	—	1,1409	1,0693	1,0344	1,0228	1,0171	1,0137	1,0114

Digitized by Google

Zahlentafel VIII.

B

$(n>0)$ Δq^0	$(n<0)$ Δq^0	$n =$ cos 90°	cos 75°	cos 60°	cos 45°	cos 30°	1	1,5	2	3	4	5	6	7
		$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$								
0—15	180—165	0,5059	0,6743	0,9770	1,5851	2,9688	—	1,4705	1,0128	0,7722	0,6903	0,6489	0,6240	0,6074
15—30	165—150	0,5053	0,6720	0,9664	1,5166	—	3,0033	1,1728	0,8957	0,7243	0,6609	0,6281	0,6079	0,5942
30—45	150—135	0,5398	0,7306	1,0693	—	—	1,3910	0,9087	0,7689	0,6655	0,6234	0,6005	0,5862	0,5760
						$-\Delta\varphi^0$								
45—60	135—120	0,6214	0,8721	—	—	1,0686	0,8557	0,7124	0,6547	0,6048	0,5824	0,5698	0,5614	0,5557
					$-\Delta\varphi^0$									
60—75	120—105	0,7815	—	—	0,8717	0,7005	0,5979	0,5747	0,5621	0,5494	0,5430	0,5387	0,5364	0,5345
				$-\Delta\varphi^0$										
75—90	105—90	—	—	0,7813	0,6074	0,5161	0,4571	0,4793	0,4904	0,5014	0,5069	0,5105	0,5125	0,5142
			$-\Delta\varphi^0$											
90—105	90—75	—	0,7547	0,5704	0,4683	0,4110	0,3725	0,4132	0,4363	0,4626	0,4765	0,4852	0,4914	0,4958
		$-\Delta\varphi^0$												
105—120	75—60	0,7815	0,5745	0,4571	0,3880	0,3490	0,3195	0,3675	0,3977	0,4326	0,4522	0,4651	0,4740	0,4803
120—135	60—45	0,6214	0,4782	0,3929	0,3402	0,3106	0,2863	0,3379	0,3702	0,4104	0,4343	0,4494	0,4604	0,4686
135—150	45—30	0,5398	0,4270	0,3573	0,3139	0,2868	0,2666	0,3187	0,3538	0,3968	0,4221	0,4393	0,4514	0,4605
150—165	30—15	0,5053	0,4046	0,3412	0,2988	0,2759	0,2574	0,3123	0,3461	0,3898	0,4160	0,4339	0,4468	0,4563
165—180	15—0	0,5059	0,4048	0,3411	0,3022	0,2689	0,2574	0,3071	0,3443	0,3891	0,4161	0,4340	0,4466	0,4561
180—195	360—345	0,5423	0,4276	0,3571	0,3146	0,2789	0,2664	0,3156	0,3523	0,3958	0,4219	0,4390	0,4509	0,4600
195—210	345—330	0,6286	0,4797	0,3930	0,3379	0,3087	0,2858	0,3392	0,3706	0,4102	0,4333	0,4488	0,4599	0,4680
210—225	330—315	0,8097	0,5791	0,4575	0,3884	0,3476	0,3186	0,3663	0,3966	0,4315	0,4511	0,4641	0,4730	0,4796
225—240	315—300	1,2427	0,7749	0,5724	0,4670	0,4130	0,3708	0,4115	0,4341	0,4604	0,4752	0,4839	0,4902	0,4949
240—255	300—285	2,9165	1,2344	0,7938	0,6059	0,5147	0,4537	0,4924	0,4871	0,4990	0,5048	0,5088	0,5113	0,5128
255—270	285—270	—	3,0193	1,3138	0,8739	0,6933	0,5902	0,5681	0,5565	0,5459	0,5402	0,5367	0,5347	0,5331
270—285	270—255	—	—	3,3579	1,5113	1,0499	0,8320	0,7000	0,6470	0,6005	0,5795	0,5677	0,5597	0,5544
		$-\Delta\varphi^0$												
285—300	255—240	2,9165	—	—	4,0840	1,9286	1,3139	0,8853	0,7574	0,6606	0,6204	0,5980	0,5844	0,5749
			$-\Delta\varphi^0$											
300—315	240—225	1,2427	3,0129	—	—	5,6690	2,4938	1,1332	0,8813	0,7190	0,6580	0,6261	0,6062	0,5929
				$-\Delta\varphi^0$										
315—330	225—210	0,8097	1,3405	3,3398	—	—	6,6479	1,4213	0,9996	0,7683	0,6882	0,6476	0,6231	0,6062
					$-\Delta\varphi^0$									
330—345	210—195	0,6286	0,9113	1,5659	4,0227	—	46,4300	1,6525	1,0771	0,7972	0,7051	0,6596	0,6323	0,6140
						$-\Delta\varphi^0$								
345—360	195—180	0,5423	0,7409	1,1251	2,0299	5,3394	—	1,6778	1,0830	0,7987	0,7060	0,6600	0,6325	0,6143

Zahlentafel IX.

B'

$(n>0)$ Δq^0	$(n<0)$ Δq^0	$n =$ cos 90°	cos 75°	cos 60°	cos 45°	cos 30°	1	1,5	2	3	4	5	6	7	$(n<0)$ Δq^0	$(n>0)$ Δq^0
		$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$	$-\Delta\varphi^0$										
0—15	180—165	0,5297	0,7176	1,0721	1,8624	4,3025	—	1,0243	0,5178	0,2603	0,1739	0,1305	0,1045	0,0871	195—180	345—360
15—30	165—150	0,5689	0,7920	1,2490	2,4929	—	7,7274	0,9068	0,4857	0,2519	0,1700	0,1284	0,1031	0,0861	210—195	330—345
30—45	150—135	0,6641	0,9912	1,8467	—	—	2,6357	0,7418	0,4338	0,2372	0,1632	0,1244	0,1005	0,0844	225—210	315—330
						$\Delta\varphi^0$										
45—60	135—120	0,8712	1,5513	—	—	2,1392	1,3643	0,5890	0,3765	0,2189	0,1544	0,1192	0,0971	0,0819	240—225	300—315
					$\Delta\varphi^0$											
60—75	120—105	1,4213	—	—	1,6883	1,1039	0,8577	0,4700	0,3241	0,2002	0,1448	0,1134	0,0932	0,0791	255—240	285—300
				$\Delta\varphi^0$												
75—90	105—90	—	—	1,4782	0,9232	0,7191	0,6065	0,3834	0,2805	0,1826	0,1353	0,1076	0,0892	0,0762	270—255	270—285
			$\Delta\varphi^0$													
90—105	90—75	—	1,3998	0,8429	0,6304	0,5286	0,4653	0,3219	0,2461	0,1674	0,1268	0,1021	0,0854	0,0734	285—270	255—270
		$\Delta\varphi^0$														
105—120	75—60	1,4213	0,8274	0,5976	0,4829	0,4210	0,3800	0,2786	0,2201	0,1549	0,1195	0,0973	0,0820	0,0709	300—285	240—255
120—135	60—45	0,8712	0,6077	0,4744	0,3992	0,3561	0,3263	0,2487	0,2009	0,1452	0,1137	0,0934	0,0792	0,0688	315—300	225—240
135—150	45—30	0,6641	0,4996	0,4061	0,3499	0,3162	0,2925	0,2286	0,1876	0,1382	0,1093	0,0904	0,0771	0,0672	330—315	210—225
150—165	30—15	0,5689	0,4440	0,3686	0,3215	0,2931	0,2726	0,2164	0,1793	0,1336	0,1064	0,0884	0,0757	0,0661	345—330	195—210
165—180	15—0	0,5297	0,4198	0,3517	0,3089	0,2822	0,2633	0,2102	0,1752	0,1312	0,1050	0,0874	0,0749	0,0655	360—345	180—195

XIII. Schrifttum.

[1] L. Bairstow, Applied Aerodynamics. London 1920.

[2] R. Fuchs u. H. Blenk, Die Beanspruchung von Flugzeugen beim Abfangen. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 16 (1925) S. 78.

[3] Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik, Bd. 1, 2. Auflage. Berlin 1934.

[4] W. F. Durand, Aerodynamic Theory. Vol. V, Div. N: Dynamics of the aeroplane by Melvill Jones. Berlin 1935.

[5] J. Kleinwächter, Die numerische Behandlung der gesteuerten Längsbewegung eines Flugzeuges. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 133.

[6] R. Schwarz, Untersuchungen der beschleunigten Längsbewegung eines Flugzeuges. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935) S. 62.

[7] E. Mettler, Über die Steuerbarkeit der Längsbewegung der Flugzeuge. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 345.

[8] F. W. Lanchester, Aerodynamik, übersetzt von C. und A. Runge, Bd. 2 S. 28f.

Digitized by Google

[9] A. Pröll, 1. Zur Mechanik der Längsbewegung von Flugzeugen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935) S. 233. — 2. Beiträge zur Phygoidentheorie in Beiträge zur Flugtechnik, hrsg. von R. Katzmayr, S. 10. Wien 1937.

[10] W. Richter, Verwendung nomographischer Hilfsmittel für eine graphische Bestimmung der Bahnkurven bei der Längsbewegung eines Flugzeuges. Ing. Arch. Bd. 10 (1939) S. 28.

[11] W. Müller, Zur Berechnung der Bahnkurven bei der Längsbewegung eines Flugzeuges. Ing. Arch. Bd. 11 (1938) S. 258.

[12] W. Müller, 1. Eine Methode zur Bestimmung von Bahnkurven eines Flugzeuges. Ing. Arch. Bd. 10 (1939) S. 63. — 2. Zum Problem der Längsbewegung eines Flugzeuges. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939) S. 193.

[13] W. Müller, Zur Berechnung von beschleunigten Längsbewegungen eines Flugzeugs. Ing. Arch. Bd. 11 (1940) S. 99.

[14] H. Blenk, Startformeln für Landflugzeuge. Jahrbuch d. DVL 1927 S. 1.

[15] F. N. Scheubel, Geschwindigkeits- und Staudruckverlauf im senkrechten Sturzflug. Luftf.-Forschg. Bd. 13 S. 371.

[16] W. Richter, Verwendung nomographischer Hilfsmittel für eine graphische Bestimmung der Bahnkurven eines Flugzeuges bei veränderlichen Luftkraftbeiwerten. Ing.-Arch. Bd. 10 (1939) S. 292.

[17] W. Richter, Bahnkurve und Steuerung bei der Längsbewegung eines Flugzeuges. Ing.-Arch. Bd. 11 (1940) S. 24.

Digitized by Google

Nullschub-Anzeigegerät und Ruderblockierung, zwei neue Hilfsmittel für Flugmessungen.

Von W. Stieß.

Bericht der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen a. B.

Die Flugversuchstechnik verlangt Meßgeräte, die mitunter von den im Laboratorium benutzten abweichen und deshalb in den letzten Jahren besonders entwickelt werden mußten. Ebenso verlangt sie auch die Anwendung neuartiger Hilfsmittel, welche erst die für die Messung erforderlichen Flugbedingungen zu schaffen ermöglichen. Im folgenden werden zwei solcher Hilfsgeräte beschrieben, die sich im Flugversuchsbetrieb gut bewährt haben.

1. Nullschubanzeigegerät.

Der Vergleich von Ergebnissen des Flug- und Modellversuchs leidet meist darunter, daß die Luftschrauben bei Leerlauf der Motoren in kaum übersehbarer Weise Schub oder Widerstand liefern. An einigen Stellen wurden daher Schubmeßnaben entwickelt. Sie sind jedoch für Industrieversuche mit zu großen Umständen beim Einbau sowie bei der Messung verbunden. Verzichtet man auf die unmittelbare Messung des Schubes, so läßt sich auf der Grundlage des Impulsmeßverfahrens ein einfaches Gerät bauen, mit dem man schnell die Luftschraubenfortschrittsgrade für Schub gleich Null mit für praktische Bedürfnisse genügender Genauigkeit finden kann. Obgleich auch hierbei die Anströmung der hinter der Schraube liegenden Flugzeugteile nicht so gleichmäßig wie am Modell ohne Schrauben ist, hat sich der auf diese Weise ermittelte Nullschubzustand als brauchbare Grundlage zu Vergleichen zwischen Flug- und Modellmessungen und zwischen Flugversuchen an mehreren Flugzeugen erwiesen.

Meßverfahren. Wenn wir in einem Strahlquerschnitt nahe hinter der Schraube die Strömungsgeschwindigkeiten und Drücke messen, dann läßt sich daraus der Schub nach dem Impulssatz berechnen zu (Bezeichnungen s. Bild 1).

$$S = \int^{F_x} \left[2\frac{\gamma}{g}\frac{(v+\Delta v_x)^2}{2} - 2\frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{2} - \frac{\gamma}{g} v \Delta v_x + p_{st_x} \right] dF \quad (1)$$

Mit

$$\frac{\gamma}{g}\frac{(v+\Delta v_x)^2}{2} = q_x = p_{ges_x} - p_{st_x} \text{ und } \frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{2} = p_{ges_0}$$

wird daraus

$$S = \int^{F_x} \left[2\,(p_{ges_x} - p_{ges_0}) - \frac{\gamma}{g} v \Delta v_x - p_{st_x} \right] dF \quad (2)$$

Für die Messung eines endlich großen Schubes müssen demnach sowohl Gesamtdrücke, als auch statische Drücke in der Meßebene F_x gemessen werden, was zwar meßtechnisch mit erträglichem Aufwand möglich wäre, jedoch wegen der Beeinflussung des statischen Druckes durch die Flugzeugzelle große Schwierigkeiten bieten würde. Wenn wir uns darauf beschränken, nur die Betriebszustände zu bestimmen, bei denen der Schub gleich Null wird, dann können wir folgendermaßen verfahren:

Wir messen nur Gesamtdrücke, und zwar $\int^{F_x} (p_{ges_x} - p_{ges_0})\,dF$ und verstellen die Schraubenblattsteigung so lange, bis dieses Integral zu Null wird. Da die Gesamtdrücke von den hinter der Schraube liegenden Teilen praktisch nicht beeinflußt werden, genügt hierfür die Mittelwertbildung längs eines einzigen Radius. Nun muß, damit Gl. (2) zu Null wird, streng genommen auch der Mittelwert der statischen Drücke vor und hinter der Schraube gleich sein, und zwar folgt aus $p_{ges_x} = p_{ges_0}$:

$$p_{st_x} + \frac{\gamma}{g}\frac{(v+\Delta v_x)^2}{2} = \frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{2} \quad \ldots\ldots (3)$$

und daraus

$$\frac{v\,\Delta v_x}{g} + \frac{p_{st}}{\gamma} = -\frac{\Delta v_x^2}{2g} \quad \ldots\ldots (4)$$

Damit wird für $p_{ges_x} = p_{ges_0}$ aus Gl. (2):

$$S\,(p_{ges_x} = p_{ges_0}) = \int^{F_x} \frac{\gamma}{g}\frac{\Delta v_x^2}{2}\,dF, \text{ wobei aus (4)} \quad \ldots (2a)$$

$$\Delta v_x = -v + \sqrt{v^2 - \frac{2g}{\gamma} p_{st_x}} \quad \ldots\ldots (5)$$

Da bei Gesamtdruckgleichheit der noch etwa verbleibende Mittelwert des Unterschiedes der statischen Drücke vor und hinter der Schraube gegenüber $\frac{\gamma}{2g} v^2$ nur sehr klein sein kann, ist seine Vernachlässigung ohne Belang.

Aufbau des Meßgerätes. Die Durchführung der Gesamtdruckmessung geschieht so, daß hinter der Schraube ein Rohr radial angebracht wird, das eine Reihe von Gesamtdrucksonden trägt, deren Abstände mit wachsendem Radius immer kleiner werden, so daß die Ringfläche zwischen zwei benachbarten Sonden jeweils gleich groß ist. Die Sonden sind über Kapillaren[1]) einander parallel geschaltet. Dadurch kann an einem am Verbindungsrohr angeschlossenen Manometer unmittelbar der Mittelwert des Gesamtdruckes $\overline{p_{ges_x}}$ gemessen werden.

Die Ausführung des gesamten Gerätes zeigt Bild 2. In Bild 3 ist der Anbau an einem Do 17-Flugzeug wiedergegeben. Der Vergleichsgesamtdruck $\overline{p_{ges_0}}$ wird am Fahrtmesser-Prandtlrohr abgenommen und unmittelbar gegen den Mittelwert $\overline{p_{ges_x}}$ auf ein Manometer geschaltet, das für Schub = Null auf Null einspielen muß. Besser noch als ein gewöhnliches U-Rohrmanometer hat sich ein pneumatisches Askania-Kurskreiselanzeigegerät bewährt.

Durchführung eines Kontrollversuches. Der Zweck dieses Versuches war zunächst, das Verfahren selbst zu erproben, sodann aber, im Falle der Brauchbarkeit, die

[1]) Kramer-Doetsch, Jahrbuch 1937 der Deutschen Luftfahrtforschung I, S. 59.

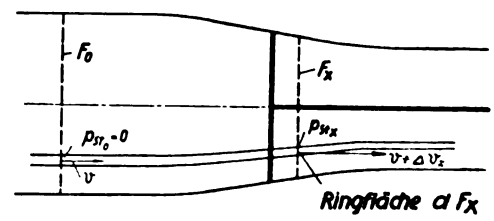
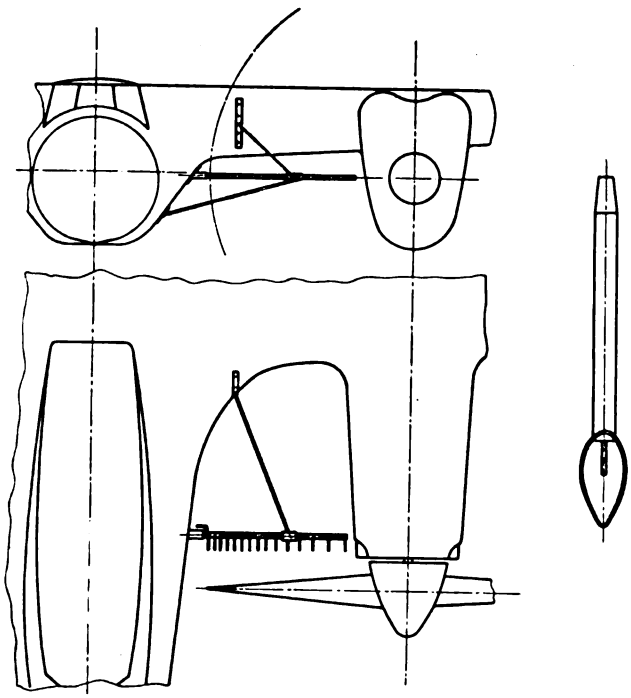


Bild 1. Bezeichnungsskizze für die Impulsrechnung.

Digitized by Google

Bild 2. Aufbau und Beispiel für die Anbringung des Nullschub-Anzeigegerätes.



Schub-Nullfortschrittsgrade einer Verstellschraube in Abhängigkeit von der Blattsteigung zu ermitteln.

Wenn die Mittelwertbildung durch Parallelschalten der Gesamtdrucksonden zureichend sein soll, dann müssen bei ein- und derselben Schraubenblattstellung, aber verschiedenen Fluggeschwindigkeiten, immer dieselben Nullschubfortschrittsgrade gemessen werden. Darüber hinaus ist zu erwarten, daß, obwohl sich bei Änderung der Blatteinstellung (infolge des sich ändernden Steigungsverlaufs) die Schubverteilung längs des Halbmessers ändert, die Nullschubfortschrittsgrade, über dem Tangens des Blatteinstellwinkels aufgetragen, ungefähr eine Gerade liefern. Der Versuch wurde daher so ausgeführt, daß bei vier verschiedenen Fluggeschwindigkeiten (v_A = 170, 185, 220 und 280) mit mehreren Propellerblattstellungen die Gasdrossel so weit verstellt wurde, bis das Differenzmanometer (alkoholgefülltes U-Rohr) auf Null einspielte. Propellerstellung, Drehzahl, Flugstaudruck, Temperatur und Flughöhe wurden abgelesen.

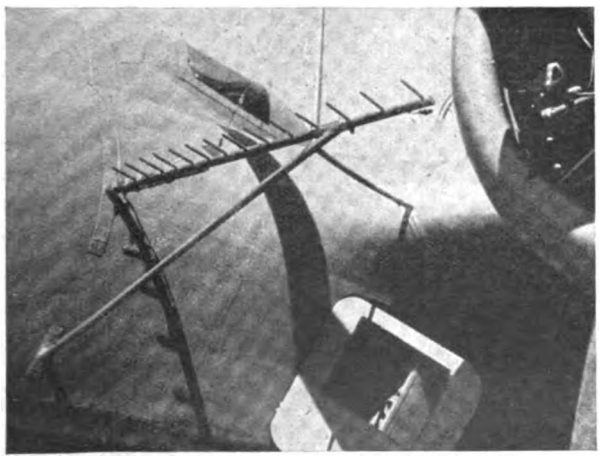


Bild 3. Ansicht des Nullschub-Anzeigegerätes, an einem Do 17-Flugzeug angebracht. (Das Gerät ist in Baukastenbauweise an verschiedene Einbaumaße angleichbar.)

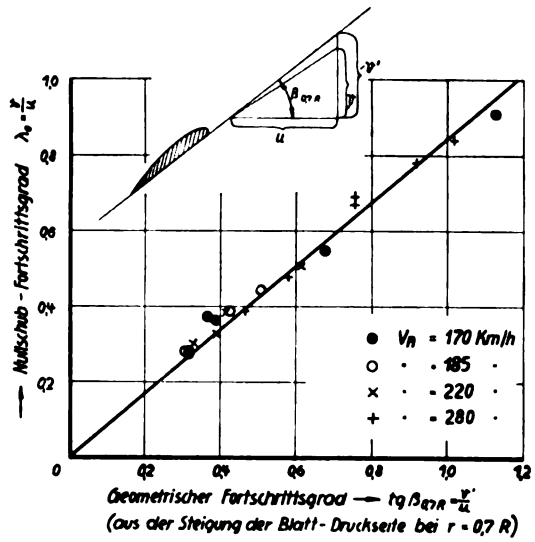


Bild 4. Nullschub-Fortschrittsgrade für eine 3,2-m-Verstellschraube.

Es zeigte sich, daß das Gerät hinsichtlich der Schubanzeige sehr empfindlich ist, so daß eine Einstellung mit der Gasdrossel allein zu grob ist. Mit der Propellerverstellung ließ sich jedoch eine sehr gute Feineinstellung erzielen. Die vorliegenden Versuche wurden allerdings dadurch erschwert, daß der Flugzeugführer das Manometer selbst nicht beobachten und daher die Einstellung nur nach Zeichen des Beobachters ausführen konnte. Da andererseits wegen des großen Höhenverlustes im stark gedrosselten Flug die Zeit für einen Versuch kurz war, so litt die Einstellgenauigkeit darunter. (Durch die inzwischen ausschließlich verwendeten Kurskreisel-Anzeigegeräte, die am Gerätebrett angebracht werden können, ist diese Schwierigkeit seitdem behoben.) In Zahlentafel 1 sind die Meßergebnisse zusammengestellt.

In Bild 4 sind schließlich die daraus bestimmten Nullschubfortschrittsgrade über den der Steigung der Schraubenblattdruckseite (beim Halbmesser $r = 0{,}7\ D/2$ gemessen) entsprechenden geometrischen Fortschrittsgraden aufge-

Zahlentafel 1. Nullschub-Fortschrittsgrade.

v_A	v	u m/s	$\lambda = \frac{v}{u}$	Steigungswinkel $\beta_{0,7\,D/2}$	$tg\,\beta_{0,7\,D/2}$
170	45,3	158	0,287	17,5	0,315
170	44,2	121	0,374	20	0,364
170	45,5	50	0,910	48,5	1,13
170	45,5	84	0,542	34	0,674
170	45,5	126	0,360	21	0,384
185	49,8	112,5	0,443	26,7	0,503
185	51,5	185	0,278	17	0,306
185	50,7	131	0,388	23	0,425
185	49,9	101	0,494	29,5	0,425
185	50,8	185	0,275	17,5	0,315
220	62,6	163	0,385	22,5	0,414
210	59,9	118	0,507	31,3	0,613
220	61,3	186	0,329	20,7	0,378
220	60,8	203	0,300	18,0	0,325
280	83,0	215	0,385	24,8	0,462
280	80,8	169	0,478	30,0	0,578
280	79,0	102,5	0,780	42,5	0,917
280	78,8	118	0,670	37,0	0,755
280	85,0	101	0,840	45,5	1,019
280	82,2	119	0,690	37,0	0,753

Digitized by Google

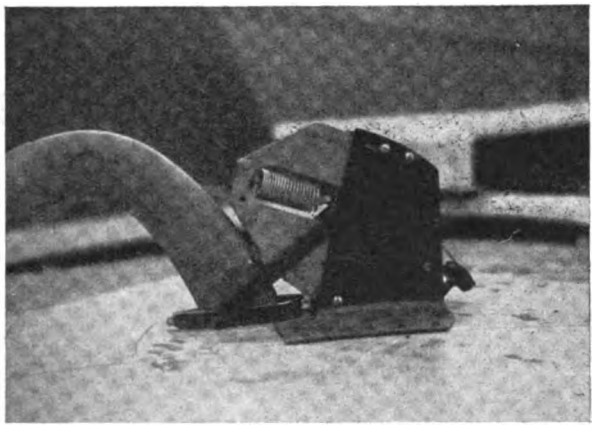


Bild 5. Ruderblockierung, auf der Höhenflosse der Do 17 angebracht und am Gewichtsausgleichsbügel des Höhenruders angreifend (Schutzkappe abgenommen).

tragen. Wir finden trotz der oben beschriebenen erschwerten Einstellmöglichkeit einen eindeutig geradlinigen Verlauf mit relativ geringer Streuung ohne irgendwelche systematische Abweichung der bei verschiedenen Fluggeschwindigkeiten gemessenen Werte, die auf ungenügende Mittelwertbildung durch die Parallelschaltung der Einzelsonden schließen ließe.

2. Vorrichtung zur Blockierung von Rudern während des Fluges.

Für die Durchführung von Flugversuchen mit festem Ruder war es notwendig, eine betriebssichere Feststellvorrichtung zu bauen, die während des Fluges vom Führersitz aus in Tätigkeit gesetzt und wieder gelöst werden kann, und die andererseits unmittelbar am Ruder angreift, um damit die Nachgiebigkeit der Steuerleitung sowie eine etwaige Abhängigkeit der Ruderlage von der Flossenstellung (beim Höhenruder) auszuschalten.

Diese Bedingungen werden durch die nachstehend beschriebene Ruderblockierung erfüllt. Das Gerät wird, wie Bild 5 zeigt, fest mit der Flosse verbunden (z. B. stehend oder liegend auf der Flosse Bild 5, oder an einem Lagerarm des Ruders Bild 6, während am Ruder eine Kreissegmentscheibe *s* mit ihrem Mittelpunkt in der Ruderdrehachse angebracht wird, die an einem der gewünschten Ruderstellung entsprechenden Ort eine Kerbe trägt. Bei Do 17 konnte an Stelle der Segmentscheibe einer der Gewichtsausgleichbügel benutzt werden.)

Die Ruderblockierung selbst (Bild 6) besteht aus einer Rolle *a*, die durch eine Feder *g* über einen um den festen Punkt *c* drehbaren Winkelhebel *d* in die Kerbe *b* gepreßt wird. Um die nötige große Anpreßkraft mit einer verhältnismäßig schwachen Feder zu erzielen, wird von derselben Feder über einen zweiten Hebel *e* eine Rolle *h* gegen eine Flanke *i* des Hebels *d* gepreßt, die mit dem Strahl durch den Drehpunkt *c* einen spitzen Winkel γ bildet.

Zum Lösen der Blockierung genügt es, mit kräftigem Ruck am Steuerknüppel zu ziehen oder zu drücken (die Größe dieser Kraft kann durch Wahl der Feder *g* bzw. deren Vorspannung beliebig angepaßt werden). Dadurch wird die Rolle *a* aus der Kerbe *b* gedrückt und gleichzeitig die zweite Rolle *h* an der schrägen Flanke *i* entlang nach außen geführt. Bevor jedoch die Rolle *a* die Kerbe ganz verlassen hat, hat die Rolle *h* schon den Scheitelpunkt der Flanke *i* überschritten, so daß dort bereits eine entgegengesetzt gerichtete Kraft auf den Hebel wirkt, welche die Rolle weiter von dem Segment abzieht (s. Bild 6b) und so das Ruder vollkommen freigibt.

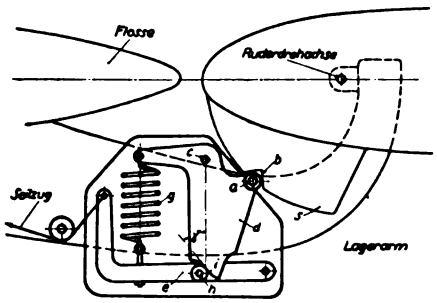


Bild 6a. Schematische Skizze der Ruderblockierung.

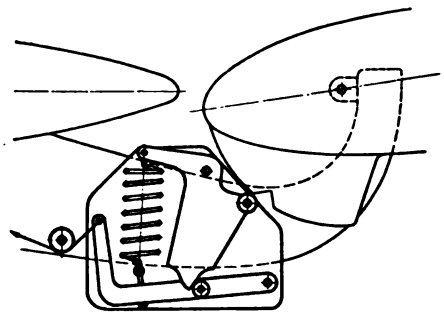


Bild 6b. Ruderblockierung im Augenblick des Ausklinkens.

Soll nun wieder eingeklinkt werden, so ist es nur nötig, durch Seilzug (oder evtl. auch elektromagnetisch) den Hebel *e* so weit gegen die Federkraft zu lüften, bis die Rolle *h* von der Nase *i* freikommt. Dann zieht die Feder *g* die Rolle *a* über den Hebel *d* wieder in die Kerbe hinein.

Bei Versagen des Drahtzuges oder der magnetischen Auslösung tritt kein die Flugsicherheit mindernder Umstand ein, weil die Lösung der Blockierung unabhängig davon immer nur durch Ziehen oder Drücken am Steuerknüppel erfolgt.

Da sich das Gerät ebensogut an einem Umlenkhebel oder an einer Stoßstange angreifend anbringen läßt, stellt es ein vielseitig verwendbares Hilfsmittel für die Flugmeßtechnik dar.

Zusammenfassung.

1. Um Flugversuche, insbesondere Polarenmessungen, besser mit Modellmessungen vergleichen zu können, wird hinter der Luftschraube ein den Mittelwert des Gesamtdruckes messendes Gerät angebracht und nun die Gasdrossel- bzw. die Schraubenblattstellung so verändert, bis dieser Mittelwert gleich dem Gesamtdruck der ungestörten Strömung ist. Die im Bericht wiedergegebene Erprobung sowie seither viele Meßflüge haben die Brauchbarkeit dieses Verfahrens zur Ermittlung des Nullschubzustandes der Luftschraube bestätigt.

2. Die Ruderblockierung gestattet es, das Ruder während des Fluges in einer bestimmten Stellung an die Flosse zu klammern und wieder von dieser zu lösen. Die Flugsicherheit bleibt in vollem Maße erhalten, da die Lösung einfach durch kräftiges ruckartiges Ziehen oder Drücken an der Steuersäule erfolgen kann.

Digitized by Google

Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten.

Von F. Schultz-Grunow.

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.

Mit verbesserten Meßmethoden werden Widerstandsmessungen durchgeführt und damit ein neues Widerstandsgesetz hydraulisch glatter Oberflächen hergeleitet. Für die Versuche dienten auch Flugzeugoberflächen, die sich im Versuchsbereich als hydraulisch glatt erwiesen.

Gliederung.

I. Bezeichnungen.
II. Einleitung.
III. Versuchseinrichtung.
IV. Widerstandsmessung.
V. Gesetzmäßigkeiten der Geschwindigkeitsverteilung.
VI. Widerstandsgesetz.
VII. Schubspannungsverlauf und Mischungswegverteilung.
VIII. Zusammenfassung.
IX. Schrifttum.

I. Bezeichnungen.

x = Abstand von der Plattenvorderkante = Koordinate der Plattenlänge,
y = Wandabstand,
z = Koordinate der Plattenbreite,
l = Mischungsweg,
u = Geschwindigkeit in x-Richtung,
$\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit in der Reibungsschicht,
U = Anströmgeschwindigkeit,
v = Geschwindigkeit in y-Richtung,
τ = Schubspannung,
τ_0 = Wandschubspannung,
ϱ = Dichte,

$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ Schubspannungsgeschwindigkeit,

δ = Reibungsschichtdicke,

$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ Verdrängungsdicke,

$\vartheta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ Impulsdicke,

$c_f' = \frac{\tau_0}{\frac{\varrho}{2} U^2}$ örtliche Widerstandszahl,

$c_f = \frac{\int_0^x \tau_0 \, dx}{\frac{\varrho}{2} U^2 x}$ Gesamtwiderstandszahl,

ν = kinematische Zähigkeit,

$Re_x = \frac{U \cdot x}{\nu}$, $Re_\delta = \frac{u \cdot \delta}{\nu}$ } Reynoldssche Zahlen.

II. Einleitung.

Durch Übertragen der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilungsgesetze der turbulenten Rohrströmung [1] auf die freie Reibungsschicht hatte sich ein Widerstandsgesetz ergeben, das durch geringe Abänderung der in den Geschwindigkeitsverteilungsgesetzen enthaltenen experimentellen Konstanten bis zu den höchsten Re_x-Zahlen bereits in befriedigende Übereinstimmung mit den Plattenwiderstandsmessungen gebracht werden konnte.

Diese Übertragung ist trotzdem nur als eine Näherung für die noch nicht bekannte Geschwindigkeitsverteilung in der freien Reibungsschicht anzusehen, denn es besteht keine zwingende Notwendigkeit, daß im Rohr und an der Platte die gleiche Geschwindigkeitsverteilung besteht; man darf nur vermuten, daß sie wenig voneinander abweichen. Daneben befriedigen die Plattenwiderstandsmessungen [2, 3] nicht vollständig, da sie mit verhältnismäßig schmalen Versuchsplatten erhalten wurden, bei welchen die Voraussetzung einer ebenen Strömung nur in der Nähe der Plattenvorderkante erfüllt ist bzw. an nicht vollkommen hydraulisch glatten Platten [4] ermittelt wurden. Es wurde daher wünschenswert, die Geschwindigkeitsverteilung in der freien Reibungsschicht kennenzulernen und die Widerstandsmessungen nachzuprüfen.

III. Versuchseinrichtung.

Einerseits sollte im Kanal gemessen werden, um höhere Meßgenauigkeit zu erreichen, anderseits sollten auch die Verhältnisse an freien Oberflächen gewahrt bleiben, nämlich kein Druckabfall und eine freie Reibungsschicht, das soll heißen, daß an die Reibungsschicht eine Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung anschließt. Es wurde deshalb eine neuerstellte Versuchseinrichtung für Luftbetrieb benutzt, die im wesentlichen aus einem von einem Gebläse betriebenen Kanal mit rechteckigem Querschnitt bestand, Bild 1, dessen untere, horizontal ausgerichtete Wand die zu untersuchende Oberfläche trug. Das Seitenverhältnis des Querschnitts war so bemessen, daß man im mittleren Bereich der horizontalen Seiten ebene Strömung erwarten konnte. Die Höhe des Kanals war so gewählt, daß die gegenüberliegenden Reibungsschichten stets durch die Kernströmung, das ist das Gebiet gleichförmig verteilter Geschwindigkeit U in Bild 1, getrennt blieben und dadurch freie Reibungsschichten erhalten wurden. Die obere Wand des Kanals war gelenkig und verstellbar ausgeführt, so daß über die Versuchsstrecke ein beliebig vorgegebener Druckverlauf und also für unsere Zwecke im Kanal ein Druck gleich dem Außendruck bis auf $^1/_{20}$ mm Alk.-S. genau eingestellt werden konnte. Die Kanalhöhe vergrößerte sich hierbei in Strömungsrichtung nach Maßgabe des Anwachsens der Verdrängungsdicken an den Kanalwänden. Damit waren im Kanal die gleichen Verhältnisse wie an freien Oberflächen geschaffen.

Daß die Strömung im mittleren Gebiet der Versuchsplatte tatsächlich eben ist, geht aus den in Bild 2 wiedergegebenen, über dem Logarithmus des Wandabstandes y aufgetragenen Geschwindigkeitsprofilen hervor, die in einer senkrecht zu Strömungsrichtung und Versuchswand stehen-

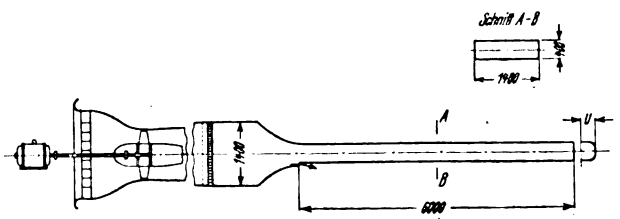


Bild 1. Versuchseinrichtung.

Digitized by Google

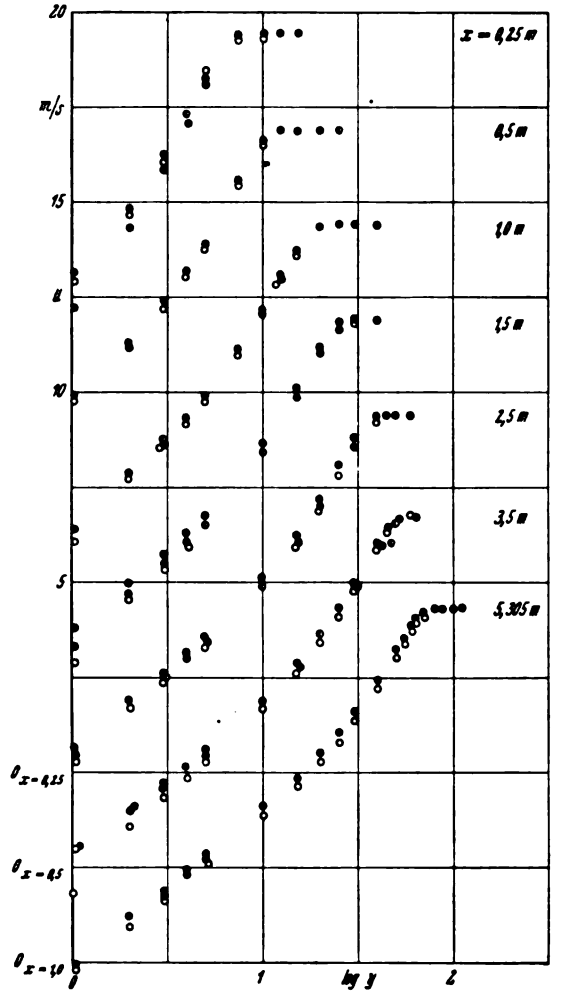


Bild 2. Geschwindigkeitsprofile an der Versuchswand; Y in mm.

den Meßebene auf der Kanalmitte ($z = 0$) und 250 mm links ($z = -250$) und rechts ($z = +250$) davon in Strömungsrichtung gesehen aufgenommen worden sind. Die Zwischenprofile, die außerdem gemessen wurden und die im gleichen Streubereich liegen, sind der Deutlichkeit halber weggelassen. Die Profile decken sich.

Damit der Umschlagspunkt eindeutig an der Vorderkante der Versuchsplatte lag, wurde diese Kante stark gekrümmt, und damit sich an ihr eine neue Reibungsschicht bildete, war unter dieser Kante ein Schlitz vorgesehen, durch den die Reibungsschicht der Gebläsekammerwand abblies, Bild 1.

IV. Widerstandsmessung.

Für die Messung des Reibungswiderstandes bestanden zwei Möglichkeiten. Aus der Messung des Staudruckverlaufs über dem Wandabstand y in verschiedenen Abständen x von der Plattenvorderkante konnte einmal der Impulsverlust $\frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,(U-u)\,dy$ festgestellt werden, mit welchem sich dann aus dem Impulssatz

$$\tau_0/\varrho = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,(U-u)\,dy \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die Wandschubspannung τ_0 ermitteln läßt. Anderseits konnte die Reibungskraft an einer rechteckigen Meßplatte, die in einem Ausschnitt der Hauptplatte beweglich angebracht war, unmittelbar gewogen werden. Dieses zweite Meßverfahren erwies sich als das genauere. Ein ähnliches war bereits [3] benutzt worden. Die Anordnung der Meßplatte geht aus Bild 3 hervor. Sie sitzt auf einem in Federgelenken F um eine vertikale Achse drehbar gelagerten Arm. Das Gewicht wird durch einen Schwimmer S aufgenommen. Außer dem Moment der Reibungskraft wirkt in der Drehachse ein Gegenmoment, das von einem auf Torsion beanspruchten Draht D ausgeübt wird. Der Draht kann mit dem Handrad H so weit verdreht werden, daß bei dem Moment der Reibungskraft das Gleichgewicht hält und der Waagenarm sich in der Nullage befindet, die optisch abgelesen werden kann. Das zu der jeweiligen Verdrehung

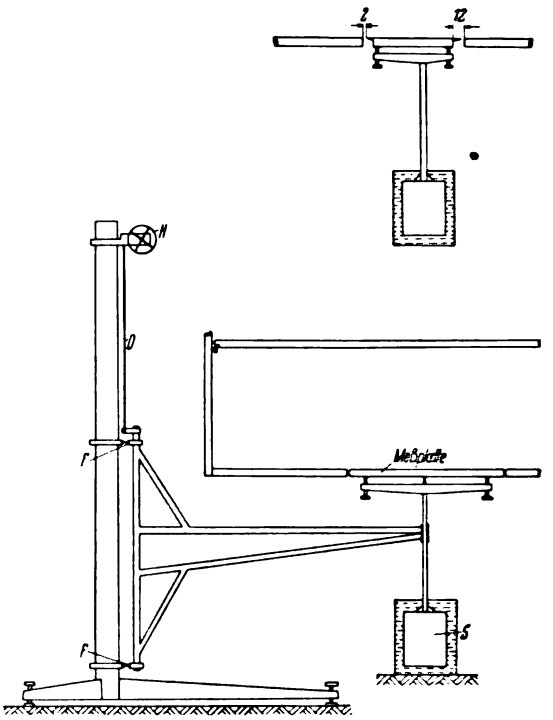


Bild 3. Anordnung der Meßplatte und Waage.
D Draht *H* Handrad
F Federgelenk *S* Schwimmer

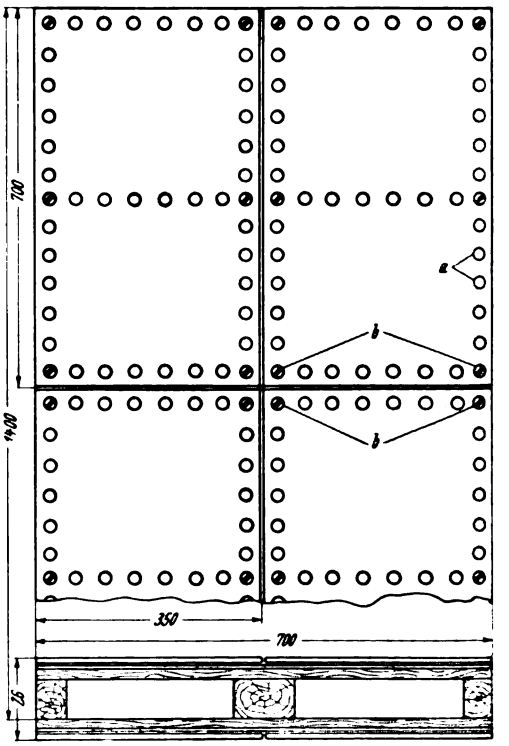


Bild 4. Oberfläche *C* mit Glatthautnietung. Anordnung der Nieten und Schrauben.
a Glatthautnieten,
b versenkte nicht verspachtelte Holzschrauben,

Digitized by Google

gehörige Torsionsmoment ist geeicht worden, so daß also die Reibungskraft und daraus die örtliche Widerstandszahl bestimmt werden konnte. Diese Anordnung ist nur in unserem Fall benutzbar, wo im Kanal der gleiche Druck wie im Außenraum herrscht. Andernfalls treten in den Spalten des Ausschnitts, die wegen der freien Beweglichkeit der Meßplatte bestehen müssen, Strömungen auf, welche ungleiche Druck- und Saugkräfte an den Kanten der Meßplatte hervorrufen, die die Messung fälschen.

Im ganzen wurden drei Oberflächen untersucht. Die erste Oberfläche (*A*) war die einer gewachsten, stabverleimten Sperrholzplatte von 25 mm Dicke, die zweite (*B*) war die gespachtelte, geschliffene und lackierte Oberfläche eines Hochleistungsmetallflugzeugs, und die dritte Oberfläche (C) bestand aus einzelnen, 1,5 mm dicken Blechstücken in der Anordnung von Bild 4, die durch Glatthautnietung auf einer 1,5 mm starken Blechplatte befestigt waren. Dieser Plattenverband war mit durchgehenden, versenkten Holzschrauben auf eine stabverleimte Sperrholtplatte geschraubt, und ohne vorher zu spachteln mit einem glatten Tarnanstrich versehen worden.

Zunächst seien die Messungen an der Oberfläche A beschrieben. Die aus den Geschwindigkeitsmessungen erhaltene Impuls-, Verdrängungs- und Reibungsschichtdicke sind in Bild 5 wiedergegeben. Es bestand zunächst die Frage, ob man den Nullpunkt des Diagrammes mit der Plattenvorderkante zusammenfallen lassen kann, denn die Vorderkante unserer Versuchsplatte ist nicht eine scharfe Schneide, sondern sie hat eine endliche Dicke und ist abgerundet. Eine Nachrechnung der Plattenlänge aus der im vordersten Meßquerschnitt ($x = 0{,}25$ m) erhaltenen Reibungsschichtdicke mit dem alten Potenzgesetz [5], das bei kleinen *Re*-Zahlen erfahrungsgemäß sehr gut der Wirklichkeit entspricht, ergab eine nur unwesentliche Korrektur.

Die Impulsdicke ϑ läßt sich durch (1) mit den Widerstandsbeiwerten in Beziehung setzen. Man erhält mit der Definitionsgleichung für ϑ[1]):

$$c_f' = 2\frac{d\vartheta}{dx} \quad \ldots \quad (2a)$$

$$c_f = 2\frac{\vartheta}{x}, \quad \ldots \quad (2b)$$

so daß sich aus der gemessenen Impulsdicke die Widerstandsbeiwerte bestimmen lassen. Es ergab sich aber, daß diese Bestimmung nicht genau genug ist. Die Wagenmessungen erwiesen sich als wesentlich genauer, sie sind in Bild 6 wiedergegeben. Zum Vergleich ist dort eine mit *I* bezeichnete Kurve eingetragen, die das mit dem logarithmischen Geschwindigkeits-

[1]) Unter den oben angegebenen Bezeichnungen zu finden.

verteilungsgesetz der Rohrströmung erhaltene Widerstandsgesetz [1] wiedergibt, weiterhin das alte Potenzgesetz [5] als Gerade *II* und endlich als Kurve *III* ein aus allen bis dahin durchgeführten Plattenmessungen erhaltenes empirisches Formelsystem [6]

$$c_f = \frac{0{,}242}{\log\,(Re_x \cdot c_f)} \quad \ldots \quad (3a)$$

$$c_f' = \frac{0{,}558\,c_f}{0{,}558 + 2\sqrt{c_f}} \quad \ldots \quad (3b)$$

Es sei hier noch erwähnt, daß (3a) und die sog. Schlichtingsche Näherungsformel [1]

$$c_f = \frac{0{,}455}{(\log Re_x)^{2{,}58}}, \quad \ldots \quad (4)$$

welche sich auf Kurve *I* bezieht, in unserem Versuchsbereich praktisch übereinstimmen.

Bild 6 läßt erkennen, daß eine systematische, mit Re_x wachsende Abweichung der Ausgleichskurve *IV* unserer Messungen von der Kurve *I* besteht in dem Sinne, daß die neuen Messungen kleinere Widerstandsbeiwerte liefern, z. B. bei $\log Re_x = 7{,}2$ um 4% kleinere Werte. Jedenfalls erweist sich die Oberfläche *A* unter den Umständen unserer Messungen als hydraulisch glatt.

Zur Genauigkeit dieser Messungen ist zu sagen, daß die Versuchsoberfläche, da es sich nun einmal um eine technische Oberfläche handelt, leicht wellig war. Wenn sich das auch nicht als Rauhigkeit auswirkte, so gab es deshalb an der Meßplatte doch Stellen, wo die Kanten der Meßplatte etwas vor- oder zurückstehen, so daß Spaltströmungen entstanden. Der Einfluß dieser Strömungen konnte weitgehend unwirksam gemacht werden durch die in Bild 3 angegebene Ausbildung der Vorder- und Hinterkanten der Meßplatte. Damit ergab sich bei vertikalen Verschiebungen der Meßplatte um 0,1 mm an der Waage eine Kraftänderung von 1,5%. Da die Plattenhöhe auf 0,1 mm genau eingestellt werden konnte, ist dieser Prozentsatz die Versuchsgenauigkeit.

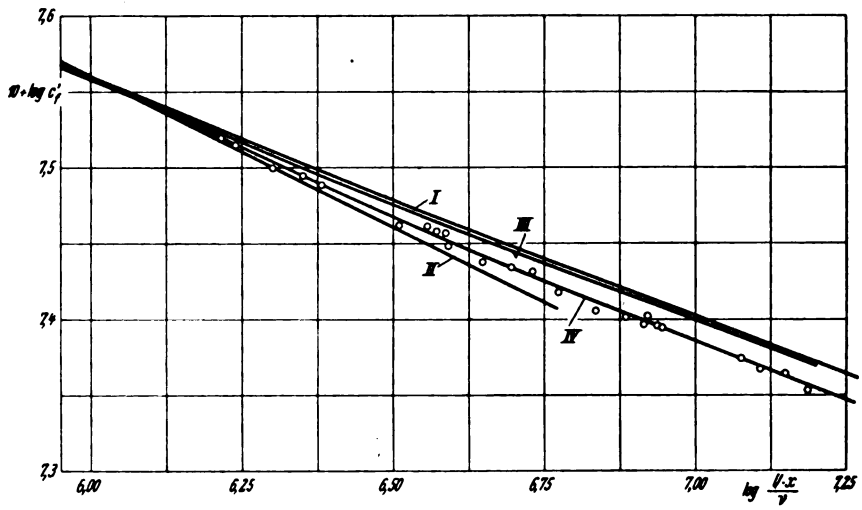


Bild 5 (unten). Impuls-, Verdrängungs- und Reibungsschichtdicke δ, δ^*, ϑ an Oberfläche *A* (gewachste Sperrholzplatte), $U = 19{,}4$ m/s.

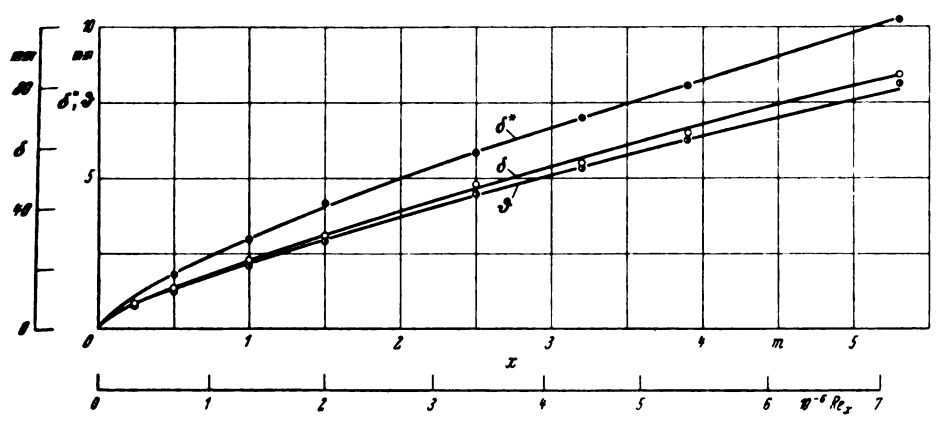


Bild 6. Örtliche Widerstandszahl der Oberfläche *A*.
I Aus dem Rohrversuch unter Berücksichtigung der Plattenwiderstands-Versuche von Kempf errechnet (logarithmisches Widerstandsgesetz),
II alte Potenzformel $c_f = 0{,}0576\,Re_x^{-\frac{1}{5}}$
III empirische Formel von Schoenherr,
IV Ausgleichskurve durch die Meßpunkte.

Digitized by Google

An den Oberflächen B und C war die Meßgenauigkeit wesentlich geringer. Einerseits betrug die Versuchsstrecke statt 6 m nur 2 m, anderseits ließen sich an den Oberflächen, ohne sie zu zerstören, keine einwandfreien Druckanbohrungen anbringen und daher der Druck Null nicht zuverlässig einstellen, außerdem konnten die Kanten der Meßplatte ohne ihre Oberfläche zu zerstören nicht in der erforderlichen Weise zugeschärft werden, um den Einfluß der Spaltströmung genügend herabzumindern. Es ergab sich daher bei einer Verschiebung der Meßplatte in vertikaler Richtung um 0,1 mm bereits eine Kraftänderung von 6%, und es läßt sich bei diesem Einfluß nur sagen, daß die Meßwerte um das Potenzgesetz streuten, die Oberflächen im Versuchsbereich (bis $Re_x = 10^7$) also ebenfalls hydraulisch glatt sind.

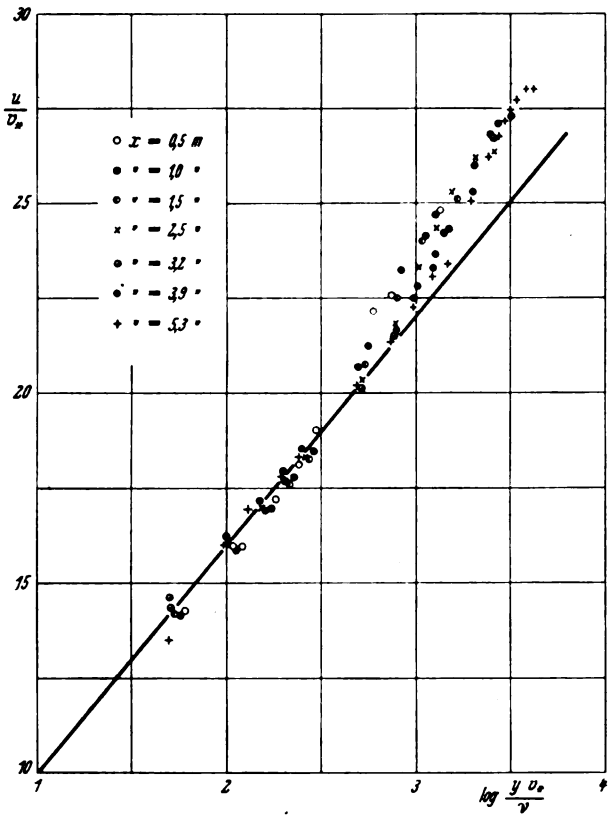


Bild 7. Geschwindigkeitsprofile an der Platte.

V. Gesetzmäßigkeiten der Geschwindigkeitsverteilung.

Die Geschwindigkeitsverteilungsgesetze in der freien Reibungsschicht leiten sich aus den gleichen Gesichtspunkten her wie bei der Rohrströmung [1]. Es bestehen zwei solche Gesetze [7], eines für die Wandnähe und eines für das übrige Gebiet der Reibungsschicht [1]. Das erste ergab sich aus dem Umstand, daß in Wandnähe der Wandabstand die kennzeichnende Größe für den Strömungszustand ist. Es drückt sich in der Beziehung aus

$$\frac{u}{v^*} = f_1\left(\frac{v^* y}{\nu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5a)$$

Für nicht zu kleine Wandabstände wird

$$\frac{u}{v^*} = A \log \frac{y\,v^*}{\nu} + B, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5b)$$

wo A und B universelle Konstanten sind, die sich aus dem Versuch ergeben. Das zweite Gesetz ergab sich aus der Überlegung, daß die Ähnlichkeit der Strömung in den größeren Wandabständen durch den Rohrhalbmesser bzw. die Reibungsschichtdicke δ allein bestimmt ist. Hier gilt

$$\frac{U-u}{v^*} = f_2\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Am Rohr ergab sich, daß f_2 in leidlich guter Näherung aus (5b) bestimmt werden kann, also das wandnahe Gesetz über den ganzen Rohrradius extrapoliert werden darf.

Die Auftragung der Geschwindigkeitsmessungen in Bild 7 u. 8 läßt solche Gesetzmäßigkeiten daran erkennen, daß sich die Meßpunkte in Wandnähe bzw. in Wandferne auf einer einzigen Kurve anordnen. Das ist insbesondere in Bild 8 der Fall, und zwar in dem ganzen Meßbereich mit Ausnahme des wandnächsten Meßpunktes. Nach der Wand hin laufen in diesem Bild die Meßpunkte in eine Gerade ein, ein Zeichen dafür, daß hier das lineare Wandgesetz (5b) gültig wird, welches auch in Bild 7 deutlich hervortritt. Für die Konstanten ergeben sich hier die Werte

$$A_P = 5{,}93, \quad B_P = 4{,}07,$$

wo Index P auf die Platte hindeutet. Aus den Rohrversuchen hatte sich dagegen [1]

$$A_R = 5{,}74, \quad B_R = 5{,}46,^2)$$

ergeben. Diese Konstanten sind bei der Errechnung des logarithmischen Plattenwiderstandsgesetzes [1] mit der Beziehung (5b) abgeändert worden zu

$$A_R' = 5{,}85, \quad B_R' = 5{,}56,$$

²) Die Werte entsprechen Mittelwerten kleiner und großer Reynoldsscher Zahlen, die bei der Ermittlung des logarithmischen Widerstandsgesetzes zunächst zugrunde gelegt wurden. Für hohe Reynoldssche Zahlen sind die Werte $A_R = 5{,}84$, $B_R = 5{,}52$ besser.

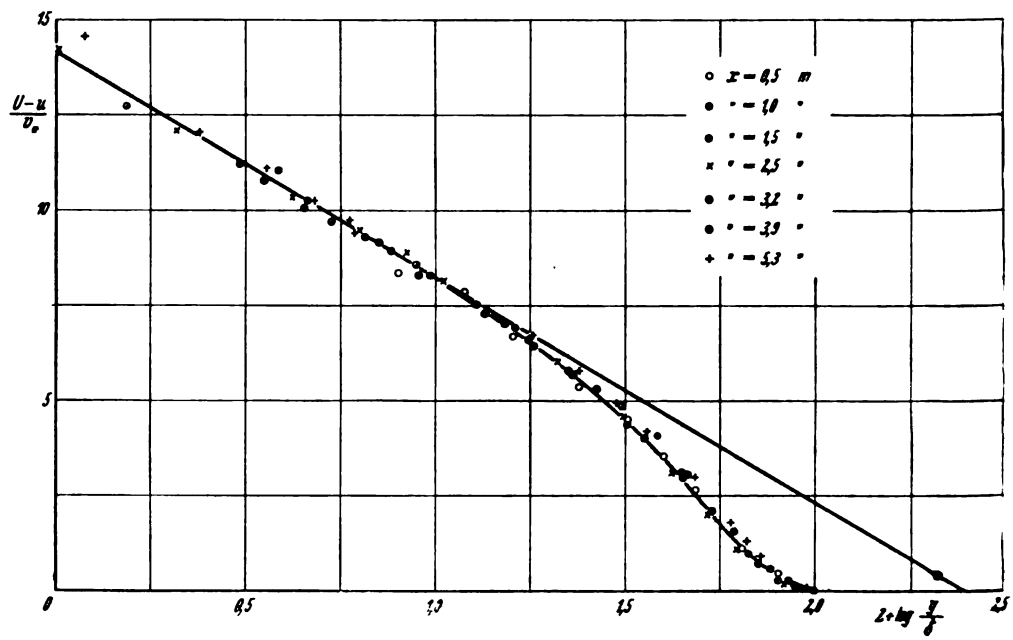


Bild 8. Geschwindigkeitsprofile an der Platte.

Digitized by Google

um Übereinstimmung mit den Kempfschen Versuchen [3] zu erhalten. Man darf also feststellen, daß abgesehen von einer geringen Abweichung in den experimentellen Konstanten das gleiche wandnahe Gesetz wie im Rohr besteht. Jedoch zeigt Bild 8 in der Wandferne noch mehr als bei der Rohrströmung eine deutliche Abweichung von diesem Gesetz, indem nämlich die Meßpunkte von der Geraden nach unten abbiegen, um die Abszisse vor der Geraden zu erreichen. Hier liefert die Übertragung der Rohrströmung auf die Platte also eine weniger gute Näherung, denn die Gerade ergibt $\frac{U-u}{v^*}=0$ bei einem zu großen Abszissenwert, und da mit diesem Wert die Reibungsschichtdicke definiert wird, so rechnete man mit einer etwas zu großen Reibungsschichtdicke, erhielt dadurch einen zu großen Impulsverlust und damit etwas zu großen Widerstand. Damit ist die Erklärung für den Unterschied unserer Widerstandsmessungen mit dem logarithmischen Widerstandsgesetz gefunden.

In Bild 8 zeigt sich wie gesagt eine universelle Abhängigkeit von $\frac{y}{\delta}$ nahezu im ganzen Meßbereich. Nur der wandnächste Meßpunkt weicht ab und läßt daran die Zähigkeitswirkung in unmittelbarer Wandnähe erkennen. Die Reichweite der $\frac{y}{\delta}$-Abhängigkeit liegt bei den einzelnen Meßreihen zwischen $0{,}0039 \leq \frac{y_1}{\delta} \leq 0{,}02$, welchen Werten $\log \frac{y_1 v^*}{\nu}=1{,}2$ entspricht, wo Index 1 die Gültigkeitsgrenze kennzeichnen soll. Bei der Kleinheit von $\frac{y_1}{\delta}$ fragt man sich, ob es erlaubt ist, die Gerade in Bild 8 bis zur Wand fortzusetzen. Die Frage wird bei der späteren Ermittlung des Widerstandsgesetzes wichtig, da dabei über y zu integrieren ist. Wir prüfen sie im Hinblick auf ihre spätere Verwendung an den Integralen $\int_0^1 f_2\, d\left(\frac{y}{\delta}\right)$, $\int_0^1 f_2^2\, d\left(\frac{y}{\delta}\right)$. Mit der in Bild 8 angegebenen Kurve ergibt sich

$$\int_0^1 f_2\, d\left(\frac{y}{\delta}\right)=3{,}34; \quad \int_0^1 f_2^2\, d\left(\frac{y}{\delta}\right)=21{,}4.$$

Um diese Werte am Versuch zu prüfen, wird mit Hilfe von (6) umgeformt auf

$$\int_0^1 f_2\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\frac{U}{v^*}\frac{\delta^*}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

$$\int_0^1 f_2^2\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\left(\frac{U}{v^*}\right)^2\frac{\delta^*-\vartheta}{\delta} \quad \ldots\ldots \quad (7b)$$

$\frac{U}{v^*}$ wurde mit der Ausgleichskurve *IV* in Bild 6 nach der Beziehung $\left(\frac{v^*}{U}\right)^2=2\,c_f'$ bestimmt. Die daraufhin mit Bild 5 erhaltenen Integrale sind in der Zahlentafel angeführt. Sie weichen nur wenig von ihren konstanten Mittelwerten ab, die vollständig mit den oben gefundenen Werten übereinstimmen, so daß die Extrapolation bis zur Wand durchaus zulässig ist. Mit diesen Zahlenwerten ergeben sich aus (7) folgende Beziehungen für die Verdrängungs- und Impulsdicke

$$\frac{\delta^*}{\delta}=2{,}36\sqrt{c_f'}; \quad \frac{\vartheta}{\delta}=\frac{\delta^*}{\delta}-10{,}7\,c_f'.$$

VI. Widerstandsgesetz.

Man könnte zunächst daran denken, ohne Rücksicht auf die hier gefundene Geschwindigkeitsverteilung das logarithmische Widerstandsgesetz beizubehalten und es durch nochmaliges Ändern der Konstanten A_R, B_R mit unserer Ausgleichskurve *IV* in Bild 6 in Übereinstimmung zu bringen. Das ist aber nicht möglich. Man erreicht damit nur eine Parallelverschiebung der alten Kurve *I*, wogegen die Ausgleichskurve sehr deutlich eine andere Neigung aufweist, also auch eine Drehung der Kurve *I* notwendig wäre.

Wir legen daher unsere universelle Geschwindigkeitsverteilung (Bild 8) zugrunde und leiten aus (1) ein neues Plattenwiderstandsgesetz her. Zu dem Zweck darf in (1) die Funktion f_2 eingeführt werden, da sich ihre Extrapolation bis zur Wand als zulässig erwiesen hat. Man erhält mit (7)

$$\left(\frac{v^*}{U}\right)^2=\frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{v^*}{U}\int_0^1 f_2\, d\,\frac{v}{\delta}-\left(\frac{v^*}{U}\right)^2\int_0^1 f_2^2\, d\,\frac{y}{\delta}\right)\right].$$

Mit den oben angegebenen Werten für die Integrale wird, wenn man noch an Stelle von x, $\delta: Re_x$, Re_δ einführt,

$$\left(\frac{v^*}{U}\right)^2=\frac{d}{d\,Re_x}\left[Re_\delta\left(3{,}34\,\frac{v^*}{U}-21{,}4\left(\frac{v^*}{U}\right)^2\right)\right] \quad \ldots \quad (8)$$

Hier treten zwei unbekannte Funktionen $\frac{v^*}{U}$, Re_δ auf, für die noch eine Beziehung anzugeben ist.

Dazu sei bemerkt, daß sich die Geschwindigkeitsverteilung sowohl zu $\frac{y}{\delta}$ als auch zu $\frac{y\,v^*}{\nu}$ in Beziehung setzen läßt, was sich bereits an (5), (6) zeigte. Hat man insbesondere die Abhängigkeit

$$\frac{u}{v^*}=a_1+b\ln\frac{y\,v^*}{\nu}, \quad \ldots\ldots \quad (9a)$$

$$\frac{U-u}{v^*}=a_2-b\ln\frac{y}{\delta}, \quad \ldots\ldots \quad (9b)$$

so erhält man aus ihrer Identität die gesuchte Beziehung

$$\frac{U}{v^*}=a_1+a_2+b\log\frac{v^*\delta}{\nu}$$

oder

$$Re_\delta=\frac{U}{v^*}e^{\frac{1}{b}\left(\frac{U}{v^*}-a\right)} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

mit $a=a_1+a_2$.

Durch (9) soll nun die Tangente der Geschwindigkeitsverteilung in einem Punkte der wandnahen, zähen Flüssigkeitsschicht ausgedrückt werden. Dabei lassen wir a und b vorläufig unbestimmt und wählen diese Konstanten späterhin so, daß das Widerstandsgesetz, das wir erhalten werden, in zwei Punkten, d. h. bei zwei Re_x-Zahlen mit dem Experiment, d. h. der Ausgleichskurve *IV* in Bild 6 übereinstimmt. Wir machen also keine näherungsweise Annahme über den Geschwindigkeitsverlauf in der unmittelbaren Wandnähe, sondern greifen hier lediglich eine gewisse Tangente aus dem $\frac{U}{v^*}=f\left(\frac{y\,v^*}{\nu}\right)=$ bzw. $\frac{U}{v^*}=f\left(\frac{y}{\delta}\right)$-Verlauf heraus, deren nähere Bestimmung wir uns noch vorbehalten.

Mit (10) in (8) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\left(\frac{v^*}{U}\right)^2=\frac{d}{d\,Re_x}\left\{\frac{U}{v^*}e^{\frac{1}{b}\left(\frac{U}{v^*}-a\right)}\left[3{,}34\,\frac{v^*}{U}-21{,}4\left(\frac{v^*}{U}\right)^2\right]\right\}$$

für $\frac{v^*}{U}$ und damit auch für c_f', da $\frac{v^*}{U}=\sqrt{2\,c_f'}$. In abgekürzter Schreibweise lautet sie mit

$$\frac{U}{v^*}=\eta;\ Re_x=\zeta;\ \frac{a}{b}=\beta$$

$$\frac{1}{\eta^2}=\frac{d}{d\,\zeta}\left\{e^{\frac{\eta}{b}-\beta}\left(3{,}34-\frac{21{,}4}{\eta}\right)\right\}.$$

Hieraus ergibt sich durch Ausdifferenzieren

$$\frac{1}{\eta^2}=\eta' e^{\frac{\eta}{b}-\beta}\left[\frac{1}{b}\left(3{,}34-\frac{21{,}4}{\eta}\right)+\frac{21{,}4}{\eta^2}\right]$$

und weiterhin durch Variablentrennung

$$\zeta-\zeta_0=\int_0^\eta e^{\frac{\eta}{b}-\beta}\left[\frac{1}{b}\,(3{,}34\,\eta^2-21{,}4\,\eta)+21{,}4\right]d\,\eta.$$

Digitized by Google

Die Integration ergibt

$$e^{\frac{\eta}{b}}(\zeta - \zeta_0) = e^{\frac{\eta}{b}}\left[3{,}34\,\eta^2 - (2\cdot 3{,}34\cdot b + 21{,}4)\,\eta + 2\cdot 3{,}34\cdot b^2 + 21{,}4\cdot b + 21{,}4\right]_{\eta_0}^{\eta}.$$

Wir integrieren von $\zeta_0 = 0$ aus. Dann ist $\eta_0 = 0$ ($v^* = \infty$), folglich ist die untere Integrationsgrenze auf der rechten Seite $2\cdot 3{,}34\,b^2 + 21{,}4\cdot b + 21{,}4$. Bei der numerischen Auswertung ergab sich für sie etwa der Wert 100, während die obere Integrationsgrenze bei 10^7 liegt, so daß sich die untere Integrationsgrenze ohne weiteres vernachlässigen läßt. Es lautet dann die Lösung

$$\ln\zeta = \frac{\eta}{b} - \beta + \ln\left[3{,}34\,\eta^2 - (6{,}64\cdot b + 21{,}4)\,\eta + 6{,}64\cdot b^2 + 21{,}4\,(b+1)\right], \quad . \; . \; . \quad (11)$$

welche unser neues Widerstandsgesetz, nämlich die c_f'-Abhängigkeit von Re_x ausdrückt. Vorläufig läßt sich aber damit nichts anfangen, da die Konstanten b, β noch unbekannt sind. Wir wollen sie nun so bestimmen, daß (11) mit der experimentellen Kurve in zwei Punkten übereinstimmt. Das ist der Fall, wenn

$$b = 2{,}895;\quad \beta = 1{,}25.$$

Hiermit ist unsere Tangente in der zähen Flüssigkeitsschicht bestimmt. Es erübrigt sich, ihre Lage festzustellen, da die Geschwindigkeitsverteilung in dieser unmittelbaren Wandnähe ohne Einfluß auf das Impulsintegral ist.

Mit den oben angegebenen Werten von b, β ergab sich nicht nur in den beiden Punkten Übereinstimmung mit der Ausgleichskurve *IV* in Bild 6, sondern praktisch auch im ganzen dazwischenliegenden Bereich, was als ein weiterer Beweis dafür angesehen werden mag, daß die erhaltenen Geschwindigkeitsverteilungsgesetze der Wirklichkeit entsprechen und universell gelten, so daß nun auch eine Extrapolation unseres Widerstandsverlaufes zu beliebig hohen Re_x-Zahlen erlaubt ist. Dies ist in Bild 9 bis $Re_x = 2\cdot 10^9$ durchgeführt. Zum Vergleich ist hier ebenfalls gestrichelt das logarithmische Gesetz eingetragen.

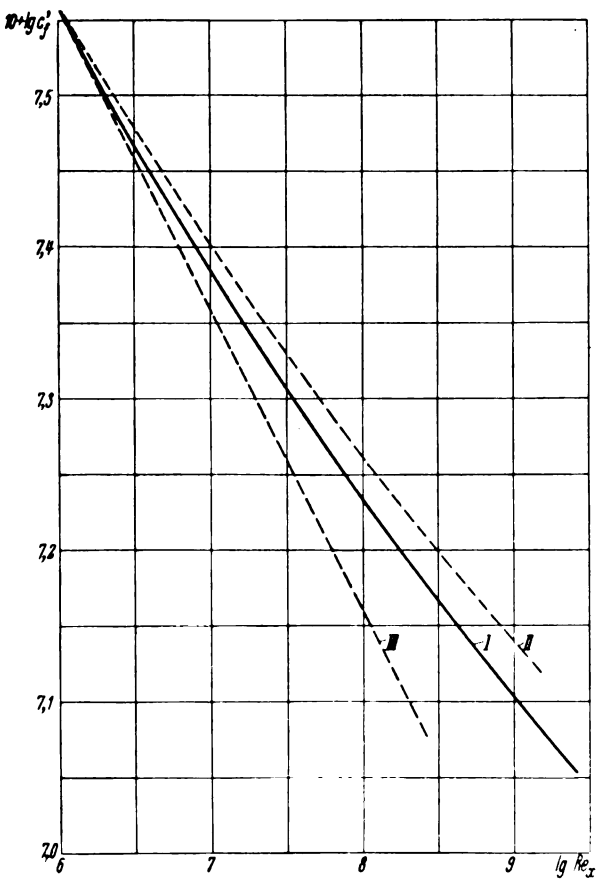


Bild 9. Neues Widerstandsgesetz der glatten Platte c_f'-Verlauf.

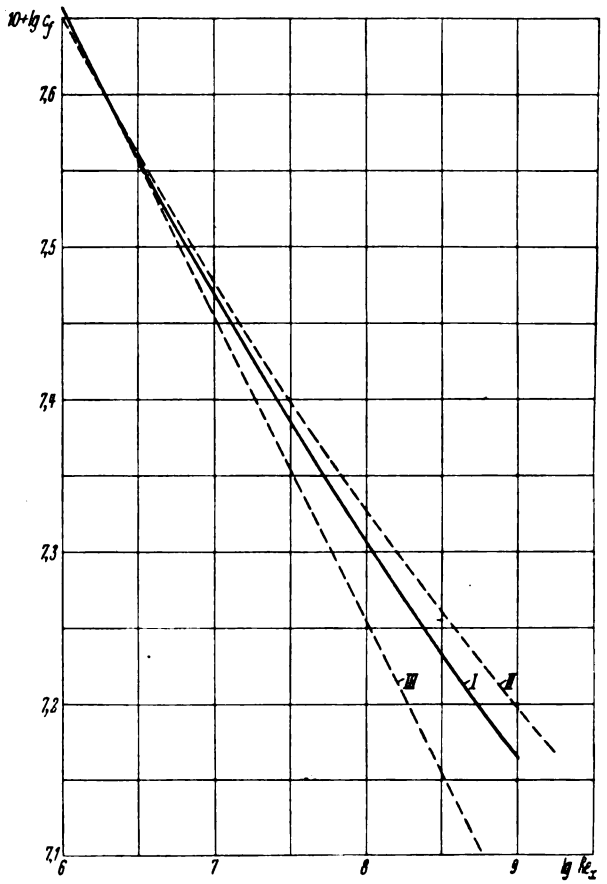


Bild 10. Neues Widerstandsgesetz der glatten Platte c_f-Verlauf.
I Neues Widerstandsgesetz,
II logarithmisches Widerstandsgesetz,
III alte Potenzformel $c_f = 0{,}072\,Re_x^{-1/5}$.

Die Gesamtwiderstandszahl c_f wurde aus Bild 9 mit der Beziehung

$$c_f = \frac{1}{x}\int_0^x c_f'\,dx,$$

die man leicht aus (2) herleitet, numerisch gewonnen. Sie ist in Bild 10 wiedergegeben, wo wieder gestrichelt das logarithmische Gesetz und das alte Potenzgesetz zum Vergleich eingetragen ist. Bei den höchsten Re_x-Zahlen wird die Abweichung des logarithmischen Gesetzes sehr merklich.

Für die beiden neuen Widerstandsgesetze sind folgende Näherungsformeln für den Bereich $10^6 \leq Re_x \leq 10^9$ bestimmt worden

$$c_f' = \frac{0{,}370}{(\log Re_x)^{2{,}584}}$$

$$c_f = \frac{0{,}427}{(-0{,}407 + \log Re_x)^{2{,}64}}.$$

Sie entsprechen der von Prandtl [1] vorgeschlagenen Form für die Näherungsformel

$$c_f = \frac{m}{(\log Re_x + p)^n},$$

mit der man drei Punkte zur genauen Übereinstimmung bringen kann und die auch bei der Herleitung von (4) verwendet wurde. Wie damals bei der Herleitung von (4) ergab sich auch hier bei der Herleitung der c_f'-Formel p praktisch gleich Null.

VII. Schubspannungsverlauf und Mischungsweg-verteilung.

Den Schubspannungsverlauf erhalten wir aus dem auf die Flüssigkeitsschicht der Höhe y angewendeten Impulssatz

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u^2\,dy + u\,v = \frac{\tau - \tau_0}{\varrho}.$$

Digitized by Google

Bild 11 (rechts). Geschwindigkeitsverlauf in verschiedenen Wandabständen, $U = 19{,}4$ m/s.

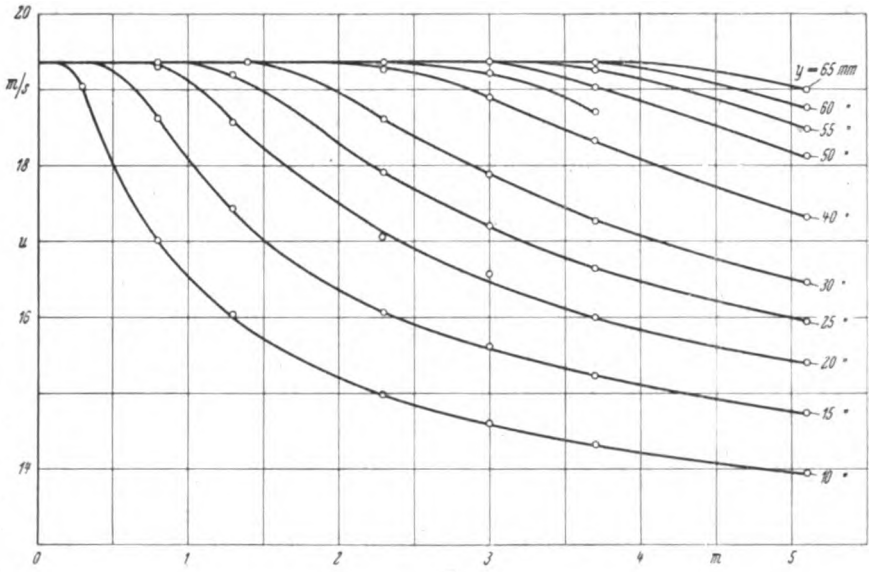
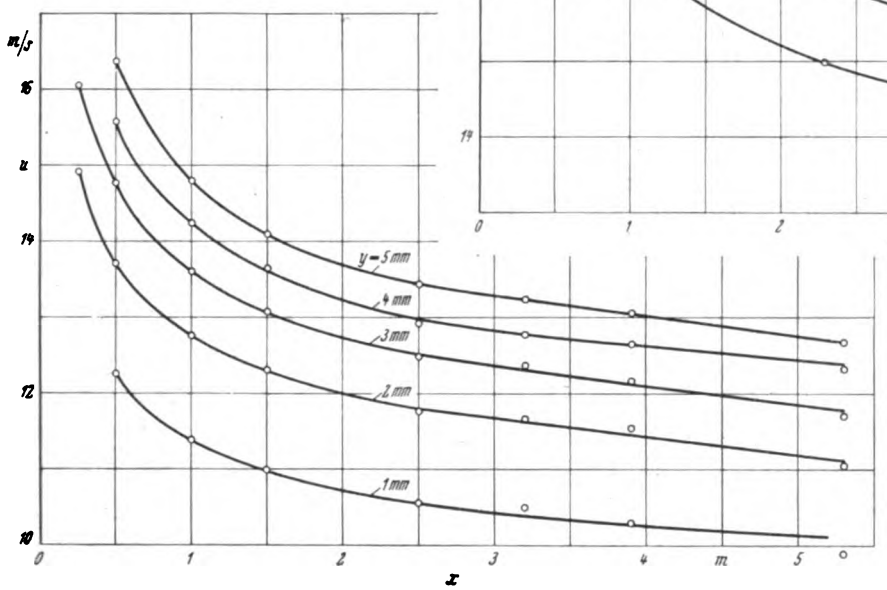


Bild 12 (unten). Geschwindigkeitsverlauf in verschiedenen Wandabständen, $U = 19{,}4$ m/s.



Zahlentafel 1. Auswertung der Geschwindigkeitsmessung.

Mittelwerte: $\int_0^1 f_2\, d\frac{y}{\delta} = 3{,}32$, $\int_0^1 (f_2)^2\, d\frac{y}{\delta} = 21{,}4$.

x m	U cm/s	log (Re_x)	$\frac{v_0}{U}$	δ cm	δ^* cm	ϑ cm	$\int_0^1 f_2\, d\,y/\delta$	$\int_0^1 f_2^2\, d\,y/\delta$	v_0 cm/s
0,5	1937	5,831	0,0444	1,30	0,187	0,131	3,20	21,9	—
1	1936	6,132	0,0414	2,24	0,306	0,222	3,30	21,9	3,96
1,5	1942	6,308	0,0398	3,07	0,410	0,301	3,36	22,3	3,67
2,5	1941	6,531	0,0381	4,62	0,584	0,446	3,30	20,6	3,20
3,2	1941	6,638	0,0373	5,62	0,700	0,538	3,34	20,8	3,30
3,9	1938	6,723	0,0367	6,60	0,810	0,624	3,35	21,0	3,45
5,3	1940	6,857	0,0358	8,40	1,022	0,796	3,40	21,0	—

Durch Ausdifferenzieren wird

$$2\int_0^y u\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dy + u\,v = \frac{\tau - \tau_0}{\varrho}.$$

Außerdem besteht die Kontinuitätsbeziehung

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Zur Ermittlung von $\frac{\partial u}{\partial x}$ wurde in Bild 11 und 12 der Geschwindigkeitsverlauf in verschiedenen Wandabständen aufgetragen. Der $\frac{\partial u}{\partial x}$-Verlauf ist in Bild 13, 14 und der Verlauf der Quergeschwindigkeit in Bild 15 wiedergegeben. Mit v_0 ist die maximale Quergeschwindigkeit, die am Rande der Reibungsschicht auftritt, bezeichnet. Die einzelnen v_0-Werte sind in der Zahlentafel zusammengestellt. Man erkennt daraus, daß v_0 höchstens etwa $2\,^0/_{00}$ der Anströmgeschwindigkeit beträgt. Die weitere Auswertung lieferte die in Bild 16 dargestellten Schubspannungsprofile. Hierzu ist zu sagen, daß die Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitsteilchens längs der Platte (kein Druckgradient)

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

lautet. An der Wand haftet aber die Flüssigkeit, folglich ist hier $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$. Diese Bedingung für die Anfangstangente ist bei den wiedergegebenen Schubspannungsprofilen nicht immer befriedigend erfüllt, was man Ungenauigkeiten in der Auswertung zuschreiben muß, die wegen der Differentiation des $u\,(x)$ Verlaufes unvermeidlich sind. Die durch diese Impulsauswertung erhaltenen Wandschubspannungen sind kleiner, im Höchstfall 5%, als die durch die Waagenmessung erhaltenen, wonach man die Zuverlässigkeit der Auswertung beurteilen kann.

Den Mischungsweg erhält man aus dessen Definitionsformel

$$\frac{\tau}{\varrho} = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Der erhaltene Mischungswegverlauf ist in Bild 17 angegeben. Er nähert sich bereits bei $\frac{y}{\delta} = 0{,}4$ dem konstanten Mittelwert $\frac{l}{\delta} = 0{,}072$. Für die Wandtangente besteht die Be-

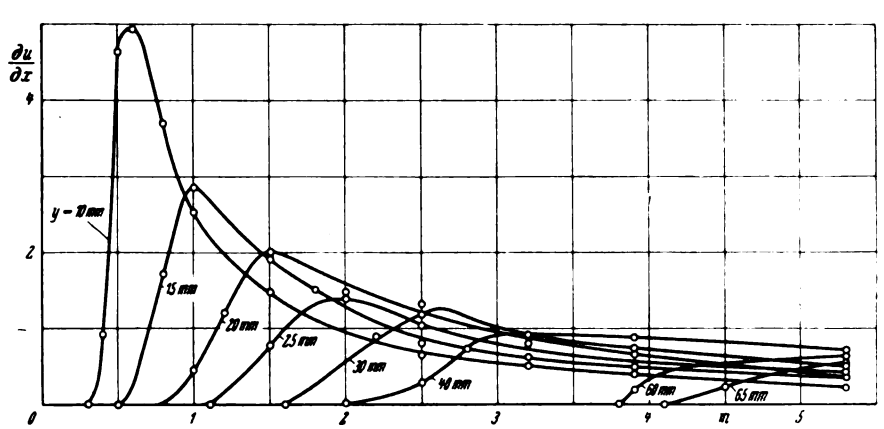


Bild 13. $\frac{\partial u}{\partial x}$-Verlauf, $U = 19{,}4$ m/s.

Digitized by Google

ziehung $l = 0{,}43\,y$, welche also nicht stark von der am Rohr gefundenen Beziehung $l_R = 0{,}4\,y$[3]) abweicht. Ein Unterschied muß wegen der unterschiedlichen Schubspannungsprofile bestehen.

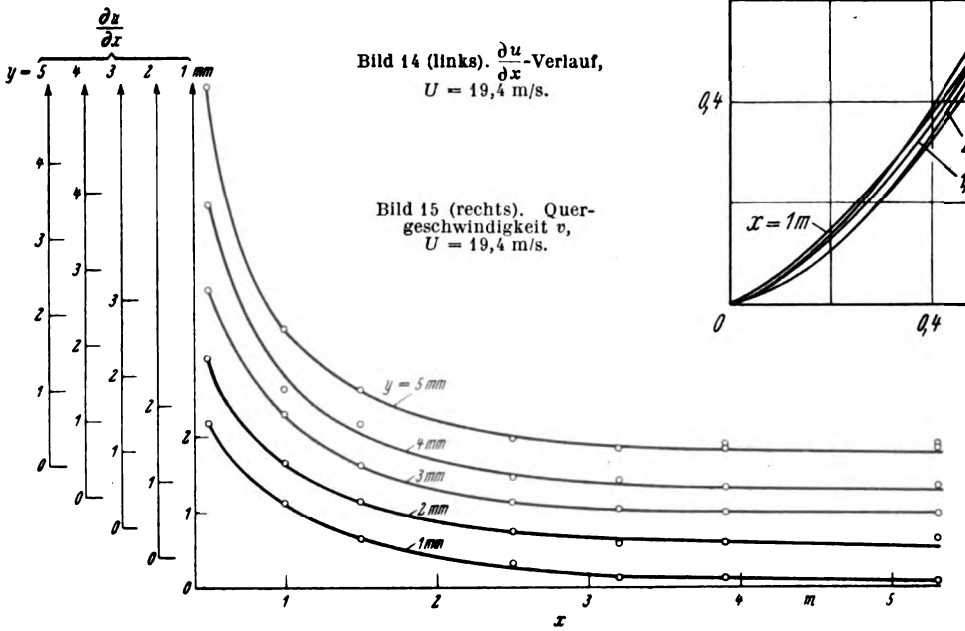
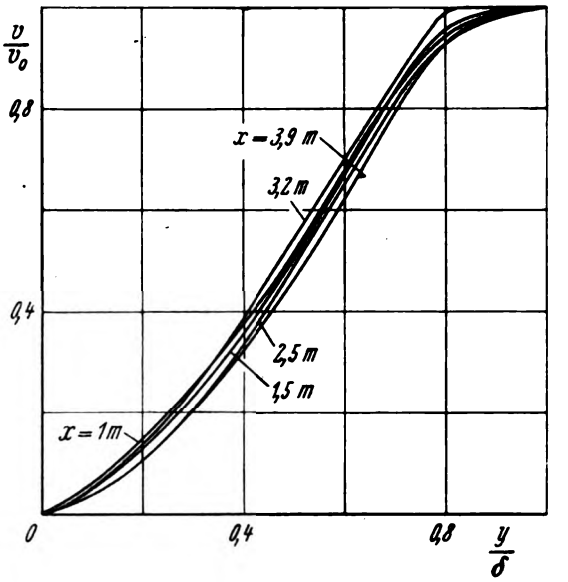


Bild 14 (links). $\frac{\partial u}{\partial x}$-Verlauf, $U = 19{,}4$ m/s.

Bild 15 (rechts). Quergeschwindigkeit v, $U = 19{,}4$ m/s.



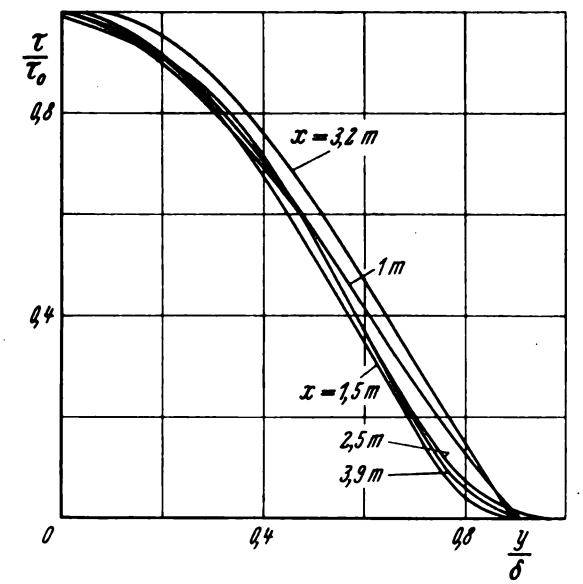


Bild 16. Schubspannungsprofile, $U = 19{,}4$ m/s.

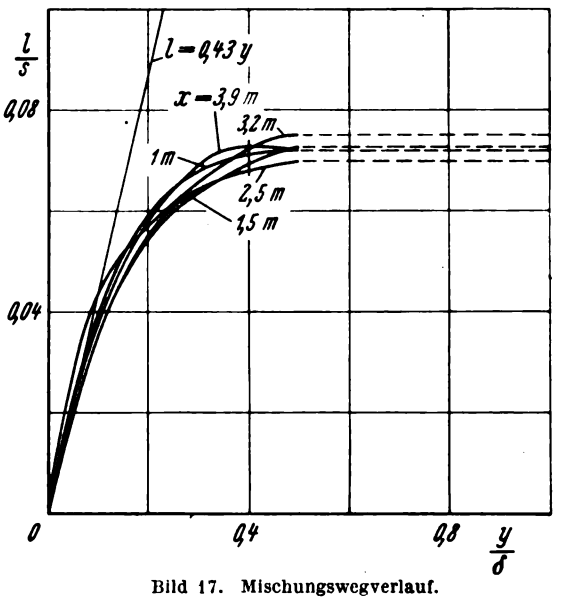


Bild 17. Mischungswegverlauf.

VIII. Zusammenfassung.

Es wurden Messungen in der freien Grenzschicht einer Platte bekanntgegeben, daraus die Gesetzmäßigkeiten der Geschwindigkeitsverteilung und ein neues Widerstandsgesetz hergeleitet, das mit wachsender Re_x-Zahl kleinere Widerstandszahlen als das logarithmische Gesetz liefert, fernerhin wurden die Quergeschwindigkeiten, die Schubspannungs- und Mischungswegprofile ermittelt.

IX. Schrifttum.

[1] L. Prandtl, Zur turbulenten Strömung in Rohren und Längsplatten. Erg. Aerodyn. Vers.-Anst. zu Göttingen, IV. Lieferg., S. 18, München 1932.

[2] F. Gebers, Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Wasserwiderstandes gegen bewegte Körper. Schiffbau Bd. 9 (1908).

[3] G. Kempf, Neue Ergebnisse der Widerstandsforschung. Werft, Reederei, Hafen, Bd. 10 (1929), S. 234 u. 247.

[4] C. Wieselsberger, Untersuchungen über den Reibungswiderstand von stoffbespannten Flächen. Erg. Aerodyn. Vers.-Anst. zu Göttingen, I. Lieferg., S. 120, München 1925.

[5] L. Prandtl, Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Erg. Aerodyn. Vers.-Anst. zu Göttingen, III. Lieferg., S. 1, München 1927.

[6] K. Schönherr, Resistance of Flat Plates. Transactions Soc. Naval Architects and Marine Engineers, Bd. 40 (1932).

[7] L. Prandtl, Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI Bd. 77 (1933), S. 105.

[3]) 0,4 ist der Mittelwert kleiner und großer Reynoldsscher Zahlen. Bei hohen Reynoldsschen Zahlen besteht der Wert 0,415.

Digitized by Google

Zur Dauerfestigkeit von Duralblech-Nietungen.

Von E. Hottenrott.

Bericht der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen a. B.

Im Metallflugzeugbau erfolgt die Verbindung der einzelnen Behäutungsteile untereinander und mit dem tragenden Fachwerk in der Regel durch Nietung. Die Bemessung geschieht dabei auf Grund der für die Werkstoffe bekannten statischen Festigkeitszahlen für Nietscherung, Lochleibung und Blechbeanspruchung.

Für die Wahl der Nietart sind neben den statischen Festigkeitsforderungen noch der Herstellungsaufwand an Zeit und Werkzeug und die erreichbare Oberflächengüte maßgebend. Als Glattblechnietungen kommen solche mit Flachsenkkopf in Frage: Pilzkopfnietung mit Flachsenk-Schließkopf und Flachsenknietung mit Flachsenk-Setzkopf und eingezogenem oder angesenktem Blech. Es ist bekannt, daß diese verschiedenen Nietungen bei gleichen Abmessungen und gleichen Ausgangswerkstoffen recht verschiedene statische Bruchlasten liefern können, so daß für die üblichen Nietrechnungswerte Zuschläge oder Abzüge zur wirtschaftlichen Werkstoffausnutzung erforderlich werden. Dagegen liegen bisher fast keine Werte vor, die auf die Dauerfestigkeit solcher Nietungen schließen lassen.

Im folgenden wird über die im Rahmen eines vorklärenden Versuchs mit einer Dural-Nietverbindung erhaltenen Dauerfestigkeitswerte bei verschiedenen Nietarten berichtet.

Gliederung.

I. Untersuchte Nietungen.
II. Statische Bruchfestigkeit.
III. Dauerversuche.
IV. Ergebnisse.

I. Untersuchte Nietungen.

Für die Versuche wurde eine einreihige, einschnittige Nietverbindung verwandt, wie sie für einen bestimmten Verwendungszweck bemessen war. Mit einer Blechstärke von 1 mm, einem Nietdurchmesser von 3,0 mm bzw. Bohrungsdurchmesser von 3,1 mm und einer Nietteilung von 20 mm wird das Verhältnis Blechspannung zu Nietscherspannung zu Lochleibung

$$\sigma_z : \tau : \sigma_L = 1 : 2{,}24 : 5{,}45.$$

Bild 1 zeigt den Probekörper; die Bleche und Laschen sind Duralumin plattiert (Werkstoff 3116.5), das in Walzrichtung beansprucht wird. Die gemessenen Festigkeitswerte sind $\sigma_F = 30$ bis 34 kg/mm², $\sigma_B = 42$ bis 45 kg/mm² und $\delta_{10} = 19$ bis 21%.

Die sechs verschiedenen Ausführungen *A* bis *F* der Verbindung sind in Bild 2 im Schnitt dargestellt. *A* ist Pilzkopfnietung nach DIN L 174; Blech, Lasche und schwaches Versteifungsprofil eingezogen, Niet von innen gesteckt, Flachsenkkopf außen von Hand geschlagen. Bei *B* sind ebenfalls die Bleche eingezogen, doch ist ein Flachsenkniet DIN L 175 von außen gesteckt und innen ein Flachkopf geschlagen. Die Nietung *C* hat Flachsenkniet bei spanabhebend versenktem Behäutungsblech; die Senktiefe ist gleich der Blechdicke. *D* stellt eine Nietung mit Rundkopfniet DIN L 71 dar. Die beiden letzten Nietungen haben an Stelle des Laschenblechs ein Preßprofil von 3 mm Dicke, dabei ist bei *E* das Profil angesenkt und das Behäutungsblech eingezogen, während bei *F* das Behäutungsblech wie bei *C* angesenkt ist. Die Scherbruchfestigkeit der verwendeten Duralniete (3115.4) betrug etwa 27 kg/mm².

II. Statische Bruchfestigkeit.

Für die Zerreißprüfung wurden je zwei Verbindungen *A* bis *F* entsprechend Bild 1 in einer Amsler-10 t-Maschine nach mehr als 5tägiger Aushärtung bei Raumtemperatur zu Bruch gebracht. Gleichzeitig wurde die bei einer freien Meßstrecke von 200 mm auftretende Dehnung mit einem einfachen Gerät aufgeschrieben. Der Last-Formänderungsverlauf der Nietungen *A* bis *F* ist in Bild 3 dargestellt. Die Mittelwerte der Bruchlasten für einen Niet und die daraus mit dem Nenndurchmesser der Bohrung (3,1 mm) errechneten Nennscherbeanspruchungen sind danach:

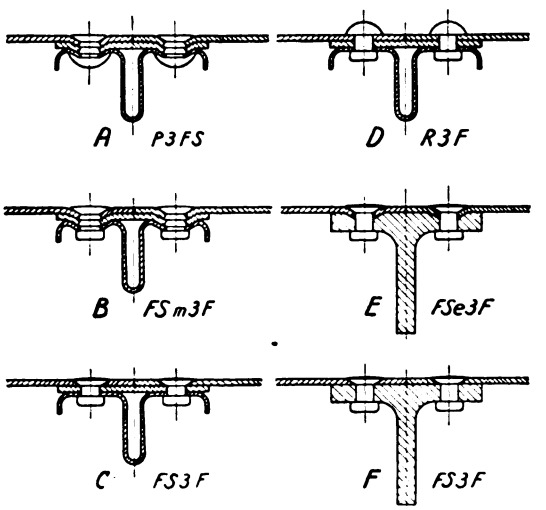


Bild 2. Untersuchte Nietarten.

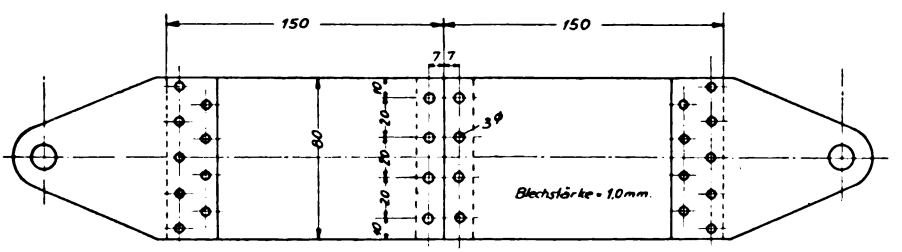


Bild 1. Nietverbindung.

Digitized by Google

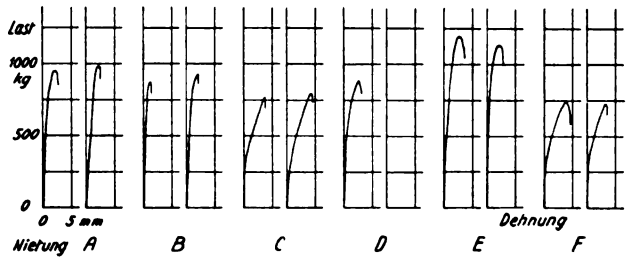


Bild 3. Last-Dehnungsschaubilder.

Nietung	A	B	C	D	E	F
Bruchlast/Niet kg. .	243	229	197	227	293	186
Nenn-Scherspannung kg/mm²	32,3	30,4	26,2	30,2	38,9	24,7
Scherwinkel ° . . .	20	20	0—10	0	20—35	0

Der höchste Wert tritt bei dem 3 mm-Profil und eingezogenem Blech auf (*E*); die Nietungen *A*, *B* und *D* sind verhältnismäßig wenig verschieden. Die geringsten Werte treten bei den Nietungen *C* und *F* mit versenktem Blech auf, bei denen ziemlich reines Abscheren der Niete erfolgt. Die höheren Werte der anderen Nieten erklären sich einerseits aus dem größeren Scherquerschnitt, der sich durch das Ausfüllen der beim Einziehen aufgeweiteten Löcher mit Nietwerkstoff ergibt, andererseits durch das Auftreten einer Kraftkomponente in Längsrichtung des Niets, wodurch die Abtrennung unter einem Winkel zur Blechebene und damit in einem größeren Querschnitt erfolgt.

In der obigen Zahlentafel sind diese Winkel mit eingetragen, sie sind deutlich den verschiedenen Bruchlasten zugeordnet.

Die Dehnungen nehmen bei den Nietungen *A*, *B*, *D*, *E* erst bei etwa 700 kg stärker zu. Bei den Nietungen mit versenkten Blechen *C* und *F* beginnt die Abweichung von geradlinigem Anstieg und damit bleibende Formänderung schon bei 250 kg. Messungen auf der nicht abgescherten Seite der Zerreißproben ergaben eine Verschiebung des Bleches gegen die Niete dieser Seite um 0,7 bis 1,1 mm, wovon 0,5 bis 0,7 mm durch Lochaufweitung und der Rest durch Verformung des Nietes entstanden waren.

III. Dauerversuche.

Zur Dauerprüfung der Proben nach Bild 1 wurde eine in der Nähe der Resonanz betriebene Schwinghebelmaschine verwendet. An einem zwischen Probe und Einspannung eingeschalteten Kraftmesser konnte die obere und untere Lastgrenze abgelesen werden, Bild 4.

Die Zugbelastung erfolgte zwischen einer oberen jeweils bis zum Bruch konstant gehaltenen Last und einer für alle Stufen gleichen unteren Last von 30 kg, so daß etwa Ursprungsbelastung aufgebracht wurde. Die Lastwechselfrequenz betrug 1000 bis 1200 U/min.

In Bild 5 sind die erhaltenen Lastwechselzahlen in Abhängigkeit von der oberen Last (Wöhler-Kurven) aufgetragen und zugleich auf der Lastachse die Punkte für die statischen Zerreißlasten. Die auf der Lastachse angegebenen oberen Blechspannungen sind als Nennspannungen ohne Berücksichtigung der Versenkungen gerechnet. Danach liegt die 2-Millionengrenze für die 6 Nietungen etwa wie folgt:

Nietung	A	B	C	D	E	F
ob. Last f. 1 Niet kg	70	60	55	62,5	97,5	75
ob. Nennspannung im Blech kg/mm² . . .	4,1	3,5	3,2	3,7	5,8	4,4
Bruchstelle: L = Lasche, B = Behäutg. . . .	L	L	B	L	B	B

Der höchste Wert, Nietung *E*, liegt um 80% über dem Wert der Nietung *C*. Bei der Zuordnung der Festigkeiten und Bruchformen fällt auf, daß die gebrochenen Nietungen *A*, *B* und *D* mit einer 2-Millionengrenze zwischen 4,1 und

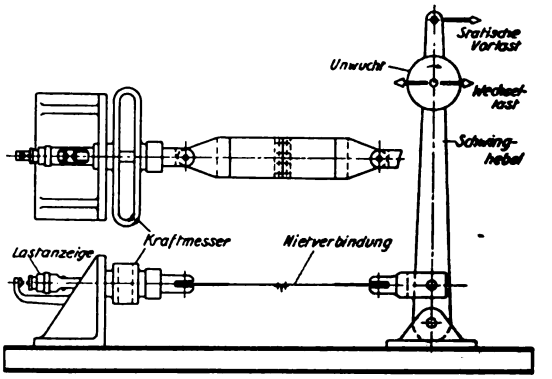


Bild 4. Dauerprüfmaschine.

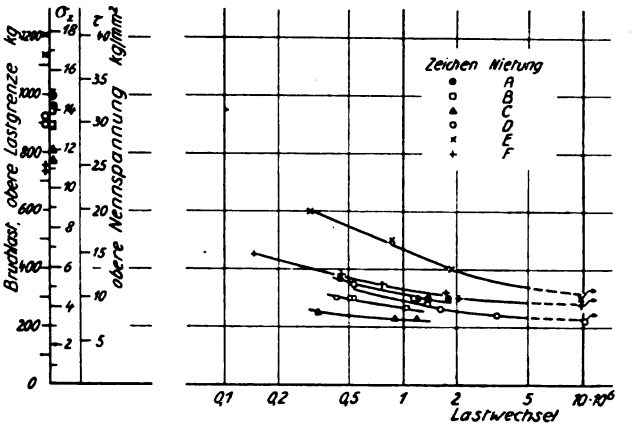


Bild 5. Wöhler-Kurven.

3,5 kg/mm² sich nicht wesentlich in ihrer Dauerfestigkeit unterscheiden. Das Behäutungsblech brach bei den Nietungen *C*, *E* und *F*, die Dauerfestigkeiten liegen bei 3,2, 5,8 und 4,4 kg/mm². Die Brüche erfolgten bei den aufgebrachten Lasten nur im Behäutungsblech oder in der Lasche. Eine Ausnahme bildete eine Probe der Nietung *F*, bei der mit einer Nennblechspannung von 6,7 kg/mm² nach 0,145 Millionen Lastwechseln gleichzeitig Dauerbruchansätze im Blech und Nietbrüche auftraten.

Bild 6 und 7 zeigen die zwischen 1 und 2 Millionen Lastwechseln erhaltenen Dauerbrüche der 6 Nietverbindungen. Die Laschenbrüche der Nietungen *A* und *B* verlaufen nicht durch den schwächsten Querschnitt in Nietmitte; vielmehr setzen Einzeldauerbrüche außen am Übergang vom ebenen Blech zur Einziehung an, die sich später vereinigen und zuletzt durch statisches Zerreißen der restlichen Materialfläche den vollständigen Bruch herbeiführen. Ähnlich ist der Verlauf der Laschenbrüche bei der Rundkopfnietung *D*, doch beginnen hier die Dauerbrüche meist am Lochrand, wie aus den mittleren Bruchansätzen zu erkennen ist. Gleichzeitig tritt an diesen Stellen starke Reiboxydation auf. Die Brüche im Blech bei der eingezogenen Nietung *E* entsprechen in ihrem Verlauf denen der Nietung *A* und *B*, sie beginnen außen am Übergang zur Einziehung (s. Bild 7 *E*, links). Die Nietungen *C* und *F*, bei denen das Blech angesenkt ist, ergaben Dauerbrüche, die vom scharfen Rand des versenkten Nietlochs ausgehen, und zwar von Stellen, an denen durch Scheuerungen zwischen Senkkopf und Blech Reiboxydation auftritt (s. Bild 6 *C*, links).

Die Formänderung der Nietverbindungen *A*, *B* und *E* durch die Dauerbeanspruchung war bei den untersuchten Beanspruchungen sehr gering, dagegen machte sie sich bereits bei der Rundkopfnietung (*D*) bemerkbar und war bei den Nietungen mit versenktem Blech *C* und *F* zum Teil sehr groß. So wurde bei einer mit 280 kg belasteten Probe *F* die Formänderung während des Dauerversuchs laufend durch

Digitized by Google

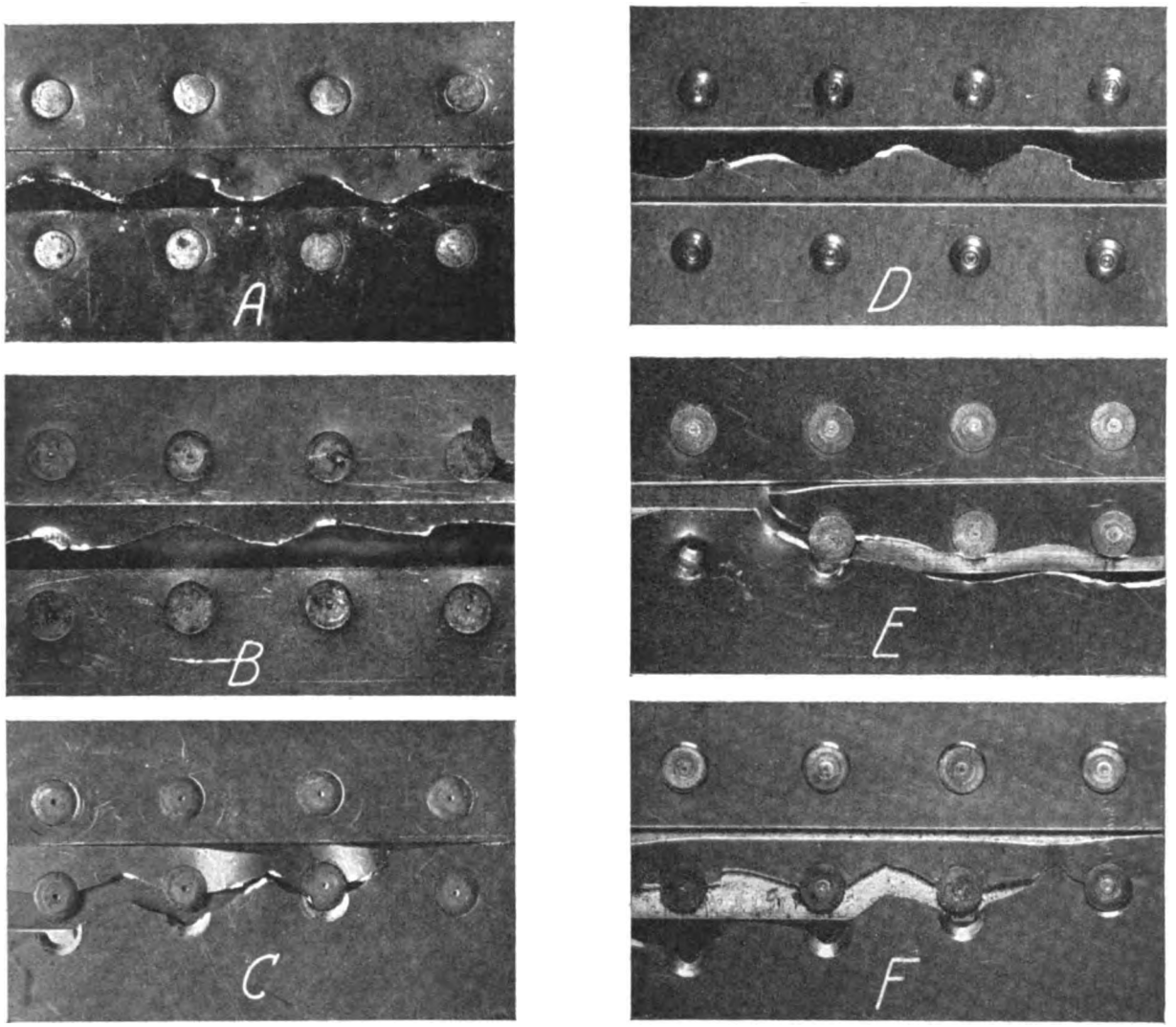


Bild 6 und 7. Die zwischen 1 und 2 Millionen Lastwechseln erhaltenen Dauerbrüche der sechs Nietverbindungen.

Messen des Abstandes der ursprünglich bündig gestoßenen Behäutungsbleche verfolgt. Der Spalt stieg von 0 bis 25000 Lastwechsel auf 1,2 mm und blieb dann während mehrerer Millionen Lastwechsel bis zum Bruch des Bleches gleich groß. Ähnlich wie beim statischen Bruchversuch war die Verschiebung auf die Lochausweitung (etwa 80%) und die Verformung des Niets (20%) zurückzuführen.

IV. Ergebnisse.

Rechnerisch würde sich nach der üblichen Rechnungsweise mit $\tau = 26$ kg/mm² für die untersuchten Nietungen eine Bruchlast für einen Niet von 195 kg ergeben. Die wirklich gemessenen Bruchlasten und die 2-Millionengrenze sind in folgender Zusammenstellung in % dieses Wertes angegeben.

Nietung	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Bruchlast/Niet % . .	125	117	101	116	150	96
2-Mill. Grenze/Niet %	36	31	28	32	50	38
Verhältnis 2-Mill. Grenze/Bruchlast	0,29	0,26	0,28	0,27	0,33	0,40

Für die Nietung *A*, *B*, *C* und *D* liegt die Bruchlast stets über der rechnerischen Last, und das Verhältnis der Dauergrenze zur Bruchlast ist fast konstant. Die Nietungen *E* und *F* mit eingezogenem und versenktem Blech auf 3 mm starkem Profil ergaben den höchsten und niedrigsten Wert der Bruchfestigkeit. *E* ergibt auch für die Dauerfestigkeit den Größtwert, dagegen liegt die Dauerfestigkeit von *F* entsprechend dem großen Verhältnis 0,4 der 2-Millionengrenze zur Bruchlast an 2. Stelle. Zur Erklärung der Unterschiede in den Festigkeitswerten sind vor allem folgende Gesichtspunkte maßgebend:

1. Bei den eingezogenen Blechen tritt eine Vergrößerung der kraftübertragenden Fläche und damit geringere örtliche Beanspruchung ein.
2. Bei den eingezogenen Nietungen und den Nietungen mit Preßprofil wird eine bessere Führung der Niete und eine bessere Einspannwirkung durch die Niete erreicht.
3. Bei den eingezogenen Blechen ist der Übergang vom glatten Blech zur Einziehung Ausgang der Dauerbrüche, d. h. also die Stelle der größten Verformung. Es ist möglich, daß an diesen Stellen eine ungünstige Gefügeumwandlung auftritt.
4. Bei den Nietungen mit versenktem Blech treten schon bei verhältnismäßig geringen Belastungen bleibende Formänderungen auf; diese ermöglichen Relativbewegungen und damit Reiboxydation, wodurch bekanntlich die Ermüdungsfestigkeit erheblich herabgesetzt wird.

Für die Bemessung von dauerbeanspruchten Blechnietungen können die vorliegenden Messungen noch keine Unterlagen geben. Sicher ist aber, daß das wirtschaftlichste Verhältnis von Blechstärke, Nietdurchmesser und Nietteilung sich gegenüber der rein statischen Bemessung

Digitized by Google

ändert. Die Richtung dieser Änderung ergibt sich daraus, daß in der Wöhler-Kurve von einer bestimmten Last ab der Nietbruch in einen Bruch des Blechs übergeht. Nietbrüche wurden bei den untersuchten Abmessungen bei statischer und in einem Falle bei hoher Dauerbelastung erhalten (Nietung *F*), sonst ergaben die Dauerversuche nur Brüche im Blech. Für die dauerbeanspruchten Nietungen könnte also die Scherbeanspruchung der Niete im Verhältnis zur Blechzugbeanspruchung vergrößert werden. Dabei muß beachtet werden, daß die Flugzeugbauteile im allgemeinen während ihrer Lebensdauer Beanspruchungen erfahren, die hohe Belastungen geringer Häufigkeit und niedrige Belastungen mit großen Lastwechselzahlen umfassen, so daß das günstigste Verhältnis der Abmessungen zwischen dem für rein statische und dem für reine Dauerbeanspruchung liegen wird.

Digitized by Google

Bemerkungen zur Lehre von den Kartenentwürfen.

Von J. Lense.

Bericht aus meinen Vorlesungen an der Technischen Hochschule München.

In dem Buch von A. Tissot (übersetzt von E. Hammer), »Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über die Abbildung beliebiger Flächen aufeinander« (Stuttgart 1887, J. B. Metzler), das auch heute noch die Grundlage für die Lehre von den Kartenentwürfen bildet, sind verschiedene Sätze und Formeln in einer vom mathematischen Standpunkt wenig befriedigenden Weise hergeleitet. Diese Überlegungen, soweit sie sich auf die Verzerrungssätze und die wichtigsten flächentreuen Entwürfe beziehen, werden in der Arbeit durch strenge, aber ganz elementare Begründungen ergänzt, ohne daß besondere differentialgeometrische Hilfsmittel herangezogen werden. Die Erde ist immer als Kugel vorausgesetzt.

Gliederung.

1. Hauptrichtungen.
2. Verzerrungssätze.
3. Flächentreue Entwürfe.
4. Der Bonnesche Entwurf.

1. Hauptrichtungen.

In dem Buch von A. Tissot (übersetzt von E. Hammer), »Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über die Abbildung beliebiger Flächen aufeinander« (Stuttgart 1887, J. B. Metzler), das auch heute noch die Grundlage für die Lehre von den Kartenentwürfen bildet, sind verschiedene Sätze und Formeln in einer vom mathematischen Standpunkt wenig befriedigenden Weise hergeleitet. Ich möchte im folgenden diese Überlegungen durch strenge, aber ganz elementare Begründungen ergänzen, ohne besondere differentialgeometrische Hilfsmittel heranzuziehen.

Bei den Kartenentwürfen handelt es sich um eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Teilen der Kugeloberfläche auf die Ebene. Wir setzen den Kugelhalbmesser = 1 und führen auf der Kugel die bei den Kartenentwürfen gebräuchlichen Polarkoordinaten α, δ ein: Einen beliebigen Punkt der Kugel, den sog. Hauptpunkt, wählen wir als Pol. Auf den durch ihn gehenden Großkreisen der Kugel, den Hauptkreisen, zählen wir den Bogen δ von 0 bis π. Einen dieser Hauptkreise wählen wir als Anfangshauptkreis und bezeichnen mit α den Winkel zwischen einem Hauptkreis und dem Anfangshauptkreis. α pflegt man von 0 nach beiden Seiten bis $\pm\pi$ zu zählen. Die Kreise δ = konst. nennt man Horizontalkreise. Der Zusammenhang von α, δ mit den gewöhnlichen geographischen Koordinaten Länge und Breite ergibt sich durch bekannte trigonometrische Umformungen.

In der Ebene, worauf die Kugel abgebildet wird, führen wir rechtwinkelige Koordinaten x, y ein. Die Abbildung ist dadurch gegeben, daß x, y umkehrbar eindeutige Funktionen von α, δ sind. Diese Funktionen sollen die im folgenden benötigten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften haben. Wir betrachten einen Kugelpunkt P und eine durch ihn hindurchgehende Kurve auf der Kugel. Sie sei dadurch bestimmt, daß α, δ als Funktionen der Bogenlänge s gegeben sind. Durch die Abbildung entsprechen dem Punkt P und der Kurve ein Punkt P' und eine durch ihn hindurchgehende Kurve, der Bogenlänge s die Bogenlänge s'. β sei der Winkel, den die Kurve in P mit

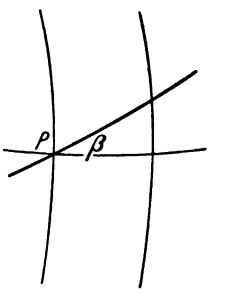


Bild 1.
Haupt- und Horizontalkreise auf der Kugel.

der durch P gehenden Linie δ = konst., Bild 1, β' der Winkel, den die Bildkurve in P' mit der X-Achse einschließt. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{d\delta}{\sin\delta\, d\alpha}, \quad \operatorname{tg}\beta' = \frac{dy}{dx} \\ ds^2 &= \sin^2\delta\, d\alpha^2 + d\delta^2, \quad ds'^2 = dx^2 + dy^2 \\ dx &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \delta}\, d\delta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \delta}\, d\delta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ferner $\mu = \frac{ds'}{ds}$ der Maßstab in P in der Richtung β. Wir führen nun die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sin\delta\, d\alpha, & \xi' &= dx \\ \eta &= d\delta, & \eta' &= dy \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

ein, wobei die Differentiale als die mit ds multiplizierten Differentialquotienten der betreffenden Funktionen nach der unabhängigen Veränderlichen s anzusehen sind. ds ist dabei eine willkürliche Konstante. Wir deuten ξ, η, ξ', η' als rechtwinkelige Koordinaten der Punkte Q und Q' in zwei Ebenen mit den Nullpunkten O und O'. Die Radienvektoren $r = OQ$, $r' = O'Q'$ schließen mit der ξ- bzw. ξ'-Achse nach (1) und (2) die Winkel β bzw. β' ein. Ferner erhält man aus (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= A\xi + B\eta \\ \eta' &= C\xi + D\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

und durch Auflösung mit $\Delta = AD - BC$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi &= D\xi' - B\eta' \\ \Delta\eta &= -C\xi' + A\eta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

wobei A, B, C, D bestimmte Konstante sind. Da die Abbildung umkehrbar eindeutig vorausgesetzt wurde, müssen sich auch $d\alpha$, $d\delta$ eindeutig durch dx, dy ausdrücken lassen, also muß $\Delta \neq 0$ sein.

Zufolge (4) geht ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser ϱ in einen Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt O' über. Weil

$$\mu = \frac{r'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ist und daher samt $\frac{1}{\mu}$ in P für alle Richtungen oberhalb einer festen positiven Zahl liegt, ist dieser Kegelschnitt

Digitized by Google

eine Ellipse. Den Fall, daß diese Ellipse in einen Kreis ausartet, wollen wir vorläufig ausschließen. Wir bezeichnen die Halbachsen der Ellipse mit σ' und τ'. Aus demselben Grund geht zufolge (3) ein Kreis mit dem Mittelpunkt O' und dem Halbmesser ϱ' in eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O und den Halbachsen σ und τ über. Weil in dem ersten Fall $r = \varrho$, im zweiten $r' = \varrho'$ ist, erkennt man aus (5) folgendes:

Es gibt im Punkt P zwei zueinander senkrechte Richtungen, denen im Bildpunkt P' durch die Abbildung zwei ebenfalls zueinander senkrechte Richtungen entsprechen, in denen der Maßstab seinen größten und kleinsten Wert a und b annimmt. Diese Richtungen nennt man die Hauptrichtungen. Setzen wir $\sigma' > \tau'$ voraus, so ist daher

$$a = \frac{\sigma'}{\varrho} = \frac{\varrho'}{\sigma}, \quad b = \frac{\tau'}{\varrho} = \frac{\varrho'}{\tau} \quad \ldots\ldots (6)$$

also $\sigma < \tau$.

Zufolge der umkehrbar eindeutigen Abbildung entspricht einem bestimmten Durchlaufungssinn von σ ein solcher von σ' und ebenso einem bestimmten Durchlaufungssinn von τ ein solcher von τ'. Die Radienvektoren r und r' schließen also mit der positiven Richtung der Halbachsen σ bzw. σ' zwei Winkel γ und γ' ein, die durch die Abbildung einander zugeordnet sind. Hat der Kreis statt des Halbmessers ϱ den Halbmesser 1, so sind die Halbachsen der Ellipse nach (6) a und b, der zum Winkel γ' gehörige Radiusvektor ist daher $\frac{r'}{\varrho}$, also wegen $r = \varrho$ nach (5) der Maßstab in der Richtung γ bzw. γ'.

2. Verzerrungssätze.

Wir beziehen die Koordinaten ξ, η und ξ', η' auf die mit einem bestimmten Durchlaufungssinn versehenen Hauptrichtungen als Achsenkreuz. Dann lauten die Gleichungen der beiden Kreise und Ellipsen

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= \varrho^2, & \frac{\xi'^2}{\sigma'^2} + \frac{\eta'^2}{\tau'^2} &= 1 \\ \frac{\xi^2}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{\tau^2} &= 1, & \xi'^2 + \eta'^2 &= \varrho'^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Es muß also nach (3) und (4) gelten

$$\begin{aligned} A^2 + C^2 &= \left(\frac{\varrho'}{\sigma}\right)^2, & C^2 + D^2 &= \Delta^2 \left(\frac{\varrho}{\sigma'}\right)^2, \\ AB + CD &= 0, & AC + BD &= 0, \\ B^2 + D^2 &= \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)^2, & A^2 + B^2 &= \Delta^2 \left(\frac{\varrho}{\tau'}\right)^2. \end{aligned}$$

Daraus schließt man $C = kA$, $B = -kD$, weil $A = C = 0$ wegen $\Delta \neq 0$ unmöglich ist, somit $k(A^2 - D^2) = 0$, also $k = 0$. Denn $A^2 = D^2$ würde auf $B^2 = C^2$, $\sigma = \tau$, $\sigma' = \tau'$ führen, was ebenfalls unmöglich ist. Man erhält daher

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= A\xi \\ \eta' &= D\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

mit A, $D > 0$ nach unserer Festsetzung über den Durchlaufungssinn. Dabei ist $\frac{D}{A} = \frac{b}{a}$, weil der Kreis mit dem Halbmesser 1 in die Ellipse mit den Halbachsen a, b übergeht. Wegen

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\eta}{\xi}, \quad \operatorname{tg}\gamma' = \frac{\eta'}{\xi'},$$

erhält man infolgedessen aus (8)

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\gamma \quad \ldots\ldots (9)$$

Die Ellipse mit den Halbachsen a und b nennt man die Indikatrix von Tissot.

Die Abbildung ist dann und nur dann winkeltreu, wenn $\gamma = \gamma'$, d. h. $a = b$ ist. In diesem Fall wird aus der Tissotschen Ellipse ein Kreis. Damit ist der früher ausgeschlossene Fall des Kreises ebenfalls erledigt.

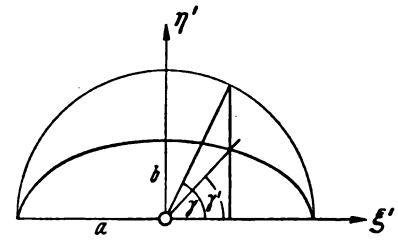


Bild 2. Tissotsche Indikatrix.

Wir wollen jetzt die Tissotsche Ellipse auf ihre Halbachsen beziehen, setzen also nach den früheren Ausführungen und insbesondere nach (9)

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \mu\cos\gamma' = a\cos\gamma \\ \eta' &= \mu\sin\gamma' = b\sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Sie entsteht somit durch affine Verzerrung des Kreises mit dem Halbmesser a im Verhältnis $\frac{b}{a}$ parallel zur η'-Achse. Daraus ergibt sich eine Konstruktion des Winkels γ' aus dem Winkel γ und umgekehrt, Bild 2.

Aus (9) erhält man für die Verzerrung $\gamma - \gamma'$ die Formeln

$$\operatorname{tg}(\gamma - \gamma') = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\gamma}{a + b\operatorname{tg}^2\gamma} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\gamma'}{b + a\operatorname{tg}^2\gamma'} \quad \ldots (11)$$

Setzen wir $\operatorname{tg}\gamma = z$ und beachten wir, daß

$$\frac{d}{dz}\frac{z}{a+bz^2} = \frac{a - bz^2}{(a+bz^2)^2} \gtreqless 0 \text{ für } z^2 \lesseqgtr \frac{a}{b} \quad \ldots (12)$$

ist, so erkennen wir, daß die Verzerrung stetig von 0 an bis zu einem größten Wert wächst und dann wieder bis 0 abnimmt, wenn der Winkel γ von 0° bis 90° wächst. Die Verhältnisse in den anderen Quadranten liegen symmetrisch. Der größte Wert ω wird erreicht für $\gamma = \bar{\gamma}$. Aus (9), (11) und (12) erhält man folgende Formeln

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\bar{\gamma} &= \sqrt{\frac{a}{b}}, & \operatorname{tg}\bar{\gamma}' &= \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \bar{\gamma} + \bar{\gamma}' &= \frac{\pi}{2}, & \bar{\gamma} - \bar{\gamma}' &= \omega \\ \bar{\gamma} &= \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, & \bar{\gamma}' &= \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} \\ & & \operatorname{tg}\omega &= \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}, \\ \sin\omega &= \frac{a-b}{a+b}, & \cos\omega &= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

Wir betrachten einen beliebigen Winkel, seine Schenkel mögen mit der ξ-Achse die Winkel γ_1 und γ_2 einschließen. Er bleibt bei der Abbildung unverzerrt, wenn

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma_2' - \gamma_1' \quad \ldots\ldots (14)$$

ist. Wir können den Winkel ohne Beschränkung der Allgemeinheit $< \pi$ voraussetzen. Aus (9) erkennt man, daß seine Schenkel im selben Quadranten liegen müssen, für den wir aus Symmetriegründen den ersten wählen können. Dann liefert (14) in Verbindung mit (11) die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2' &= \frac{\pi}{2} \\ \gamma_2 + \gamma_1' &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

Nennt man die den beiden Schenkeln entsprechenden Radienvektoren der Ellipse μ_1 und μ_2, so folgt aus (10) und (15)

$$\begin{aligned} \mu_1\cos\gamma_1' &= a\cos\gamma_1 = \mu_1\sin\gamma_2, \\ \mu_2\sin\gamma_2' &= b\sin\gamma_2 = \mu_2\cos\gamma_1, \end{aligned}$$

also

$$\mu_1\mu_2 = ab \quad \ldots\ldots (16)$$

Man erkennt ferner aus (15): Ein Schenkel des unverzerrten Winkels ist willkürlich, der zweite eindeutig bestimmt. Geht man vom Winkel 90° aus, setzt also $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_1 = 0$ (dieser Winkel ist unverzerrt als Winkel zwischen

Digitized by Google

den Hauptrichtungen) und läßt γ_2 abnehmen, so wächst γ_1, der Winkel nimmt stetig ab und wird 0 bei $\gamma_1 = \gamma_2 = \bar{\gamma}$ und $\gamma_1' = \gamma_2' = \bar{\gamma}'$, weil nur dort nach (9) $\gamma + \gamma' = \frac{\pi}{2}$ ist. Der zugehörige Maßstab ist nach (16) $\bar{\mu} = \sqrt{ab}$. Dann vertauschen die beiden Schenkel ihre Rollen. Die Schenkel des am meisten verzerrten Winkels, als beiderseits unbegrenzte Gerade betrachtet, schließen gemäß (13) die Winkel $\bar{\gamma}$ und $-\bar{\gamma}$ mit der ξ'-Achse ein, dieser Winkel ist daher niemals $\frac{\pi}{2}$ wegen $a > b$.

Nun betrachten wir einen rechten Winkel, setzen also $\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{\pi}{2}$. Die Formeln (10) liefern

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 \cos\gamma_1' &= a\cos\gamma_1 \\ \mu_1 \sin\gamma_1' &= b\sin\gamma_1 \\ \mu_2 \cos\gamma_2' &= a\cos\gamma_2 = -a\sin\gamma_1 \\ \mu_2 \sin\gamma_2' &= b\sin\gamma_2 = b\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

daher ist, wenn wir die Verzerrung des rechten Winkels $\vartheta = \gamma_2' - \gamma_1' - \frac{\pi}{2}$ einführen, nach (17)

$$\left.\begin{aligned} \mu_1^2 + \mu_2^2 &= a^2 + b^2 \\ \mu_1\mu_2\cos\vartheta &= ab \\ \operatorname{tg}\gamma_1'\operatorname{tg}\gamma_2' &= -\frac{b^2}{a^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Gemäß der Entstehung der Tissotschen Ellipse aus einem Kreis mit dem Halbmesser a sind die Schenkel des Bildes des rechten Winkels konjugierte Durchmesser der Ellipse.

8. Flächentreue Entwürfe.

Das Produkt ab hat eine geometrische Bedeutung für den Kartenentwurf, es stellt den Flächenmaßstab dar. Wir denken uns nämlich die Kugel mit zwei Kurvenscharen überdeckt, so daß die Kurven der ersten Schar in jedem Punkt die eine, die der zweiten die andere der beiden Hauptrichtungen des betreffenden Punktes berühren. Nach den Entwicklungen von Abschnitt 1 gilt dann dasselbe für die beiden Kurven in der Ebene. Die Kurven der beiden Scharen durchsetzen einander senkrecht. Wählen wir die Bogenlängen der Kurven der beiden Scharen als Parameter u, v auf der Kugel bzw. u', v' in der Ebene, so ist $ds^2 = du^2 + dv^2$ und $ds'^2 = du'^2 + dv'^2$. Eine Fläche F auf der Kugel ist daher durch $F = \iint du\,dv$, die entsprechende Fläche F' in der Ebene durch $F' = \iint du'\,dv'$ gegeben. Im zweiten Integral führen wir u, v statt u', v' als neue Veränderliche ein, wobei wir die Tatsache berücksichtigen, daß u' nur von u, v' nur von v abhängt und gemäß der Bedeutung der vier Veränderlichen $a = \frac{du'}{du}$, $b = \frac{dv'}{dv}$ ist. Wir erhalten dann $F' = \iint ab\,du\,dv$, daher nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung $\lim \frac{F'}{F} = ab$, wenn sich F auf einen Punkt P und damit F' auf den entsprechenden Punkt P' zusammenzieht, Bild 3. Für einen flächentreuen Entwurf kann man also $ab = 1$ setzen, wenn man von einer Ähnlichkeitstransformation absieht.

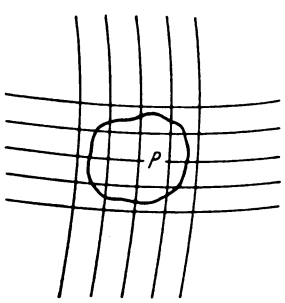


Bild 3.
Rechtwinkeliges Kurvennetz auf der Kuge .

Die meisten der bei den Kartenentwürfen gebräuchlichen flächentreuen Abbildungen lassen sich ohne Zuhilfenahme von Formeln der Differential- und Integralrechnung durch ganz einfache Überlegungen bestimmen. Es möge das Verfahren am sogenannten strahligen flächentreuen Entwurf durchgeführt werden. Bei einem strahligen Entwurf wird das System der Polarkoordinaten abgebildet auf ein ebensolches ebenes System, die Hauptkreise gehen über in die Strahlen durch das Bild des Hauptpunktes, die dazu senkrechten Horizontalkreise in die konzentrischen Kreise mit dem Bildpunkt des Hauptpunktes als Mittelpunkt. Der Winkel α bleibt dabei unverändert, der dem Horizontalkreis $\delta = \text{const.}$ entsprechende Bildkreis hat einen Halbmesser, der eine Funktion von δ allein ist. Soll die Abbildung flächentreu sein, so muß die von $\delta = \text{const.}$ begrenzte Kugelhaube flächengleich diesem Bildkreis, also sein Halbmesser gleich der Sehne der Haube sein. Dann ist auch eine Kugelzone gleich dem entsprechenden Kreisring und infolge der Unveränderlichkeit von α auch ein von zwei Horizontalkreisen und zwei Hauptkreisen begrenztes krummliniges Rechteck flächengleich seinem Bild. Wir wählen nun die Maschen des Netzes der Polarkoordinaten genügend eng und betrachten die innerhalb einer Fläche F liegenden krummlinigen Rechtecke des Netzes. Sie bilden die Fläche $\bar{F}$. Dann ist $F = \bar{F} + R$, wobei $R \to 0$, wenn die Seitenlängen der Maschen des Netzes gegen null streben. Für das Bild gilt ähnlich $F' = \bar{F}' + R'$ mit $R' \to 0$. Weil aber $\bar{F} = \bar{F}'$, so ist in der Grenze $F = F'$.

Eine ganz ähnliche Überlegung läßt sich bei Kegel- oder Zylinderabbildungen anstellen, d. h. wenn man das ebene Polarkoordinatennetz nicht in der Ebene, sondern auf dem Mantel eines Kreiskegels mit dem Pol im Scheitel des Kegels oder als rechteckiges Netz mit unendlich fernem Pol auf dem Mantel eines Zylinders ausbreitet, also auf einem Kreisausschnitt oder einem Rechteck nach der Abwicklung beider Flächen auf die Ebene. Bei der sogenannten Mollweideschen Abbildung tritt an Stelle des ebenen Polarkoordinatensystems ein Netz von affinen Ellipsen mit einer gemeinsamen Hauptachse und ein Büschel von Geraden, die auf dieser Achse senkrecht stehen.

Es sollen noch zwei flächentreue Entwürfe besprochen werden, wo man den obigen Grenzübergang zweimal machen muß. Die Parallelkreise sollen längentreu auf parallele Gerade abgebildet werden, der in der Mitte der Karte gelegene Meridian sei eine dazu senkrechte Gerade. Dann sind die übrigen Meridiane wegen der Längentreue der Parallelkreise Sinuslinien, affin verzerrt in der Richtung der Parallelkreise. Ein von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen begrenztes krummliniges Rechteck auf der Kugel mit den Seitenlängen s_1 und s_2, Bild 4, hat den Flächeninhalt $s_1 s_2 (1 + \varepsilon)$, wo ε gleichzeitig mit s_1 und s_2 gegen null strebt. Im folgenden soll mit ε immer eine derartige Größe bezeichnet werden, auch wenn es sich um verschiedene Größen handelt. Für das Bild dieses Rechteckes erhält man nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung $sh\,(1 + \varepsilon)$, wenn s die Grundlinie und h die Höhe bedeutet. Weil wegen der Längentreue der Parallelkreise $s = s_1$ ist, muß wegen der Flächentreue der Abbildung $h = s_2$ sein, d. h. der Mittelmeridian längentreu abgebildet werden. Überlegt man jetzt wie früher, so ist $\bar{F} = \bar{F}' + \bar{R}$, wo $\bar{R} \to 0$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der auftretenden Funktionen, also $F = F' + \varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$, daher $F = F'$. Eine ganz ähnliche Überlegung tritt auf, wenn man die Parallelkreise nicht auf parallele Gerade, sondern auf konzentrische Kreise längentreu abbildet. h bedeutet dann den Abstand

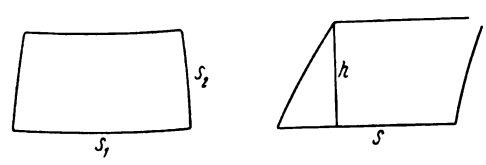


Bild 4. Krummliniges Kugelrechteck und seine Abbildung.

Digitized by Google

zweier solcher Kreise, s die Länge des betreffenden Kreisbogens.

Die erste der beiden eben beschriebenen Abbildungen geht auf G. Mercator zurück und wurde früher hauptsächlich zu Karten von Afrika benützt. Die zweite stammt von R. Bonne und wurde für Karten von Asien verwendet. Jetzt ersetzt man beide meist durch den strahligen flächentreuen Entwurf, während für kleinere Teile der Erdoberfläche die flächentreue Kegelabbildung benützt wird. Beide flächentreuen Entwürfe rühren von J. H. Lambert her, während die flächentreue Zylinderabbildung schon bei Archimedes vorkommt.

Zur Herstellung von winkeltreuen strahligen Kugel- oder Zylinderabbildungen verwendet man die Beziehung $a = b$, wodurch man eine Differentialgleichung erhält, deren Lösung sich sofort durch Trennung der Veränderlichen bestimmen läßt. Es tritt das Integral $\int \frac{dx}{\sin x}$ auf, das man durch Einführung des halben Winkels unmittelbar berechnen kann:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Es ist dies das einzige unbestimmte Integral, das aus der Integralrechnung benötigt wird.

4. Der Bonnesche Entwurf.

Wir wollen den im vorigen Abschnitt erwähnten Bonneschen Entwurf etwas näher betrachten, weil die in dem Buch von Tissot-Hammer mitgeteilten Ergebnisse doch ziemlich oberflächlich begründet sind. Wie wir gesehen haben, werden die Parallelkreise auf konzentrische Kreise längentreu, der Mittelmeridian der Karte auf einen gemeinsamen Halbmesser dieser Kreise ebenfalls längentreu abgebildet. Die Karte ist natürlich spiegelbidllich bezüglich dieses Halbmessers, es genügt, eine Seite zu betrachten. Wir bezeichnen den Halbmesser der Kreise mit ϱ, den Polarwinkel mit ζ, die geographische Länge und Breite mit λ und φ, λ von Mittelmeridian an gezählt, also $0 \leqq \lambda \leqq \pi$. Die Bedingung der Längentreue des Mittelmeridians und der Parallelkreise ergibt

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= C - \varphi \\ \varrho\,\zeta &= \lambda \cos \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Dabei muß $C \geqq \frac{\pi}{2}$ sein, wenn der Nordpol auf der Karte abgebildet werden soll.

Wir betrachten zuerst den Fall $C > \frac{\pi}{2}$, setzen also voraus, daß das Bild des Nordpols nicht mit dem Pol des Polarkoordinatensystems zusammenfällt. Der rechte Winkel zwischen den Meridianen und Parallelkreisen wird in der Abbildung um einen Winkel verzerrt, den wir in Abschnitt 2 mit ϑ bezeichnet haben, und zwar ist nach (19), Bild 5, für λ = konst.

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \lambda \sin \varphi - \zeta \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

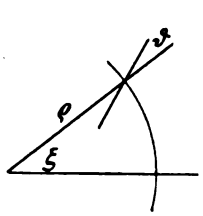


Bild 5.
Verzerrung des rechten Winkels.

Es ist also $\vartheta = 0$ für $\varphi = \varphi_0$, wobei

$$\operatorname{ctg} \varphi_0 = C - \varphi_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ist. Aus Bild 6 erkennt man, daß Gleichung (21) nur eine Lösung φ_0 hat, wobei $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ ist. Die Beziehung zwischen C und φ_0 ist umkehrbar eindeutig. Nach (19), (20) und (21) ist gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta \gtreqless 0 \text{ und } \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \lesseqgtr 0 \text{ für } \varphi \gtreqless \varphi_0 \\ &\zeta = 0 \text{ und } \vartheta = \pm \vartheta_P \text{ mit } \operatorname{tg} \vartheta_P = \lambda \text{ für } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \\ &\zeta = \zeta_0 \text{ mit } \zeta_0 = \lambda \sin \varphi_0 \text{ für } \varphi = \varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

Ferner erhält man aus (19) und (20) für λ = const.

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \vartheta}{\partial \varphi} = \frac{\lambda \cos \varphi}{\varrho} \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{\varrho} + \varrho \right) \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Um die Nullstellen von (23) zu finden, haben wir die Gleichung

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{C - x} - (C - x) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

zu untersuchen, d. h. die Schnittpunkte der Kurven $y = \operatorname{tg} x$ und $y = \frac{1}{C-x} - (C-x)$ im Intervall $-\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{\pi}{2}$ zu bestimmen, Bild 7. Die zweite ist eine Hyperbel mit den Asymptoten $x = C$ und $x - C = y$ und schneidet die X-Achse in den Punkten $x = C \pm 1$, von denen höchstens der Schnittpunkt $x = C - 1$ in unserem Intervall liegt. Jedenfalls wird die Y-Achse zwischen 0 und $-C$ geschnitten. Weil beide Kurven im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq x < 0$ entgegengesetzt gekrümmt sind und die Hyperbel die Y-Achse unterhalb der X-Achse schneidet, gibt es in diesem Intervall genau einen Schnittpunkt, also eine Lösung $x = \varphi_1$ der Gleichung (24).

Im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ ist kein Schnittpunkt vorhanden. Dies erkennt man so: Wir setzen

$$A = \operatorname{tg} x - \frac{1}{C - x} + C - x.$$

Dann ist

$$\frac{dA}{dx} = \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{(C-x)^2},$$

also

$$\frac{dA}{dx} = 0 \text{ für } \operatorname{ctg} x = \pm (C - x),$$

d. h. nach (21) für $x = \varphi_0$, denn die Kurven $y = \operatorname{ctg} x$ und $y = x - C$ schneiden sich im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ nicht, Bild 6. In diesem Intervall ist aber $\frac{dA}{dx} \lesseqgtr 0$ für

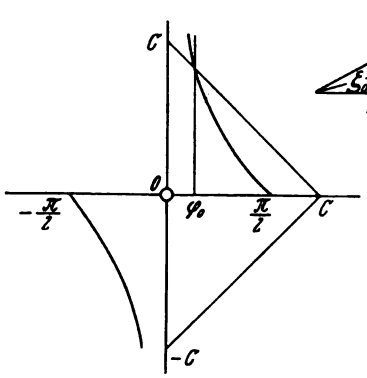


Bild 6. Graphische Lösung der Gleichung (21).

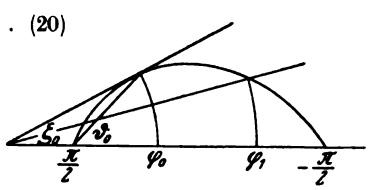


Bild 8.
Verlauf der Meridiane beim Bonnetschen Entwurf.

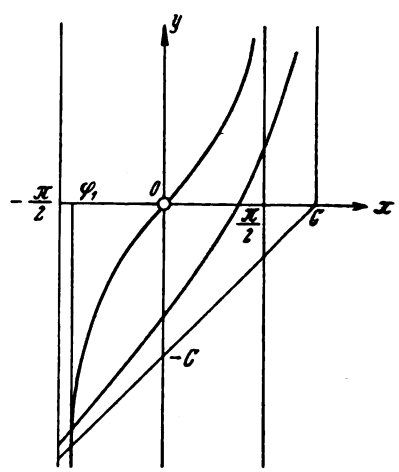


Bild 7. Graphische Lösung der Gleichung (24).

Digitized by Google

$x \lessgtr \varphi_0$, d. h. A nimmt für $x = \varphi_0$ seinen kleinsten Wert an. Dieser ist $C - \varphi_0$, also positiv, daher gibt es keinen Schnittpunkt. Nach (19), (23) und (24) ist infolgedessen

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \vartheta}{\partial \varphi} \lessgtr 0 \quad \text{für} \quad \varphi \lessgtr \varphi_1 \quad \ldots\ldots (25)$$

und $\vartheta = -\vartheta_1$ mit $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \lambda (C - \varphi_1) \cos \varphi_1$ für $\varphi = \varphi_1$.

Aus (22) und (25) ergibt sich für das Bild eines vom Mittelmeridian verschiedenen Meridians folgendes, Bild 8: Der Meridian schneidet die Radienvektoren unter dem Winkel ϑ. Für den Nordpol ist ϑ_P der Grenzwert von ϑ. Von ϑ_P an nimmt der Winkel ϑ fortwährend ab, bis er auf der Breite φ_0 null wird, d. h. dort berührt der Meridian den zugehörigen Radiusvektor, ζ hat seinen größten Wert ζ_0 erreicht. Dann nimmt ζ ab, der absolute Betrag des Winkels ϑ zu, bis er auf der Breite φ_1 seinen größten Wert ϑ_1 erreicht. Von dort an nimmt $|\vartheta|$ ab, so daß der Meridian den Mittelmeridian im Südpol wieder unter dem Winkel ϑ_P schneidet wie im Nordpol.

Wir betrachten nun den in Bild 8 eingeführten Winkel ϑ_0. Je nach der Wahl von C ist $\vartheta_0 \lessgtr \vartheta_P$. Nimmt man nämlich bei festem λ C sehr groß, also nach (21) φ_0 sehr klein, so wird nach (22) ζ_0 und damit auch ϑ_0 sehr klein, also sicher $\vartheta_0 < \vartheta_P$. Wählt man dagegen C und damit nach (21) auch φ_0 in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ und ist außerdem λ genügend oberhalb $\frac{\pi}{2}$, so ist $\vartheta_0 > \vartheta_P$. Aus Stetigkeitsgründen kann man daher auch $\vartheta_0 = \vartheta_P$ erreichen. $\vartheta_0 \geqq \vartheta_P$ bewirkt aber, daß der Bildmeridian zwischen dem Nordpol und der Breite φ_0 einen Wendepunkt haben muß. Es hat also z. B. der äußerste Meridian $|\lambda| = \pi$ bestimmt bei passender Wahl von C einen derartigen Wendepunkt. Für diesen Meridian ist $\operatorname{tg} \vartheta_P = \pi$, also ϑ_P ungefähr gleich $72\frac{1}{2}°$. Die gesamte Kugeloberfläche wird daher auf die beiden ersten in Bild 9 gezeichneten Bereiche abgebildet, wenn man C entsprechend groß oder in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ wählt.

Es ist noch der Fall $C = \frac{\pi}{2}$ zu erledigen. Nach (21) ist $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, d. h. der Parallelkreis, der von den Bildmeridianen senkrecht durchsetzt wird, zieht sich auf den Nordpol zusammen. Daraus folgert man durch Grenzübergang die Winkeltreue der Abbildung im Nordpol. Damit ergibt sich der dritte Bereich in Bild 9 als Bild der gesamten Kugeloberfläche.

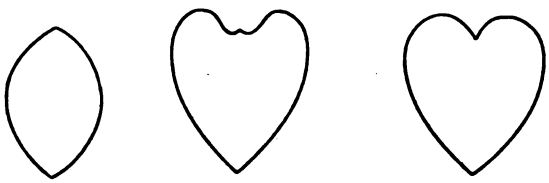


Bild 9. Formen des Bonnetschen Entwurfes.

Digitized by Google

Digitized by Google

JAN 22 1947

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 9 enthält Arbeiten von: E. Kuhle S. 257—266, W. Piening S. 267—280, J. B. Grambow S. 281—290

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 9 SEITE 257 BIS 290 | MÜNCHEN, 20. 9. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Rechnerische Bestimmung des Neutralpunktes von Flügeln. Von E. Kuhle . . . . . Seite 257

Der Wirkungsgrad von Verbrennungsturbinen mit Gleichdruckverbrennung. Von W. Piening . . . . . Seite 267

Die Lambertsche Karte als Luftnavigationskarte. Von J. B. Grambow . Seite 281

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 | 20. September 1940 | Lfg. 9

Rechnerische Bestimmung des Neutralpunktes von Flügeln.

Von E. Kuhle.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Flugmechanik.

Es wird gezeigt, daß sich bei praktisch in Frage kommenden Flügelformen ein Neutralpunkt, d. h. ein Punkt, um den das Längsmoment innerhalb einer vernünftigen Toleranz unabhängig vom Anstellwinkel ist, definieren läßt. Die Berechnung dieses Punktes wird angegeben für Flügelumrisse, bei denen die Auftriebsverteilung längs der Spannweite bekannt ist oder sich nach einem bekannten Verfahren berechnen läßt.

Eine besonders einfache Näherungsrechnung ist zulässig für Flügelumrisse ohne starke Ausbuchtungen (Motorgondeln, Sichtausschnitte usw.). An Hand von zwei Beispielen wird ein Vergleich mit Windkanalmessungen vorgenommen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Bezeichnungen.
III. Neutralpunktsbestimmung.
  a) Elliptischer Flügel.
  b) Flügel mit nichtelliptischer Tiefenverteilung.
IV. Annäherung der Funktion $\frac{l\, c_a(y)}{a_g}$.
V. Beispiele.
  a) Vergleich des gerechneten Neutralpunktes eines Knickflügels in Hoch- und Rücklage mit der Windkanalmessung.
  b) Vergleich zwischen Rechnung und Windkanalversuch für drei Trapezflügel mit veränderter Pfeilform.
VI. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Für Momenten- und Stabilitätsbetrachtungen an Flugzeugen ist es wesentlich, für einen beliebig gestalteten Flügel ohne besondere Windkanalmessungen Aussagen machen zu können, ob ein Neutralpunkt, der die Bedingung $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} = 0$ erfüllt, für den ganzen Flügel vorhanden ist, und wie seine Lage berechnet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Aufgabe unter folgenden Voraussetzungen behandelt:

1. Für jeden Schnitt des Flügels existiert ein Neutralpunkt[1]).
2. Umriß und Verwindung des Flügels sind beliebig, sofern es gelingt, ein Verfahren zur Bestimmung der Auftriebsverteilung zu finden, das diese Voraussetzung berücksichtigt. Darüber hinaus ist im Anhang ein grobes Näherungsverfahren angegeben, das die Abweichung der Auftriebsverteilung eines beliebigen Flügels von der eines Flügels mit elliptischem Umriß berücksichtigt, sofern der Umriß des beliebigen Flügels keine Ausbuchtungen (z. B. Motorgondeln, Sichtausschnitte) besitzt, und außen die Tiefe 0 hat.
3. Der Einfluß von Pfeil- und V-Form wird annähernd dadurch berücksichtigt, daß die Auftriebsverteilung für eine durchgehend gerade, senkrecht angeblasene tragende Linie berechnet wird und nachträglich die an den einzelnen Flügelschnitten wirkenden Luftkräfte an der Stelle angreifend gedacht werden, an der der Neutralpunkt des betrachteten Schnittes infolge der Pfeil- und V-Form tatsächlich liegt. Es wird also nur der geometrische, dagegen nicht der aerodynamische Einfluß (zusätzliche Induktion der einzelnen, jetzt gegeneinander verschobenen Schnitte) der Pfeil- und V-Form berücksichtigt.

Die gesamte Untersuchung gliedert sich in:

a) Behandlung des Flügels mit elliptischem Umriß, wenn α'_{∞} über die Spannweite konstant ist.
b) Behandlung des Flügels mit nichtelliptischem Umriß, bei beliebiger α'_{∞}-Verteilung.
c) Ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Abweichung der Auftriebsverteilung des nichtelliptischen Flügels von der des elliptischen.

II. Bezeichnungen.

$\bar{\alpha}_g$ = über die Spannweite konstanter Anstellwinkel ($\bar{\alpha}_g = 0$ Definition beliebig wählbar, z. B. wenn $c_a = 0$ oder α_g des Wurzelprofils $= 0$),

$\alpha_g(y)$ = geometrischer Anstellwinkel an der Stelle y (von Nullauftriebsrichtung gerechnet),

$\alpha_{gr}(y) = \alpha_g(y) - \bar{\alpha}_g$ geometrischer Verwindungswinkel an der Stelle y,

$\alpha'_{\infty} = \frac{\partial \alpha_{\infty}}{\partial c_a}$ als Profilkonstante aus dem ebenen Problem,

$c_{a\,A}' = \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ für die endliche Flügelstreckung $\Lambda = \frac{b^2}{F}$,

$l(y)$ = Flügeltiefe an der Stelle y,

$\bar{l} = \frac{F}{b}$ = mittlere Flügeltiefe,

$l_0^{(e)}$ = Wurzeltiefe der flächengleichen Ellipse gleicher Spannweite,

y-Achse: senkrecht zur Symmetrieebene des Flügels gerichtete Achse.

III. Neutralpunktsbestimmung.

a) Elliptischer Flügel.

Es wird vorausgesetzt, daß die hier betrachteten aerodynamischen Größen aus Anteilen, herrührend einmal vom geometrischen Anstellwinkel $\bar{\alpha}_g$, andererseits von der geo-

[1]) s. Weinig-Franke, Der neutrale Momentenbezugspunkt. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 10.

Digitized by Google

metrischen Verwindung $\alpha_{gr}(y)$, superponiert werden dürfen. Dabei werden die Annahmen gemacht, daß

1. α'_∞ über die Spannweite konstant ist,
2. infolge Kleinheit von α näherungsweise $\cos\alpha = 1$ und $\sin\alpha = \alpha$ gesetzt werden kann.

Ansätze für den Flügelschnitt:

$$c_a(y) = A\cdot\bar\alpha_g + B(y) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

darin ist:

$$A = \frac{c_a'_\infty}{1+\frac{c_a'_\infty}{\pi\Lambda}} = c_a'_\Lambda$$

und

$B(y)$ die c_a-Verteilung für $\bar\alpha_g = 0$.

Ferner

$$\alpha_i(y) = \alpha_g(y) - \alpha_{eff}(y)$$

wobei

$$\alpha_g(y) = \bar\alpha_g + \alpha_{gr}(y) \text{ und } \alpha_{eff}(y) = c_a(y)\cdot\alpha'_\infty$$

also

$$\alpha_i(y) = \bar\alpha_g + \alpha_{gr}(y) - c_a(y)\cdot\alpha'_\infty \quad \ldots\ldots (2)$$

Ist weiter

$$c_{wi}(y) = c_a(y)\cdot\alpha_i(y),$$

dann wird

$$c_{wi}(y) = c_a(y)\cdot\bar\alpha_g + c_a(y)\cdot\alpha_{gr}(y) - c_a^2(y)\cdot\alpha'_\infty \quad (3)$$

Normal- und Tangentialkräfte.

Beim Festlegen auf ein flugzeugfestes Bezugssystem interessieren aber die Normal- bzw. Tangentialkräfte. Es ist

$$c_n = c_a\cdot\cos\bar\alpha_g + c_w\cdot\sin\bar\alpha_g$$

und mit unserer Vereinbarung $\cos\alpha = 1$ und $\sin\alpha = \alpha$

$$c_n = c_a + c_w\cdot\bar\alpha_g.$$

c_w ist proportional $\bar\alpha_g^2$, damit $c_w\cdot\bar\alpha_g$ proportional $\bar\alpha_g^3$. Infolge Kleinheit von $\bar\alpha_g$ muß dann auch dieses Glied vernachlässigt werden, und es ist $c_n \sim c_a$

$$c_n(y) \sim c_a(y) = A\cdot\bar\alpha_g + B(y) \quad \ldots\ldots (4)$$

Die Tangentialkraft ergibt sich aus

$$c_t = c_w\cdot\cos\cdot\bar\alpha_g - c_a\cdot\sin\cdot\bar\alpha_g$$

vereinfacht

$$c_t = c_w - c_a\cdot\bar\alpha_g$$

$$c_t = c_a(y)\cdot\alpha_{ge}(y) - c_a^2(y)\cdot\alpha'_\infty$$

$$c_t(y) = A\bar\alpha_g\cdot\alpha_{gr}(y) + B(y)\cdot\alpha_{gr}(y) - A^2\cdot\bar\alpha_g^2\cdot\alpha'_\infty - 2A\bar\alpha_g B(y)\alpha'_\infty - B^2(y)\alpha'_\infty \quad \ldots (5)$$

Der Einfluß des Profilwiderstandes soll später betrachtet werden.

Das Moment um eine beliebige Achse in y-Richtung.

Das Moment um die gewählte Achse an der Stelle y ist

$$c_m(y) = c_{m_0}(y) + c_n(y)\frac{x(y)}{l(y)} + c_t(y)\frac{z(y)}{l(y)},$$

also

$$c_m(y) = c_{m_0}(y) + [A\cdot\bar\alpha_g + B(y)]\frac{x(y)}{l(y)} + [A\cdot\bar\alpha_g\cdot\alpha_{gr}(y) + B(y)\alpha_{gr}(y) - A^2\bar\alpha_g^2\alpha'_\infty - 2A\bar\alpha_g B(y)\alpha'_\infty - B^2(y)\alpha'_\infty]\frac{z(y)}{l(y)}.$$

Daraus erhält man den Integralmittelwert

$$\overline{c_m} = \frac{1}{F\cdot\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} c_{m_0}(y)\cdot l^2(y)\,dy + \frac{1}{F\cdot\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} B(y)\,l(y)\,x(y)\,dy + \frac{1}{F\cdot\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} B(y)\,\alpha_{gr}(y)\cdot l(y)\cdot z(y)\,dy - \frac{\alpha'_\infty}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} B^2(y)\cdot l(y)\cdot z(y)\,dy + \frac{A\cdot\bar\alpha_g}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\cdot x(y)\,dy + \frac{A\cdot\bar\alpha_g}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2}\alpha_{gr}(y)\cdot l(y)\cdot z(y)\,dy - \frac{2A\bar\alpha_g\cdot\alpha'_\infty}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} B(y)\cdot l(y)\cdot z(y)\,dy - \frac{A^2\bar\alpha_g^2\alpha'_\infty}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\cdot z(y)\,dy \quad \ldots (6)$$

Dieses Moment wirkt also um eine beliebig gewählte Bezugsachse, und zwar ansteigend mit wachsendem $\bar\alpha_g$. Es soll nun eine Bezugsachse gesucht werden, um die das Moment möglichst unabhängig vom Anstellwinkel $\bar\alpha_g$ wird.

Die Koordinaten des Neutralpunktes und das Moment bezüglich der y-Achse durch den Neutralpunkt.

In Formel (6) ist zu erkennen, daß $\overline{c_m}$ eine Funktion von $\bar\alpha_g$ ist, wobei $\bar\alpha_g$ im wesentlichen in der ersten Potenz auftritt. Nur das letzte Glied ist proportional $\bar\alpha_g^2$.

Die Ableitung von $\overline{c_m}$ nach $\bar\alpha_g$ ergibt

$$\frac{\partial\overline{c_m}}{\partial\bar\alpha_g} = \frac{A}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\,x(y)\,dy + \frac{A}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2}\alpha_{gr}(y)\,l(y)\,z(y)\,dy - \frac{2A\alpha'_\infty}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} B(y)\,l(y)\cdot z(y)\,dy - \bar\alpha_g\cdot\frac{A^2\alpha'_\infty}{F\bar l}\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\cdot z(y)\,dy \quad \ldots (7)$$

Die Beziehung für $\frac{\partial\overline{c_m}}{\partial\bar\alpha_g}$ hat also die Form $C_1 + C_2\cdot\bar\alpha_g$. Damit ist gezeigt, daß streng im allgemeinen ein Neutralpunkt nicht existiert. Aus Abschätzungen ist jedoch bekannt, daß in den meisten Fällen der $\bar\alpha_g^2$-abhängige Anteil (Konstante C_2) in Gl. (6) und der entsprechende in Gl. (7) klein ist. Wenn es dann noch gelingt, C_1 zu Null zu machen, hat man näherungsweise einen Neutralpunkt gefunden. Die durch $\frac{C_2}{2}\cdot\bar\alpha_g^2$ erzeugte Abweichung vom konstanten Momentenverlauf (Gl. (6)) um diesen Punkt soll bei der Aufstellung der Momentenformel diskutiert werden. Um zu erreichen, daß $C_1 = 0$ wird, soll die Momentenbezugsachse in Hoch- und Rücklage passend verschoben werden. Die Achsenverschiebungen seien in der Rücklage mit x_0 und in der Hochlage mit z_0 benannt. Dann muß gelten:

$$\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\,[x(y) - x_0]\,dy = 0$$

und

$$\int_{-\frac b2}^{+\frac b2}\alpha_{ge}(y)\cdot l(y)\,[z(y) - z_0]\,dy - 2\alpha'_\infty\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} B(y)\cdot l(y)\,[z(y) - z_0]\,dy = 0$$

Daraus lassen sich jetzt x_0 und z_0 berechnen. Es ist

$$x_0 = \frac{\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\cdot x(y)\,dy}{\int_{-\frac b2}^{+\frac b2} l(y)\,dy}$$

Digitized by Google

mit

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} l(y)\,dy = F$$

wird schließlich

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{F}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} l(y)\,x(y)\,dy} \quad \ldots\ldots (8)$$

und entsprechend

$$\boxed{z_0 = \frac{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \alpha_{g_r}(y)\cdot l(y)\cdot z(y)\,dy - 2\,\alpha_{\infty}'\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y)\cdot l(y)\cdot z(y)\,dy}{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \alpha_{g_r}(y)\,l(y)\,dy - 2\,\alpha_{\infty}'\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y)\cdot l(y)\,dy}} \quad \ldots\ldots (9)$$

x_0 und z_0 sind dann die Koordinaten des Neutralpunktes, gemessen von der willkürlich gewählten Bezugsachse, bei Beachtung der gemachten Näherungsannahmen.

Bei der Berechnung des Momentes um die neue Bezugsachse durch den Neutralpunkt muß in Gl. (6) für $x(y)$ jetzt $x(y) - x_0$ und für $z(y)$ jetzt $z(y) - z_0$ gesetzt werden. Dann nehmen die $\bar{\alpha}_g$-abhängigen Teilintegrale, die zur Bestimmung von x_0 und z_0 dienten, den Wert Null an und man erhält:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{c_{m_N}} = {} & \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{m_0}(y)\,l^2(y)\,dy + \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y)\cdot l(y)\,[x(y)-x_0]\,dy + \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y)\cdot\alpha_{g_r}(y)\cdot l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy \\ & - \frac{\alpha_{\infty}'}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B^2(y)\cdot l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy - \bar{\alpha}_g^2\,\frac{A^2\,\alpha_{\infty}'}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy\end{aligned}} \quad (10)$$

Das letzte Glied der Gl. (10) bewirkt eine Krümmung im Momentenverlauf. In den meisten Fällen wird man jedoch, wie Abschätzungen an üblichen Flügeln zeigten, diesen Effekt vernachlässigen können ohne einen spürbaren Fehler zu begehen. Den stärksten Einfluß auf das Wachsen der Krümmung im Momentenverlauf hat die V-Form des Flügels.

Im Falle verschwindender V-Form, also $z(y) - z_0 \equiv 0$, werden der Krümmungseffekt und gleichzeitig alle Teilintegrale in Gl. (10), die $z(y) - z_0$ als Faktor im Integranden besitzen, zu Null und man erhält:

$$\overline{c_{m_N}} = \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{m_0}(y)\cdot l^2(y)\,dy + \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y)\cdot l(y)\,[x(y)-x_0]\,dy \quad \ldots (10,1)$$

Man erkennt weiter, daß, wenn auch noch die Pfeilform verschwindet, nämlich $x(y) - x_0 \equiv 0$ wird, $\overline{c_{m_N}}$ jetzt die einfache bekannte Form annimmt

$$\overline{c_{m_N}} = \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{m_0}(y)\,l^2(y)\,dy \quad \ldots (10,2)$$

Berücksichtigung des Profilwiderstandes.

H. Muttray macht für den Profilwiderstand den durch Windkanalmessungen an Joukowski-Profilen geprüften Ansatz[2])

$$c_{w_{\text{Prof.}}} = c_{w_0} + K\,(c_a - c_{a c_{w_0}})^2 \quad \ldots (11,1)$$

Darin sind

c_{w_0} der kleinste Profilwiderstandsbeiwert,
$c_{a c_{w_0}}$ der zu c_{w0} gehörende Auftriebsbeiwert,
K eine Profilkonstante.

Mit Gl. (1) wird

$$c_{w_{\text{Prof.}}} = c_{w_0} + K\,[A\cdot\bar{\alpha}_g + B(y) - c_{a c_{w_0}}]^2 \quad (11,2)$$

Im Falle wechselnder Profile über die Spannweite werden c_{w_0}, K und $c_{a c_{w_0}}$ Funktionen der Spannweite. Nur wenn die Profile ähnlich sind, sind auch die genannten Größen Konstante.

Nehmen wir vorerst den ersten Fall, dann wird

$$\begin{aligned} c_{w_{\text{Prof.}}}(y) = {} & c_{w_0}(y) + K(y)\,A^2\,\bar{\alpha}_g^2 + c^2_{a_{c_{w_0}}}(y) \\ & \times K(y) + K(y)\cdot B^2_{(y)} - K(y)\cdot 2\,A\,\bar{\alpha}_g\cdot c_{a c_{w_0}}(y) \\ & + K(y)\cdot 2\,A\,\bar{\alpha}_g\cdot B(y) = K(y)\cdot 2\,c_{a c_{w_0}}(y)\cdot B(y) \end{aligned} \quad (11,3)$$

und das Moment um den Neutralpunkt infolge des Profilwiderstandes

$$\begin{aligned} \overline{c_{m_{c_{w\,\text{Prof.}}}}} = {} & -\frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{w_0}(y)\cdot l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy \\ & + \frac{A^2\,\bar{\alpha}_g^2}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} K(y)\cdot l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy \\ & + \frac{2\,A\,\bar{\alpha}_g}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} K(y)\,[B(y) - c_{a_{c_{w_0}}}(y)]\,l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy \\ & + \frac{1}{F\bar{l}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} K(y)\,[B(y) - c_{a_{c_{w_0}}}(y)]^2\,l(y)\,[z(y)-z_0]\,dy \end{aligned} \quad \ldots (12)$$

Auch hier sind wieder $\bar{\alpha}_g$-abhängige Glieder vorhanden. Bei strenger Behandlung müßte also auch der Profilwiderstand mit neutralpunktbestimmend wirken. Eine Nachprüfung der Größenordnung der drei letzten Teilintegrale in Formel (12) an einem modernen Flügel mit kleiner Wölbung und üblicher Dicke ergab jedoch eine Kleinheit der Beträge, die berechtigt, diese Glieder zu vernachlässigen. Damit erhält man die sonst übliche und hiermit gerechtfertigte Näherung für das durch den Profilwiderstand erzeugte Moment. Es wird dann

[2]) Luftf.-Forschg. Bd. 11 (1934), Lfg. 6.

Digitized by Google

$$\overline{c_m}_{c_w\text{Prof.}} = \frac{1}{F \cdot \bar{l}} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{w_0}(y) \cdot l(y) \cdot [z(y) \cdot z_0] \cdot dy \quad (12,1)$$

Das Gesamtmoment um den Neutralpunkt eines elliptischen Flügels ergibt dann

$$\begin{aligned}\overline{c_m}_N = {} & \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{m_0}(y)\, l^2(y)\, dy + \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y) \cdot l(y)\, [x(y) - x_0]\, dy + \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y) \cdot d g_v(y)\, l(y)\, [z(y) - z_0]\, dy \\ & - \frac{\alpha_\infty'}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B^2(y) \cdot l(y)\, [z(y) - z_0]\, dy + \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{w_0}(y) \cdot l(y)\, [z(y) - z_0]\, dy - \bar{\alpha}_g^2 \frac{A^2 \alpha_\infty'}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} l(y)\, [z(y) - z]\, dy\end{aligned} \quad (13)$$

b) Flügel mit nichtelliptischer Tiefenverteilung.

H. Schubert[3]) zeigt, daß die Auftriebsverteilung eines nichtelliptischen Flügels mit stückweise stetiger Anstellwinkelverteilung gleich der Summe der Auftriebsverteilung eines elliptischen Flügels von gleicher Spannweite und gleichem Anstellwinkelverlauf und eines Restanteils ist. Dieser Restanteil wird als Abweichung von der Auftriebsverteilung des flächengleichen Ellipsenflügels definiert und mit $\Delta c_a(y)$ bezeichnet. Der Verwindungsanteil wird wie vorher mit $B(y)$ bezeichnet. Damit ist, wenn Linearität zwischen $\Delta c_a(y)$ und $\bar{\alpha}_g$ vorausgesetzt wird

$$c_a(y) = A \cdot \bar{\alpha}_g + \Delta c_a(y) + B(y) = \bar{\alpha}_g \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] + B(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Analog Formel (8) und (9) mit ihren Herleitungen werden dann die Beziehungen für die Koordinaten des Neutralpunktes

$$x_0 = \frac{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] l(y) \cdot x(y)\, dy}{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] l(y)\, dy} \quad \ldots (15)$$

und

$$z_0 = \frac{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] l(y) \cdot z(y) \cdot \alpha_{g_r}(y)\, dy - 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] B(y)\, \alpha_\infty'(y) \cdot l(y) \cdot z(y)\, dy}{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] l(y)\, \alpha_{g_r}(y)\, dy - 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right] B(y)\, \alpha_\infty'(y)\, l(y)\, dy} \quad \ldots\ldots (16)$$

Mit den Koordinaten x_0 und z_0 ist wieder ein Punkt gegeben, um den das Moment der folgenden Größe analog Formel (13) angreift. Es ist

$$\begin{aligned}\overline{c_m}_N = {} & \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{m_0}(y)\, l^2(y)\, dy + \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_{w_0}(y)\, l(y)\, [z(y) - z_0]\, dy + \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y) \cdot \alpha_{g_r}(y)\, l(y)\, [z(y) - z_0]\, dy \\ & - \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B^2(y)\, l(y)\, [z(y) - z_0[\, \alpha_\infty'(y)\, dy + \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{2}{2}}^{+\frac{b}{2}} B(y) \cdot l(y)\, [x(y) - x_0]\, dy \\ & - \bar{\alpha}_g^2 \frac{1}{F\bar{l}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g} \right]^2 l(y)\, [z(y) - z_0]\, \alpha_\infty'(y)\, dy\end{aligned} \quad \ldots (17)$$

[3]) Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), Lfg. 5.

Digitized by Google

Darin ist das letzte Glied wieder $\bar{\alpha}_g^2$-abhängig und die Bedingung $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha_g} = 0$ ist wie beim elliptischen Flügel nicht streng erfüllt. Bezüglich der Größenordnung der Abweichung vom konstanten c_m-Verlauf gelten die gleichen Gesichtspunkte wie bei der Diskussion von Gl. (10). Außerdem können das 3., 4. und 5. Teilintegral, wie in der später folgenden Beispielrechnung (Abschnitt Va) gezeigt wird, vernachlässigt werden, ohne einen spürbaren Fehler zu begehen. Damit vereinfacht sich aber Gl. (17) für die praktische Handhabung beträchtlich.

IV. Annäherung der Funktion $\frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g}$ [4].

Die bisher als unbekannt verwendete Funktion $\frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g}$ soll nun hier einer näheren Betrachtung unterzogen werden. Grundsätzlich ist es natürlich möglich, jedes Verfahren zur Auftriebsverteilungsermittlung für den Zweck der Neutralpunktsbestimmung, d. h. in unserem Falle zur Bestimmung der Funktion $A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g}$ heranzuziehen, wobei die Frage der Genauigkeit des Verfahrens eine untergeordete Rolle spielt. In dieser Erkenntnis soll hier ein grobes Näherungsverfahren, das für unseren Zweck in den meisten Fällen ausreichend ist, seiner Einfachheit wegen vorgeschlagen werden.

Das Verfahren benutzt wesentlich, daß für drei verschiedene Flügel die c_a-Verteilungen berechnet sind, nämlich

1. für einen elliptischen Flügel,
2. für eine dem Rechteck und
3. eine dem Dreieck angenäherte Tiefenverteilung, und daß sich die übrigen Formen, wenn keine Ausschnitte vorhanden sind, zwischen diese einordnen lassen.

Die Dreieckergebnisse wurden entnommen aus »Fuchs-Hopf«, Bd. II, die Ergebnisse des angenäherten Rechtecks stammen aus Rechnungen, die in der DVL (H. Schmidt) ausgeführt wurden. Und nun machen wir den Ansatz

$$\frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g{}^0} = f(y) \cdot \frac{\Delta l(y)}{l_0^{(e)}} + g(y) \cdot \left(\frac{\Delta l(y)}{l_0^{(e)}}\right)^2 \quad \ldots \quad (18)$$

und bestimmen den Funktionsverlauf von $f(y)$ und $g(y)$ (s. Bild 3, ausgezogene Kurven) dadurch, daß die Änderung der c_a-Verteilung gegenüber der Ellipse, Bild 2, in Beziehung zur Abweichung der vorgegebenen Tiefenverteilung gegenüber der elliptischen, Bild 1, gesetzt wird. Mit diesem Ansatz gelingt es für den rechteckigen und den dreieckigen Flügel, die gewisse Grenzfälle von Flügelgrundrissen darstellen, die Abweichung der c_a-Verteilung vom flächen- und spannweitengleichen Flügel mit elliptischem Umriß zu beschreiben.

Erwartet wird dann auch eine angenäherte Übereinstimmung der Ergebnisse für Flügel mit dazwischen liegenden Tiefenverteilungen.

[4]) Für Anregungen zur Behandlung der Auftriebsverteilungsfrage bin ich Herrn Dr. Schubert (DVL) zu Dank verpflichtet.

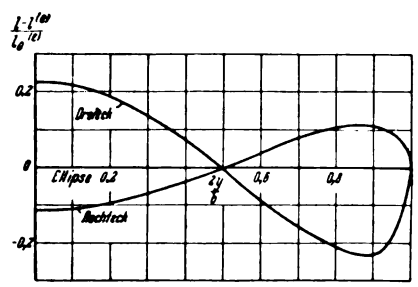


Bild 1. Differenz der Tiefenverteilungen gegenüber der Ellipse für den angenäherten Rechteck- bzw. Dreieckflügel.

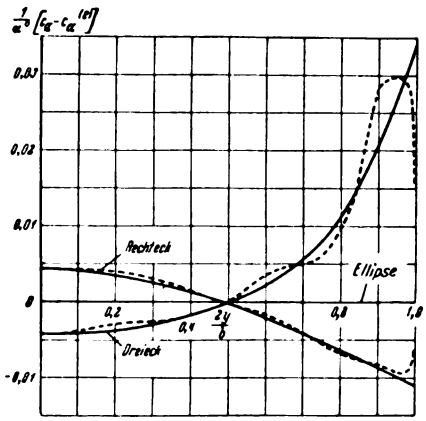


Bild 2. Die zu den Tiefenverteilungen in Bild 1 gehörenden Änderungen der c_a-Verteilungen gegenüber der Ellipse.

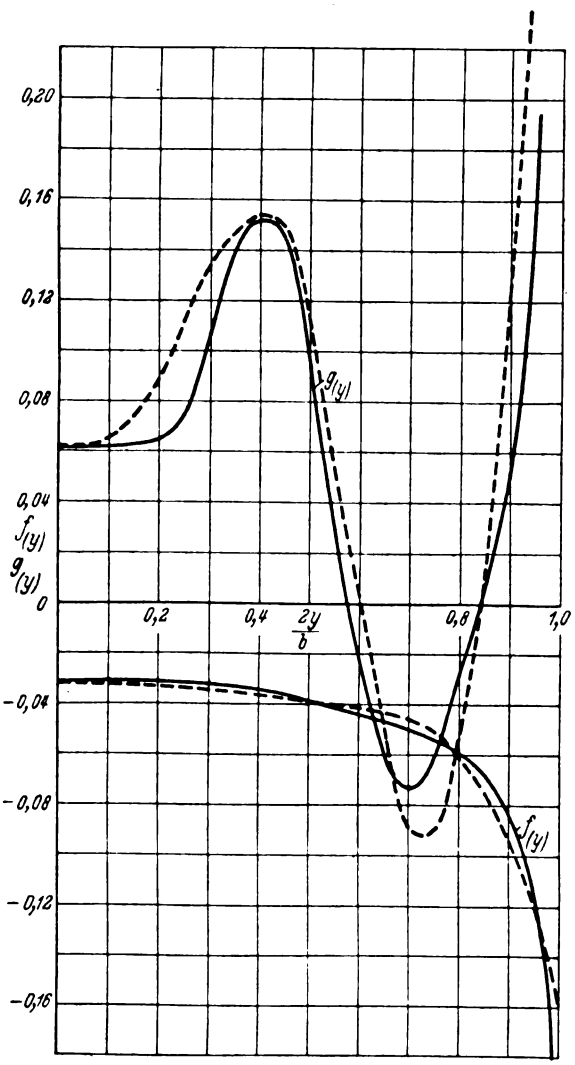


Bild 3. Die ermittelten Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ entsprechend Gl. (18).

Näherungspolynome (in Bild 3 gestrichelt):

$$f(y) = -0{,}0307 - 0{,}349\left(\frac{2y}{b}\right)^3 + 0{,}9423\left(\frac{2y}{b}\right)^4 - 0{,}7223\left(\frac{2y}{b}\right)^5$$

$$g(y) = 0{,}061 + 3{,}05\left(\frac{2y}{b}\right)^3 + 19{,}5\left(\frac{2y}{b}\right)^4 - 108\left(\frac{2y}{b}\right)^5 + 148\left(\frac{2y}{b}\right)^6 - 62{,}34\left(\frac{2y}{b}\right)^7.$$

Digitized by Google

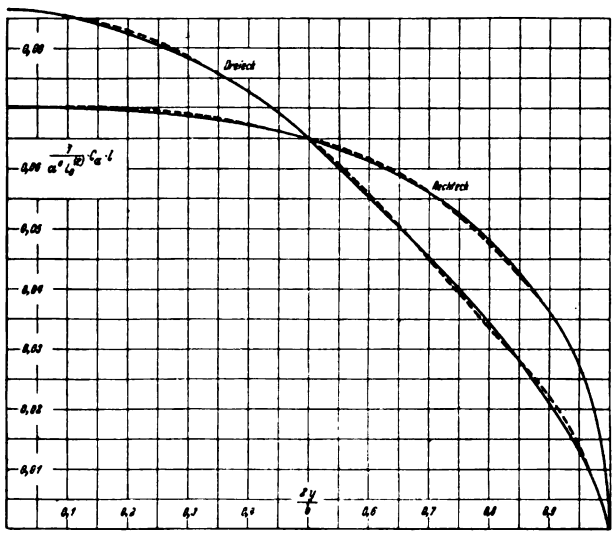


Bild 4. Die $c_a \cdot l$-Verteilungen der Flügel entsprechend Bild 1. (Gestrichelte Kurven: mit Hilfe der Näherungspolynome bestimmt.)

Approximation der Funktionen $f(y)$ und $g(y)$.

Um $\frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g}$ als Funktion von $\Delta l(y)$ in Form eines geschlossenen Ausdrucks zu gewinnen, wurde eine Approximation der Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ als Polynome 5. bzw. 7. Grades in $\frac{2y}{b}$ vorgenommen.

Es ergab sich

$$f(y) = -0{,}0307 - 0{,}349\left(\frac{2y}{b}\right)^3 + 0{,}9423\left(\frac{2y}{b}\right)^4 - 0{,}7223\left(\frac{2y}{b}\right)^5$$

$$g(y) = 0{,}061 + 3{,}05\left(\frac{2y}{b}\right)^3 + 19{,}5\left(\frac{2y}{b}\right)^4 - 108\left(\frac{2y}{b}\right)^5 - 148\left(\frac{2y}{b}\right)^6 - 62{,}34\left(\frac{2y}{b}\right)^7.$$

Die Güte der erreichten Annäherung veranschaulichen die gestrichelten Kurven in Bild 3. Während die Abweichung in den c_a-Verteilungen, Bild 2 gestr. Kurven, noch beträchtlich ist, zeigen sich in den $c_a \cdot l$-Verteilungen, Bild 4, gestr. Kurven, kaum noch nennenswerte Fehler. Besonders zu beachten ist dabei, daß die genäherten Funktionen bei $\frac{2y}{b} = 1$ einen endlichen Wert annehmen, während die vorausgesetzten nahe $\frac{2y}{b} = 1$ unbegrenzt wachsen. Das ist auch der Grund, weshalb in der Einleitung die Forderung nach verschwindender Flügeltiefe am Spannweitenende aufgestellt wurde, um in der $c_a \cdot l$-Verteilung auf jeden Fall am Spannweitenende den Wert Null zu erhalten.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß zur Beschreibung der Auftriebsverteilung eines Flügels mit nichtelliptischer Tiefenverteilung eine Beziehung gefunden ist, die eine für viele praktische Fälle genügende Aussage über die Änderung der c_a-Verteilung gegenüber der eines elliptischen Flügels macht.

V. Beispiele.

a) Vergleich des gerechneten Neutralpunktes eines Knickflügels in Hoch- und Rücklage mit der Windkanalmessung.

Zwecks Prüfung der Übereinstimmung von Rechnung und Experiment wurde als erstes Beispiel ein im Windkanal gemessener Knickflügel mit kleiner Pfeilform behandelt[5]). Es ist dies ein Flügel mit Profilen aus der NACA 24er-Serie, also mit nur variabler Dicke über die Spannweite, bei konstant bleibender Wölbung. Bild 5 zeigt die Tiefenverteilung in Vergleich mit der Ellipse und Bild 6 die dimensionslos gemachte Tiefendifferenz. In Bild 7, 8 und 9 sind Dickenverteilung, Auftriebsanstieg für das ebene Problem und schließlich die Flügelverwindung aufgetragen. Bild 10 und 11 endlich veranschaulichen den Verlauf der Neutralpunkte in Rück- und Hochlage für die jeweiligen Flügelschnitte aus Profilmessungen im großen DVL-Windkanal, Bild 12.

[5]) Die Rechnungen wurden von Herrn Wolff (DVL) ausgeführt.

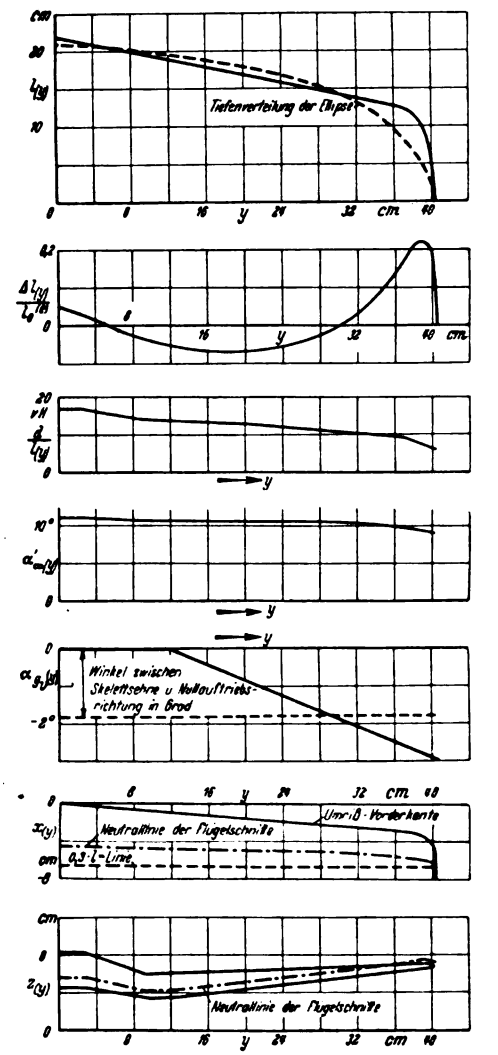


Bild 5 bis 11. Geometrische und aerodynamische Daten der Flügelschnitte des zum Vergleich zwischen Rechnung und Messung benutzten Flügels.

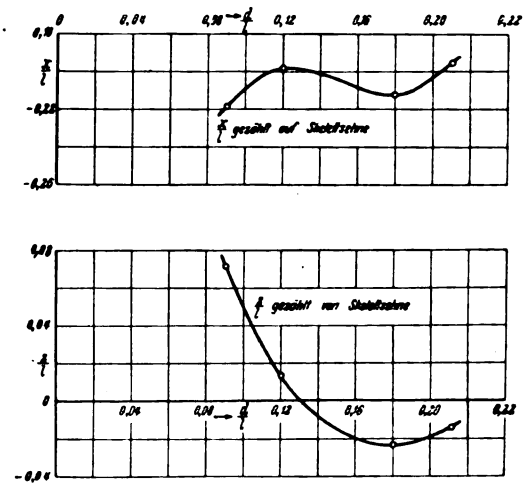


Bild 12. Hoch- und Rücklage der Neutralpunkte der Profilreihe NACA 24 aus Messungen im großen DVL-Kanal.

Digitized by Google

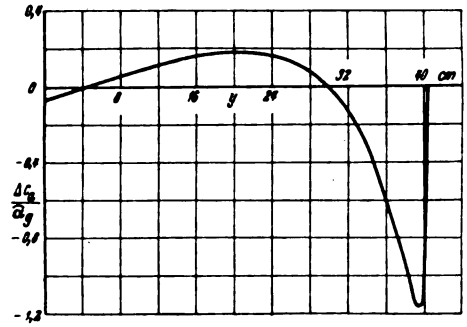


Bild 13. Die mit Hilfe von Gl. (18) bestimmte Änderung der c_{m}-Verteilung gegenüber der Ellipse.

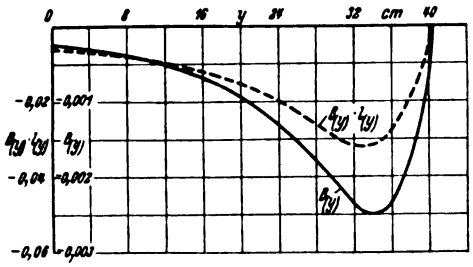


Bild 15. Die c_{m}- und $c_{a} \cdot l$-Verteilung der Flügelverwindung.

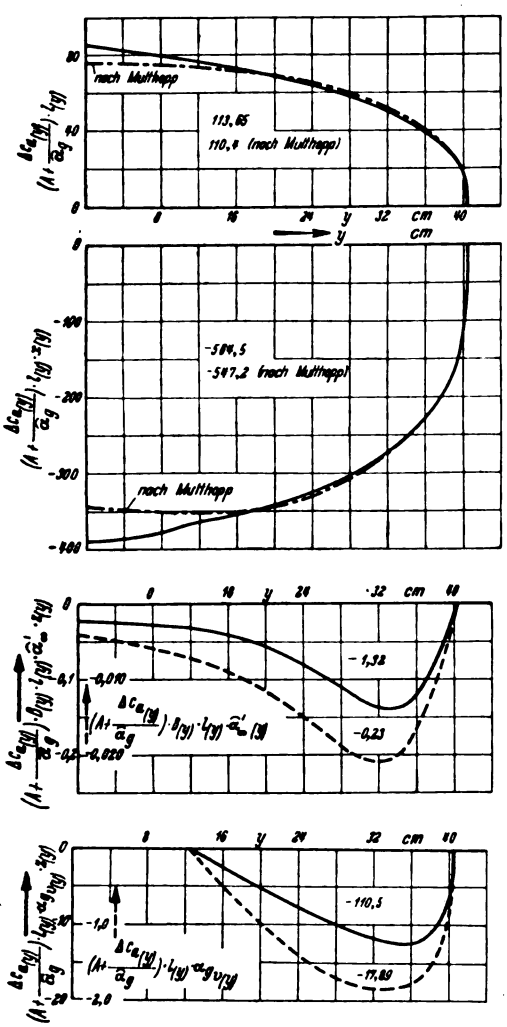


Bild 16 bis 19. Graphische Auswertung der Teilintegrale (Gl. (15) und (16)) zur Bestimmung der Koordinaten des Neutralpunktes x_0 und z_0.

Für die Neutralpunktsbestimmung ist es nötig, die Auftriebsverteilung zu kennen. In Bild 13 ist die Änderung der c_a-Verteilung gegenüber der Ellipse wiedergegeben, ge-

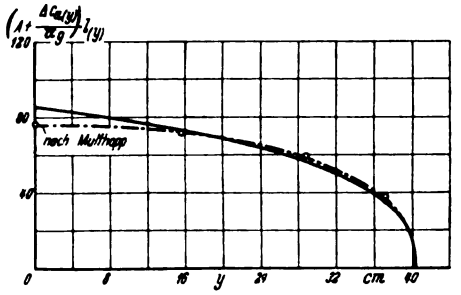


Bild 14. Die $c_{a} \cdot l$-Verteilung des untersuchten Flügels, verglichen mit der Rechnung nach Multhopp.

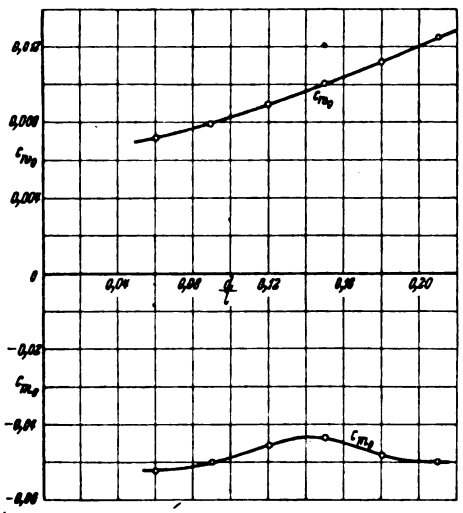


Bild 20. Beiwerte von Kleinstprofilwiderstand und Sturzflugmoment der Profilserie NACA 24.

wonnen mit dem in Abschnitt IV angegebenen Verfahren, und die daraus sich ergebende $c_a \cdot l$-Verteilung in Bild 14. Um einen Maßstab der Genauigkeit zu haben, wurde vergleichsweise derselbe Flügel nach Multhopp gerechnet und das Ergebnis gestrichelt eingetragen. Trotz der verhältnismäßig großen Abweichung in Flügelwurzelnähe ist, wie später noch gezeigt wird, die daraus sich ergebende Abweichung in den Neutralpunktskoordinaten bedeutungslos. Der der Auftriebsverteilung zu überlagernde Anteil der Bauverwindung $B(y)$ wurde ebenfalls nach Multhopp bestimmt und in Bild 15 wiedergegeben. Die Nullanstellung des Gesamtflügels wurde dabei gewählt als die Flügelstellung, bei der die Sehne des Schnittes in Flügelmitte den Anstellwinkel Null hat.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Neutralpunktes verwenden wir die Formel (15) und (16).

Die graphisch zu ermittelnden Teilintegrale sind wiedergegeben in Bild 16 bis 19. Die durch Planimetrieren bestimmten Integralwerte sind mit Maßstabberücksichtigung jeweils eingetragen. Mit diesen Zahlenwerten ergibt sich dann

$$x_0 = \frac{-564{,}50}{113{,}65} = -4{,}97 \text{ cm}$$

mit Auftriebsverteilung nach Multhopp

$$x_{0\,\text{Multhopp}} = \frac{-547{,}2}{110{,}4} = -4{,}96 \text{ cm}.$$

Die kleine dabei auftretende Differenz infolge Anwendung der verschiedenen Verfahren ist ohne Bedeutung.

Weiter wird

$$z_0 = \frac{-110{,}5 + 2 \cdot 1{,}32}{-17{,}89 + 2 \cdot 0{,}23} = 6{,}19 \text{ cm}.$$

Damit sind jetzt die Koordinaten des Neutralpunktes, bezogen auf den willkürlich gewählten Bezugspunkt, bekannt.

Zur Ermittlung des Momentes um den so gefundenen Neutralpunkt benutzen wir Formel (17).

Digitized by Google

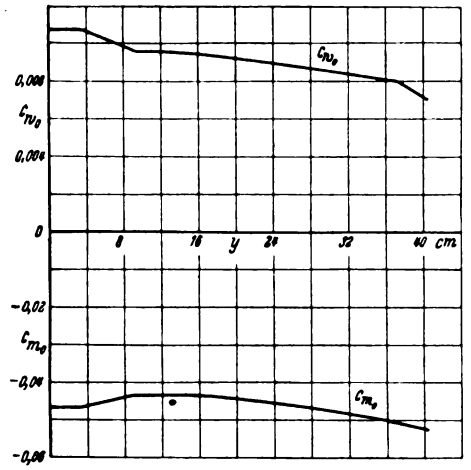


Bild 21. Die Verteilung der c_{w_0}- und c_{m_0}-Werte über die Spannweite des untersuchten Flügels.

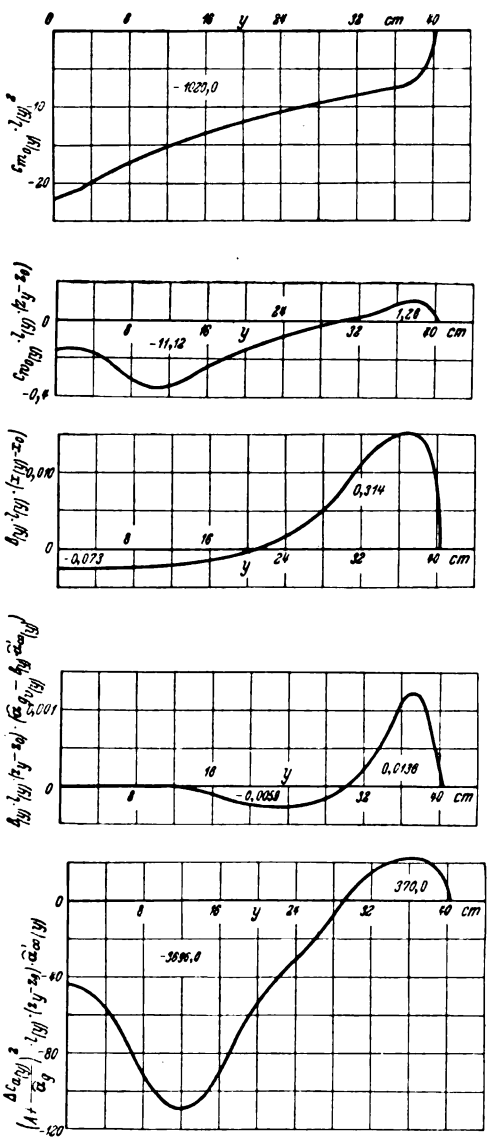


Bild 22 bis 26. Graphische Auswertung der Teilintegrale (Gl. (17)) zur Bestimmung des Momentenverlaufs über α um den gefundenen Neutralpunkt.

In Bild 20 sind die aus Messungen im großen DVL-Windkanal gewonnenen cm_0- bzw. c_{w_0}-Werte über das Profildickenverhältnis und in Bild 21 deren Verlauf über die Spannweite aufgetragen. Die damit graphisch ausgewerteten Teilintegrale sind dargestellt in Bild 22 bis 26. Es ergibt sich damit

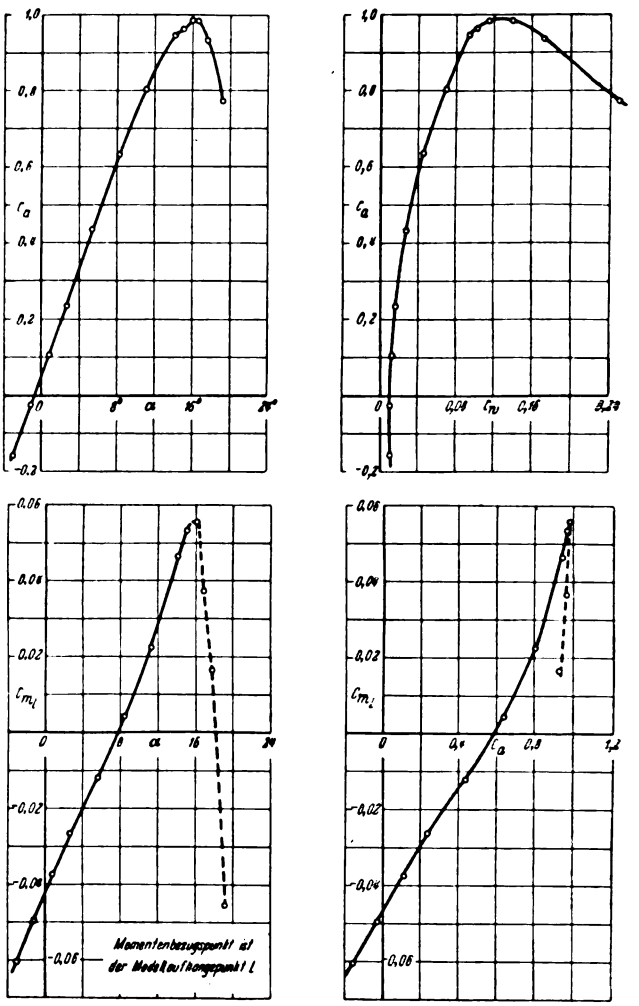


Bild 27 bis 29a. Windkanalmeßergebnisse des untersuchten Flügelmodells.

$$\overline{c_{m_N}} = \frac{1}{22440}\,[-1020{,}0 - 9{,}86 + 0{,}24 + 0{,}01 + 3326{,}0 \cdot \bar{\alpha}_g{}^2]$$
$$= -0{,}0459 + 0{,}148 \cdot \bar{\alpha}_g{}^2.$$

Die Größenordnungen der einzelnen Momentenanteile zeigen, daß das 3. und 4. Teilintegral in Formel (17) vernachlässigt werden kann, ohne damit einen nennenswerten Fehler zu begehen. Das ergibt aber eine wesentliche Vereinfachung von Formel (17).

Es ist jedoch nicht zu übersehen, daß das Krümmungsglied in unserem Beispiel nicht mehr vernachlässigbar klein ist. Wesentlichen Anteil daran hat der kräftige Knick des Flügels.

Mit den durchgeführten Rechnungen ist jetzt ein Neutralpunkt, der angenähert die Bedingung $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha_g} = 0$ erfüllt, und das um diesen Punkt wirkende Moment gefunden, Bild 21 gestrichelte Kurve.

Als nächster Schritt soll nun ein Vergleich der Rechnungen mit den Aussagen einer Windkanalmessung des Flügelmodells durchgeführt werden.

Die Ergebnisse der Messung, nämlich $c_a(\alpha)$, $c_w(c_a)$ und $c_m(c_a)$ bzw. $c_m(\alpha)$ sind in Bild 27 bis 29a wiedergegeben. Die Längsmomentenbeiwerte c_m sind bezogen auf den in Bild 30 gekennzeichneten Modellaufhängepunkt. Mit diesen Größen gelingt es bekanntlich, einen Punkt zu finden, um den für 3 Anstellwinkel bzw. c_a-Werte ein konstantes Moment wirksam ist. Es seien in unserem Beispiel gewählt die drei Werte

$$c_{a1} = -0{,}15 \qquad c_{a2} = 0{,}3 \qquad c_{a3} = 0{,}7.$$

Digitized by Google

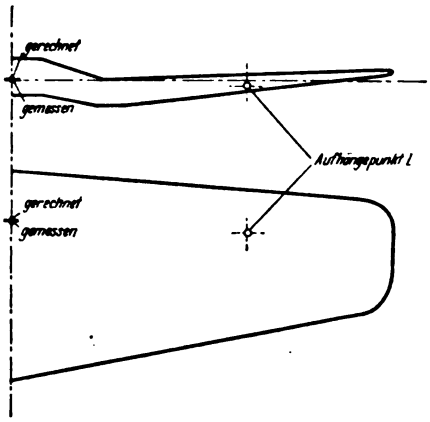


Bild 30. Die Neutralpunktslage gewonnen aus Rechnung und Messung.

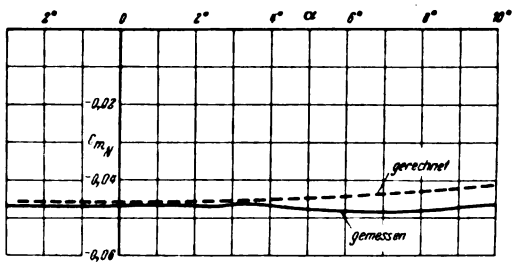


Bild 31. Das Moment um den Neutralpunkt, gewonnen aus Rechnung und Messung.

Mit den damit festliegenden Werten $c_{w1,2,3}$, $c_{m1,2,3}$ und $\alpha_{1,2,3}$ und bei Benutzung der Beziehung

$$c_m = c_{m_0} + c_n \cdot \frac{x}{l} + c_t \cdot \frac{z}{l}$$

ergibt sich

$$c_{m_0} = -0{,}0466 \qquad \frac{x}{l} = 0{,}0850 \qquad \frac{z}{l} = 0{,}0294$$

$\frac{x}{l}$ und $\frac{z}{l}$ sind dabei auf den Modellaufhängepunkt L bezogen. Zum Vergleich mit den gerechneten Werten soll jetzt als gemeinsamer Bezugspunkt der Nasenpunkt des Profils in Flügelmitte (Hochlage auf Skelettsehne) gewählt werden. Dann erhält man für Bild 30

$$\frac{x}{l}_{\text{gerechnet}} = -0{,}226 = 22{,}6\% \qquad \frac{z}{l}_{\text{gerechnet}} = 0{,}008 = 0{,}8\%$$

$$\frac{x}{l}_{\text{gemessen}} = -0{,}234 = 23{,}4\% \qquad \frac{z}{l}_{\text{gemessen}} = 0 = 0\%$$

Die Differenz zwischen Näherungsrechnung und Messung beträgt demnach in der Rücklage 0,8%, in der Hochlage ebenfalls 0,8% der Wurzeltiefe.

Endlich ist dann in Bild 31 der Längsmomentenverlauf, einmal theoretisch, andererseits experimentell gefunden als Funktion des Anstellwinkels aufgezeichnet, worin zu erkennen ist, daß der experimentelle Wert nur für die drei gewählten α- bzw. c_a-Werte konstant ist und dazwischen Abweichungen bis 3% auftreten.

b) Vergleich zwischen Rechnung und Windkanalversuch für drei Trapezflügel mit veränderter Pfeilform.

Als zweites Beispiel wurde die Übereinstimmung von Rechnung und Experiment bei Flügeln mit Pfeilform geprüft[1]). Gewählt wurde eine NACA-Messung an drei Flügeln mit Pfeilung von 0°, 15° und 30° bei sonst gleichen Verhältnissen (vgl. NACA-Report 572 und Bild 36, 38 und 40). Da hier im wesentlichen nur die Neutralpunkts-Rücklagen x_0 interessieren, wurden die Vergleiche auch nur für die Rücklage durchgeführt. Zur Ermittlung der x_0-Werte werde wieder Formel (15) benutzt.

[1]) Die Rechnungen wurden von Herrn H. Schumacher bei der DVL ausgeführt.

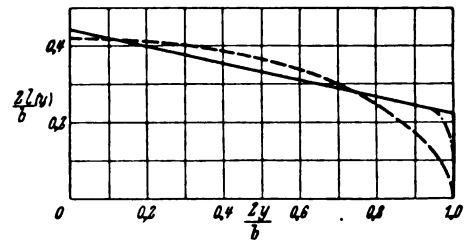


Bild 32. Tiefenverteilung des untersuchten Flügels mit flächengleicher Ellipse.

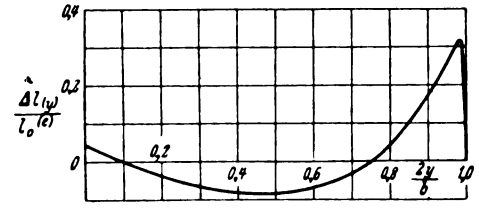


Bild 33. Tiefendifferenz gegenüber der Ellipse.

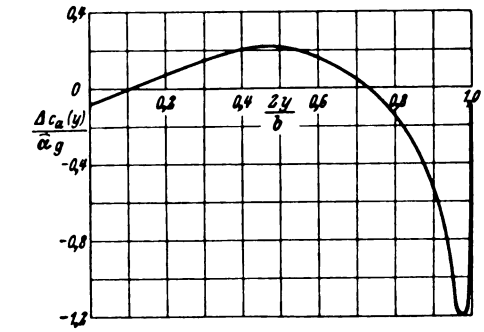


Bild 34. Die mit Hilfe von Gl. (18) bestimmte Änderung der c_a-Verteilung gegenüber der Ellipse für die untersuchte Pfeilflügelserie.

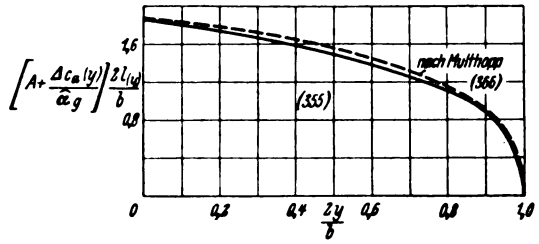


Bild 35. Die $c_a \cdot l$-Verteilung der Pfeilflügelserie, verglichen mit der Rechnung nach Multhopp.

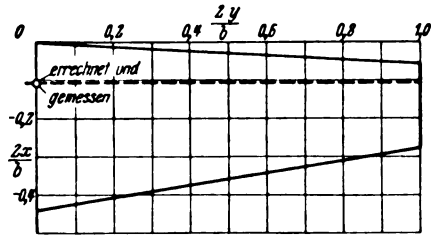


Bild 36. Die Neutralpunktslage, gewonnen aus Rechnung und Messung für den ungepfeilten Flügel.

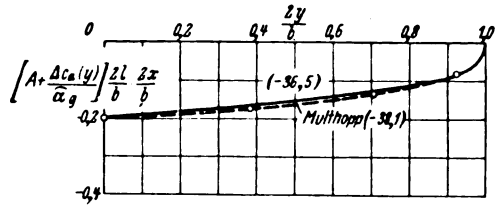


Bild 37. Teilintegral zur Bestimmung von x_0 (Gl. (15)).

Digitized by Google

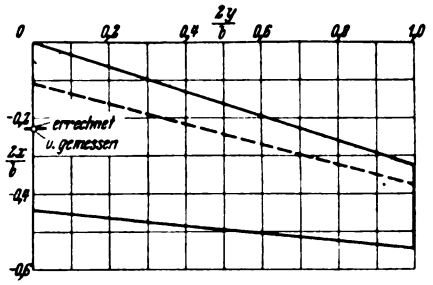


Bild 38. Die Neutralpunktslage, gewonnen aus Rechnung und Messung für den 15°-Pfeilflügel.

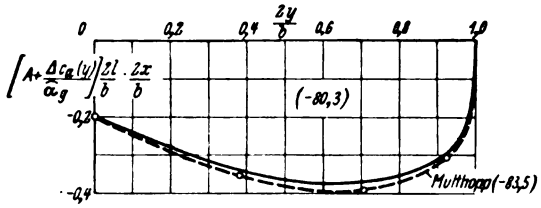


Bild 39. Teilintegral zur Bestimmung von x_s (Gl. (15)).

$\frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g}$ wurde bestimmt mit Formel (18), Bild 34, bei Verwendung der Tiefendifferenz gegenüber der Ellipse, wie in Bild 32 und 33 aufgezeichnet. Bild 35 zeigt die Auftriebsverteilung längs der Spannweite. Zur Kontrolle wurde auch hier wie im ersten Beispiel nach Multhopp gerechnet. In Bild 36 bis 41 sind die Flügelgrundrisse mit den zugehörigen $\left[A + \frac{\Delta c_a(y)}{\bar{\alpha}_g}\right] \cdot \frac{2l}{b} \cdot \frac{2x}{b}$-Verteilungen wiedergegeben. Die graphisch ermittelten Integralwerte sind jeweils in die entsprechenden Diagramme eingetragen.

Die nachfolgende Zahlentafel gibt eine Übersicht über die erzielten Ergebnisse mit den prozentualen Fehlern zwischen Rechnung und Messung, wie sie sich mit der vorhandenen Rechengenauigkeit ergaben.

Ergebnisse mit der genäherten Auftriebsverteilung gemäß Abschnitt IV.

Flügel mit Pfeilstellung	0° Bez. 24—0—0	15° 24—15—0	30° 24—30—0
Gerechnete Neutralpunktsrücklage (gemessen von Flügelvorderkante am Mittelschnitt)	$-0{,}103\,\frac{b}{2}$	$-0{,}226\,\frac{b}{2}$	$-0{,}311\,\frac{b}{2}$
Gemessene Neutralpunktsrücklage (aus NACA-Messung, Report No. 572)	$-0{,}103\,\frac{b}{2}$	$-0{,}226\,\frac{b}{2}$	$-0{,}366\,\frac{b}{2}$
Abweichung in % der mittler. Flügeltiefe $[F/b]$ zwischen Rechnung und Messung	0	0	17

Ergebnisse mit der Auftriebsverteilung nach Multhopp.

Gerechnete Neutralpunktsrücklage	$-0{,}104\,\frac{b}{2}$	$-0{,}224\,\frac{b}{2}$	$-0{,}312\,\frac{b}{2}$
Abweichung in % der mittler. Flügeltiefe $[F/b]$ zwischen Rechnung (mit Multhopp) und Messung	0,3	0,6	16

In Bild 36, 38 und 40 sind die gerechneten und gemessenen Neutralpunktsrücklagen nebeneinander vergleichsweise eingezeichnet. Bei den Flügeln mit 0° und 15° Pfeilung ist eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung

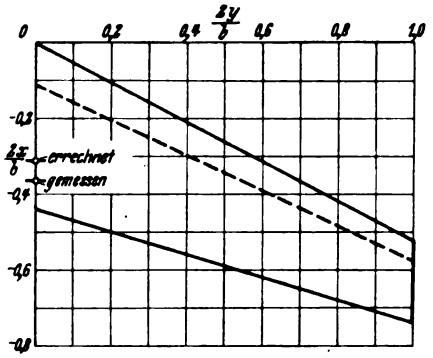


Bild 40. Die Neutralpunktslage, gewonnen aus Rechnung und Messung für den 30°-Pfeilflügel.

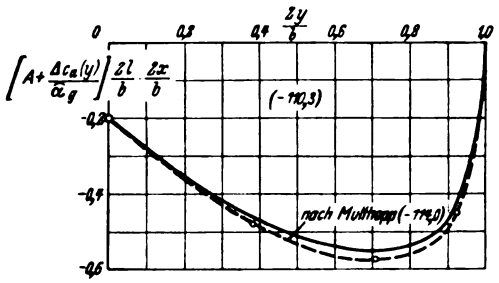


Bild 41. Teilintegral zur Bestimmung von x_s (Gl. (15)).

vorhanden, während der Flügel mit 30° Pfeilwinkel eine untragbar große Abweichung besitzt. Da in der Praxis jedoch Flügel mit einem Pfeilwinkel $> 15°$ bei Schwanzflugzeugen kaum auftreten, ist der große Fehler in der rechnerischen Neutralpunktsbestimmung für solche Flügel unbedeutend.

VI. Zusammenfassung.

Es wird die rechnerische Bestimmung des Neutralpunktes von Flugzeugflügeln betrachtet, und zwar ohne Zuhilfenahme von Windkanalmessungen an Modellflügeln. Vorausgesetzt wird, daß die Neutralpunkte der Flügelschnitte existieren und die Auftriebsverteilung für den vorliegenden Umriß über die Spannweite bekannt ist oder sich nach einem bekannten Verfahren ermitteln läßt.

Die Berechnung wird durchgeführt für elliptische Flügel und für Flügel mit beliebigem Umriß. Zur Bestimmung der Auftriebsverteilung wird ein grobes Näherungsverfahren angegeben, das für die vorliegende Aufgabe ausreichend genaue Ergebnisse liefert unter der Voraussetzung, daß größere Sichtausschnitte am Flügel oder Motorgondeln usw. nicht vorhanden sind.

An Hand von zwei Zahlenbeispielen wird gezeigt, daß die Neutralpunktsberechnung in Hoch- und Rücklage mit der Messung im allgemeinen gute Übereinstimmung zeigt, auch bei Benutzung des angegebenen Näherungsverfahrens. Daraus ist zu entnehmen, daß für viele praktisch wichtige Umrißformen eine genaue Kenntnis der Auftriebsverteilung nicht erforderlich ist, sondern eine grobe Näherung mit kleinem Rechenaufwand bei der Neutralpunktsbestimmung schon genügend genaue Ergebnisse liefert.

Im allgemeinen gibt es einen Neutralpunkt nicht mehr, wenn es sich um einen Flügel mit Rumpf, Motorgondeln usw. handelt. Ein Rumpfkörper für sich besitzt keinen Neutralpunkt, deshalb kann beim Zusammenwirken von Flügel und Rumpf ein Neutralpunkt nur dann genähert existieren, wenn der Einfluß des Rumpfes durch den Interferenzeinfluß des Flügels überdeckt wird. Im allgemeinen Fall kann man beschränkten c_a-Bereichen genähert je einen Neutralpunkt zuordnen.

Digitized by Google

Der Wirkungsgrad von Verbrennungsturbinen mit Gleichdruckverbrennung.

Von Werner Piening VDI, Babelsberg.

Die folgende Arbeit wurde bereits im Jahre 1937 einem bestimmten Kreise zugänglich gemacht. Nachdem das Interesse für die Gasturbine in den letzten Jahren beträchtlich angewachsen ist und sich auch gewisse Möglichkeiten über die Verwendung dieser Maschinenart im Flugzeugbau andeuten, wurde der Aufsatz auf Anregung einer Behörde dieser Schriftenreihe zur Verfügung gestellt, wobei er entsprechend der Entwicklung der letzten Zeit etwas umgearbeitet wurde.

Von den grundlegenden Prozessen der Verbrennungsturbine, nämlich der Verpuffungsturbine und der Turbine mit Gleichdruckverbrennung, wurde der letztere eingehender behandelt und seine Wirkungsgrade an Hand der Diagramme des Kreisprozesses bei adiabatischer und isothermischer Verdichtung bzw. Ausdehnung und bei Ausnutzung der Abwärme unter Berücksichtigung der Wirkungsgrade von Turbine und Verdichter und von Druckverlusten in den Leitungen und Wärmeaustauschern abgeleitet. Die Ergebnisse zeigen, daß sich ohne Ausnutzung der Abwärme die Wirkungsgrade bei adiabatischer bzw. isothermischer Verdichtung nur wenig voneinander unterscheiden. Die Verringerung des Arbeitsaufwandes bei isothermischer Verdichtung wird also durch die Vergrößerung der Wärmezufuhr aufgehoben. Die Aufheizung der verdichteten Luft durch das Abgas bringt jedoch besonders bei isothermischen Zustandsänderungen Vorteile. Von großem Einfluß sind die Wirkungsgrade von Turbine und Verdichter. Man erkennt aus den Kurven, daß man schon Teilwirkungsgrade von mindestens 80% erreichen muß, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Es wird ferner der bedeutende Einfluß von Druckverlusten in Leitungen oder Wärmeaustauschern auf den Wirkungsgrad erzeigt.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Der adiabatische Gleichdruckprozeß
   a) ohne Abwärmeausnutzung,
   b) mit Abwärmeausnutzung,
   c) unter Berücksichtigung der Verluste.
3. Der Gleichdruckprozeß bei isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung
   a) ohne Abwärmeausnutzung,
   b) mit Abwärmeausnutzung,
   c) unter Berücksichtigung der Verluste.
4. Der Gleichdruckprozeß mit isothermischer Verdichtung und Ausdehnung.
5. Der Arbeitsprozeß einer Verpuffungsturbine mit isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung
   a) ohne Abwärmeausnutzung,
   b) mit Abwärmeausnutzung.
6. Allgemeine praktische Gesichtspunkte.
7. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

Die günstigen Wirkungsgrade des theoretischen Prozesses der Verbrennungsturbine und die Einfachheit ihrer Anlage haben immer wieder Erfinder und Konstrukteure gereizt, die technische Verwirklichung dieses Prozesses in Angriff zu nehmen. Die mit Hilfe dieser Maschinenart mögliche unmittelbare Erzeugung umlaufender Energie ließ dabei noch eine beträchtliche Verringerung des Gewichts- und Raumbedarfes im Vergleich zu den Wärmekraftmaschinen mit Kolben erwarten.

Es hat daher nicht an Vorschlägen für die Ausbildung von Gasturbinen gefehlt. Von der Erfindung von John Barber im Jahre 1791 bis zur Gegenwart sind zahlreiche Versuche, zum Teil von namhaften Firmen unternommen worden, um den Prozeß praktisch durchzuführen. Wie Veröffentlichungen[1]) in neuerer Zeit zeigen, ist es jedoch erst kürzlich gelungen, Ergebnisse zu erzielen, die die Verwendung einer Verbrennungsturbinenanlage in gewissen Sonderfällen als wirtschaftlich erscheinen läßt. So ist z. B. seitens der Firma Thyssen eine größere Holzwarth-Gasturbine in Auftrag gegeben worden, die an Stelle der bisherigen Gichtgasmaschinen Verwendung finden soll. Ferner wurden Turbinenanlagen der Firma Brown, Bovery & Co. und Escher-Wyß für Abwärmeausnutzung in der chemischen Industrie und für Notstromanlagen geliefert. Die Wirtschaftlichkeit von Dampfanlagen wird dabei allerdings noch nicht erreicht.

Im folgenden soll an Hand der theoretischen Unterlagen des Arbeitsprozesses ein Überblick über die erreichbaren Wirkungsgrade gewonnen werden, wobei praktische Gesichtspunkte nur soweit berücksichtigt werden, als es zur Abschätzung des Möglichen nötig ist. Aus den aufzustellenden Gleichungen ergeben sich dabei auch die Gründe für die Schwierigkeit der Entwicklung der Verbrennungsgasturbine und eine Erklärung für die vielen Mißerfolge, die sich auf diesem Gebiet eingestellt haben. Ferner kann man die Wege erkennen, die beschritten werden müssen, um die Wirtschaftlichkeit der Verbrennungsturbine so weit zu steigern, daß sie auch für allgemein technische Zwecke und auch im Flugzeugbau angewendet werden kann.

Grundlegende Arbeitsprozesse.

Ähnlich wie bei Kolbenmaschinen kann man 2 Arten von Verbrennungsturbinen unterscheiden:

a) die Gleichdruckturbine entsprechend dem Diesel-Motor,

b) die Verpuffungsturbine entsprechend dem Otto-Motor.

Da sich der Gleichdruckprozeß durch besonders einfache und betriebssichere Einrichtungen verwirklichen läßt und ein so geringes Einheitsgewicht bei kleinem Raumbedarf verspricht, daß eine Verwendung auf dem Gebiet des Flugzeugbaues Vorteile ergeben kann, soll dieses Arbeitsverfahren besonders behandelt werden.

2. Der adiabatische Gleichdruckprozeß.

a) Ohne Abwärmeausnutzung.

Das Bild 1 zeigt das theoretische PV- und TS-Diagramm eines Kreisprozesses mit adiabatischer Verdichtung und Ausdehnung zwischen den Drücken p und p_0.

[1]) A. Meyer, Die Verbrennungsturbine, ihre Geschichte, ihr heutiger Stand und ihre Aussichten für die nahe Zukunft. Stahl u. Eisen Bd. 59 (1939), S. 1373.
A. Stodola, Leistungsversuche an einer Verbrennungsturbine. Z. VDI Bd. 84 (1940), S. 17.
I. Ackeret und C. Keller, Eine aerodynamische Wärmekraftanlage. Schweizer Bauzeitung Bd. 113 (1939), S. 229.
G. Jendrassik, Versuche an einer neuen Brennkraftmaschine. Z. VDI Bd. 83 (1939), S. 792.

Digitized by Google

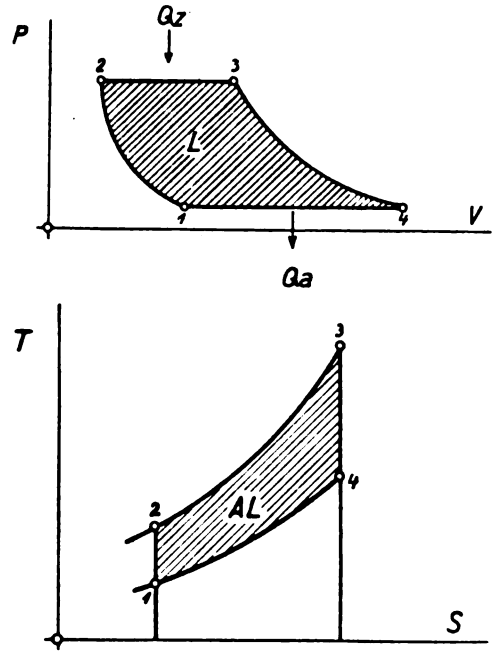


Bild 1. Theoretisches *PV*- und *TS*-Diagramm des Kreisprozesses.

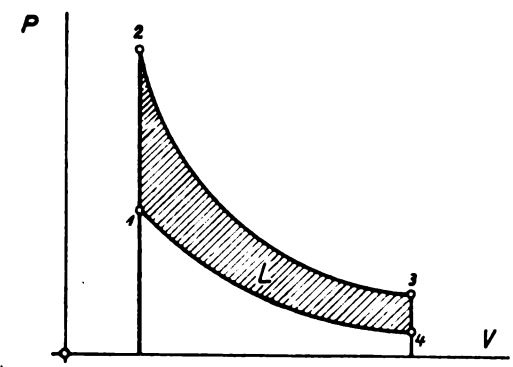


Bild 2. Theoretisches *PV*-Diagramm des Otto-Motors.

Im Arbeitstakt *1* wird Luft vom Druck p_0 angesaugt und auf p verdichtet (Zustandlinie *1—2*). Darauf wird die Luft entlang der Isobare *2—3* erwärmt und anschließend eine adiabatische Ausdehnung in einer Turbine *3—4* durchgeführt. Im Punkt *4* beginnt die Wärmeabfuhr, wodurch sich die Luft bei gleichbleibendem Druck p_0 auf ein Volumen entsprechend dem Punkt *1* zusammenzieht (Zustandlinie *4—1*). Ein derartiger geschlossener Kreisprozeß, bei dem die Luft innerhalb der Maschine verbleibt, liegt auch dem Arbeitsverfahren der Heiß- und Kaltluftmaschine zugrunde.

Der wirkliche Prozeß weicht, abgesehen von dem Auftreten einer Reihe von Verlusten, dadurch von dem eben beschriebenen ab, daß

1. Die Wärmezufuhr durch Verbrennung in der Luft geschieht, wodurch sich die Gaskonstante, der Exponent $\varkappa$ und die spezifische Wärme ändern und
2. die Luft nach der Expansion in die Atmosphäre ausgeschoben und frische Luft angesaugt wird (offener Prozeß).

Ist L_t die Leistung der Turbine und L_v die Leistungsaufnahme des Verdichters, so ist die abgegebene Leistung

$$L = L_t - L_v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Bezeichnet man mit Q_z die zur Erhöhung der Temperatur von t_2 auf t_3 benötigte Wärmemenge, so ist der Wirkungsgrad

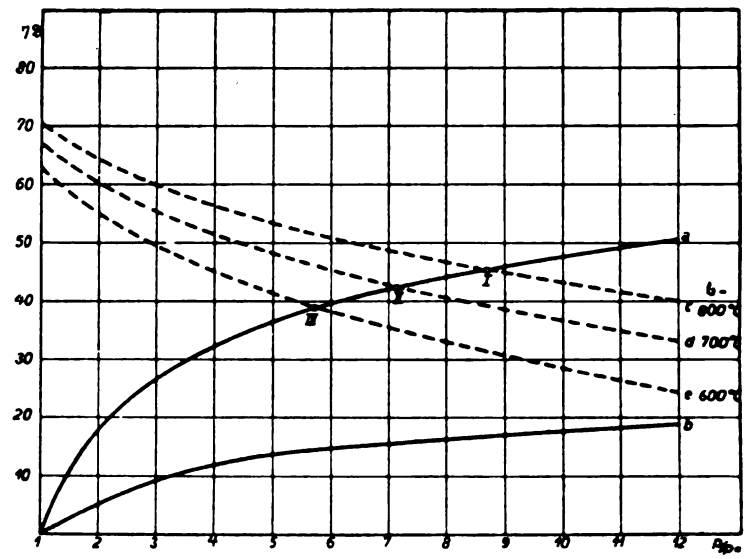


Bild 3. Wirkungsgrad einer Gleichdruck-Verbrennungsturbine und einer Dampfanlage in Abhängigkeit vom Druckverhältnis.
Kurve *a*: Theoretischer Wirkungsgrad der Turbine ohne Wärmeaustauscher,
Kurve *b*: Theoretischer Wirkungsgrad der Dampfanlage,
Kurve *c*: Theoretischer Wirkungsgrad der Turbine mit vollständigem Wärmeaustausch bei 800° Betriebstemperatur,
Kurve *d*: Theoretischer Wirkungsgrad der Turbine mit vollständigem Wärmeaustausch bei 700° Betriebstemperatur,
Kurve *e*: Theoretischer Wirkungsgrad der Turbine mit vollständigem Wärmeaustausch bei 600° Betriebstemperatur.

$$\eta = \frac{A \cdot (L_t - L_v)}{Q_z}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wobei A das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Bei adiabatischer Verdichtung und Ausdehnung kann man schreiben

$$\eta = \frac{c_p\,[(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)]}{c_p\,(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}, \quad (3)$$

was sich auch ohne weiteres aus dem *TS*-Diagramm ergibt. Da Verdichtung und Ausdehnung zwischen denselben Druckgrenzen stattfinden, kann man nach der Gleichung für die Adiabate das Verhältnis der Temperaturen durch das Druckverhältnis ausdrücken. Es ist also

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \alpha, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

woraus sich die Gleichungen

$$T_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot T_2 \text{ und } T_4 = \frac{1}{\alpha} \cdot T_3$$

ableiten lassen.

Damit erhält man den Wirkungsgrad für den verlustlosen adiabatischen Prozeß

$$\eta_a = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Für den Wert α findet man in der »Hütte« I (26. Auflage) S. 519 eine Zahlentafel.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der theoretische Wirkungsgrad eines Prozesses für Gasmaschinen oder Otto-Motoren nach dem Bild 2 von gleicher Größe ist.

Der theoretische Wirkungsgrad einer Verbrennungsturbine ist nach der Gleichung (5) nur vom Druckgefälle, also nicht vom absoluten Druck und den Temperaturgrenzen, abhängig.

In dem Bild 3 zeigt die Kurve *a* den Verlauf von η_a in Abhängigkeit vom Druckverhältnis. Die theoretisch erreichbaren Wirkungsgrade müssen als günstig bezeichnet werden.

In das gleiche Bild wurden die Wirkungsgrade eines theoretischen Prozesses mit Dampf nach dem Bild 4 zwischen den gleichen Druckgrenzen bei einer Speisewassertemperatur von 15° C und der heute üblichen Dampftemperatur von 450° C eingetragen (Kurve *b*).

Digitized by Google

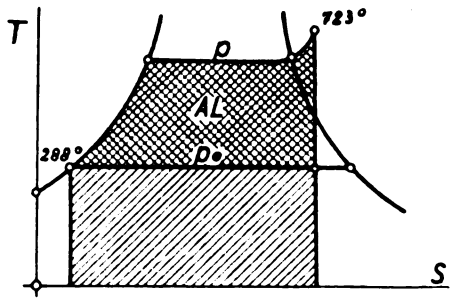


Bild 4. *TS*-Diagramm einer Dampfanlage.

Man sieht, daß der theoretische Wirkungsgrad des Verbrennungsturbinenprozesses erheblich höher als der einer Dampfanlage ist. Selbst bei einem Druckverhältnis von 50 erreicht man mit der Dampfanlage nur eine Wärmeausnutzung von etwa 26%. Diese oft nicht beachtete Tatsache ist vor allem auf die große latente Wärme des Wassers zurückzuführen, die zwar zu dessen Verdampfung und zur Druckerzeugung nötig ist, aber nur zu einem kleinen Teil in mechanische Arbeit umgesetzt werden kann. Die Erzeugung von Druck im Dampfkessel ist daher ein verlustreicher Vorgang, da die hierfür benötigten Wärmemengen größtenteils durch die Art des Arbeitsprozesses verlorengehen.

Wenn trotzdem der Wirkungsgrad von Dampfanlagen besser ist als der aller bisher erbauten Verbrennungsturbinen, so liegt das daran, daß, wie später noch eingehender dargelegt werden wird, bei dieser Turbine die Verluste durch die Hilfsmaschinen weit stärker als bei der Dampfanlage ins Gewicht fallen und den Wirkungsgrad verschlechtern.

b) Mit vollständiger Abwärmeausnutzung.

Bei dem bisherigen Prozeß verließen die Abgase die Maschine mit der Temperatur T_4, Bild 1. Falls diese Temperatur über T_2 liegt, kann man die Luft nach ihrer Verdichtung mit Hilfe der Abgase vorwärmen und dadurch den Wirkungsgrad verbessern. Die zugeführte Wärme Q_z vermindert sich auf diese Weise um den Betrag $c_p\,(T_4 - T_2)$. Man erhält also entsprechend der Gleichung (3)

$$\eta = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2) - (T_4 - T_2)} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} \quad . \quad (6)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (4) ergibt sich

$$\eta_a' = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \alpha \cdot \frac{T_1}{T_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dieser Wirkungsgrad ist vom Druckverhältnis und von den Temperaturgrenzen, in denen sich der Prozeß abspielt, abhängig. In dem Bild 3 ist η_a' für die Temperatur $t_3 = 600$, 700 und 800° C und 15° Anfangstemperatur eingetragen (Kurven *c*, *d* und *e*). Die Kurven verlaufen teils oberhalb, teils unterhalb von *a*, die sie in den Punkten *I*, *II* und *III* schneiden. η_a' nimmt mit steigendem Druckverhältnis ab, da damit die Verdichtungstemperatur ansteigt und der Wärmerückgewinn verkleinert wird. Schließlich sinkt T_4 unter T_2, wodurch der Wärmeaustausch schädlich wird, da dann das Abgas durch die verdichtete Luft geheizt wird.

Wie man sieht, sind auf diesem Wege beträchtliche Wirkungsgrade erreichbar. Bei kleineren Druckverhältnissen ist theoretisch sogar eine noch bessere Wärmeausnutzung möglich, als sie sich mit dem normalen Verpuffungsprozeß erreichen läßt. Bei der Dieselmaschine ergeben sich so hohe Wirkungsgrade nur bei sehr hohen Verdichtungsverhältnissen.

Bei dem Dampfprozeß kann man dagegen selbst bei idealen Annahmen derartige Wirkungsgrade nicht erzielen, da durch Abwärmeverwertung nur kleinere Wärmemengen zurückgewonnen werden können, wodurch sich der theoretische Prozeß nur wenig verbessert.

c) Unter Berücksichtigung der auftretenden Verluste.

Durch die Unvollkommenheit des wirklichen Arbeitsverfahrens werden folgende Änderungen des theoretischen Prozesses verursacht:

a) Die Verdichtung findet nicht adiabatisch statt, sondern ist mit Verlusten durch Wärmeaustausch und Drosselung verbunden. Ist η_v der Wirkungsgrad des Verdichters und L_v die theoretische Arbeit ohne Berücksichtigung der Lagerverluste, so wird die Arbeitsaufnahme

$$L_v' = \frac{1}{\eta_v} \cdot L_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

b) Die Ausdehnung erfolgt gleichfalls nicht ohne Verluste. Die von der Turbine abgegebene Leistung ist daher entsprechend

$$L_t' = \eta_t \cdot L_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

c) Die Ausnutzung der verwertbaren Abwärme ist nicht vollständig infolge der Unvollkommenheit des Wärmeaustauschers, dessen Wirkungsgrad mit η_w bezeichnet sei.

d) Durch mangelhafte Verbrennung und Abstrahlung wird die Brennstoffenergie dem Arbeitsgas nicht vollständig zugeführt. Bei einem Wirkungsgrad der Brennkammer η_b ist für die Nutzwärme Q_z eine Wärmemenge $Q_z' = \frac{1}{\eta_b} \cdot Q_z$ zu erzeugen.

e) Das Getriebe verursacht Verluste, die durch den Wirkungsgrad η_g berücksichtigt werden sollen, wobei die Verluste durch die Lagerreibung in der Turbine und dem Verdichter zweckmäßig durch einen Zuschlag berücksichtigt werden.

f) Durch Strömungsverluste wird das von dem Verdichter zu liefernde Druckgefälle vergrößert, während das Arbeit leistende Gefälle dadurch verringert wird.

g) Die spezifischen Wärmen hängen von den Temperatur und, wie bereits erwähnt, von der Menge des zugeführten Brennstoffs ab, so daß c_p genau genommen aus den Gleichungen (3) und (6) nicht herausfällt. Außerdem ist zu beachten, daß durch die Verbrennung sowohl die Gaskonstante R als auch der Exponent des Arbeitsgases verändert werden.

Sieht man zunächst von den Veränderungen nach Punkt *f* und *g* ab, so wird der Wirkungsgrad des wirklichen Prozesses mit den oben eingeführten Größen

$$\eta = \eta_g \cdot \frac{\eta_t \cdot A\,L_t - \frac{1}{\eta_v} \cdot A\,L_v}{\frac{1}{\eta_b} \cdot Q_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bei der Berechnung von Q_z ist zu berücksichtigen, daß durch die unvollkommene Verdichtung die Temperatur der Luft über den adiabatischen Endzustand der Luft T_2 steigt und daß entsprechend der geringeren Ausnutzung der Wärme in der Turbine die Temperatur T_4 nach der Ausdehnung wächst.

Ist T_4' die Endtemperatur der wirklichen Expansion, so kann man diesen Wert aus der Gleichung

$$\frac{T_3 - T_4'}{T_3 - T_4} = \eta_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

errechnen, woraus man

$$T_4' = T_3 - \eta_t\,(T_3 - T_4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a)$$

erhält.

Unter Beachtung der Gleichung (4) ergibt sich

$$T_4' = T_3 \left[1 - \eta_t \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right] = T_3\,(1 - \eta_a \cdot \eta_t) \quad . \quad . \quad (12)$$

In ähnlicher Weise findet man

$$T_2' = T_2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\eta_a}{\eta_v}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Digitized by Google

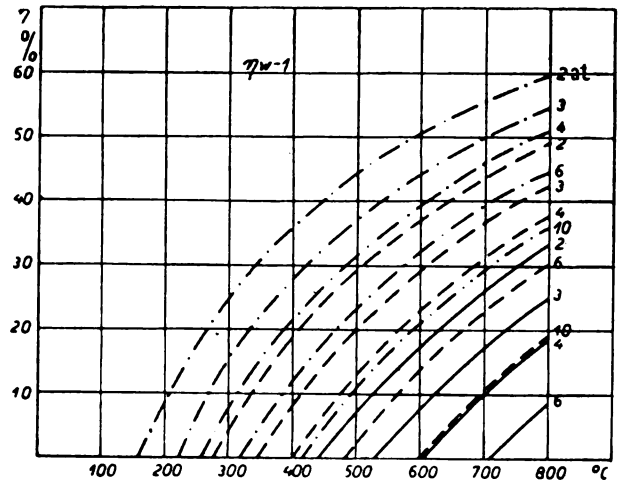


Bild 5.

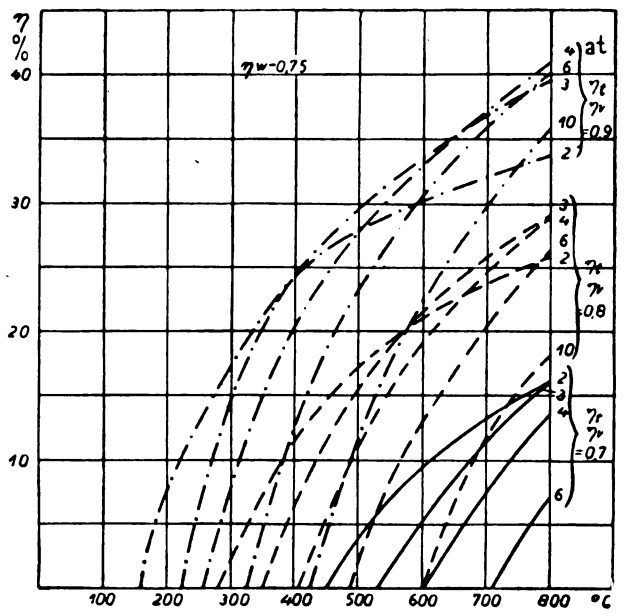


Bild 6.

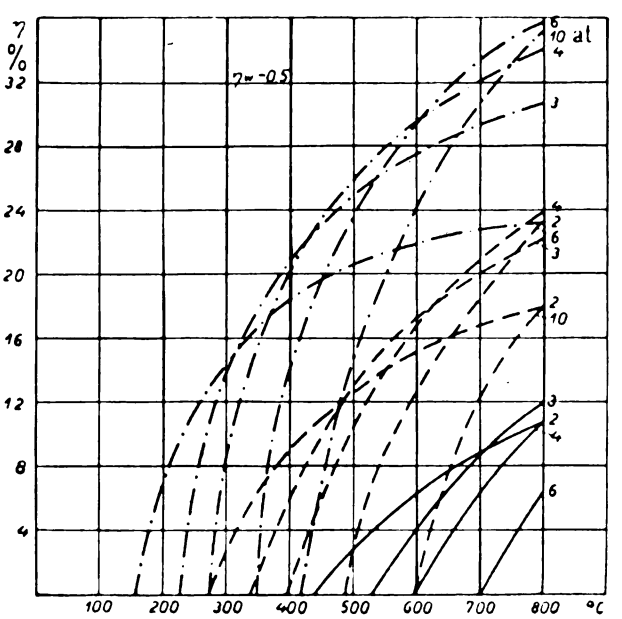


Bild 7.

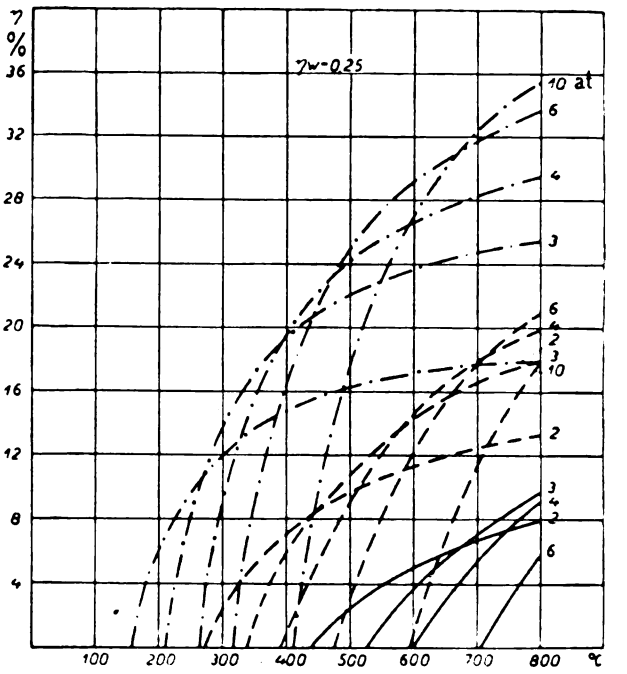


Bild 8.

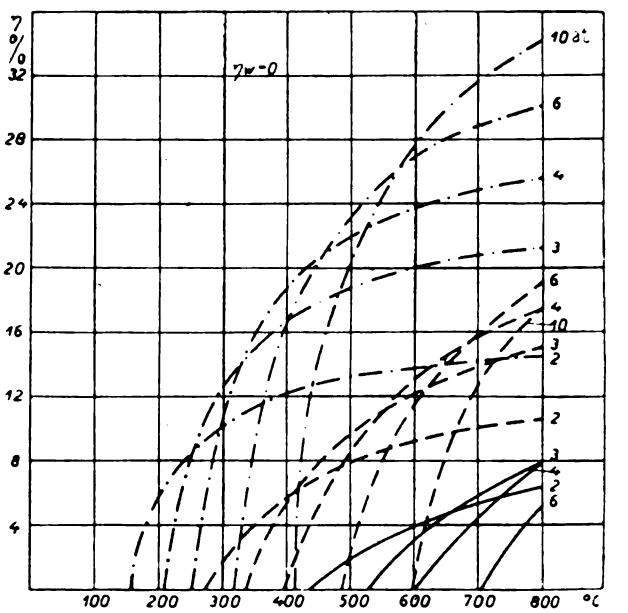


Bild 9.

Bild 5 bis 9. Wirkungsgrad der Verbrennungsturbine in Abhängigkeit von der Betriebstemperatur bei verschieden großer Wärmeausnutzung für verschiedene Druckverhältnisse und Teilwirkungsgrade. Die Kennzeichnung der Kurven bedeutet:

— · — · — · η_t und $\eta_v = 0{,}9$,
— — — — η_t und $\eta_v = 0{,}8$,
——— η_t und $\eta_v = 0{,}7$.

Mit obigen Werten wird Q_z in der Gleichung (10) unter Einführung des Wirkungsgrades der Abwärmeausnutzung

$$Q_z = c_p\,[(T_3 - T_2') - \eta_w\,(T_4' - T_2')]$$
$$= c_p\,[T_3 - T_2'\,(1 - \eta_w) - \eta_w \cdot T_4'] \quad \ldots \quad (14)$$

Hierin ist $1 - \eta_w$ der Verlust V des Wärmeaustauschers. Nach Einsetzung von T_2' und T_4' erhält man schließlich

$$Q_z = c_p \left[T_3 (1 - \eta_w\,(1 - \eta_t \cdot \eta_a)) - T_2 \cdot V \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\eta_a}{\eta_v} \right) \right]$$
$$= c_p\,(T_3 \cdot u - T_2 \cdot w), \quad \ldots \quad (15)$$

worin

$$u = 1 - \eta_w\,(1 - \eta_t \cdot \eta_a) \text{ und } w = V \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\eta_a}{\eta_v} \right) \quad (16)$$

Digitized by Google

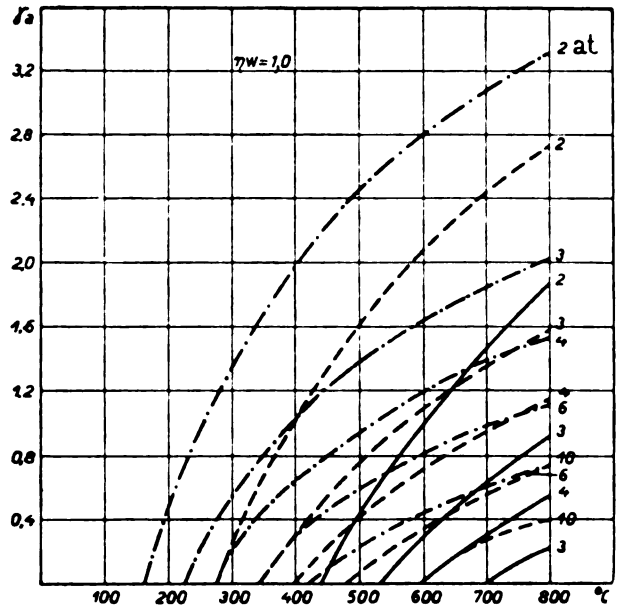


Bild 10.

gesetzt wurde.

Für den Zähler der Gleichung (10) erhält man

$$c_p\left[\eta_t\,(T_3-T_4)-\frac{1}{\eta_v}\cdot(T_2-T_1)\right]=c_p\cdot\eta_a\left(\eta_t\cdot T_3-\frac{1}{\eta_v}\cdot T_2\right) \quad \ldots\ldots (17)$$

Mit obigen Werten findet man

$$\eta=\eta_g\cdot\eta_b\cdot\eta_a\cdot\frac{T_3\cdot\eta_t-T_2\cdot\frac{1}{\eta_v}}{T_3\cdot u-T_2\cdot w}=\eta_g\cdot\eta_b\cdot\eta_a\cdot\gamma_a, \quad (18)$$

wenn man den Einfluß von η_t, η_v und η_w in der Größe γ_a zusammenfaßt. Für $\eta_w = 0$ ergibt sich

$$\eta=\eta_g\cdot\eta_b\cdot\eta_a\cdot\frac{T_3\cdot\eta_t-T_2\cdot\frac{1}{\eta_v}}{T_3-T_2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\eta_a}{\eta_v}\right)} \quad \ldots\ldots (19)$$

und für $\eta_w = 1$

$$\eta=\eta_g\cdot\eta_b\cdot\eta_a\cdot\frac{T_3\cdot\eta_t-T_2\cdot\frac{1}{\eta_v}}{T_3\cdot\eta_t\cdot\eta_a}=\eta_g\cdot\eta_b\left(1-\frac{T_2}{\eta_t\cdot\eta_v\cdot T_3}\right) \quad \ldots\ldots (20)$$

Selbstverständlich kann man η auch mit Hilfe eines *IS*-Diagrammes bestimmen. Ein derartiges Vorgehen hat jedoch den Nachteil, daß man die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von den einzelnen Größen weniger gut wie an Hand der Gleichung (18) beurteilen kann.

Wegen der vielen Veränderlichen läßt sich η nicht in einem einzigen Kurvenblatt darstellen.

In den Bildern 5 bis 9 wurde diese Größe in Abhängigkeit von der Eintrittstemperatur in die Turbine für verschiedene Werte η_w und eine Lufttemperatur von 15° C aufgetragen. Hierbei wurden η_b und η_g der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt und aus dem gleichen Grund die Wirkungsgrade der Verdichtung und Ausdehnung gleich groß angenommen.

Die Kurven zeigen, daß das Verhalten der wirklichen Gasturbine von dem theoretischen Prozeß erheblich abweicht. Z. B. wird $\eta = 0$ für

$$\eta_t\cdot T_3=\frac{1}{\eta_v}\cdot T_2 \text{ oder } \eta_t\cdot\eta_v=\frac{T_2}{T_3}\cdot$$

Bei niedrigen Wirkungsgraden η_t und η_v ist daher bereits für den Leerlauf der Maschine eine hohe Gastemperatur erforderlich, unabhängig von der Güte des Wärmeaustauschers.

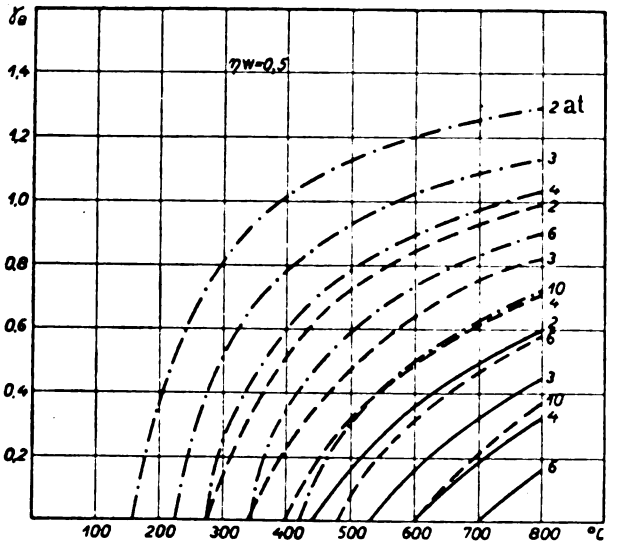


Bild 11.

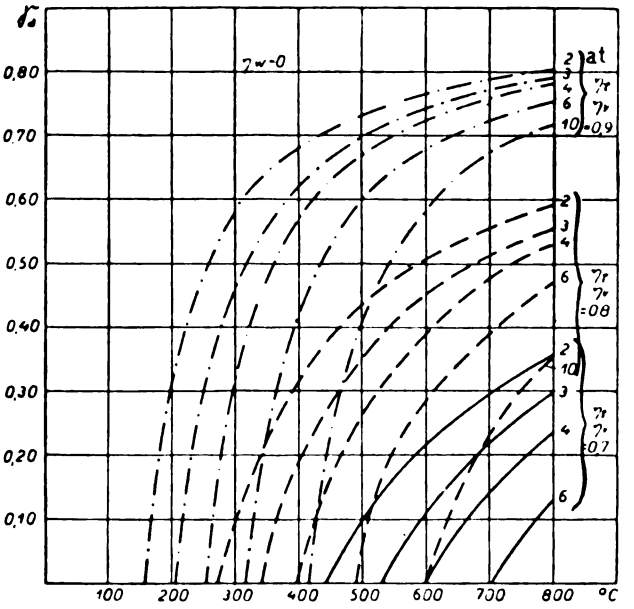


Bild 12.

Bild 10 bis 12. γa in Abhängigkeit von der Betriebstemperatur bei verschieden großer Wärmeausnutzung. Kennzeichnung der Kurven wie in den Bildern 5 bis 9.

Man sieht ferner, daß η mit der Gastemperatur beträchtlich ansteigt und daß es bei jedem Wert von t_3 bzw. η_t und η_v für ein bestimmtes Druckgefälle, das nicht dem höchsten Gefälle zu entsprechen braucht, einen Bestwert gibt. η hängt wie η_a nur vom Druckgefälle, nicht vom absoluten Druck ab. Für $\eta_w = 1$ wird η eindeutig mit steigendem Druckverhältnis schlechter. Es ist also in diesem Fall aus diesem Grunde ein möglichst kleines Druckverhältnis anzustreben, womit allerdings ein Anwachsen der Maschinengröße verbunden ist.

Naturgemäß ist η stark von η_w abhängig. Der weitgehendste Einfluß rührt jedoch von den Verlusten bei der Verdichtung und Ausdehnung her. Ohne Wärmeaustauscher muß man schon eine sehr hohe Betriebstemperatur zulassen und besonders gute Wirkungsgrade erzielen, um die Wirtschaftlichkeit einer modernen Dampfanlage zu erreichen. Jedenfalls dürfte vor allem Bild 9 deutlich machen, warum man mit den meisten bisher erbauten Gasturbinen keinen befriedigenden Brennstoffverbrauch erzielen konnte, und erst in neuester Zeit eine Besserung erreicht wurde.

Um den Einfluß der Teilwirkungsgrade η_t, η_v und η_w auf η deutlicher hervorzuheben, wurde in Bild 10 bis 12

Digitized by Google

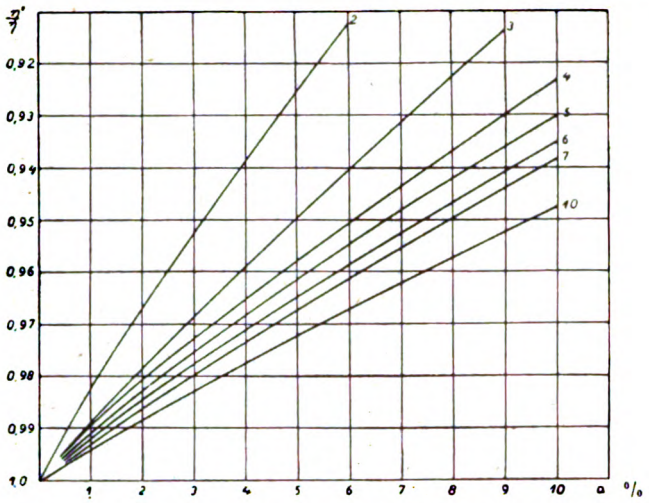


Bild 13. Einfluß des auf den Wirkungsgrad von Verdichter und Turbine bezogenen Druckverlustes a bei adiabatischer Verdichtung oder Ausdehnung.

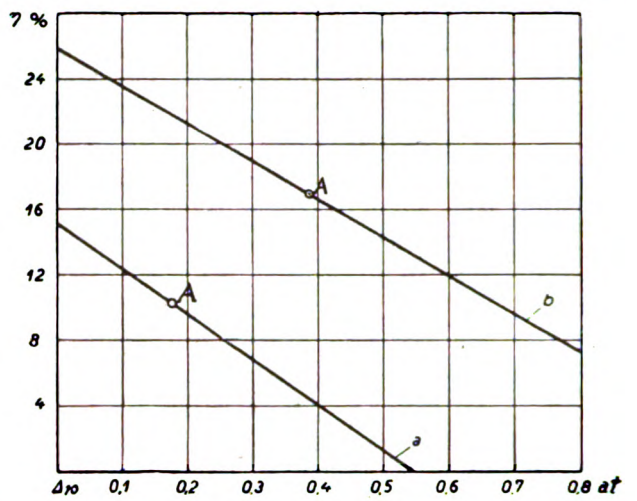


Bild 14. Einfluß von Druckverlusten auf den Wirkungsgrad der Verbrennungsturbine.
Kurve a für Beispiel a,
Kurve b für Beispiel b.

die von η_a nur wenig abhängige Größe γ_a für die vorigen Annahmen über t_3 aufgetragen. $\gamma_a > 1$ bedeutet dabei Verbesserung von η über η_a durch Ausnutzung der Abwärme, was bei geringeren Werten von η_t und η_v erst bei einem höheren η_w erreicht wird. Bemerkenswert ist das Absinken von γ_a, d. h. das Anwachsen der Verluste mit steigendem Druckverhältnis. Dadurch erklärt sich das Überschneiden der η-Kurven in Bild 5 bis 9, da γ_a mit größer werdendem Druckverhältnis kleiner wird, während η_a sich in diesem Fall verbessert.

Bei der Rechnung wurden allerdings die durch den Wärmeaustauscher verursachten Druckverluste nicht berücksichtigt. Auf diese Einflüsse, die das Bild beträchtlich verschieben, wird anschließend eingegangen.

Die Druckverluste in der Brennkammer, den Rohrleitungen, Wärmeaustauschern usw. bewirken bei festgelegtem theoretischem Gefälle eine Vergrößerung der Verdichterleistung und eine Verkleinerung der Turbinenleistung. Am besten berücksichtigt man diesen Einfluß durch eine entsprechende Verschlechterung von η_t oder η_v, wodurch man derartige Verluste in den Arbeitsprozeß der einzelnen Maschinen einbezieht. Ist z. B. das Druckgefälle des Prozesses $\frac{p}{p_0}$, so wird die Verdichterarbeit ohne Druckverlust

$$L = \frac{1}{\eta_v} \cdot G \cdot R \cdot T \left(\frac{p}{p_0}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right)$$

und die wirkliche Arbeit

$$L' = \frac{1}{\eta_v} \cdot G \cdot R \cdot T \left(\frac{p'}{p_0}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right),$$

wofür man auch

$$L' = \frac{1}{\eta_{v'}} \cdot G \cdot R \cdot T \left(\frac{p}{p_0}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right)$$

schreiben kann. Daraus erhält man

$$\frac{\eta_{v'}}{\eta_v} = \frac{\frac{p}{p_0}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}{\frac{p'}{p_0}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

p' ist dabei $= p + \Delta p$, wenn mit Δp der Druckverlust bezeichnet wird. Setzt man $\frac{\Delta p}{p} = a$, so erhält man

$$p' = p\,(1 + a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Für den Turbinenwirkungsgrad gilt das Entsprechende.

In Bild 13 wurde $\frac{\eta'}{\eta}$ für verschiedene Druckverhältnisse in Abhängigkeit von a aufgetragen, so daß man die Verschlechterung von η_t und η_v infolge von Druckverlusten aus dem Diagramm ablesen kann. Je höher das Druckgefälle ist, um so geringer wird der Einfluß der Strömungsverluste, wobei aber zu beachten ist, daß diese Verluste mit wachsendem absoluten Druck ansteigen. Die Größe a muß aus den jeweils vorliegenden Verhältnissen bestimmt werden.

Um die Bedeutung der Druckverluste für den Wirkungsgrad der Gasturbine zu kennzeichnen, wurde in Bild 14 η in Abhängigkeit von Δp für folgende Annahmen aufgetragen:

Kurve a:

$$\eta_t = 0{,}8, \quad \eta_v = 0{,}72, \quad \eta_w = 0{,}75, \quad \eta_b = 0{,}95,$$

$$\eta_g = 0{,}98, \quad \frac{p}{p_0} = 4, \quad t_3 = 650^0\,\mathrm{C}, \quad t_1 = 15^0\,\mathrm{C};$$

Kurve b:

$$\eta_t = 0{,}85, \quad \eta_v = 0{,}82, \quad \eta_w = 0{,}75, \quad \eta_b = 0{,}95,$$

$$\eta_g = 0{,}98, \quad \frac{p}{p_0} = 4, \quad t_3 = 650^0\,\mathrm{C}, \quad t_1 = 15^0\,\mathrm{C}.$$

Die Kurve a entspricht dabei etwa den gegenwärtig im allgemeinen erzielten Wirkungsgraden, während für b Werte für η_t und η_v angenommen wurden, die als erreichbar anzusehen sind. Der Punkt A wurde für einen η-Wert ohne Druckverluste und für $\eta_w = 0$ eingezeichnet. Man erkennt, daß selbst bei den heute üblichen Wirkungsgraden der Einfluß der Druckverluste sehr groß ist. Bereits für einen Strömungswiderstand von 0,175 at — entsprechend 129 mm Hg oder 4,4% des Druckverhältnisses — wird der Nutzen des Wärmeaustauschers aufgehoben, während bei $\Delta p \sim 0{,}55$ at — entsprechend 405 mm Hg oder 13,7% des Druckverhältnisses — die Leistungsabgabe der Anlage gleich Null wird. Die für die Kurve b vorgesehene Erhöhung der Wirkungsgrade verbessert die Verhältnisse sehr. Es geht daraus hervor, daß der Einbau eines Wärmeaustauschers wegen des dadurch bewirkten unvermeidlichen Druckverlustes erst bei hohen Teilwirkungsgraden einen Nutzen verspricht.

Bei einer Dampfanlage sind dagegen die Druckverluste im Speisewasserkreislauf von untergeordneter Bedeutung für die Wirtschaftlichkeit. Mit den Wirkungsgraden der heutigen Hilfsmaschinen läßt sich daher durchaus ein erträglicher Brennstoffverbrauch erzielen.

Nach Punkt g von Seite 269 hat auch die Veränderung des Gaszustandes durch die Verbrennung und die Abhängig-

Digitized by Google

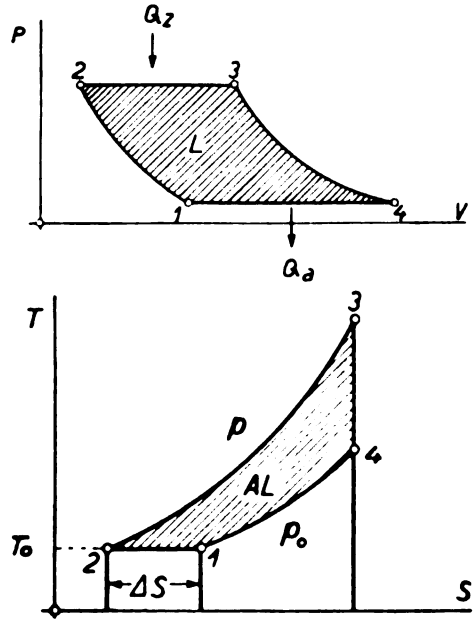


Bild 15. Theoretisches *PV*- und *TS*-Diagramm eines Kreisprozesses mit isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung.

keit der spezifischen Wärmen von der Temperatur Einfluß auf den wirklichen Prozeß. Es soll daher kurz darauf eingegangen werden.

Durch die Verbrennungsprodukte werden meistens die Gaskonstante und das von der Turbine zu verarbeitende Volumen um ein geringes Maß vergrößert. Außerdem wird dadurch die spezifische Wärme der Gase erhöht, aus welchem Grunde zur Erwärmung auf eine bestimmte Temperatur eine größere Wärmemenge benötigt wird. Man kann sagen, daß sich in erster Annäherung beide Einflüsse aufheben.

Während die spezifischen Wärmen des Arbeitsgases bei den für eine Verbrennungsturbine in Frage kommenden Drücken als druckunabhängig angenommen werden können, müßte ihre Änderung mit der Temperatur eigentlich berücksichtigt werden. Da jedoch die Anfangs- und Endtemperatur meistens nicht weit auseinanderliegen, hebt sich dieser Einfluß größtenteils heraus und braucht in die Rechnung nicht eingeführt zu werden.

Um die Zulässigkeit aller Vereinfachungen zu prüfen, werden im folgenden die Wirkungsgrade eines Prozesses mit und ohne Abwärmeausnutzung durch Rechnung und bei Benutzung der *IS*-Tafeln von Pflaum bestimmt und untereinander verglichen.

Beispiel a):

$$\eta_w = 0,\ \eta_t = 0{,}85,\ \eta_v = 0{,}82,\ \eta_b = 0{,}95,$$

$$\eta_g = 0{,}98,\ t_3 = 650^0\,\mathrm{C},\ \frac{p}{p_0} = 4.$$

Druckverlust zwischen Verdichter und Turbine 0,1 at, Druckverlust zwischen Turbine und Gasaustritt vernachlässigbar.

Mit Hilfe des Bildes 13 erhält man $\eta_v = 0{,}802$.

Aus der Gleichung (18) errechnet man $\eta = 16{,}7\%$, während man aus den *IS*-Tafeln (es wurden Diagramme im vergrößerten Maßstab benutzt) ebenfalls den Wert $\eta = 16{,}7\%$ findet.

Beispiel b):

$\eta_w = 0{,}75$.

Druckverlust zwischen Verdichter und Turbine 0,2 at, Druckverlust zwischen Turbine und Gasaustritt 0,1 at. Damit ergibt sich $\eta_t = 0{,}83\%$ und $\eta_v = 0{,}785\%$.

Mit diesen Werten erhält man durch Rechnung 22,2% und aus dem Diagramm 22,3%.

Die Genauigkeit der Rechnung ist also durchaus befriedigend.

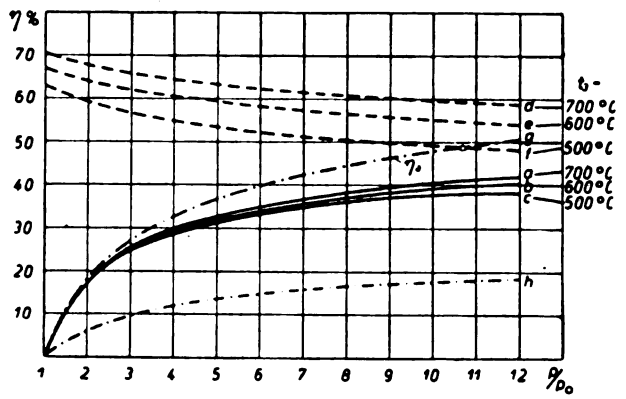


Bild 16. Wirkungsgrad einer Verbrennungsturbine mit isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung.

Kurve *a*, *b*, *c*. Theoretischer Wirkungsgrad ohne Wärmeaustauscher für $t_3 = 500$, 600 und 700° C.

Kurve *d*, *e*, *f*. Theoretischer Wirkungsgrad mit Wärmeaustauscher für $t_3 = 500$, 600 und 700° C.

Kurve *g*. Theoretischer Wirkungsgrad mit adiabatischer Verdichtung ohne Wärmeaustauscher.

Kurve *h*. Theoretischer Wirkungsgrad einer Dampfanlage.

8. Der Gleichdruckprozeß mit isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung.

a) Ohne Abwärmeausnutzung.

Bild 15 zeigt das *PV*- und *TS*-Diagramm dieses Prozesses. Die Verdichtung von p_0 auf p erfolgt bei der gleichbleibenden Temperatur T_0 nach der Zustandslinie *1—2*. Die übrigen Arbeitstakte verlaufen in gleicher Weise, wie es im Abschnitt 2a beschrieben wurde. Der Wirkungsgrad ist

$$\eta_{is,a} = \frac{A\,(L_a - L_{is})}{c_p \cdot (T_3 - T_0)} = \frac{c_p\,(T_3 - T_4) - A\,R \cdot T_0 \cdot \ln \frac{p}{p_0}}{c_p\,(T_3 - T_0)} \quad \ldots\ (23)$$

Unter Benutzung der Gleichung (4) und unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{A\,R}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \quad \ldots\ (24)$$

erhält man

$$\eta_{is,a} = \frac{T_3 \cdot \eta_a - T_0 \cdot \ln \alpha}{(T_3 - T_0)} \quad \ldots\ (25)$$

Im Gegensatz zu η_a (Gleichung (5)) ist $\eta_{is,a}$ vom Druckverhältnis und von den Temperaturgrenzen, in denen sich der Prozeß abspielt, abhängig. Während η_a mit wachsendem $\frac{p}{p_0}$ ständig größer wird, hat $\eta_{is,a}$ einen Höchstwert bei

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_3}{T_0}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \quad \ldots\ (26)$$

wobei es den Wert

$$1 - \frac{T_0 \cdot \ln \frac{T_3}{T_0}}{T_3 - T_0} \quad \ldots\ (27)$$

annimmt.

$\eta_{is,a}$ wurde in Bild 16 für die Temperaturen $t_3 = 500$, 600 und 700° C und $t_0 = 15^0$ C in Abhängigkeit vom Druckverhältnis aufgetragen. Zum Vergleich wurden die Kurven für η_a und für den Wirkungsgrad einer Dampfanlage nach Bild 3 hinzugefügt. Wie man sieht, ist der theoretische Wirkungsgrad dieses Prozesses trotz der verringerten Verdichtungsarbeit kleiner als der des adiabatischen Verfahrens, was in der Wärmeabfuhr während der Verdichtung seinen Grund hat.

b) Bei vollständiger Abwärmeausnutzung.

Im günstigsten Fall läßt sich die Wärmemenge $c_p\,(T_4 - T_0)$ dem Abgas entziehen und der Luft nach der Verdichtung zuführen. Damit wird

Digitized by Google

$$Q_z' = c_p\,(T_3 - T_4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

und

$$\eta_{is,a}' = 1 - \frac{T_0 \cdot \ln \alpha}{T_3 \cdot \eta_a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Für $\frac{p}{p_0} = 1$ erhält man

$$\eta_{is,a}' = 1 - \frac{T_0}{T_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Dieser Wert entspricht dem Wirkungsgrad des Carnotschen Kreisprozesses zwischen den Temperaturen T_0 und T_3.

$\eta_{is,a}$ wurde ebenfalls für die gleichen Temperaturen in Bild 16 eingetragen. Für $\frac{p}{p_0} = 1$ wird $\eta_{is,a}' = \eta_a'$. Die Kurven $\eta_{is,a}'$ fallen mit steigendem Druckverhältnis jedoch viel langsamer ab als die Kurven η_a' in Bild 3, so daß sich ein schädlicher Einfluß des Wärmeaustausches, der eintritt, wenn T_4 unter T_0 absinkt, erst bei höheren Druckverhältnissen bemerkbar machen kann.

c) Unter Berücksichtigung der auftretenden Verluste.

Die im wirklichen Prozeß auftretenden Verluste sind die gleichen, wie sie bereits in Abschnitt 2c beschrieben wurden.

Bei einer unvollkommenen isothermischen Verdichtung ist zu unterscheiden 1. ob die Temperatur unverändert bleibt, d. h. ob die durch nicht umkehrbare Zustandsänderungen entstehenden Wärmemengen abgeführt werden und 2. ob während der Verdichtung eine Temperatursteigerung eintritt.

Im ersten Fall erhält man mit den Bezeichnungen der Gleichungen (10) bis (20) die Beziehung

$$\eta = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \frac{\eta_t \cdot A\,L_a - \frac{1}{\eta_v} \cdot A\,L_{is}}{Q_z - \eta_w \cdot c_p\,(T_4' - T_0)} = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \frac{T_3 \cdot \eta_t \cdot \eta_a - \frac{1}{\eta_v} \cdot T_0 \cdot \ln \alpha}{T_3 \cdot u - T_0 \cdot V}, \quad \ldots \quad (31)$$

wobei in η_b die Wärmeverluste durch unvollständige Verbrennung und durch Abstrahlung und in η_g die mechanischen Verluste bezogen auf die abgegebene Leistung zusammengefaßt wurden. u ist gleich

$$1 - \eta_w\,(1 - \eta_t \cdot \eta_a) \text{ und } V \text{ gleich } (1 - \eta_w).$$

Ohne Abwärmeausnutzung ($\eta_w = 0$) ergibt sich

$$\eta = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \frac{T_3 \cdot \eta_t \cdot \eta_a - \frac{1}{\eta_v} \cdot T_0 \cdot \ln \alpha}{T_3 - T_0} \quad \ldots \quad (32)$$

und mit vollständiger Abwärmeausnutzung ($\eta_w = 1$)

$$\eta = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \left(1 - \frac{T_0 \cdot \ln \alpha}{T_3 \cdot \eta_t \cdot \eta_a \cdot \eta_v}\right) \quad \ldots \quad (33)$$

Mit den gleichen Bezeichnungen und Voraussetzungen von Bild 5 bis 9 (η_g, $\eta_b = 1$; $\eta_t = \eta_v$) wurden die nach Gleichung (31) bis (33) errechneten Werte für η in die Bilder 17 bis 21 eingetragen.

Für

$$T_3 \cdot \eta_t \cdot \eta_a = \frac{1}{\eta_v} \cdot T_0 \cdot \ln \alpha$$

oder

$$T_3 = \frac{1}{\eta_v \cdot \eta_t \cdot \eta_a} \cdot T_0 \cdot \ln \alpha \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

wird $\eta = 0$.

Eine Gegenüberstellung von Bild 17 bis 21 mit Bild 5 bis 9 ergibt folgendes:

1. Die Verbrennungsturbine mit isothermischer Verdichtung ist unempfindlicher in bezug auf die Betriebstemperatur, da die Grenze der Leistungsabgabe ($\eta = 0$) bei kleineren Werten von t_3 erreicht wird.

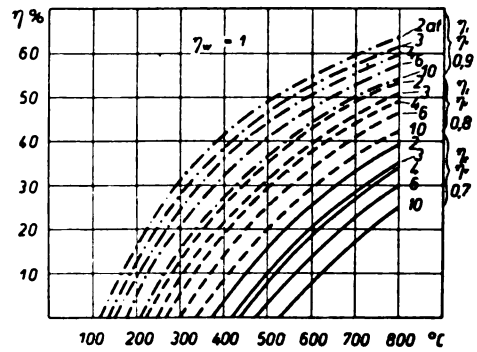


Bild 17.

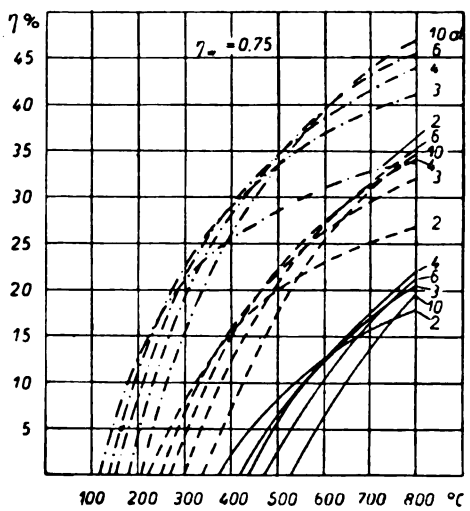


Bild 18.

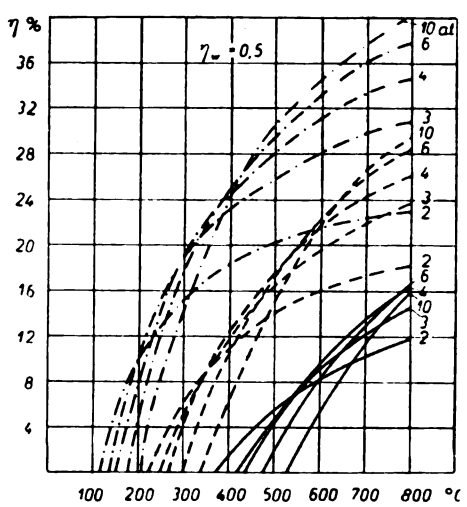


Bild 19.

2. Da die Kurven $p = \text{const}$ enger zusammenliegen, ist ebenfalls ein geringerer Einfluß des Druckgefälles festzustellen.

3. Die Wirkungsgrade sind meist etwas besser.

4. Die Steigerung von η durch die Abwärmeausnutzung ist größer.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Prozeß mit isothermischer Verdichtung günstigere Brennstoffverbräuche ergeben würde als der mit adiabatischer Verdichtung.

Bild 22 bis 24 zeigen $\gamma_{is,a} = \frac{\eta}{\eta_{is,a}}$ in Abhängigkeit von t_3 und $\frac{p}{p_0}$.

Digitized by Google

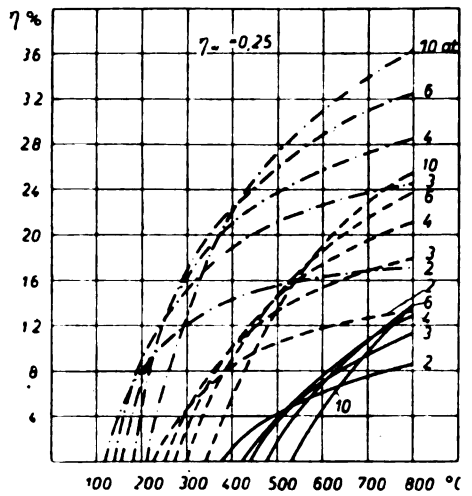


Bild 20.

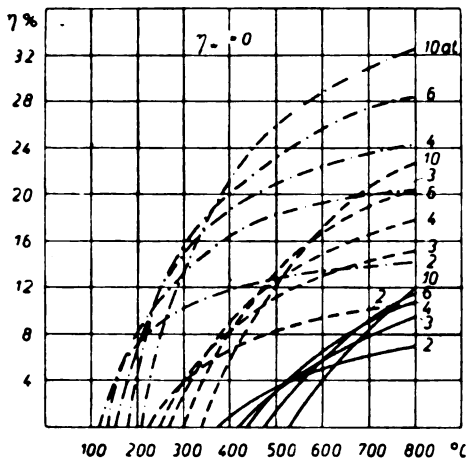


Bild 21.

Bild 17 bis 21. Wirkungsgrad einer Verbrennungsturbine mit isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung in Abhängigkeit von der Betriebstemperatur bei verschieden großer Wärmeausnutzung für verschiedene Druckverhältnisse und Teilwirkungsgrade.
Kennzeichnung der Kurven wie bei den Bildern 5 bis 12.

Ein Vergleich mit den entsprechenden Kurven des adiabatischen Verfahrens ergibt, daß $\gamma_{is,a} > \gamma_a$ ist, d. h., daß man bei isothermischer Verdichtung die Abwärme besser ausnutzen kann, da der Temperaturunterschied zwischen t_3 und t_0 größer ist.

Der Einfluß von Druckverlusten auf η wird, wie im Abschnitt 2c näher beschrieben wurde, durch eine entsprechende Verringerung von η_t bzw. η_v berücksichtigt. Den Wert $\frac{\eta'}{\eta}$ erhält man für eine Isotherme auf folgende Weise. Es ist

$$L_{is} = R \cdot T_0 \cdot \ln \frac{p}{p_0} \text{ mkg/kg.}$$

Nennt man η' wieder den Wirkungsgrad unter Einschluß der Verluste, so kann man eine der Gleichung (21) entsprechende Beziehung

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln \frac{p'}{p_0}} = \frac{\lg \frac{p}{p_0}}{\lg \frac{p'}{p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

aufstellen, worin $p' = p\,(1 + a)$ ist.

In Bild 25 wurde dieser Wert für verschiedene Druckverhältnisse über a aufgetragen. Ein Vergleich mit dem Bild 13 lehrt, daß bei der Isotherme der Einfluß von Druckverlusten auf η_v bzw. η_t geringer ist.

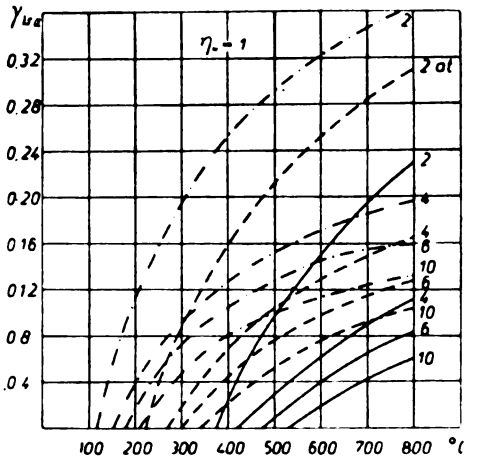


Bild 22.

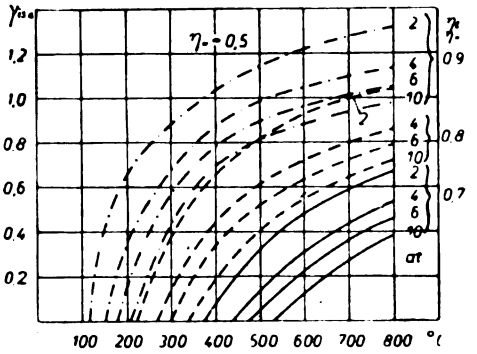


Bild 23.

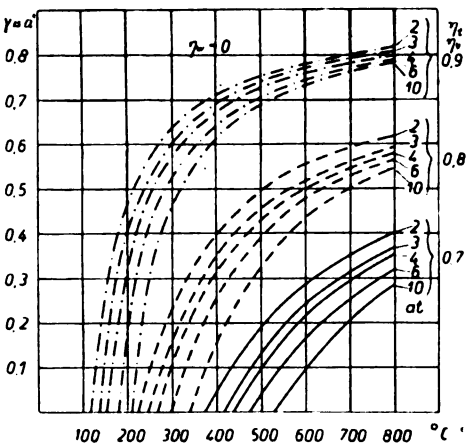


Bild 24.

Bild 22 bis 24. $\gamma_{is,a}$ in Abhängigkeit von der Betriebstemperatur bei verschieden großer Wärmeausnutzung.

Um die Bedeutung der Druckverluste in Rohrleitungen, Wärmeaustauschern usw. deutlich zu machen, wurde in dem Bild 26 die Kurve $\eta = f(\Delta p)$ für folgende Annahmen gezeichnet:

Kurve a: $\eta_t = 0{,}8$, $\eta_v = 0{,}72$, $\eta_w = 0{,}75$, $\eta_b = 0{,}95$,

$$\eta_g = 0{,}98, \quad \frac{p}{p_0} = 4, \quad t_3 = 650^0\,\text{C}, \quad t_1 = 15^0\,\text{C}.$$

Kurve b: $\eta_t = 0{,}85$, $\eta_v = 0{,}82$, η_w usw. wie bei a.
(Es wurden dieselben Werte wie in Abschnitt 2c angenommen.)

Im Punkt A hat η den gleichen Wert, wie er sich für ein Arbeitsverfahren ohne Wärmeaustauscher und ohne Druckverluste ergeben würde. Hier ist also die Verbesserung des Wirkungsgrades infolge der Abwärmeausnutzung von gleicher Größe wie seine Verschlechterung durch die

Digitized by Google

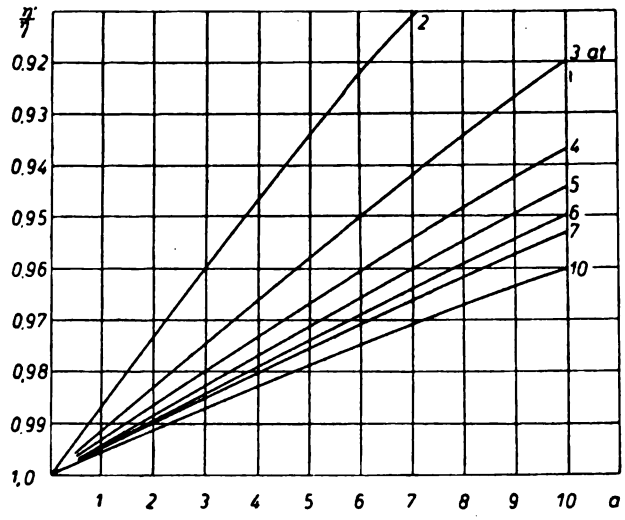


Bild 25. Einfluß des auf den Wirkungsgrad von Verdichter und Turbine bezogenen Druckverlustes a bei isothermischer Verdichtung oder Ausdehnung.

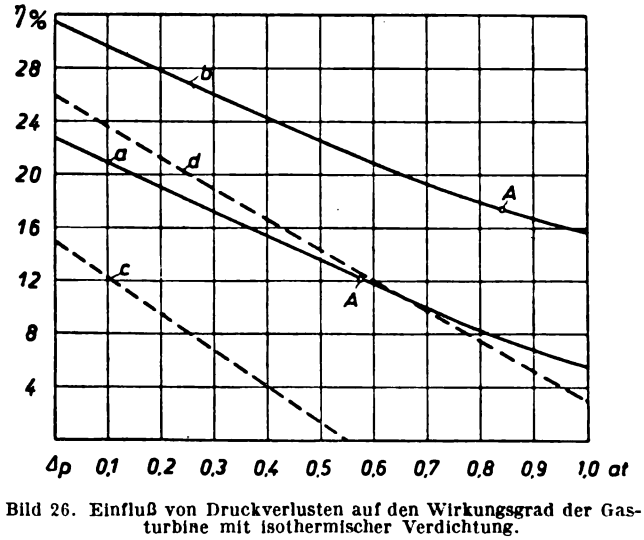


Bild 26. Einfluß von Druckverlusten auf den Wirkungsgrad der Gasturbine mit isothermischer Verdichtung.
Kurve a für Beispiel a,
Kurve b für Beispiel b,
Kurve c und d bei adiabatischer Verdichtung.

Druckverluste. Wie ein Vergleich mit den eingezeichneten Kurven c und d des adiabatischen Prozesses zeigt, kann man bei isothermischer Verdichtung die etwa durch den Einbau eines Wärmeaustauschers entstehenden Druckverluste eher zulassen als im andern Falle.

Das im Abschnitt 2c aufgeführte Beispiel a) ergibt für isothermische Verdichtung unter Verwendung von *IS*-Tafeln einen Wirkungsgrad von 17,2%, während man durch die Rechnung 16,9% erhält. Für das Beispiel b) sind die entsprechenden Zahlen 29,4% und 28,8%. Die Unterschiede rühren vor allem von der ungenauen Bestimmung der isothermischen Arbeit $T_0 \cdot \Delta S$ aus dem *IS*-Diagramm infolge der spitzen Schnittwinkel der Kurven p und T = const her.

Die Beispiele dürften jedenfalls zeigen, daß die Berechnung der Wirkungsgrade nach der Gleichung (31) trotz der vorgenommenen Vernachlässigungen (c_p nicht konstant, Einfluß der Verbrennung) mit ausreichender Genauigkeit durchgeführt werden kann.

Die Voraussetzung für die Ableitung der Gleichungen (31) bis (35) war die Durchführung einer Verdichtung bei gleichbleibender Temperatur. Falls die Verdichtungsendtemperatur wegen ungenügender Kühlung einen Wert $T_0' > T_0$ annimmt, erhält man statt der Gleichung (31) die Beziehung

$$\eta = \eta_a \cdot \eta_b \cdot \frac{T_3 \cdot \eta_a \cdot \eta_t - \frac{1}{\eta_v} \cdot T_0 \cdot \ln \alpha}{T_3 \cdot u - T'_0 \cdot V} \quad \ldots \quad (36)$$

4. Der Gleichdruckprozeß mit isothermischer Verdichtung und Ausdehnung.

Der Prozeß mit isothermischer Ausdehnung ist im Schrifttum mehrfach vorgeschlagen worden. Zur Durchführung einer derartigen Zustandsänderung muß man die durch die geleistete Arbeit dem Gas entzogene Wärmemenge wieder zuführen, was zweckmäßig durch Verbrennung von Brennstoff während der Ausdehnung geschieht. Dieses Verfahren ist besonders bei hohen Gastemperaturen verhältnismäßig leicht durchführbar, weil in diesem Fall der Brennstoff ohne besondere Zündung verbrennen würde. Andere Vorschläge[2]) gehen dahin, hinter jedem Schaufelkranz der Turbine eine Brennkammer anzuordnen, wodurch statt der Isothermen eine Zackenlinie, bestehend aus kurzen Kurvenstücken von Adiabaten und Isobaren, entsteht.

Wenn dieser Prozeß auch schwieriger zu verwirklichen sein wird, als die vorher besprochenen, so soll doch kurz

[2]) G. Mangold, Wirtschaftlicher Wirkungsgrad einer Brennkraftturbine mit stufenförmiger Verbrennung. ZVDI Bd. 81 (1937), S. 489ff.

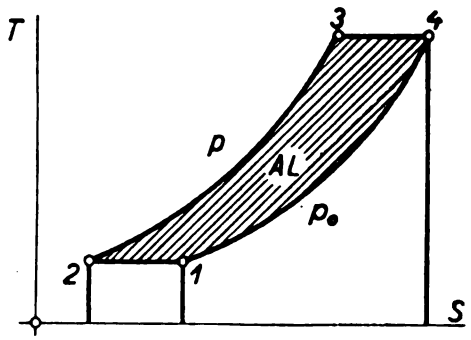


Bild 27. Theoretisches *TS*-Diagramm eines Kreisprozesses mit isothermischer Verdichtung und Ausdehnung.

darauf eingegangen werden, da er bemerkenswerte Vorteile verspricht. Bild 27 zeigt das Arbeitsverfahren im *TS*-Diagramm. (Der Prozeß mit adiabatischer Verdichtung und isothermischer Ausdehnung wird nicht weiter verfolgt, da hierbei neuere Erkenntnisse nicht zu erwarten sind.)

Der verlustlose Wirkungsgrad ohne Abwärmeausnutzung ist

$$\eta_{is} = \frac{A\,(L_{is,t} - L_{is,v})}{Q_z}.$$

Da die während der Ausdehnung zuzuführende Wärmemenge gleich $A L_{is,t}$ ist, wird

$$Q_z = A\,L_{is,t} + c_p\,(T - T_0).$$

Damit erhält man

$$\eta_{is} = \frac{T - T_0}{T + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{(T - T_0)}{\ln \frac{p}{p_0}}} \quad \ldots \quad (37)$$

Bei vollständiger Abwärmeausnutzung wird

$$\eta_{is}' = 1 - \frac{T_0}{T} \quad \ldots \quad (38)$$

Der Wirkungsgrad eines derartigen Prozesses ist also gleich dem des Carnotschen Kreisprozesses zwischen gleichen Temperaturgrenzen.

Unter Berücksichtigung der auftretenden Verluste wird

$$\eta = \eta_a \cdot \eta_b \cdot \frac{\eta_t \cdot A\,L_{is,t} - \frac{1}{\eta_v} \cdot A\,L_{is,v}}{\eta_t \cdot A\,L_{is,t} + (1 - \eta_w) \cdot c_p\,(T - T_0)}.$$

Bei der Berechnung der zugeführten Wärme wurde berücksichtigt, daß bei einer isothermischen Zustandsänderung sich die Wärmezufuhr nach Maßgabe der dabei auftretenden

Digitized by Google

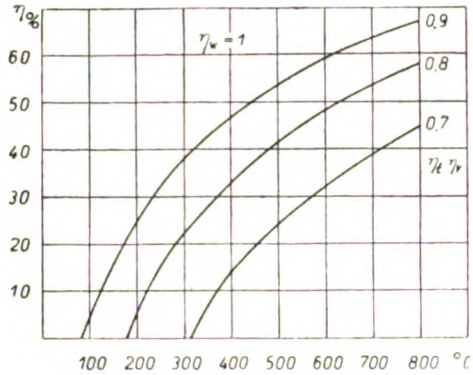


Bild 28.

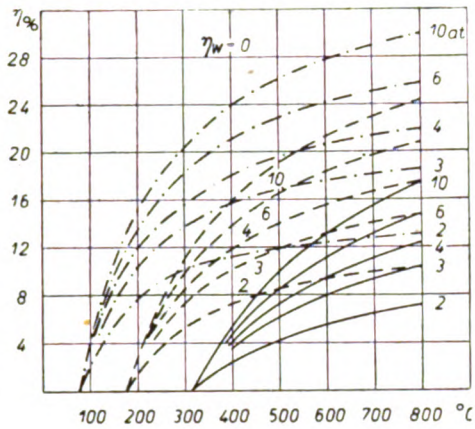


Bild 29.

Bild 28 und 29. Wirkungsgrad einer Verbrennungsturbine mit isothermischer Verdichtung und Ausdehnung in Abhängigkeit von der Betriebstemperatur bei verschieden großer Wärmeausnutzung für verschiedene Druckverhältnisse und Teilwirkungsgrade. Kennzeichnung der Kurven wie bei Bild 17 bis 24.

Verluste verringert. Man erhält schließlich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \frac{\eta_t \cdot T - \frac{1}{\eta_v} \cdot T_0}{\eta_t \cdot T + V \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{T - T_0}{\ln \frac{p}{p_0}}} \quad \ldots \quad (39)$$

In Bild 28 und 29 wurde η für $\eta_w = 0$ und 1 unter gleichen Voraussetzungen wie bei den anderen bisher aufgeführten Kurven aufgetragen. Man sieht, daß die höchsten erreichbaren Wirkungsgrade etwas über den des zuletzt besprochenen Prozesses liegen. Besonders auffällig ist die beträchtlich größere Unabhängigkeit von den Teilwirkungsgraden. Für $\eta_w = 1$ ist η druckunabhängig, für $\eta_w = 0$ wird η mit steigendem Druck besser. Der Beginn der Leistungsabgabe ($\eta = 0$) hat sich beträchtlich nach den tieferen Temperaturen zu verschoben. Trotzdem die Abgastemperatur t_3^0 beträgt, ist der Wirkungsgrad bei $\eta_w = 0$ nur wenig kleiner als bei den vorhergehenden Prozessen, was dadurch zu erklären ist, daß bei der Isotherme die zugeführte Wärme bei dem höchsten vorkommenden Wärmestand, also bei günstigsten Verhältnissen, in mechanische Arbeit umgesetzt wird. Bei Ausnutzung der Abwärme ist der reine isothermische Prozeß den vorher besprochenen überlegen.

Die Veränderung von η_t und η_v durch Druckverluste ist mit Hilfe von Bild 25 zu bestimmen. Ein dem Bild 26 entsprechendes Kurvenblatt für dieses Arbeitsverfahren würde einen noch geringeren Abfall des Wirkungsgrades infolge von Druckverlusten zeigen.

Zusammenhängend läßt sich über die besprochenen Prozesse das Folgende sagen.

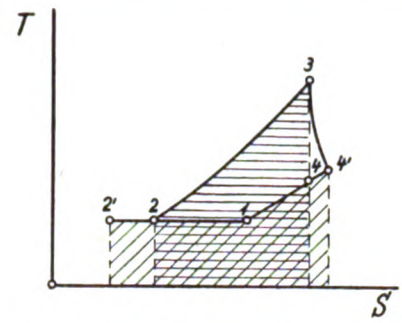


Bild 30. *TS*-Diagramm eines Verpuffungsprozesses.
≡ zugeführte Wärme /// abgeführte Wärme.

Die Abhängigkeit der Wirkungsgrade aller Prozesse von den Teilwirkungsgraden ist beträchtlich. Der Einbau von Wärmeaustauschern bringt nur dann einen Gewinn, wenn dadurch keine größeren Druckverluste verursacht werden. Die Verschlechterung von η durch Druckverluste nimmt in der Reihenfolge: adiabatischer, adiabatisch-isothermischer, isothermischer Prozeß ab. Die Leerlauftemperatur, d. h. die Temperatur, bei dem die Leistungsabgabe beginnt, nimmt in derselben Richtung ab. Mit steigendem Arbeitsgefälle wird der Wirkungsgrad zum Teil verbessert, zum Teil verschlechtert.

Die Arbeitsverhältnisse von anderen vorgeschlagenen Gleichdruckprozessen, z. B. mit adiabatischer Ausdehnung bis auf Unterdruck, anschließender Abkühlung und Verdichtung der Gase auf Atmosphärendruck, lassen sich ohne Schwierigkeiten aus den aufgeführten Beispielen überschlagen. Auf sie soll daher nicht weiter eingegangen werden.

5. Der Arbeitsprozeß einer Verpuffungsturbine bei isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung ohne und bei vollständiger Abwärmeausnutzung.

Zum Vergleich mit der Turbine mit Gleichdruckverbrennung sollen abschließend noch zwei Arbeitsprozesse der Verpuffungsturbine besprochen werden.

Hierbei soll nur die meistens verwendete isothermische Verdichtung mit vollständiger Abführung der durch die Verluste entstehenden Wärme berücksichtigt werden, so daß die Temperatur trotz der Arbeitsverluste bei der Verdichtung unverändert bleibt.

Den Wirkungsgrad leitet man am besten aus einem *TS*-Diagramm ab, wie es in Bild 30 gezeigt ist. Die Ausdehnung in der Turbine unter Berücksichtigung der Verluste wird in üblicher Weise durch die Linie *3 4'* dargestellt. Die Verlustarbeit bei der isothermischen Verdichtung kann man durch folgende Vorstellung im Diagramm sichtbar machen. Man denkt sich die um die Verlustarbeit vergrößerte Verdichtungsarbeit zunächst verlustlos umgesetzt, wobei sich ein höherer Druck p_2' als der ursprünglich erreichte Enddruck p_2 einstellt. Sodann läßt man den Gasdruck durch einen Drosselvorgang auf den ursprünglichen Druck absinken. Die höhere Verdichtung stellt sich im *TS*-Diagramm durch die Linie *2 2'* dar, die gleichzeitig von *2'* nach *2* als Drosselkurve durchlaufen wird. Die unter der Linie *1 2'* liegende Fläche ist demnach gleich der Arbeit bei einer isothermischen Verdichtung unter Berücksichtigung der auftretenden Verluste und stellt gleichzeitig die hierbei abzuführende Wärmemenge dar. Der Wirkungsgrad ist bekanntlich gleich

$$\eta = 1 - \frac{Q_a}{Q_z} \quad \ldots \quad (40)$$

Q_a ist darin die unter der Linie *2' 1 4'* liegende Fläche, während die zugeführte Wärme Q_z durch die unter der Kurve *3 2* liegende Fläche dargestellt wird. Der Wirkungsgrad ergibt sich durch die Gleichung

$$\eta_{is,a} = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \left[1 - \frac{\frac{\varkappa - 1}{\eta_v} \cdot T_0 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + \varkappa (T_4' - T_0)}{T_3 - T_0} \right] \quad (41)$$

Digitized by Google

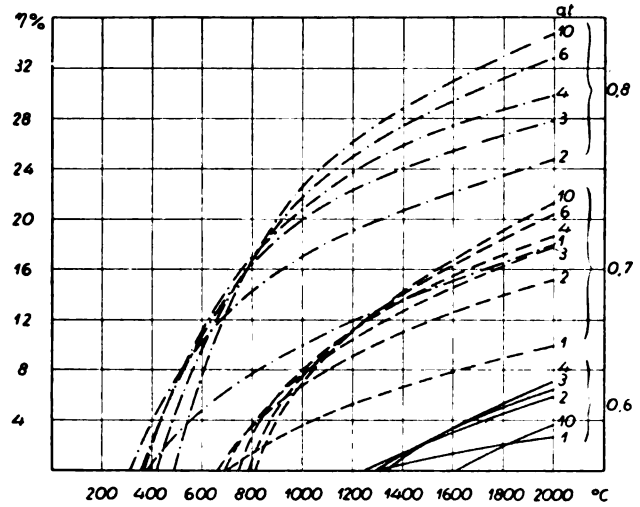


Bild 31. Wirkungsgrad eines Verpuffungsprozesses bei isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung ohne Abwärmeausnutzung. Kennzeichnung der Kurven wie bei Bild 5 bis 12.

die für das Druckverhältnis $p_2 : p_1 = 1$ sich zur Gleichung

$$\eta'_{is,a} = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \left[1 - \varkappa \cdot \frac{T_4' - T_0}{T_3 - T_0}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

vereinfacht. In Bild 31 sind die Kurven, wiederum für verschiedene Teilwirkungsgrade für η_g und $\eta_b = 1$ und $T_0 = 288$, eingetragen. Der Vergleich mit dem entsprechenden Gleichdruckprozeß, Bild 21, lehrt, daß die Wirkungsgrade ungünstiger ausfallen und erst bei Temperaturen von 2000° Werte annehmen, wie sie im Gleichdruckprozeß bereits bei 800° erreicht werden.

Bei vollständiger Ausnutzung der Abwärme erhält man ein TS-Diagramm nach Bild 32. Es ist dabei angenommen, daß die Übertragung der Wärme von der Temperatur t_4' an das Arbeitsgas von der Temperatur t_2 bzw. t_0 in einem Wärmeaustauscher bei konstantem Druck erfolgt. Aus dem Diagramm erhält man die Gleichung

$$\eta^*_{is,a} = \eta_g \cdot \eta_b \cdot \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{\eta_v} \cdot \frac{T_0 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}}{(T_3 - T_4')}\right] \quad . \quad . \quad (43)$$

Hierbei ergibt sich die Temperatur T_4' aus den Gleichungen

$$\frac{T_4'}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

und

$$T_4' = T_3 \left[1 - \eta_t \cdot \left(1 - \frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Bild 33 zeigt den Verlauf der Kurven für η. Auch bei dem Vergleich mit den entsprechenden Werten des Gleichdruckprozesses, Bild 17, zeigt sich eine Überlegenheit des letzteren.

Allerdings ist hierbei zu berücksichtigen, daß die Möglichkeiten einer Kühlung der Schaufeln bei dem periodischen Verpuffungsprozeß höhere Schaufeltemperaturen zulassen als sie in der Gleichdruckturbine im allgemeinen erreicht werden können. Die Turbinenwirkungsgrade dürften jedoch bei den stark wechselnden Gasgeschwindigkeiten beträchtlich niedriger ausfallen als sie sich bei Gleichdruckbetrieb erzielen lassen. Abgesehen davon, bewirkt der periodische Betrieb von vornherein eine Vergrößerung der Abmessung der Maschine, da die Gasvolumina zeitweise abgeschlossen sind, d. h. stillstehen, während sie bei der Gleichdruckmaschine mit hoher Geschwindigkeit durch das ganze Aggregat hindurchströmen. Für Anlagen, bei denen es auf ein geringes Gewicht ankommt, dürfte der Verpuffungsprozeß daher weniger geeignet sein. Wie die Betriebsergebnisse der Holzwarthgasturbine gezeigt haben, ist er auch hinsichtlich des Wirkungsgrades nicht merklich überlegen.

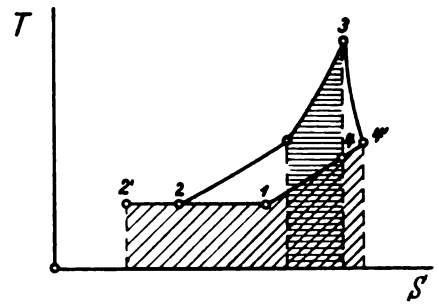


Bild 32. TS-Diagramm eines Verpuffungsprozesses mit Abwärmeausnutzung.

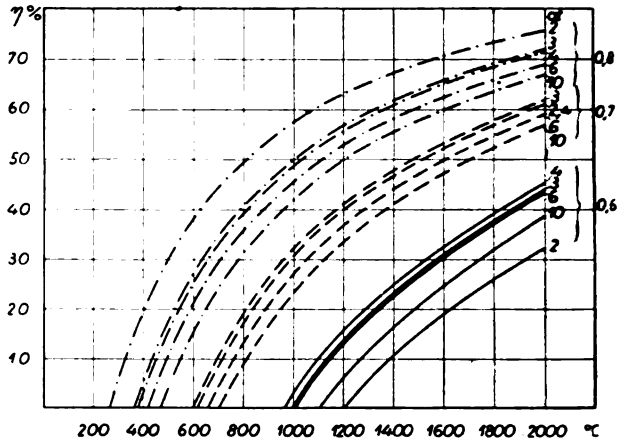


Bild 33. Wirkungsgrade eines Verpuffungsprozesses bei isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung mit Abwärmeausnutzung.

6. Allgemeine praktische Gesichtspunkte.

Bei der Ableitung der vorstehenden Gleichung und der Besprechung der Wirkungsgrade wurde die praktische Ausführbarkeit von Verbrennungsturbinen nicht erörtert. Ihre Aussichten hängen heute von dem Grad der Weiterentwicklung der zu verwendenden Maschinen und der Werkstoffe ab. An Hand der gezeigten Diagramme ist eine ständige Prüfung der erreichbaren Wirkungsgrade bzw. des möglichen Brennstoffverbrauchs durchführbar.

Bei beweglichen Anlagen sind nicht nur die Wirkungsgrade sondern auch die Einheitsgewichte der Maschinen von besonderer Bedeutung. Wie aus den folgenden Gleichungen hervorgeht, sind im allgemeinen die Leistungen von Turbine und Verdichter groß im Verhältnis zur abgegebenen Leistung der Turbine, so daß man bei diesen Maschinen besonders kleine Gewichte anstreben muß, um ein günstiges Gesamtgewicht zu erhalten. Bezeichnet man die abgegebene Leistung mit L und die Verdichterleistung mit L_v, so ist die bezogene Leistung $L_{s,v}$ durch die Gleichung

$$L_{s,v} = \frac{L}{L_v} = \frac{\eta_t \cdot L_t - \frac{1}{\eta_v} \cdot L_v}{\frac{1}{\eta_v} \cdot L_v} = \eta_t \cdot \eta_v \cdot \frac{L_t}{L_v} - 1 \quad (46)$$

gegeben. Bei adiabatischer Verdichtung und Ausdehnung ergibt sich die Gleichung

$$L_{s,v} = \frac{T_3}{T_1} \cdot \frac{\eta_t \cdot \eta_v}{\alpha} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Ebenso erhält man für die bezogene Turbinenleistung $L_{s,t}$ den Ausdruck

$$L_{s,t} = \frac{L}{L_t} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{\alpha}{\eta_t \cdot \eta_v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Wie aus diesen Formeln folgt, steigen für eine gegebene Leistung der Anlage die Leistungen von Turbine und Ver-

Digitized by Google

dichter mit sinkender Temperatur, schlechteren Teilwirkungsgraden und steigendem Druckverhältnis. Für das Beispiel a) auf Seite 273 erhält man beispielsweise für $L_{s,v}$ 0,25 und für $L_{s,t}$ 0,20. Für 1 PS abgegebener Leistung muß man bei den gewählten Verhältnissen demnach etwa 5 PS Turbinen- und 4 PS Verdichterleistung und damit die entsprechenden Gewichte aufwenden.

Für den Prozeß mit isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung erhält man auf gleiche Weise die Gleichungen

$$L_{s,v} = \frac{T_3 \cdot \eta_a}{T_0 \cdot \ln \alpha} \cdot \eta_t \cdot \eta_v - 1 \quad \ldots\ldots (49)$$

$$L_{s,t} = 1 - \frac{1}{\eta_t \cdot \eta_v} \cdot \frac{T_0 \cdot \ln \alpha}{T_3 \cdot \eta_a}, \quad \ldots\ldots (50)$$

woraus sich für das obige Beispiel $L_{s,v}$ zu 0,53 und $L_{s,t}$ zu 0,346 errechnet. Die isothermische Verdichtung wirkt sich also auf das Einheitsgewicht günstig aus, wobei allerdings das Gewicht der Wärmeaustauscher noch zu berücksichtigen ist.

Als Verdichter kommen vor allem Kreiselradmaschinen in Frage, da Kolbengebläse zu schwer sind. Am weitesten sind gegenwärtig die Schleuderverdichter verbreitet, die bei kleineren Druckverhältnissen ungekühlt, bei größeren mit Mantel-, Schaufel- oder Zwischenkühlung ausgeführt werden. Die gelegentlich angewandte Kühlung durch Wassereinspritzung kommt im allgemeinen für bewegliche Anlagen wegen des Wasserverlustes nicht in Frage. Die Förderhöhe eines Rades beträgt bei handelsüblichen Verdichtern dieser Art etwa 1,2 at. Für größere Drücke müssen die Maschinen vielstufig ausgeführt werden, wodurch Baulänge und Gewicht entsprechend anwachsen. Das Einheitsgewicht von großen, landfesten Verdichtern mit Kühlung beträgt bisher etwa 10 kg/PS und darüber, so daß der Verdichter für das Beispiel nach Gleichung (47) etwa 40 kg je abgegebener PS-Leistung der Verbrennungsturbine wiegen würde. Die besten mit solchen Maschinen erzielten Wirkungsgrade liegen, bezogen auf die Isotherme bei 70%.

Bei einstufigen Verdichtern, wie sie als Spül- oder Aufladegebläse verwendet werden, hat man in neuerer Zeit günstigere Verhältnisse erreichen können, besonders in der Flugindustrie. Z. B. wurde die Förderhöhe eines DVL-Verdichters bei Umfangsgeschwindigkeit des Rades von etwa 400 m/s auf 3 at und darüber gesteigert, wobei adiabatische Wirkungsgrade von 70% gemessen wurden. Bei Druckverhältnissen von etwa 1,4 at wurden 80% erreicht. Das Einheitsgewicht solcher Maschinen liegt weit unter 1 kg/PS. Mehrstufige Verdichter dieser Bauart wurden bisher noch nicht erprobt. Es dürfte fraglich sein, ob dabei so gute Wirkungsgrade erreicht werden.

Bei den von der Firma BBC gelieferten Velox-Kesselanlagen sowie bei den Verbrennungsturbinen dieser Firma wurden Axialverdichter verwendet, wie sie auch von der Firma Escher-Wyß gebaut werden. Die erreichten adiabatischen Wirkungsgrade betragen über 80%. Die Förderhöhe einer Stufe ist jedoch bei dem gegenwärtigen Stand der Entwicklung begrenzt und beträgt im allgemeinen nur etwa 1,05 bis 1,07 at, so daß zur Erreichung eines bestimmten Druckgefälles sehr viel Schaufelkränze verwendet werden müssen, wodurch eine große Baulänge bedingt wird. Die Entwicklung dieser Verdichter ist jedoch sehr im Fluß. Es ist zu erwarten, daß die Anwendung höherer Umfangsgeschwindigkeiten und eine eingehende Erforschung der Umströmung der Schaufeln noch beträchtliche Verbesserungen der Förderhöhe und des Wirkungsgrades zur Folge haben wird. Damit werden auch Raumbedarf und Gewicht solcher Maschinen verkleinert. Es dürfte möglich sein, in Axialverdichtern solche Energien umzusetzen, daß ihre Einheitsgewichte bei größeren Ausführungen nur wenige 100 g betragen. Die sich hier andeutenden Möglichkeiten lassen den Axialverdichter jedenfalls als die gegebene Maschine für die Verbrennungsturbine erscheinen.

Wegen des großen Einflusses der Betriebstemperatur auf den Wirkungsgrad von Verbrennungsturbinen muß die Anlage für möglichst hohe Gastemperaturen gebaut werden. Die zu verwendenden Turbinen unterscheiden sich in ihrem Aufbau grundsätzlich nicht von Dampfturbinen. Bei größeren Einheiten wird man zweckmäßig Doppelstromturbinen wählen, da hierbei die Temperaturen gleichmäßiger verteilt sind und infolgedessen geringere Wärmespannungen auftreten. Die bei neueren Dampfanlagen eingeführten Temperaturen von 450 bis 500° C genügen zur Erzielung einer ausreichenden Wirtschaftlichkeit nicht. Für die Verbrennungsturbine mit Gleichdruckverbrennung wird man eine Temperatur vor der Turbine von mindestens 600° fordern müssen. Neuere Schaufelwerkstoffe haben jedoch bereits eine so hohe Dauerstandfestigkeit, daß Betriebstemperaturen von 600° und darüber als möglich angesehen werden können, besonders wenn nur kürzere Betriebszeiten gefordert werden. Die Entwicklung ist hier im Flusse und eine weitere Erhöhung der zulässigen Temperaturen steht in Aussicht. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß die keramischen Werkstoffe im Laufe weiterer Entwicklung soweit vervollkommnet werden, daß sie sich für hochbeanspruchte Turbinenschaufeln verwenden lassen. Dann ließe sich die Betriebstemperatur erheblich steigern. Eine Kühlung der Schaufeln ist bei Gleichdruckturbinen mit guten Wirkungsgraden schwierig durchzuführen. Auf Grund der gezeigten Kurvenbilder kann man entscheiden, ob eine durch eine Verschlechterung des Turbinenwirkungsgrades erkaufte Kühlwirkung einen Erfolg hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit verspricht bzw. ob der Übergang auf die leichter zu kühlende Verpuffungsturbine zweckmäßig erscheint.

Das Gehäuse kann gegenüber der Dampfturbine leicht gehalten werden, da die Gasdrücke erheblich niedriger als die üblichen Dampfdrücke gewählt werden können. Eine besondere Bauart ist allerdings erforderlich, um ein Verziehen zu verhindern. Besonders bei Turbinen, die schnell in Betrieb genommen werden müssen, muß man eine Werkstoffanhäufung, wie sie die üblichen Flanschen der Dampfturbine darstellen, nach Möglichkeit vermeiden. Es ist zu erwarten, daß sich konstruktive Verbesserungen noch durch die Trennung der wärmebeanspruchten von den mechanisch beanspruchten Teilen erreichen lassen.

Das Einheitsgewicht großer Dampfturbinen beträgt in leichter Bauart etwa 1,5 kg/PS. Da bei Gasturbinen der schwere Niederdruckteil im allgemeinen fortfallen kann und das Gehäuse wegen der geringeren Gasdrücke leicht gehalten werden kann, ist mit einem Einheitsgewicht unter 1 kg/PS zu rechnen.

Turbinen mit isothermischer Ausdehnung sind bisher nicht ausgeführt worden. Es ist anzunehmen, daß bei einer Wärmezufuhr durch Verbrennung innerhalb der Schaufelkränze die Strömung gestört wird, womit ein Absinken des Wirkungsgrades verbunden sein wird. Außerdem ist es nicht sicher, ob die Schaufelwerkstoffe bei der zu erwartenden unregelmäßigen Temperaturverteilung den Beanspruchungen gewachsen sind. Der Einbau von Brennkammern hinter jeden Schaufelkranz dürfte unzulässige Druckverluste und Betriebsschwierigkeiten zur Folge haben. Eine Verwirklichung dieser hinsichtlich des Wirkungsgrades besonders günstigen Turbinenart ist daher vorläufig nicht möglich.

Der Bau einer betriebssicheren Brennkammer macht bei den heute vorhandenen hitzebeständigen Werkstoffen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Selbst wenn man auf die übliche Verwendung von keramischen Werkstoffen zur Auskleidung verzichtet und die Wände der Brennkammer nur mit Luft kühlt, dürfte sich bei richtiger Konstruktion ein Dauerbetrieb ermöglichen lassen. Wegen des großen Einflusses von Druckverlusten ist auf eine möglichst günstige Strömung in der Brennkammer zu achten.

Das gleiche gilt für den Wärmeaustauscher. Bei den bisher bekannt gewordenen Ausführungen von Verbrennungsturbinen mit Wärmeaustauscher nimmt dieser Teil

Digitized by Google

einen ganz beträchtlichen Raum ein, so daß es bei beweglichen Anlagen, insbesondere bei Flugzeugen, nicht möglich ist, den benötigten Platz zur Verfügung zu stellen. Auf diesem Gebiet müssen noch eingehende Forschungen durchgeführt werden, um Wärmeaustauscher, die auch hinsichtlich des Gewichts- und Raumaufwandes befriedigen, zu bauen.

Die Rohrleitungen von Gasturbinenanlagen werden ungewöhnlich hohen Temperaturen ausgesetzt, zumal sie wegen des zu fordernden geringen Druckverlustes und wegen der großen zu verarbeitenden Gasvolumina einen verhältnismäßig großen Durchmesser haben. Gegenüber einer Dampfanlage besteht jedoch der Vorteil, daß der Arbeitsdruck sehr viel kleiner gewählt werden kann und die Leitungen nur kurz zu sein brauchen, da man die Brennkammer neben der Turbine aufstellen kann.

Die Anzahl der Hilfsmaschinen einer derartigen Verbrennungsturbinenanlage ist nur gering. Im allgemeinen wird man nur Pumpen für den Schmierölkreislauf und für den Brennstoff benötigen. Ein besonderer Vorteil besteht noch darin, daß wenigstens bei adiabatischer Verdichtung außer für Ölkühlung kein Kühlwasser bzw. keine Kühlluft benötigt wird.

7. Zusammenfassung.

Es wurden die theoretischen und wirklichen Wirkungsgrade eines Verbrennungsturbinenprozesses mit Gleichdruckverbrennung

1. bei adiabatischer Verdichtung und Ausdehnung,
2. bei isothermischer Verdichtung und adiabatischer Ausdehnung,
3. bei isothermischer Verdichtung und Ausdehnung berechnet und besprochen. Es ergibt sich daraus, daß der Wirkungsgrad in der Hauptsache von den Teilwirkungsgraden des Verdichters und der Turbine abhängig ist. Ein Vergleich mit zwei als Beispiel gewählten Prozessen der Verpuffungsturbine zeigt die Überlegenheit der Turbine mit Gleichdruckverbrennung. Anschließend wird vom Standpunkt der Besonderheiten des Verbrennungsturbinenprozesses der Entwicklungsstand von Verdichter, Turbine und Zubehör kurz geschildert.

Digitized by Google

Die Lambertsche Karte als Luftnavigationskarte.

Von J. B. Grambow, Berlin.

In den letzten Jahrzehnten sind von verschiedenen Seiten Versuche unternommen worden, an Stelle der »Merkatorkarte« die »Winkeltreue Lambertsche Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Breitenkreisen« als Navigationskarte in die Luftfahrt einzuführen. Als Grund der Einführung wird allgemein angegeben, daß die in der Lambertschen Karte auftretenden Verzerrungen gegenüber der Merkatorkarte bedeutend geringer ausfallen. Untersuchungen, inwieweit diese Karte den Anforderungen der Navigateure gerecht wird, sind bis jetzt noch nicht durchgeführt worden. Der Zweck dieser Arbeit ist, diese Lücke auszufüllen. Untersucht wird der Verlauf der Loxodrome in der Lambertschen Karte, das Messen loxodromischer Distanzen und die Genauigkeit dieser Messungen im Vergleich mit den in einer Merkatorkarte angestellten Messungen. Weiter werden die bei der Kursentnahme aus der Lambertschen Karte entstehenden Fehler untersucht. Es zeigt sich, daß hinsichtlich der loxodromischen Navigation die Merkatorkarte weit besser als Navigationskarte geeignet ist als die Lambertsche Karte.

Es ist in der Navigation üblich, alle für die Navigation wichtigen Linien von der Kugel aus zu definieren. Also ist die Frage nach dem Verlauf der Kartengerade der Lambertschen Karte auf der Kugel zu beantworten. Man erhält Sinusspiralen, also Kurven, denen eine navigatorische Bedeutung nicht zukommt. Eine Ausnahme bildet der Fall $n = 0$. Hierfür geht die Lambertsche Karte in eine Merkatorkarte und die Sinusspirale in eine logarithmische Spirale über. Der Großkreis erscheint in der Lambertschen Karte als Cassinische Linie höherer Ordnung, die für rationale Werte von n algebraisch wird, mit einfachen Hilfsmitteln aber nicht gezeichnet werden kann. Die Abweichung dieser Kurve von der den Großkreis ersetzenden Geraden kann beträchtlich sein. Auch lassen sich Großkreispeilungen ohne notwendig werdende Beschickungen nur für kleine Entfernungen als gerade Linien abtragen. Also auch hinsichtlich der orthodromischen Navigation bietet die Lambertsche Karte der Merkatorkarte gegenüber keine Vorteile. Höhen- und Azimutgleiche bilden sich in der Lambertschen Karte als transzendente Kurven ab, die für rationale Werte von n algebraisch werden. Die in der Karte durchzuführenden graphischen Lösungen der Aufgaben der Koppel- und terrestrischen Navigation sind in der Merkatorkarte leichter auszuführen als in der Lambertschen Karte. Somit zeigt sich, daß die Einführung der Lambertschen Karte als Luftnavigationskarte nur mit Nachteilen verbunden ist. Sie besitzt hinsichtlich der navigatorischen Forderungen bei weitem nicht die Exaktheit der Merkatorkarte.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Grundlagen der Lambertschen Karte.
III. Die Loxodrome in der Lambertschen Karte.
IV. Die Kartengerade der Lambertschen Karte.
V. Die Orthodrome in der Lambertschen Karte.
VI. Höhen- und Azimutgleichen und konstruktive Lösung nautischer Aufgaben.
VII. Schlußbetrachtung.

I. Einleitung.

In den beiden letzten Jahrzehnten sind von verschieden Seiten Versuche unternommen worden, an Stelle der »Merkatorkarte« die »Winkeltreue Lambertsche Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Breitenkreisen« als Navigationskarte in die Luftfahrt einzuführen. Der Verfasser dieser Zeilen hält diese Versuche für recht unglücklich und glaubt, daß ebenso wie für die Seefahrt, auch für die Luftfahrt als Navigationskarte einzig und allein nur die Merkatorkarte in Betracht kommt. Im folgenden soll diese Ansicht näher begründet werden.

Die winkeltreue Kegelprojektion wurde von dem z. Z. Friedrich des Großen lebenden Mathematiker Johann Heinrich Lambert erfunden[1]). Eine eingehende theoretische Untersuchung dieser Karte gab Gauß[2]), weshalb sie oftmals als Lambert-Gaußsche winkeltreue Kegelprojektion angeführt wird.

Die ersten Anregungen, die Lambertsche Karte an Stelle der Merkatorkarte als Luftnavigationskarte einzuführen, stammen meines Wissens aus Amerika; wobei jedoch mehr an eine Ortungskarte, das soll heißen an eine Karte, die zur Orientierung nach Bodensicht dient, als an eine eigentliche Navigationskarte im Sinne von Langstreckenflügen mit durchzuführender Koppel- und astronomischer Navigation gedacht wurde. Viel Schrifttum hinsichtlich der Anwendung der Lambertschen Karte als Navigationskarte ist nicht erschienen. Bekannt geworden sind mir neben verschiedenen kleineren Notizen nur eine vom Coast and Geod. Survey herausgegebene Schrift »The Lambert projection. Its advantages for airway maps of the United States.« Field Engineers Bulletin. Dez. 1935, eine Arbeit, die mir leider nicht zugänglich war, und ein Aufsatz von L. Tonta, Bemerkungen zur nautischen Kartographie, Hydrographic Review Bd. 6 (1929), Nr. 2, abgedruckt in Ann. d. Hydr. 1930, S. 318.

Es soll nicht bestritten werden, daß diese Karte, von militärischen, geographischen und anderen Gesichtspunkten aus betrachtet, der Merkatorkarte gegenüber große Vorteile zeigt. Hierfür spricht, daß im Weltkriege 1914 bis 1918 der französische Generalstab sich dieser Projektion als Kriegskarte bediente. Auch lassen sich in ihr Entfernungsmessungen, wie etwa das Ausmessen von Landesgrenzen, Flußläufen usw. mit weit größerer Genauigkeit durchführen als in der Merkatorkarte. Weiter spielt sie in der Landesvermessung eine große Rolle. Auf diesen Gebieten kann die Merkatorkarte keinesfalls mit der Lambertschen Karte konkurrieren. Doch stellt der Navigateur ganz andere Anforderungen an eine Karte als Generalstäbler, Geographen oder die Landesvermessung. Für den Nautiker handelt es sich nicht darum, ein möglichst unverzerrtes Abbild der Erdoberfläche zu erhalten, die von ihm gestellten Forderungen sind vielmehr die folgenden:

1. Winkeltreue zum Absetzen von Kursen und Peilungen.
2. Um das Eintragen oder Entnehmen eines Ortes in oder aus der Karte möglichst einfach zu gestalten, sollen

[1]) J. H. Lambert, Anmerkung und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. Berlin 1772.

[2]) C. F. Gauß, Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird. Altona 1852.

Digitized by Google

Meridiane und Breitenkreise sich in der Karte als parallele sich senkrecht schneidene Gerade abbilden.

3. Die Navigationskarte ist eine Arbeitskarte, d. h. sie soll zur graphischen Lösung gewisser Aufgaben dienen, deren Lösung sonst einer längeren numerischen Rechnung bedarf.
4. Die für die Navigation wichtigsten Linien müssen in der Karte als möglichst einfach zu zeichnende Kurven abgebildet werden.
5. Loxodromische Entfernungen (nur solche mißt der Nautiker) müssen mit genügender Genauigkeit der Karte entnommen werden können.

Diese Forderungen erfüllt die Merkatorkarte in zufriedenstellender Weise.

II. Grundlagen der Lambertschen Karte.

Zur Beantwortung der Frage, ob die Lambertsche Karte die Merkatorkarte als Navigationskarte ersetzen kann oder sogar übertrifft, ist zu untersuchen, inwieweit sie den gestellten Forderungen gerecht wird. Diesen im folgenden durchgeführten Untersuchungen schicke ich zur allgemeinen Information eine kurze Beschreibung der Lambertschen Karte voraus.

Um das Netz einer Kegelprojektion in normaler Lage, zu welcher auch die Lambertsche Karte gerechnet werden kann, zu erhalten, denke man sich um die Erdkugel einen Kegelmantel gelegt, der die Erdoberfläche in einem bestimmten Parallelkreis berührt und dessen Achse mit der Erdachse zusammenfällt. Bringt man die Meridianebenen mit dem Kegelmantel zum Schnitt, so werden auf der Kegelmantelfläche von der Kegelspitze ausstrahlende geradlinige Schnitte erzeugt. Auf der abgewickelten Kegeloberfläche erscheint das Bild der Meridiane also als eine Schar gerader Linien, die sich alle in einem Punkt, dem Pol, schneiden. Ist der Öffnungswinkel des Kegels gleich $n \cdot 2\pi$, so schließen die Bilder zweier Meridiane mit der Längendifferenz λ den Winkel $\lambda' = n\lambda$ ein.

Zur Übertragung der Breitenkreise auf den Kegelmantel könnte man ebenfalls die Ebenen dieser Kreise mit dem Mantel zum Schnitt bringen. Derartige Projektionen haben aber, da sie weder winkel- noch flächentreu sind, praktisch keine Bedeutung. Es wird deshalb für die Zeichnung der Breitenkreisbilder nur vorgeschrieben, daß sie als konzentrische Kreise abgebildet werden, deren Mittelpunkte im Schnittpunkt der Meridianbilder liegen, während über die Halbmesser dieser Kreise zunächst nichts bestimmt wird.

Für eine Lambertsche Karte, d. h. für eine winkeltreue Karte, erhält man, wie sich leicht zeigen läßt, als Halbmessergesetz:

$$\varrho = k \cdot \operatorname{tang}^n\left(\frac{1}{2}p\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Integrationskonstante k bedeutet geometrisch den Halbmesser des Kreises, der den Äquator ($p = 90^0$) abbildet. Änderungen der Konstanten k haben nur auf den Maßstab Einfluß. Geht man zu rechtwinkligen Koordinaten über, so ergibt sich, weil der Wälzungswinkel des Polarkoordinatensystems $\lambda' = n\lambda$ ist

$$x = k \cdot \operatorname{tang}^n\left(\frac{1}{2}p\right) \cdot \sin\lambda' \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = k \cdot \operatorname{tang}^n\left(\frac{1}{2}p\right) \cdot \cos\lambda' \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

D. h. die positive y-Achse verläuft vom Ursprung aus gerechnet nach unten, und die positive x-Achse vom Mittelpunkt aus nach rechts, wenn λ in dieser Richtung als positiv angenommen wird. Wird auf den Kegel, der im Breitenkreis p_0 berührt, abgebildet, so hat man nach Bild 1

$$n = \cos p_0$$

$$\varrho = \operatorname{tang} p_0 \left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}p}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}p_0}\right)^{\cos p_0}$$

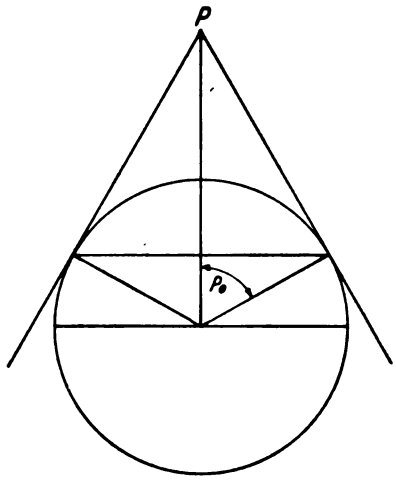


Bild 1. Zum Entwurf einer Kegelkarte.

zu setzen.

Die entstehende Abbildung wird als Lambertsche winkeltreue Kegelprojektion bezeichnet. In ihr werden mit Ausnahme des Berührenden sämtliche Breitenkreise zu lang dargestellt, und zwar werden sie um so mehr vergrößert, je weiter sie vom Berührungsparallel entfernt liegen. Wendet man dagegen an Stelle des Berührenden einen Schnittkegel an, so gelingt es, durch geeignete Wahl von n und k zwei Breitenkreise φ_1 und φ_2 in dem darzustellenden Gebiet längentreu abzubilden, wodurch die in der Karte auftretenden Verzerrungen auf ein Minimum reduziert werden. Nach der Theorie ist alsdann zu setzen[3])

$$n = \frac{\log\cos\varphi_1 - \log\cos\varphi_2}{\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}p_1 - \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}p_2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$k = \frac{R\cdot\cos\varphi_1}{n\cdot\operatorname{tang}^n\left(\frac{1}{2}p_1\right)} = \frac{R\cdot\cos\varphi_2}{n\cdot\operatorname{tang}^n\left(\frac{1}{2}p_2\right)} \quad \ldots \quad (5)$$

Diese Werte in (1) eingesetzt geben die Lambertsche winkeltreue Kegelprojektion mit zwei längentreuen Breitenkreisen. Es ist diese Abbildung, die in den letzten Jahren immer wieder als Luftnavigationskarte vorgeschlagen wird. Derartige Navigationskarten sind im Maßstab 1 : 5000000 von dem bekannten amerikanischen Marineoffizier P. V. H. Weems herausgegeben. Wie sich dieselben in der Praxis bewährt haben, konnte ich leider nicht feststellen, da außer einer von der Firma Hughes veröffentlichten Schrift mir nichts darüber bekannt geworden ist. Weems verwendet die Lambertsche Projektion für Breiten zwischen den Grenzen $\varphi = 25^0$ bis $\varphi = 55^0$ (Chart Nr. 2) und $\varphi = 50^0$ bis $\varphi = 80^0$ (Chart Nr. 3). Diesen Vorschlag findet man auch in dem Werk von L. Driencourt et T. Laborde, Traité des Projections des Cartes Geographiques, Paris 1932.

Da bei allen im folgenden durchzuführenden Genauigkeitsuntersuchungen die Ergebnisse abhängig sind von der Kartenkonstante n, so führe ich diese Untersuchungen, zur Wahrung der Einheitlichkeit, für die obenerwähnte Karte Nr. 2 (längentreu abgebildete Breitenkreise $\varphi = 45^0$ N und $\varphi = 33^0$ N, $n = 0{,}6304$) durch. Die in ihr auftretenden Verzerrungen sind in Prozenten ausgedrückt am Rande des diese Karte zeigenden Bildes 2 angeschrieben.

III. Die Loxodrome in der Lambertschen Karte.

Die für die Nautik wichtigsten Linien sind Loxodrome, Orthodrome, Höhen- und Azimutgleiche. Auf der Erdoberfläche erscheinen diese Linien als logarithmische Spiralen, Kugelgeraden, Kleinkreise und sphärische Cassinische Linien. In der praktischen Navigation werden von

[3]) O. S. Adams, General Theory of the Lambert Conformal Conic Projection. U. S. C. and Geod. Survey Spec. Publ. Nr. 53. Washington 1918, S. 26.

Digitized by Google

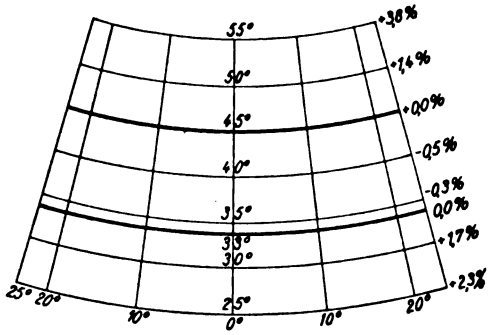


Bild 2. Die Karte Nr. 2 von Weems in Lambertscher Projektion.

der Höhen- und Azimutgleiche nur kleine Stücke, die durch Tangenten oder Sehnen ersetzt werden können, gebraucht. Der Verlauf dieser Kurven in der Karte, wenn auch theoretisch von großer Wichtigkeit, spielt praktisch keine große Rolle. Anders verhält es sich mit der Orthodrome und Loxodrome. Von diesen Kurven ist die Loxodrome, solange der Kompaß das richtungsanzeigende Gerät bleibt, das Wege beständiger Himmelsrichtung oder konstante Kurse anzeigt, die bei weitem wichtigste Linie. Für den Navigateur wäre also eine Karte, auf der seine Wege, die Loxodromen, am einfachsten, also geradlinig erscheinen, so daß er sie mit dem Lineal einzuzeichnen vermag, und in der diese Geraden auch die richtigen Winkel der Kurse zeigen, die geeignetste Karte. Diese Bedingungen erfüllt die Merkatorkarte, und nur sie allein, sie ist winkeltreu und die Gleichung der Loxodromen in ihr lautet:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) = \operatorname{tg}\alpha \cdot (y_2 - y_1) \quad \ldots\ldots (6)$$

d. h. die Bedingungen sind erfüllt.

In der Lambertschen Karte, die ebenfalls winkeltreu ist, muß die Linie, die der Loxodrome entspricht, die Meridiane der Karte ebenfalls im gleichen Winkel schneiden. Diese Meridiane sind jedoch durch den Pol gehende Geraden, sie können daher nur durch logarithmische Spiralen unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Mithin folgt als Gleichung der Loxodrome

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = e^{n(\lambda_2 - \lambda_1)\operatorname{cotg}\alpha} \quad \ldots\ldots (7)$$

und da selbst die einfachsten konstruktiven Methoden zur Zeichnung der logarithmischen Spirale für nautische Zwecke ungeeignet sind, so erhebt sich die Frage, ob die für den praktischen Gebrauch notwendige Forderung erfüllt werden kann, diese Kurve durch eine Gerade zu ersetzen. In welchen Grenzen dies erlaubt ist, ist leicht zu berechnen. Die größten Abweichungen zwischen der Loxodrome und der Kartengeraden werden für Loxodromen mit dem Meridianschnittwinkel $\alpha = 90^0$, die in der Karte als Kreise abgebildet werden, auftreten. Nach Bild 3 erhält man für den Maximalabstand $CD = m$ der gekrümmten Kurve von der Sehne den Ausdruck $m = \varrho \cdot \operatorname{sinvers}\left(\frac{1}{2} n \Delta\lambda\right)$. Die wahre loxodromische Entfernung zwischen den Punkten A und B ist nach einer bekannten Formel gegeben durch

$$e = \Delta\lambda \cdot \cos\varphi$$

daher

$$\Delta\lambda = e \cdot \sec\varphi.$$

Dies in die obige Gleichung für $\Delta\lambda$ eingesetzt gibt:

$$m = \varrho \cdot \operatorname{sinvers}\left(\frac{1}{2} n \cdot e \cdot \sec\varphi\right) \quad \ldots\ldots (8)$$

Womit die auftretenden m-Werte bei beliebig angenommenen loxodromischen Entfernungen leicht zu berechnen sind. Allgemein gültige Aussagen über die Größe der m-Werte lassen sich, da der Wert von m von der Kartenkonstante n abhängig ist, nicht machen. Ich führe deshalb die Rechnung für die eingangs erwähnte Weemssche Karte Nr. 2 durch. Die Ergebnisse zeigt Zahlentafel 1, m in Seemeilen ausgedrückt.

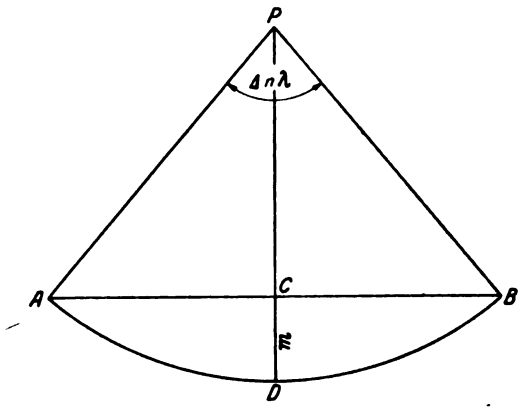


Bild 3. Kartengerade und Loxodrome.

Zahlentafel 1. Maximalabweichungen zwischen Loxodrome und Kartengerade.

φ \ e	50 sml	100 sml	200 sml	500 sml	1 000 sml	1 500 sml
25°	0,06	0,26	1,03	6,7	26,2	57,5
35°	0,07	0,28	1,12	7,0	28,5	61,8
45°	0,08	0,33	1,29	8,1	32,0	71,3
55°	0,10	0,42	1,52	10,4	41,5	92,5

Hiernach zu urteilen ist eine Gleichsetzung beider Kurven bis zu Entfernungen von 200 sml erlaubt. Ob sich hiermit der praktische Navigateur zufrieden gibt, möchte ich ihm jedoch selbst zur Entscheidung überlassen.

Die Bogenlänge der Loxodrome in der Lambertschen Karte ergibt sich aus

$$e' = \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left(\frac{d(n\lambda)}{d\varrho}\right)^2}$$

zu

$$e' = (\varrho_1 - \varrho_2) \sec\alpha \quad \ldots\ldots (9)$$

Als Bogenlänge der Loxodrome auf der Kugel dagegen erhält man

$$e = (\varphi_2 - \varphi_1) \sec\alpha \quad \ldots\ldots (10)$$

woraus zu ersehen ist, daß die loxodromischen Entfernungen in der Karte, gegenüber denen auf der Erdoberfläche, verzerrt erscheinen. Theoretisch genaue loxodromische Distanzmessungen sind in dieser Karte also nicht durchführbar.

Die von allen Befürwortern der Lambertschen Karte aufgestellte Behauptung, daß Distanzmessungen sich in ihr mit größerer Genauigkeit durchführen lassen als in der Merkatorkarte, ist, wie ich gleich zeigen werde, nur bedingt richtig. Den Navigateur interessieren hauptsächlich loxodromische Distanzen, jedenfalls mißt er in seiner Karte nur solche. Es dürfte heute allgemein bekannt sein, zumindest in Nautikerkreisen, daß loxodromische Entfernungen in keiner Karte mit solcher Genauigkeit gemessen werden können wie in der Merkatorkarte. Das zeigt deutlich die in dieser Karte geltende Proportion, s. Bild 4,

$$\frac{\text{Vergr. Breitenunterschied}}{\text{Wahrer Breitenunterschied}} = \frac{\text{Vergr. Entfernung}}{\text{Wahre Entfernung}}$$

oder in Buchstaben

$$\frac{b_v}{b_w} = \frac{c_v}{c_w}$$

auf welcher die exakte loxodromische Distanzmessung beruht, deren Lösung leicht auf graphischem Wege in der Karte ausgeführt werden kann[4]). Dieses Verfahren beschreibt bereits sehr ausführlich G. Mercator in der Legende seiner im August des Jahres 1569 unter dem Titel »Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accommodata« (Neue und vergrößerte Erdkarte, zum Gebrauch für Seefahrer verbessert und eingerichtet) heraus-

[4]) A. Wedemeyer, In welchem Entwurf ist eine Arbeitskarte für Küstenvermessungen herzustellen? Ann. d. Hydr. 1919, S. 49.

Digitized by Google

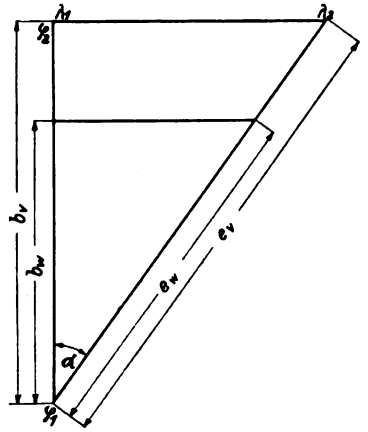


Bild 4. Merkatordreieck.

gegebenen Karte. Es geriet jedoch wieder in Vergessenheit, und erst durch die angeführte Arbeit von Prof. Wedemeyer wurden die neuzeitlichen Nautiker auf diese sehr genaue Meßmethode, die die loxodromische Entfernung so genau wie es der Kartenmaßstab zuläßt, liefert, wieder aufmerksam gemacht.

In der Lambertschen Karte, in der die Loxodrome als logarithmische Spirale erscheint, die gezeichnet nicht vorliegt, muß die zu messende loxodromische Entfernung auf der die Loxodrome ersetzenden Geraden gemessen werden. Die so gemessenen Entfernungen werden den wahren loxodromischen Distanzen gegenüber kleiner ausfallen. Zur Feststellung dieser Unterschiede beschränke ich mich, weil hier Maximalwerte zu erwarten sind, auf den einfachsten Fall, d. h. es wird der Unterschied in Distanz zwischen der Loxodrome $\alpha = 90^0$ und der diese ersetzenden Geraden berechnet. Nach Bild 3 gilt, wenn mit u der auftretende Unterschied und mit e die wahre loxodromische Distanz bezeichnet wird

$$u = e - \frac{\varrho \cdot \sin\left(\frac{1}{2} n \cdot e \cdot \sin\varphi\right)}{v},$$

wo $v = \frac{n \cdot \varrho}{R \cdot \cos\varphi}$ den Verzerrungsfaktor[5]) bedeutet. Die Rechnung für die weiter oben angegebene Karte Nr. 2 durchgeführt, liefert die in Zahlentafel 2 eingeschriebenen u-Werte ausgedrückt in Seemeilen.

Zahlentafel 2. Unterschiede in Distanz zwischen Loxodrome und Kartengerade.

φ \ e	500 sml	1 000 sml	1 500 sml
25°	0,0	0,1	2,0
35°	0,2	2,1	6,2
45°	0,4	3,0	9,4
55°	0,6	4,5	13,5

Die auftretenden Unterschiede bleiben gering, jedoch kann keinesfalls behauptet werden, daß die Lambertsche Karte besser zur Entnahme loxodromischer Distanzen geeignet ist als die Merkatorkarte.

In der Merkatorkarte ist der zu entnehmende rechtweisende Kurs durch die den Anfangs- und Endpunkt des Kurses verbindende Gerade bestimmt. Der dieser Geraden entsprechende Kurswinkel kann an irgendeinem Meridian abgelesen werden. In der Lambertschen Karte verläuft die Loxodrome, solange der Kegel Nordbreiten schneidet, südlich von der den Anfangs- und Endpunkt verbindenden Kartengeraden. Der zu steuernde rechtweisende Kurs soll den Vorschriften entsprechend am Mittelmeridian der verbindenden Geraden abgelesen werden. Inwieweit dies zulässig ist, werde ich weiter unten behandeln. Wird der am Mittelmeridian abgelesene Kurs gesteuert und von jeglicher Art von Kursversetzungen abgesehen, so erscheinen dem Beobachter, der sich einer Lambertschen Karte bedient, alle die Punkte, die von der Kartengeraden geschnitten werden, nacheinander nördlich von seiner Flugbahn gelegen. Diese Abweichungen können nach den Angaben der Zahlentafel 1 ganz beträchtliche Werte erreichen. Nicht so dem Beobachter, der sich einer Merkatorkarte bedient. Ihm erscheinen die Punkte, die in seiner Karte von der Geraden (Loxodrome) geschnitten werden, recht voraus im Gesichtsfeld. Allein hierin liegt schon bei Anwendung der Lambertschen Karte ein nicht zu unterschätzendes Gefahrenmoment.

[5]) O. Adams, General Theory of the Lambert Conformal Conic Projection. U. S. Coast and Geod. Survey Spec. Publ. Nr. 53.

Zu erledigen ist jetzt noch die Frage, in welchen Grenzen es erlaubt ist, den in der Lambertschen Karte am Mittelmeridian abgelesenen Kurswinkel als loxodromischen Kurs anzusehen. Dieses Vorgehen wäre korrekt, wenn die Loxodromen sich in der Lambertschen Karte als Kreise abbildeten. Dies trifft jedoch nur für die Loxodrome $\alpha = 90^0$ zu, alle übrigen sind logarithmische Spiralen. Da nun die als logarithmische Spirale abgebildete Loxodrome alle Meridiane in der Karte unter gleichen Winkeln schneidet, so muß es zwischen dem Anfangs- und Endpunkt des Kurses einen Meridian geben, in dessen Schnittpunkt mit der Loxodrome die Tangente der Loxodrome dieselbe Richtung besitzt wie die den Anfangs- und Endpunkt verbindende Sehne. An diesem Meridian müßte der Kurs abgelesen werden. Da die Lage dieses Meridians aber nicht bekannt ist, so wird der Vorschrift entsprechend am Mittelmeridian abgelesen. Zu berechnen ist also der Unterschied zwischen wahrem loxodromischen Kurs α und dem am Mittelmeridian abgelesenen Kurs α'.

In Bild 5 sei die den Anfangs- und Endpunkt des Kurses verbindende Gerade AB, zwischen den Meridianen PA und PB liegend, die Sehne des Bogens der Spirale ACB, deren Pol bei P liegt.

Diese Spirale ist die Loxodrome, die die Endpunkte des Kurses verbindet. Der Unterschied zwischen wahrem loxodromischen Kurs und dem am Mittelmeridian abgelesenen ergibt sich dann aus

$$\tan\alpha' = \tan(\alpha - \Delta\alpha) = \frac{\tan\alpha - \tan\Delta\alpha}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\Delta\alpha}$$

zu

$$\tan\Delta\alpha = \frac{\tan\alpha - \tan\alpha'}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Nach Bild 5 gilt im Kartendreieck APB der Satz

$$\tan\beta = \frac{\varrho_2 \cdot \sin\Delta\lambda'}{\varrho_1 - \varrho_2 \cdot \cos\Delta\lambda'} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

und weiter

$$\frac{1}{2}\Delta\lambda' + \beta + 180^0 - \alpha' = 180^0$$

also auch

$$\alpha' = \beta + \frac{1}{2}\Delta\lambda'$$

und somit wird

$$\tan\alpha' = \tan\left(\beta + \frac{1}{2}\Delta\lambda'\right) = \frac{\tan\beta + \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'}{1 - \tan\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'}.$$

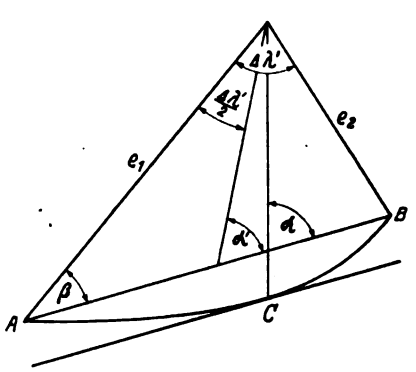


Bild 5. Kursentnahme in der Lambertschen Karte.

Digitized by Google

Hier für tang β den Wert aus (12) eingesetzt, gibt:

$$\tan\alpha' = \frac{\frac{\varrho_2 \cdot \sin \Delta\lambda'}{\varrho_1 - \varrho_2 \cdot \cos\Delta\lambda'} + \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\lambda'}{\cos\frac{1}{2}\Delta\lambda'}}{1 - \frac{\varrho_2 \cdot \sin\Delta\lambda' \cdot \sin\frac{1}{2}\Delta\lambda'}{\varrho_1 - \varrho_2 \cdot \cos\Delta\lambda' \cdot \cos\frac{1}{2}\Delta\lambda'}}$$

woraus nach einigen Rechnungen folgt

$$\tan\alpha' = \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\left(\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_2}\right)$$

oder

$$\tan\alpha' = \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\left(\frac{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}+1}{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-1}\right)$$

nach Gl. (7) ist aber

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = e^{\Delta\lambda' \cdot \operatorname{cotg}\alpha}$$

folglich auch

$$\tan\alpha' = \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\left(\frac{e^{\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha}+1}{e^{\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha}-1}\right)$$

und wenn man zu hyperbolischen Funktionen übergeht

$$\tan\alpha' \doteq \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\,\mathfrak{Cotg}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right) \quad . \; . \; (13)$$

Diesen Wert von tang α' in (11) eingesetzt, gibt:

$$\tan\Delta\alpha = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\,\mathfrak{Cotg}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right)}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\cdot\mathfrak{Cotg}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right)} \quad (14)$$

Die Gleichung sagt aus, daß bei konstantem α der Wert von $\Delta\alpha$ wächst mit wachsendem Längenunterschied. Weiter zeigt sich, daß bei konstantem Längenunterschied und konstantem Kurswinkel der Wert von $\Delta\alpha$ unabhängig von der Ausgangsbreite ist. Mit anderen Worten, die die Loxodrome ersetzenden Sehnen sind bei konstantem Kurs und konstantem Längenunterschied einander parallel, wie es sein muß, $\Delta\alpha$ somit nicht von der Entfernung abhängig, Bild 6. Für $\alpha = 0°$ wird tang $\alpha = 0$ und $\mathfrak{Cotg}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right) = 1$ gleichzeitig aber auch $\frac{1}{2}\Delta\lambda' = 0$ und somit tang $\Delta\alpha = 0$, was selbstverständlich ist, da für $\alpha = 0°$ Loxodrome und Meridian, der in der Karte als Gerade abgebildet wird, zusammenfallen.

Für $\alpha = 90°$ nimmt (14) eine unbestimmte Form an. Schreibt man sie

$$\tan\Delta\alpha = \frac{\sin\alpha\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right) - \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda' \times \mathfrak{Cof}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right) + \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda' \times \mathfrak{Cof}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right)\cdot\sin\alpha}$$

so wird, da für $\alpha = 90°$ $\sin\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$ und

$$\mathfrak{Sin}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right) = 0;\ \mathfrak{Cof}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right) = 1$$

$$\tan\Delta\alpha = \frac{1\cdot 0 - \tan\frac{1}{2}\Delta\lambda'\cdot 1\cdot 0}{1+\tan\frac{1}{2}\Delta\lambda\cdot 1\cdot 1}$$

und somit $\Delta\alpha$ = Null, wie es sein muß, da die Loxodrome $\alpha = 90°$ als Kreis abgebildet wird und der am Mittelmeridian abgelesene Kurs gleich dem wahren loxodromischen Kurs sein muß.

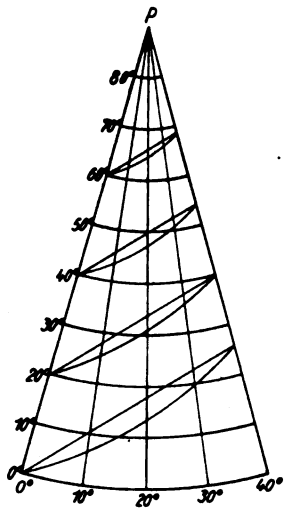


Bild 6. Verlauf der Loxodromen und deren Sehnen im Sektor einer Lambertschen Karte.

Wächst α von 0° bis 90°, so wächst tang α von 0 bis ∞ und $\mathfrak{Cotg}\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda'\operatorname{cotg}\alpha\right)$ von 1 bis ∞. Das zweite Glied des Zählers von (14) ist also numerisch größer als das erste Glied, d. h. der Zähler bleibt negativ für den ganzen Bereich. Weiter wird bei konstantem Längenunterschied der absolute Wert sowohl des Zählers wie auch der des Nenners wachsend; aber so, daß $\frac{Z}{N}$ mit wachsendem α kleiner wird. D. h. von $\alpha = 90°$ aus gerechnet wird der Wert von $\Delta\alpha$ für $\alpha = 90°$ Null, mit kleiner werdendem α wird $\Delta\alpha$ wachsen und sich dem Grenzwert tang $\frac{1}{2}\Delta\lambda'$ nähern, um in dem Augenblick, wo Kurs und Meridian zusammenfallen, also für $\alpha = 0°$ selbst, wieder Null zu werden. Einen Überblick über die Größe der auftretenden $\Delta\alpha$-Werte gibt die Zahlentafel 3, der die Konstanten der Karte Nr. 2 von Weems zugrunde liegen.

Zahlentafel 3.

$\Delta\alpha$-Werte für verschiedene Kurse und Längenunterschiede.

α \ $\Delta\lambda$	30°	50°
0°	0° 00,0′	0° 00,0′
Grenzwert	9° 27,4′	15° 45,6′
10°	2° 47,6′	7° 08,1′
20°	1° 24,6′	3° 50,2′
30°	0° 53,4′	2° 28,4′
40°	0° 36,5′	1° 42,5′
50°	0° 25,2′	1° 12,2′
60°	0° 17,0′	0° 49,4′
70°	0° 09,6′	0° 30,2′
80°	0° 03,9′	0° 14,2′
90°	0° 00,0′	0° 00,0′

Die Angaben der Zahlentafel 3 gelten, da bei einigen Kursen die Endpunkte außerhalb des Kartenblattes fallen, nur z. T. für die Karte Nr. 2. Die in der Karte selbst auftretenden Maximalunterschiede zwischen wahrem loxodromischen Kurs und dem am Mittelmeridian abgelesenen sind in Zahlentafel 4 zusammengestellt.

Zahlentafel 4. In der Karte Nr. 2 auftretende $\Delta\alpha$-Werte.

α	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\Delta\alpha$	0,0′	5,0′	9,5′	20,5′	32,5′	47,0′	67,0′	49,3′	30,2′	14,3′	0,0′

Sie zeigt, daß die Unterschiede im allgemeinen klein bleiben, aber immerhin Werte annehmen können, die für eine exakte Navigation kaum zulässig sind, da alle Fehler, die sich vermeiden lassen, grundsätzlich vermieden werden sollen.

Digitized by Google

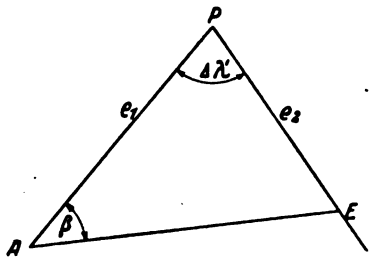


Bild 7. Kartendreieck einer Lambertschen Karte.

Die soweit durchgeführten Untersuchungen zeigten, daß hinsichtlich der wichtigsten Linie der Navigation, der Loxodrome, die Merkatorkarte weit besser den Forderungen der Navigateure gerecht wird als die Lambertsche Karte.

IV. Die Kartengerade der Lambertschen Karte.

Eine den Navigateur ebenfalls interessierende Frage ist die, wie die in einer Lambertschen Karte gezogenen geraden Linien auf der Kugel verlaufen. Eines ist sofort feststellbar und ergibt sich aus der Konstruktion der Karte: Alle den Pol schneidenden Geraden sind Großkreise (Meridiane). Die Gleichung der den Pol nicht schneidenden Geraden in der Lambertschen Karte ist leicht aufgestellt. In Bild 7 sei P der Pol, PA der Anfangsmeridian, PE der Endmeridian und AE die den Anfangs- und Endpunkt verbindende Gerade. Nach dem Kotangentensatz der ebenen Trigonometrie gilt im Dreieck APE

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\operatorname{cosec}\Delta\lambda' - \operatorname{cotg}\Delta\lambda',$$

woraus nach kurzer Rechnung folgt

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_1 \cdot \sin\beta}{\sin(\Delta\lambda' + \beta)},$$

oder wenn der Anfangspunkt so gewählt wird, daß er auf dem Äquator liegt, mithin $\varrho_1 = 1$ wird

$$\varrho_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\Delta\lambda' + \beta)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Dies gibt die Polargleichung der Geraden in der Lambertschen Karte. Durch Inversion vom Mittelpunkt der Karte aus geht (15) über in

$$\varrho' = \frac{\sin(\Delta\lambda' + \beta)}{\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

D. h. jede Gerade einer Lambertschen Karte geht in der dieser entsprechenden reziproken Karte in einen durch den Pol gehenden Kreis über.

Nun ist

$$\varrho' = \operatorname{tang}^n 1/2\,(180^0 - p) \text{ und } \lambda' = n\,\lambda$$

mithin auch

$$\operatorname{tang} 1/2\,(180^0 - p) = \frac{\sin^{1/n}(n \cdot \Delta\lambda + \beta)}{\sin^{1/n}\beta}$$

und da in der stereographischen Projektion

$$\varrho' = \operatorname{tang} 1/2\,(180^0 - p),$$

so ergibt sich als Gleichung der Lambertschen Kartengeraden in der stereographischen Polarprojektion

$$\varrho' = \frac{\sin^{1/n}(n \cdot \Delta\lambda + \beta)}{\sin^{1/n}\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

die Gleichung einer Sinusspirale[6]), deren Form und Verlauf von der Kartenkonstanten n abhängig ist. In der üblichen Form wird sie geschrieben

$$\varrho = \cos^{1/n}(n \cdot \Delta\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

die aus (17) hervorgeht, wenn $\beta = 90^0$ gesetzt wird, und da dies nur eine Achsenverdrehung zur Folge hat, so ist leicht einzusehen, daß weder die Gestalt noch der Charakter der Kurve sich ändert.

[6]) H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. Leipzig 1908, S. 134 bis 138.

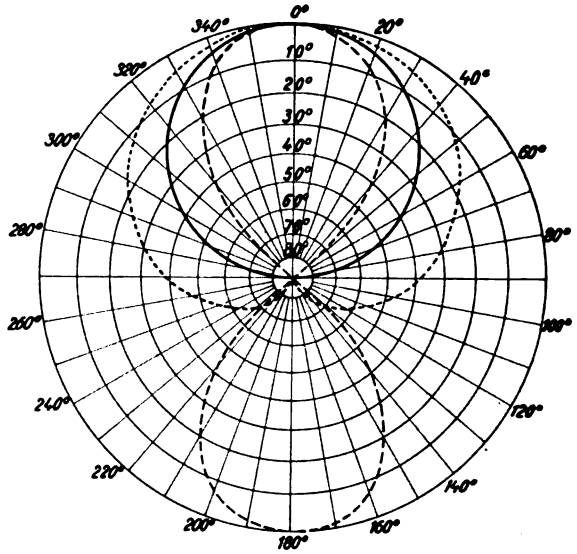


Bild 8. Abbildung der Geraden einer Lambertschen Karte in der stereographischen Projektion — — — $n = 2$; ——— $n = 1$; . . . $= \frac{1}{2}$.

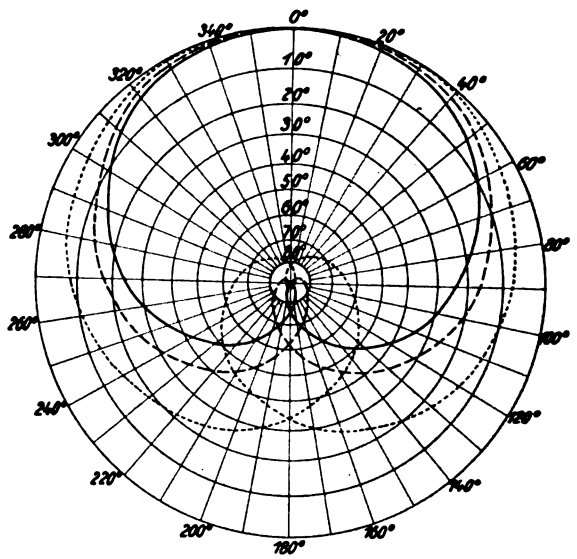


Bild 9. Abbildung der Geraden einer Lambertschen Karte in der stereographischen Projektion.
——— $n = \frac{1}{3}$; — — — $n = \frac{1}{4}$; . . . $n = \frac{1}{6}$.

Den gleichen Verlauf wie in der stereographischen Polarprojektion verfolgen die Kartengeraden auf der Kugeloberfläche. Für einige rationale Werte von n führt (18) auf seit langem bekannte und oft untersuchte Kurventypen. So liefert:

$n = 4$ $\varrho = \cos^{1/4}(4\,\lambda)$ eine aus vier Blättern bestehende in bezug auf beide Achsen symmetrische vierfach zirkulare Kurve achter Ordnung.

$n = 3$ $\varrho = \cos^{1/3}(3\,\lambda)$ eine Kurve 6. Ordnung, die von Roberts und Kiepert untersucht wurde.

$n = 2$ $\varrho = \cos^{1/2}(2\,\lambda)$ eine Bernoullische Lemniskate (Bild 8 gestrichelte Kurve).

$n = 1$ $\varrho = \cos\lambda$ einen durch den Ursprung gehenden Kreis (Bild 8).

$n = \frac{2}{3}$ $\varrho = \cos^{3/2}(2\,\lambda/3)$ die Fußpunkt-Kurve der Lemniskate in bezug auf ihren Mittelpunkt.

$n = \frac{1}{2}$ $\varrho = \cos^2(\lambda/2)$ eine Kardioide (Bild 8 punktierte Kurve).

$n = \frac{1}{3}$ $\varrho = \cos^3(\lambda/3)$ eine Kurve, die den Ort der Scheitel derjenigen Parabeln, die einen gegebenen Kreis berühren und einen Punkt der Peripherie als gemeinsamen Brennpunkt haben, darstellt. Von Archibald wurde diese Kurve Carley-Sextic genannt (Bild 9 ausgezogene Kurve).

Digitized by Google

Lambertsche Karten mit einer Konstanten $n > 1$ sind bis jetzt noch nicht in der nautischen Praxis aufgetaucht. Diese Kurven bedürfen somit keiner weiteren Diskussion. Wird $n = 1$, so geht die Lambertsche Karte in eine stereographische Polarprojektion über, in der alle Kugelkreise wieder als Kreise (wozu auch die Gerade als Kreis mit unendlich fernem Mittelpunkt gerechnet werden muß) abgebildet werden, d. h. die in dieser Karte gezogenen Geraden erscheinen auf der Erdoberfläche als durch den Pol gehende Kreise. Für $n = \frac{1}{2}$ erhielten wir eine Kardioide. Während der für $n = 1$ resultierende Kreis nur die Hälfte der Meridiane durchschnitt, schneidet die Kurve für $n = \frac{1}{2}$ sämtliche Meridiane. Die Kurve $n = \frac{1}{4}$ schneidet alle Meridiane zweimal (Bild 9 gestrichelte Kurve) und die Kurve $n = \frac{1}{8}$ schon viermal (Bild 9 punktierte Kurve). Mit kleiner werdendem n wird also die Kurve den Pol immer öfter umkreisen. Für $n = 0$ führt (18) auf den unbestimmten Ausdruck

$$\varrho = 1^{\infty},$$

der leicht ausgewertet werden kann; denn schreibt man (18) in der Form

$$\log\left\{\frac{\varrho}{\cos(\Delta n \lambda)}\right\} = \frac{1}{n}$$

oder

$$\frac{\varrho}{\cos(\Delta n \lambda)} = e^{-n},$$

so folgt für $n = 0$

$$\varrho = 1,$$

d. h. für $n = 0$ geht (18) in einen Kreis (den Äquator) über. Die Gl. (17) liefert für $n = 0$ ebenfalls einen unbestimmten Ausdruck von der Form $\varrho = 1^{\infty}$. Potenziert und dividiert man jedoch (17) mit n, so findet man

$$\lim_{n \to 0} \frac{1}{n}\left[\varrho^n - \frac{\sin(\Delta n \lambda + \beta)}{\sin\beta}\right] = \log\varrho - \Delta\lambda \operatorname{cotg}\beta$$

oder

$$\varrho = e^{-\Delta\lambda \operatorname{cotg}\beta},$$

d. h. für $n = 0$ erscheint im allgemeinen Fall die Kartengerade auf der Kugel als logarithmische Spirale. Dieses war vorauszusehen; denn für $n = 0$ geht die Lambertsche Karte in eine Merkatorkarte über und die darin gezeichneten Geraden sind Loxodromen, somit auf der Kugel logarithmische Spiralen. Man sieht hieraus, daß nur der Kartengeraden für $n = 0$ eine navigatorische Bedeutung zukommt, da sie tatsächlich eine Loxodrome ist. In allen anderen Fällen dagegen haben die Kugelkurven und somit die Kartengeraden für die Navigation keine praktische Bedeutung, da es keinem Nautiker einfallen wird, freiwillig derartig komplizierte Kurven zu fliegen. Hiermit möchte ich die Untersuchungen über Loxodrome und Kartengeraden schließen, um mich der ebenfalls für die Navigation sehr wichtigen Kurve, der Orthodrome, zuzuwenden.

V. Die Orthodrome in der Lambertschen Karte.

In der Merkatorkarte erscheint die Orthodrome als transzendente Kurve von der Form

$$\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sin\lambda.$$

Zur Zeichnung dieser Kurve sind eine ganze Reihe konstruktiver Methoden ersonnen worden, die mit mehr oder weniger Exaktheit gestatten, den Großkreis in dieser Karte festzulegen. Die vornehmsten dieser Methoden mache ich in einer Fußnote namhaft[7]), ohne jedoch damit sagen zu wollen, daß diese Methoden oft und gern in der Praxis angewendet werden. Gewöhnlich verfährt man so, daß man einzelne Punkte des Großkreises berechnet, die in die Karte überträgt und durch gerade Linien (Loxodrome) verbindet. An Stelle der Rechnung werden auch oft die zu übertragenden Punkte einer gnonomischen Karte entnommen.

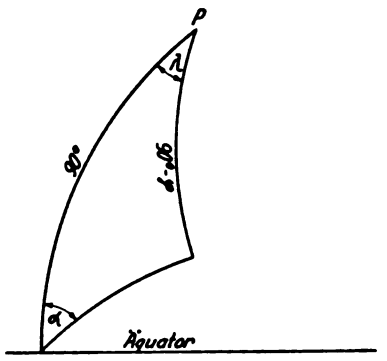


Bild 10. Rechtseitiges sphärisches Dreieck.

Ich werde jetzt untersuchen, ob die Lambertsche Karte hinsichtlich der Großkreissegelung besseres leistet als die Merkatorkarte. Vielfach wird angegeben, daß in der Lambertschen Karte sich der Großkreis mit großer Näherung durch eine gerade Linie ersetzen lasse. Weiter oben wurde jedoch gezeigt, daß die Kartengeraden auf der Kugel als Sinusspiralen erscheinen, die keinesfalls mit den Großkreisen zu identifizieren sind. Inwieweit die Gleichsetzung dieser beiden Kurven erlaubt ist, soll weiter unten behandelt werden; denn da immer noch über die Abbildung eines Großkreises in der Lambertschen Karte irrige Ansichten bestehen, möchte ich erst einmal die Gleichung eines Großkreises in dieser Karte ableiten. Diese Gleichung ist meines Wissens nach zuerst von A. Wedemeyer in einer Schrift »Winkeltreue Kartenprojektionen in elementarer Behandlung«, Hamburg 1936, aufgestellt worden. Ich werde mich hier ganz den Darlegungen dieser Schrift, die auch für Nautiker manches Schöne und Nützliche enthält, anschließen.

Die einfachste Form der Gleichung eines Kugelgroßkreises ist gegeben durch (Bild 10)

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sin\lambda \quad \ldots\ldots (19)$$

oder

$$\operatorname{cotg}\alpha \cdot \sin\lambda \cdot \operatorname{tang} p = 1.$$

Nach einer goniometrischen Formel ist aber

$$\operatorname{tang} p = \frac{2 \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}p}{1 - \operatorname{tang}^2\left(\frac{1}{2}p\right)}$$

und somit

$$\frac{2 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sin\lambda \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}p}{1 - \operatorname{tang}^2\left(\frac{1}{2}p\right)} = 1 \quad \ldots\ldots (20)$$

Das Halbmessergesetz der Lambertschen Karte lautet

$$\varrho = \operatorname{tang}^n\left(\frac{1}{2}p\right)$$

folglich

$$\varrho^{1/n} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}p.$$

Weiter gilt in der Karte

$$\lambda' = n\lambda,$$

also auch

$$\lambda = \lambda'/n.$$

Nach Einsetzen dieser Werte in (20) folgt somit

$$\frac{2 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sin\lambda'/n \cdot \varrho^{1/n}}{1 - \varrho^{2/n}} = 1$$

oder

$$\varrho^{2/n} + 2\operatorname{cotg}\alpha \cdot \sin\lambda'/n \cdot \varrho^{1/n} = 1 \quad \ldots\ldots (21)$$

als Gleichung eines Großkreises in der Lambertschen Karte. Also auch in dieser Karte bildet sich der Großkreis, abgesehen von den Werten von n, wo n rational wird, als transzendente Kurve ab. Für rationale Werte von n wird die Kurve

[7]) A. Wedemeyer, Zeichnung eines Großkreises in der Seekarte. Anm. d. Hydr. 1917, S. 504 bis 510.
v. Kobbe, Angenäherte Darstellung des Hauptbogens in der Merkatorkarte. Anm. d. Hydr. 1908, S. 497 bis 501 und S. 552 bis 558.

Digitized by Google

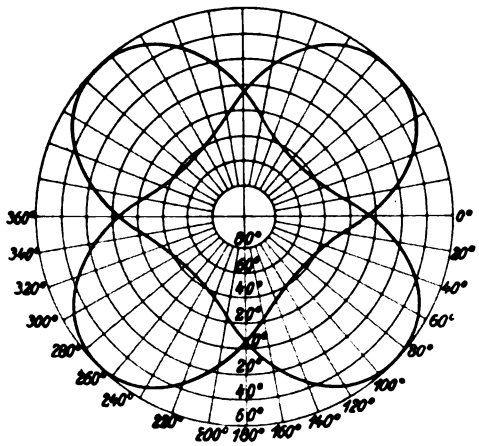


Bild 11. Verlauf der Großkreise (Äquatorschnittwinkel $\alpha = 50°$) in der Lambertschen Karte $n = ½$.

natürlich algebraisch, so erhält man z. B. für $n = 1$, d. h. für eine stereographische Karte aus (21)

$$\varrho^2 + 2 \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin \lambda \cdot \varrho = 1$$

die Gleichung eines Kreises, wie es sein soll. Wird $n = ½$, so folgt aus (21)

$$\varrho^4 + 2 \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin 2\lambda' \cdot \varrho^2 = 1$$

oder da

$$\sin 2\lambda' = 2 \sin \lambda' \cos \lambda'$$

so auch

$$\varrho^4 + 4 \operatorname{cotg} \alpha \sin \lambda' \cos \lambda' \varrho^2 = 1.$$

Dreht man das Koordinatensystem um 45°, so geht die letzte Gleichung über in

$$r^4 + 2 \operatorname{cotg} \alpha \cos 2\lambda' \cdot r^2 = 1.$$

Die Hauptkreise sind demnach für $n = ½$ Cassinische Linien. Man kann also, solange n zwischen Null und Eins liegt, die Bilder der Hauptkreise als Cassinische Linien höherer Ordnung auffassen. Bild 11 und 12 zeigen das Bild eines solchen Großkreises (Äquatorschnittwinkel 50°) in den Karten $n = ½$ und $n = ¾$. Um hierbei die Gestalt der Cassinischen Linie vollständig zum Abdruck bringen zu können, ist die Karte $n = ½$ doppelt gezeichnet.

Navigatorisch bedeutet es keine Erleichterung, daß in der Lambertschen Karte die Großkreise als Cassinische Linien höherer Ordnung abgebildet werden; denn auch die Zeichnung dieser Kurven ist mit einfachen Hilfsmitteln nicht möglich. Der Navigateur ist also auch hier gezwungen, den Großkreis durch Übertragung berechneter oder einer gnonomischen Karte entnommener Punkte in die Lambertsche Karte einzuzeichnen, oder aber er muß eine leichter zu zeichnende Näherungskurve suchen. Diese glaubt man in der Kartengeraden gefunden zu haben. Daß dieses nur in sehr beschränkten Grenzen der Fall sein wird, geht schon aus Bild 11 und 12 hervor. Inwieweit eine Gleichsetzung beider Kurven möglich ist, wird jetzt dargelegt. Um die Rechnung so einfach wie möglich zu gestalten und weil hier auch Maximalwerte zu erwarten sind, so berechne ich nur den größten senkrechten Abstand zwischen Orthodrome und Kartengerade für eine Orthodrome, die zwei auf gleicher Breite liegende Punkte verbindet. Zahlentafel 5 gibt diesen größten senkrechten Abstand in Seemeilen ausgedrückt für die Karte Nr. 2 bei Entfernungen von 500, 1000 und 1500 sml auf verschiedenen Breiten.

Zahlentafel 5. Senkrechte Abstände zwischen Kartengerade und Orthodrome.

φ \ Entf.	500 sml	1000 sml	1500 sml
25°	2,7	9,1	18,1
35°	0,6	2,9	3,4
45°	1,0	4,6	11,8
55°	2,6	10,7	25,8

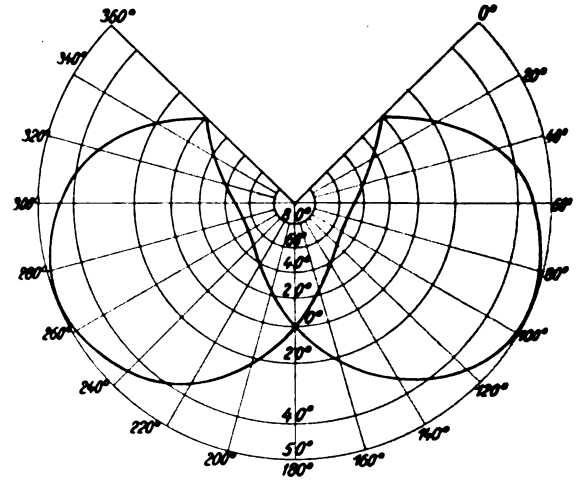


Bild 12. Verlauf der Großkreise (Äquatorschnittwinkel $\alpha = 50°$) in der Lambertschen Karte $n = ¾$.

Sie läßt, verglichen mit Zahlentafel 1, erkennen, daß die Kartengeraden sich den Orthodromen mehr anschmiegen als den Loxodromen. Zu beachten ist jedoch die starke Abhängigkeit der Anschmiegung von der Breite; denn nach den Rändern der Karte zu nimmt diese Anschmiegung sehr schnell ab. Einen noch besseren Überblick über das Zusammenfallen bzw. Auseinanderstreben erhalten wir durch Vergleich des Richtungsverlaufs beider Kurven. In Bild 13 sei APB ein beliebiges Kartendreieck. A der Anfangspunkt, von dem aus eine Kartengerade unter dem Winkel α_0 nach B läuft, so daß Winkel APB gleich $n\lambda = \lambda'$ und die Kartengerade mit dem Meridian PB den Winkel $180° - \alpha$ bildet. Aus $\alpha_0 + \alpha + \lambda' = 180°$ folgt alsdann als Ausdruck für den Winkel PBA

$$\alpha = 180° - \lambda' - \alpha_0.$$

In dem entsprechenden Dreieck auf der Kugel Bild 14 läuft vom Anfangspunkt A aus ein Großkreis unter dem Winkel α_0 nach B', so daß $APB' = \lambda$ und der Winkel zwischen Großkreis und Meridian PB' gleich $180° - \alpha'$. Als Ausdruck für den Winkel α' erhält man alsdann:

$$\cos \alpha' = \sin \lambda \cdot \sin \alpha_0 \sin \varphi_0 - \cos \lambda \cos \alpha_0$$

oder

$$\alpha' = \arccos (\sin \lambda \sin \alpha_0 \sin \varphi_0 - \cos \lambda \cdot \cos \alpha_0)$$

und somit

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = \arccos (\sin \lambda \sin \alpha_0 \sin \varphi_0 - \cos \lambda \cdot \cos \alpha_0) - (180° - \lambda - \alpha_0),$$

wodurch ein Maß für das Auseinanderstreben der beiden Kurven abgeleitet ist. Um diesen Ausdruck etwas einfacher zu gestalten, setzen wir $\alpha_0 = 90°$, wodurch sich die letzte Gleichung auf

$$\Delta\alpha = \arccos (\sin \lambda \cdot \sin \varphi_0) - (90° - \lambda')$$

reduziert. Einige dieser $\Delta\alpha$-Werte sind für verschiedene φ- und λ-Werte für die Karte Nr. 2 in Zahlentafel 6 zusammengestellt.

Sie gestattet die Beantwortung der Frage, innerhalb welcher Grenzen eine Großkreispeilung (z. B. eine langstrahlige Funkpeilung) in der Lambertschen Karte als gerade Linie eingetragen werden darf. Die Resultate liegen bei weitem nicht so günstig wie oft angenommen wird, da

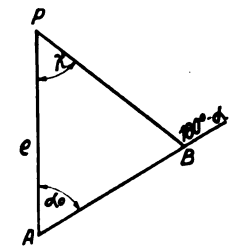


Bild 13. Kartendreieck.

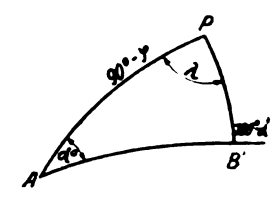


Bild 14. Kugeldreieck.

Digitized by Google

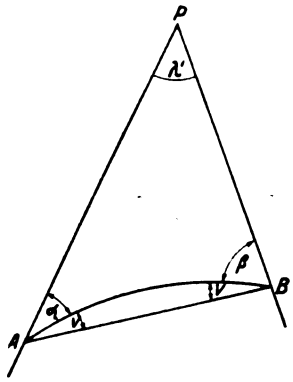


Bild 15. Kartendreieck. Zur Ableitung der Geradenbeschickung.

Zahlentafel 6. Abweichungen in der Richtung zwischen Kartengerade und Orthodrome.

φ \ λ	10°	20°	30°	40°	50°
25°	+ 2,1°	+ 4,3°	+ 6,7°	+ 9,4°	+ 12,6°
35°	+ 0,6°	+ 1,3°	+ 2,7°	+ 3,6°	+ 5,4°
45°	— 0,8°	— 1,3°	— 1,8°	— 1,9°	— 1,3°
55°	— 1,9°	— 3,7°	— 5,3°	— 6,6°	— 7,4°

das Ersetzen der Großkreise durch Gerade auf Längenunterschiede kleiner als 10° beschränkt bleiben muß, trotzdem aber noch nicht immer einwandfreie Resultate liefert. D. h. genau wie in der Merkatorkarte eine loxodromische Beschickung zum Absetzen von Großkreispeilungen notwendig wird, wird man in der Lambertschen Karte gezwungen sein, eine Geradenbeschickung anzuwenden, um mit einiger Exaktheit in dieser Karte Großkreispeilungen absetzen zu können. Die Ableitung eines Näherungswertes für diese Geradenbeschickung, die ich mit v bezeichne, bereitet keine Schwierigkeiten und wird im folgenden durchgeführt. Bei nicht allzu großer Entfernung darf man die Kurve, die in der Lambertschen Karte den Großkreis darstellt, durch einen Kreisbogen ersetzen, der sich dem Großkreis möglichst anschmiegt. Er schneidet die Kartengerade in den Punkt A und E unter den gleichen Winkeln v Bild 15. Es ist daher

$$\alpha + \beta + \lambda' + 2\,v = 180^0,$$

folglich

$$2\,v + \lambda' = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

oder

$$v + \lambda'/2 = 90^0 - \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \beta).$$

Nach den Napierschen Analogien der sphärischen Trigonometrie gilt:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \beta) = \text{cotg}\ \lambda/2 \cdot \cos b \cdot \text{cosec}\ \varphi_m$$

wo $b = \tfrac{1}{2}\,(\varphi_a - \varphi_e)$ und $(\varphi_m = \tfrac{1}{2}\,(\varphi_a + \varphi_e)$.

Durch Übergang zu den reziproken Werten und Einführung der oben abgeleiteten Beziehung für $\tfrac{1}{2}\,(\alpha + \beta)$ erhält man

$$\text{tang}\,(v + \lambda'/2) = \text{tang}\ \lambda/2 \cdot \sec b \cdot \sin \varphi_m.$$

Betrachtet man v, $\lambda'/2$ und $\lambda/2$ als kleine Größen, so darf man schreiben

$$v + \lambda'/2 + 1/3\,(v + \lambda'/2)^3 = (\lambda/2 + \lambda^3/24)\sec b \cdot \sin \varphi_m$$

und da v gegenüber $\lambda'/2$ und $\tfrac{1}{2}\,\lambda$ klein ist, so folgt als Ausdruck für v, wenn $\lambda' = n\,\lambda$ gesetzt wird

$$v = \frac{1}{2}\,\lambda\,(\sec b \cdot \sin \varphi_m - n) + \lambda^3/24\,(\sec b \cdot \sin \varphi_m - n^3)\sin^2 1' \quad \ldots\ (22)$$

Diese Gleichung zeigt, daß bei mittelgroßen Entfernungen, sobald $\sec b \cdot \sin \varphi_m = n$ der Großkreis in erster Näherung als Gerade angesehen werden darf; aber nur in diesem Sonderfall. Die größten Beschickungswerte werden bei einer ost-westlichen Ausdehnung des Großkreises auftreten; d. h. wenn Anfangs- und Endpunkt auf gleicher Breite liegen. Ist dies der Fall, so reduziert (22) auf

$$v = \frac{1}{2}\,\lambda\,(\sin \varphi - n) + \lambda^3/24\,(\sin \varphi - n^3)\sin^2 1'.$$

Der Einfluß des zweiten Gliedes ist sehr gering und kommt erst bei großen Entfernungen zum Tragen. Berücksichtigt man nur das erste Glied, so ergeben sich für die Karte Nr. 2 für verschiedene Breiten- und Längenunterschiede die in Zahlentafel 7 zusammengestellten v-Werte.

Zahlentafel 7. v-Werte für verschiedene Breiten- und Längenunterschiede.

φ \ λ	10°	20°	30°
55°	+ 1,0°	+ 1,9°	+ 2,8°
45°	+ 0,4°	+ 0,8°	+ 1,1°
35°	— 0,3°	— 0,6°	— 0,9°
25°	— 1,0°	— 2,1°	— 3,1°

Die folgende Zahlentafel 8 gibt einen Überblick über die erzielten Wegersparnisse gegenüber der Loxodrome beim Verfolgen eines Großkreises einerseits und dem Verfolgen einer Kartengerade andererseits.

Zahlentafel 8. Ersparnisse beim Verfolgen des Großkreises bzw. der Kartengerade gegenüber der Loxodrome.

e \ φ	500 sml		1000 sml		1500 sml	
	Großkreis sml	Kartengerade sml	Großkreis sml	Kartengerade sml	Großkreis sml	Kartengerade sml
25°	0,0	0,0	0,2	0,1	2,6	2,0
35°	0,3	0,2	2,6	2,1	6,8	6,2
45°	0,5	0,4	3,8	3,0	12,0	9,4
55°	0,7	0,6	6,9	4,5	24,6	13,5

Auch hier wurden als Vergleichsgrößen nur ost-westlich verlaufende loxodromische Kurse gewählt. Von einer wirklich nutzbringenden Ersparnis kann innerhalb der Grenzen der Tafel kaum die Rede sein, da selbst die größte Wegersparnis nur 24,6 sml beträgt und beim Verfolgen der Kartengeraden sogar nur 13,5 sml.

Das Verfolgen eines Großkreiskurses wird erst bei bedeutend größeren Entfernungen nutzbringend in Anwendung gebracht werden können, also nur in den Fällen, wo die Unterschiede zwischen Orthodrome und Kartengerade schon bedeutend sein werden, die Vorteile der Großkreissegelung beim Verfolgen der Kartengeraden, also zum größten Teil wieder verlorengehen. D. h. auch bei Anwendung der Lambertschen Karte muß der Großkreis, wenn er verfolgt werden soll, in der Karte durch Rechnung oder durch Übertragung aus einer gnonomischen Karte festgelegt werden. Sie bietet hinsichtlich der Großkreissegelung der Merkatorkarte gegenüber also keinerlei Vorteile.

VI. Höhen- und Azimutgleichen und konstruktive Lösung nautischer Aufgaben.

Die Gleichung der Höhengleiche in der Lambertschen Karte lautet:

$$\varrho^{2/n}\,(\cos z + \sin \delta) - 2\,\varrho^{1/n} \cos \delta \cos \lambda'/n + (\cos z - \sin \delta) = 0$$

und die der Azimutgleiche

$$\varrho^{2/n}\,(\text{cotg}\ \alpha \cdot \sin \lambda'/n - \cos \lambda'/n) - 2\,\varrho^{1/n}\ \text{tang}\ \delta - (\cos \lambda'/n + \text{cotg}\ \alpha \sin \lambda'/n) = 0.$$

Abgesehen von einigen rationalen Werten von n, für welche die Kurven algebraisch werden, haben wir es auch hier, genau wie in der Merkatorkarte, mit transzendenten Kurven zu tun, deren Zeichnung um nichts leichter ist. Die Konstruktion der Tangenten oder Sehnen der Höhen- oder Azimutgleiche ist aber in einer Merkatorkarte bedeutend einfacher als in einer Lambertschen Karte. Die erstere besitzt rechtwinklig sich schneidende Breiten- und Längenkreise, die durch gerade Linien dargestellt werden, während man in der zweiten Karte in einem Polarkoordinatensystem arbeiten muß, was bekanntlich bedeutend schwieriger ist. Ebenso verhält es sich mit den in der Karte durchzuführenden graphischen Lösungen der Aufgaben der Koppel- und terrestrischen Navigation.

Digitized by Google

VII. Schlußbetrachtung.

Somit zeigt sich, daß die Einführung der Lambertschen Karte als Luftnavigationskarte nur mit Nachteilen, aber keinesfalls mit Vorteilen verbunden ist. Sie besitzt hinsichtlich der navigatorischen Forderungen bei weitem nicht die Exaktheit der Merkatorkarte, sondern gibt in allen Fällen Näherungslösungen, die für eine Navigation in begrenzten Gebieten wohl genügen, mit wachsender Ausdehnung der Flüge aber immer schlechter werden. Ich möchte deshalb besonders darauf hinweisen, daß alles hier Gesagte nur gilt, wenn eine erdumfassende Navigation berücksichtigt wird. Für eine Navigation in begrenzten Gebieten, z. B. Deutschland, spielt die Projektionsart der Karte, in der navigiert wird, keine große Rolle. Hier wird man immer mit genügender Näherung, Loxodrome und Orthodrome mit den Kartengeraden identifizieren können. Auch auf Winkeltreue braucht, wenn der Maßstab groß genug gewählt wird, z. B. 1 : 500000 und die einzelnen Kartenblätter klein bleiben, nicht gesehen zu werden; hat man doch in Deutschland die Vogelsche Karte, die bekanntlich in Bonnescher Projektion gezeichnet ist (die Karte ist flächentreu), als Flugkarte eingeführt. Bei weiterer Ausdehnung der Flüge wird man dagegen immer mehr abhängig von der Projektionsart der Karte und je größer diese Entfernungen werden, desto mehr wird man gezwungen sein, um eine einwandfreie Navigation bequem und sicher durchführen zu können, sich der Merkatorkarte zu bedienen. Sagt doch selbst ein vom geographischen Standpunkt aus entschiedener Gegner der Merkatorkarte[8]): »It was in fact the most useful device next to the compass for guiding mariners on the high seas. Navigation became at once comperatively safe and simple.« Und G. Scheffers äußert sich in einer kleinen Schrift[9]) über die Merkatorkarte: »Wenn ein anderer Planet von genügend vernunftbegabten Wesen bewohnt wird und wenn diese, wie wir mit Hilfe des Kompasses fahren, werden sie das Merkatorsche Gradnetz benutzen.« Derartige Aussprüche ließen sich noch viele anführen, doch mögen die beiden notierten zur Feststellung genügen, daß die hier vertretene Ansicht nicht vereinzelt dasteht.

In den Polarregionen allerdings versagt die Merkatorkarte. Für die Schiffahrt ist dies belanglos. Anders dagegen liegt es bei der Luftfahrt, dieser steht jede Region der Erdoberfläche, auch die Polarregionen offen. Als Navigationskarte in diesen Gebieten hat man mit Erfolg die stereographische und gnonomische Projektion angewandt. Es gibt aber auch Netzentwürfe, bei denen der Pol im endlichen liegt und die trotzdem die Loxodromen als gerade Linien abbilden, und die es gestatten, die Aufgaben bezüglich Kurswinkel und Loxodrome fast ebenso leicht zu lösen wie mit Hilfe der Merkatorkarte. Karten dieser Art sind beschrieben von K. Siemon in einer Arbeit »Neue Netzentwürfe für Kurskarten von Gebieten höherer Breite« (Mittlg. d. Reichsamts für Landesaufnahmen 1935, Nr. 1), auf die hier verwiesen sei.

[8]) B. T. S. Cashill, An account of a new Land Map. The Scottish Geographical Magazine 1909.

[9]) G. Scheffers, Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten. Leipzig 1934.

Digitized by Google

JAN 22 1947

Luftfahrt-forschung

Herausgegeben von der
Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung (ZWB) Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 10 enthält Arbeiten von: A. Lichte S. 291—296, Henrich Focke S. 297—298, W. Hoff S. 299—305, J. Cassens S. 306—313, W. Biermann und W. Dessecker S. 314—319, F. Bollenrath S. 320—328, E. Lamla S. 329—331, O. Lutz S. 332—335

UFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 10 SEITE 291 BIS 336 | MÜNCHEN, 26. 10. 1940

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Probleme der Entwicklung der direkten Kraftstoffeinspritzung. Von A. Lichte . . . . . Seite 291
Henrich Focke . . . . . Seite 297
Das Zusammenwirken von Flugmotor und Luftschraube. Von W. Hoff . Seite 299
Knickbiegeversuche. Von J. Cassens . . . . . Seite 306
Über ein besonderes Ersatzsystem zur Berechnung von Flügelschwingungen. Von W. Biermann und W. Dessecker . . . . . Seite 314
Einflüsse auf die Zeit- und Dauerfestigkeit der Werkstoffe. Von F. Bollenrath . . . . . Seite 320
Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet. Von E. Lamla . Seite 329
Die graphische Ermittlung von Ausströmvorgängen. Von O. Lutz . . . Seite 332

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 | 26. Oktober 1940 | Lfg. 10

Probleme der Entwicklung der direkten Kraftstoffeinspritzung.

Zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Otto Mader am 17. September.

Von August Lichte.

Bericht der Junkers Flugzeug- und Motorenwerke, A.-G., Stammwerk Motorenbau, Dessau.

Als im Jahre 1933 unter der neuen Führung die Fesseln des Versailler Friedensvertrages fielen, trat mit der Aufrüstung das stark vernachlässigte Gebiet der Flugmotorenentwicklung zwingend in den Vordergrund. Es galt nicht nur, den Rückstand gegen eine feindliche Umwelt aufzuholen als vielmehr den Vorsprung in rascher Entwicklung zu überholen. Nicht zuletzt ist das gelungen durch die Entwicklung der direkten Kraftstoff-Einspritzung am Zündermotor. Wenn wir nach diesen wenigen Jahren der Entwicklung Rückschau halten, so bestätigen die Erfolge, daß die Entwicklung der Hochleistungs-Zünderflugmotoren mit seltenem Sturm und Drang und fast beispielloser Sicherheit vonstatten ging. Sicherlich kamen dieser Aufgabe die Entwicklungsarbeiten der luftlosen Einspritzung am Dieselmotor zunutze. Die technische Bereitschaft zu diesem Entwicklungsvorgang liegt aber tiefer begründet und kann nicht genug gewürdigt werden. Der 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Otto Mader ist eine treffliche Gelegenheit, einzelne Probleme aus der Entwicklung der direkten Einspritzung in der Junkers Forschungsanstalt rückschauend zu behandeln, trägt doch dieses Werk sichtbar die Spuren seiner Persönlichkeit.

Allgemeine Problemstellung.

Bereits vor dem Weltkrieg wurden in der Junkers-Forschungsanstalt Studien angesetzt, die als Vorarbeiten zur Entwicklung des schnellaufenden Kleinmotors und in weiterer Verfolgung zur Entwicklung des Flugdieselmotors gedacht waren. Die negativen Erfahrungen aus den Entwicklungsjahren des Dieselmotors mit luftloser Einspritzung, die daraus resultierende ablehnende Einstellung der damaligen Ingenieurwelt und die Schwierigkeit der Aufgabe an sich machten es schon notwendig, durch planmäßige Versuche sich Schritt für Schritt von eignen Vorurteilen und fremder Tradition frei zu machen. Wenn nachfolgend einige Dokumente aufgeführt werden, so liegt die Absicht vor, einen Einblick in das technische Denken und Schaffen an dieser Aufgabe zu vermitteln und die Arbeiten zu würdigen, die für unsere Erfolge wegbereitend waren.

Die allgemeinen Vorarbeiten für die Brennstoffsteuerung und die zugehörigen Fragen in ihrer Vielseitigkeit sind in Bild 1 angedeutet. Das Problem ist aufgelöst in Einzelaufgaben, und zwar, wie uns heute scheinen mag, über das notwendige Ziel hinaus. Die physikalischen Unterlagen über Kraftstoffe und ähnliche Flüssigkeiten lagen damals nur spärlich und ungenau vor und mußten in besonderen Versuchen ermittelt werden. Selbst die nötigen Apparaturen für solche Untersuchungen mußten erst gebaut werden. Das Kernproblem der Brennstoffsteuerung ist in Bild 2 zergliedert. Wir finden alle grundsätzlich möglichen Verfahren angedeutet, die später allgemein Bedeutung gewonnen haben. Die Vielseitigkeit der angeführten Probleme verbietet im Rahmen dieser Arbeit, auch nur eine einigermaßen vollständige Darstellung der Entwicklungsarbeiten zu geben. Es werden hier nur die wichtigsten Tastversuche beschrieben.

Zerstäubungsprobleme, Düsenformen.

a) Druckluftzerstäubung.

Ausgehend vom bekannten Lufteinblaseverfahren gelang es, in einem eingehenden Studium das Wesen der Zerstäubung gründlich zu erforschen. In erster Linie interessierte der kleinste notwendige Zerstäubungsluft- und Zerstäubungsenergiebedarf bei Anwendung verschiedenster Düsenformen. Interessant ist die Versuchsführung. Das aus einer Misch- und Zerstäubungsdüse bekannter und neuartiger Ausführungen austretende Kraftstoff-Luftgemisch wurde mit der gerade nötigen Zusatzluft verbrannt und die Flamme kalorimetriert. Durch Veränderung der zeitlich mengenmäßigen Zuteilung von Luft und Kraftstoff am Mischventil sowie durch Variierung der räumlichen Verteilung sowohl der Zerstäubungsluft wie des Kraftstoffes konnten wichtige Erkenntnisse über Zerstäubung und Gemischbildung und ihren Einfluß auf rauchlose Verbrennung gefunden werden. Schon bei diesen Versuchen zeigte sich, daß die später bekannt gewordene Junkers-Fächerdüse, Bild 3, gute Zerstäubungswirkung hatte. Neben vielen subjektiven Beobachtungsergebnissen fand man für rauchlose Verbrennung:

der Zerstäubungsluftbedarf konnte bis 0,73 $\frac{\text{Liter Luft}}{\text{g Brennstoff}}$ herabgesetzt werden,

der zugehörige Mindestenergiebedarf betrug 0,35 $\frac{\text{PS}}{\text{g Brennst.}}$

der zerstäubte Brennstoff darf keine Wände berühren, wenn Verkoken vermieden werden soll,

das Verstopfen der Düsen kann durch richtige Düsenausführung weitgehend unterdrückt werden.

Die Ergebnisse dieser Studie mögen nicht entscheidend gewesen sein, der Einblick in den Zerstäubungsvorgang und die Beurteilung der nötigen Zerstäubungsgüte für rauchlose Verbrennung trugen in außerordentlichem Maße dazu bei, die Bedenken gegen die reine Strahlzerstäubung zum Schwinden zu bringen.

Digitized by Google

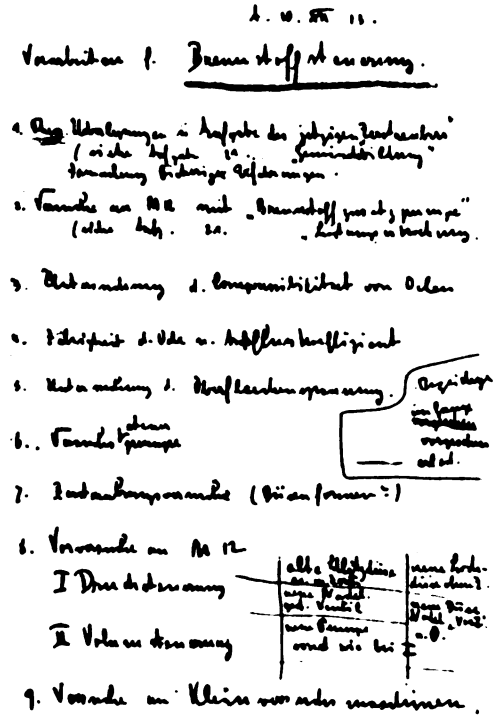


Bild 1.

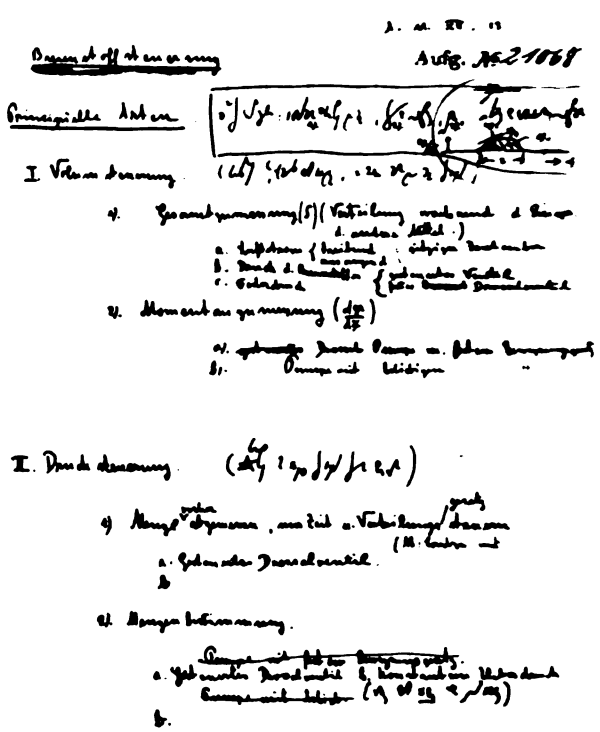


Bild 2.

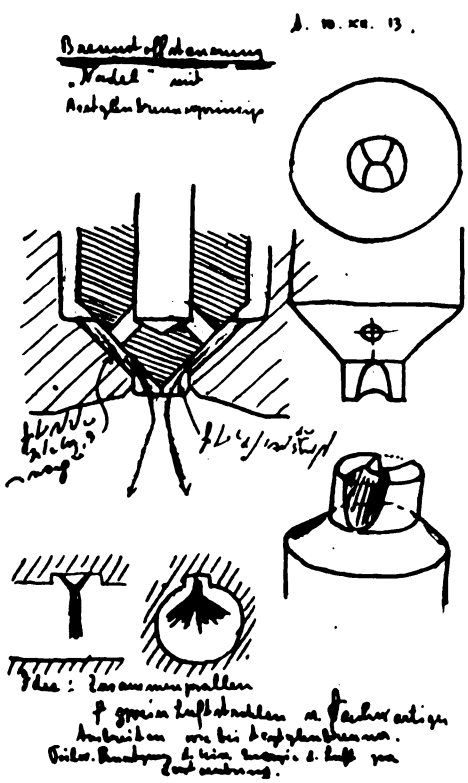


Bild 3.

b) Strahlzerstäubung.

Neben den Versuchen mit Zerstäubung durch Druckluft lief eine Studie über die Strahlzerstäubung bei stationärem Flüssigkeitsstrom. An einfachen Lochdüsen konnte der Einfluß von Lochlänge, Lochdurchmesser, Form des Durchflußquerschnittes und der Austrittskante sowie des Einspritzdruckes auf Durchflußkoeffizient, Zerstäubungsgüte und Strahltiefe in freie Luft ermittelt werden. Die Ergebnisse wurden sinngemäß auf Fächerdüsen, Bild 3, und Kegelmantelstreudüsen, Bild 4, übertragen und die Wirkung mit denen an einfachen Lochdüsen verglichen. Flüssigkeiten mit verschiedenen Zähigkeiten, die weit über die Grenzen der Diesel- und Leichtöle hinausgingen, gaben Einblick in die dadurch gegebenen weiteren Schwierigkeiten. Auch der Einfluß von Luftblasen war bald erkannt. Nach diesen Vorarbeiten über grundsätzliche Düsenformen konnte man darangehen, Versuche bei »intermittierender Flüssigkeitsförderung« vorzunehmen. Zwar waren die heute üblichen Elemente für periodisches Fördern von Flüssigkeiten noch nicht entwickelt; daher kam das Akkumulierverfahren mit mechanischer Steuerung der Flüssigkeit zur Anwendung. Infolge seiner Einfachheit, Übersichtlichkeit, bequemen Variationsmöglichkeit und nicht zuletzt infolge der meßtechnisch besseren Beherrschbarkeit war dies Verfahren besonders geeignet, Erkenntnisse über Zerstäubung, Strahlcharakteristik und Nachtropfen zu sammeln. Um aber überhaupt Versuche und Beobachtungen anstellen zu können, fehlte es an einem brauchbaren Auswertungsverfahren. Für diese Zwecke wurde die stroboskopische Beobachtung mit verschiebbarem Beobachtungszeitpunkt ausgearbeitet und die zugehörige Apparatur entwickelt. Dieses Beobachtungsverfahren, das schon vor dem Weltkriege für die Beobachtung periodischer Strömungsvorgänge bei Junkers angewendet wurde, hat die luftlose Einspritzung maßgebend gefördert und ist bis heute in verfeinerter, nicht aber verbesserter Form beim Studium der Einspritzgesetze das wichtigste

Digitized by Google

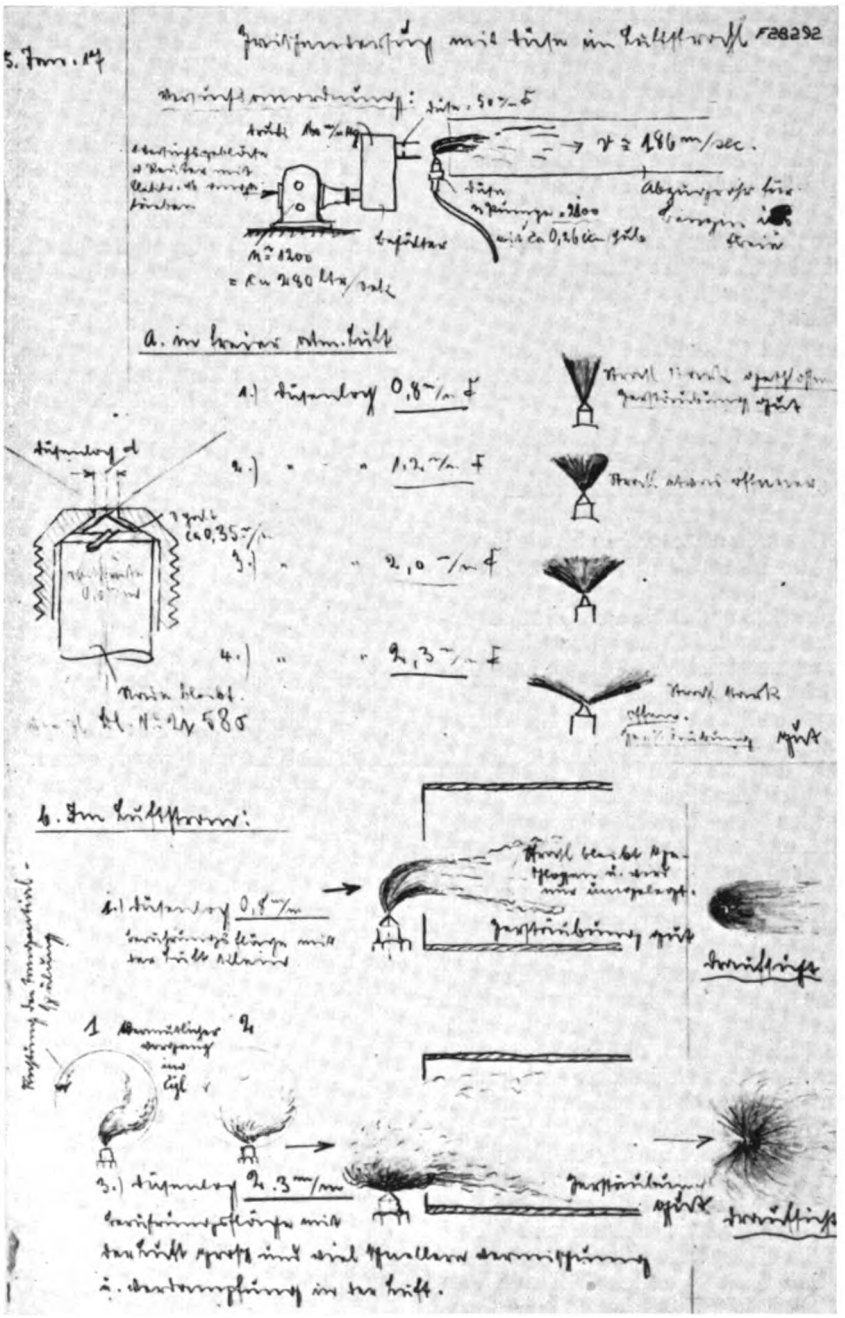


Bild 4.

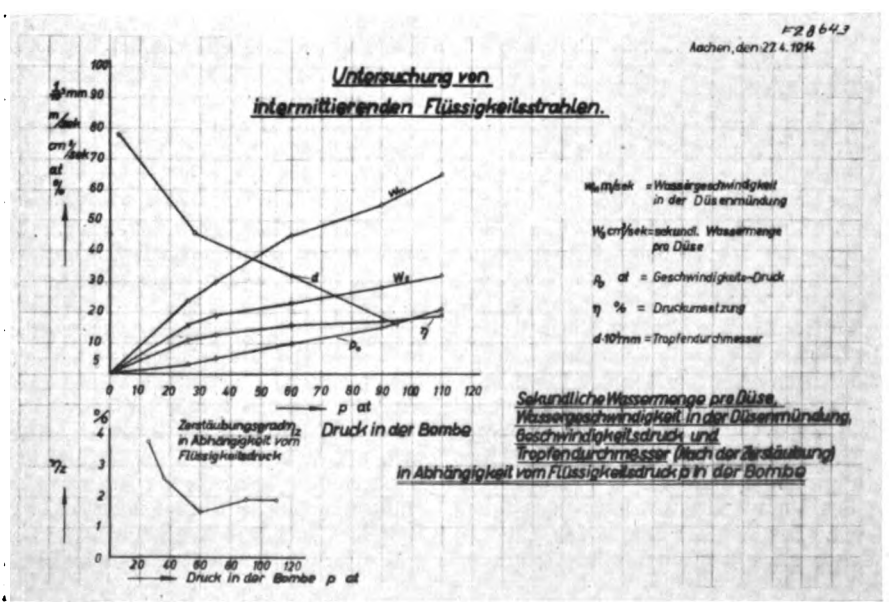


Bild 5.

Digitized by Google

Gerät geblieben. In geschickter Auswertung der Erkenntnisse an Düsenformen bei stationärem Flüssigkeitsstrom und Übertragung auf periodische Strömungsvorgänge wurden die in Bild 5 dargestellten Zusammenhänge gefunden.

Erklärungen zu Bild 5:

Das Druckverhältnis ist ermittelt aus dem Geschwindigkeitsdruck in der Düsenmündung im Verhältnis zum Vordruck.

Der mittlere Tropfendurchmesser wurde bestimmt aus der Fallgeschwindigkeit des Tröpfchens im Flüssigkeitsnebel und den damals bekannten Widerstandsgesetzen in freier Luft.

Der Zerstäubungsgrad ist definiert durch das Verhältnis von Oberflächenspannung × Oberflächenvergrößerung zur kinetischen Energie in der Düsenmündung.

Inzwischen war die Entwicklung der Pumpenelemente so weit gediehen, daß auch die Fördergesetzmäßigkeiten und die einzelnen Teilvorgänge in ihrem wechselweisen Aufeinanderwirken in einfacher Form analysiert werden konnten. Sowohl die Einspritzung in atmosphärische wie in verdichtete Luft wurden in planmäßiger Ergänzung zum Motorbetrieb studiert. Sehr bald stellte sich heraus, daß bei steigenden Einspritzdrücken und Drehzahlen die mengenmäßige und zeitliche Steuerung der Kraftstoffzuteilung, die mittelbar durch das Bewegungsgesetz der Pumpe, unmittelbar durch die Düse erfolgt, in ihrer Einspritzgesetzmäßigkeit von der Fördergesetzmäßigkeit abweicht. Die Ergebnisse an den Benzinpumpen aus dem Jahre 1917, Bild 6, sind nicht so schlecht, daß sie sich nicht neben den heute bekannten Einspritzcharakteristiken sehen lassen könnten. Natürlich traten eine Unzahl von Schwierigkeiten mechanischer Art und rätselhafte Folgeerscheinungen auf; es gelang aber doch immer wieder durch sinnvolle Aufteilung in Einzelvorgänge, Klarheit zu schaffen. In verhältnismäßig kurzer Zeit gelang es, die Einflüsse von Pumpenstempeldurchmesser, Pumpendruckraum, Düsenleitung, Düse und Hubgesetz geschickt aufeinander abzustimmen und weitgehend die für eine gute Verbrennung notwendigen Bedingungen zu erfüllen. Zwar gelang es damals nicht, genaue theoretische Unterlagen über die immerhin verwickelten Vorgänge der direkten Einspritzung mit mechanischer Zerstäubung aufzustellen, aber auch heute spricht wohl überall der Versuch das entscheidende Wort in diesen Fragen. Düsen mit mechanisch oder durch den Kraftstoffdruck gesteuerter Nadel wurden mehrfach untersucht. Die Ergebnisse am Motor zeigten immer wieder, daß bei dem durchweg beschränkten Betriebsreich der normalen Motoren bei richtiger Auslegung die offene Düse ohne bewegte Teile für Fertigung und Betrieb nicht zu unterschätzende Vorteile bietet. Der dabei notwendig zu fordernde hohe Pumpendruck machte bei entsprechend ausgelegtem Triebwerk keine Schwierigkeiten.

Einspritzpumpen, Pumpenelemente und Steuerungselemente.

Für die Düsenentwicklung und die ersten Motorversuche kamen Pumpen mit den damals gerade bekannten Elementen zum Einsatz, d. h. Kolbenpumpen mit Stopfbüchsenabdichtung, gesteuertem Saugventil zur Regelung oder statt dessen Umlaufregelung. Von vornherein war für Versuche keine engherzige Einschränkung auf Diesel- oder Otto-Motoren vorgesehen. Als daher mit Ausbruch des Weltkrieges die Forschungsanstalt spezielle Motor-Entwicklungsaufgaben lösen mußte, war das Vertrauen zum direkten Einspritzverfahren groß genug, dasselbe zum Einsatz zu bringen. Beim Diesel-Motor waren die Fragen der beherrschbaren Gemischbildung für rauchlose Verbrennung als Hauptschwierigkeit erkannt; diese war bei Betrieb mit Zündermotoren wesentlich einfacher. Dagegen lagen hier betriebliche Schwierigkeiten bei der Förderung nichtschmierfähiger Flüssigkeiten und der Abdichtung des Pumpendruckraumes gegen den Triebwerksraum hin vor. Die ersten Pumpen für Zündermotoren arbeiteten daher nach dem Freikolbenverfahren. Der Kolben mit festem Bewegungsgesetz wurde mit Öl betrieben. Durch das Öl wurde der Freikolben bewegt; die Rückführung des Freikolbens erfolgte durch Federkraft. Nachdem viele mechanischen Schwierigkeiten an Ventilen und Freikolben beseitigt waren, mußte diese Bauart verlassen werden, da Fördercharakteristik und Spritzdauer als unbrauchbar für veränderliche Drehzahlen erkannt waren. Der nächste Schritt führte dann zum direkt angetriebenen Stufenkolben, s. Bild 6, der die Schmierung sicherstellte und den Kraftstoffübertritt zum Triebwerksraum ausschaltete. Eine weitere Beschreibung ist hier nicht notwendig, da dieser Stufenkolben als das Mader-Schmierpatent bekannt geworden ist. Diese Konstruktion zeigte sich sofort als brauchbar und wurde nach Bild 7 serienmäßig ausgeführt. Die Fördermengenregelung erfolgt durch Hubverstellung. Die trüben Erfahrungen mit allen nicht zwangsläufig bewegten Teilen führten dazu, daß die Steuerung des Kraftstoffes durch oszillierenden Kolben mit Saug- und Druckkanal erfolgte. Die Spritzdauer befriedigte nicht ganz, weshalb nachträglich ein Druckventil eingebaut wurde. Damit konnte die vorgesehene Spritzdauer eingehalten werden. Vom heutigen Stand der Entwicklung aus ist bemerkenswert, daß zur Entlüftung eine Kraftstoff-Durchspülung vorgesehen war. Diese Pumpe war für einen Zweitakt-Zündermotor entwickelt. Für Viertakt-Zündermotoren war vorgesehen, den Pumpenkolben rotierend zu bauen. Es sollten mit einem Kolben zwei Motorzylinder beschickt werden. Für den gleichen Zweck war aus baulichen Gründen eine Trommelpumpe durchkonstruiert. Sie wurde später für einen Kraftwagenmotor gebaut, Bild 8. Die Versuche wurden allerdings sehr bald abgebrochen, da die Konstruktion mit dem billigen Vergaser nicht wetteifern konnte. Die weitere Entwicklung der Pumpen für Zündermotoren fand mit dem Ausgang des Weltkrieges ein Ende. Das Vorhandene mußte vernichtet werden. Dafür kam die Entwicklung der Pumpen für Diesel-Motoren wieder zur Blüte. Zunächst war es die Gestaltung des Motors selbst, die im Vordergrund stand. Die dabei zum Serienbau gekommenen Pumpen (Entwicklungsjahr 1920/21) sind bekannt. Sie waren mit Hubregulierung versehen. Da diese Bauart für Flugmotoren zu sperrig war, ging die Entwicklung weiter. Nach kurzen Tastversuchen wurde der Pumpenstempel mit einer schrägen Steuerkante zur Mengenregelung versehen; zunächst aber versuchte man die Fördermengenveränderung durch Verdrehung der Laufbüchse zu erzielen, aber die schräge Steuerkante drängte auf Verdrehung des Kolbens als zwingende Endlösung. Diese Bauart ist heute so allgemein geworden, daß sie hier als bekannt vorausgesetzt werden kann. Sie hatte von vornherein Saugloch und Druckventil. Damit waren die grundsätzlichen Pumpenelemente etwa Mitte 1924 entwicklungsmäßig bekannt. Die Verwendung für Diesel- oder Otto-Motoren ist bis auf die Schmierung nicht unterschiedlich. Natürlich sind noch viele neuartige Teilprobleme gelöst worden. Zweckmäßige Formgebung und Gestaltung der Bauteile, richtige und zeitgebundene Werkstoffauswahl und anderes mehr hat neue Aufgaben mit sich gebracht; an den grundsätzlichen Bauteilen hat sich Wesentliches nicht mehr geändert.

Motorversuche, Schlußbetrachtungen.

Bereits die ersten Motorversuche hatten eine klare Auffassung über die zu lösenden Teilprobleme gegeben. Außer den Aufgaben über die physikalischen Zustandsgrößen der zu fördernden Flüssigkeiten ergab sich daraus eine zwangsläufige Aufteilung in die Einzelaufgaben: Kraftstoff-Führung, Filterung, Förderung, Steuerung, Verteilung und Regelung. Die energische Behandlung führte dazu, daß die Erfolge an dem bei Junkers entwickelten Zweitakt-Zündermotor, der für den Einbau in Schnellboote der Kriegsmarine vorgesehen war, auf Wunsch der Flugzeugmeisterei auf den Viertakt-Zündermotor übertragen werden sollten. Mit einer behelfsmäßig angebauten Pumpe nach Bild 7 wurde ein 6-Zylinder-Daimler-Mercedes-Flugmotor betrieben. Die Anordnung und die Steuerungsdaten sind in Bild 9 zusammengestellt.

Digitized by Google

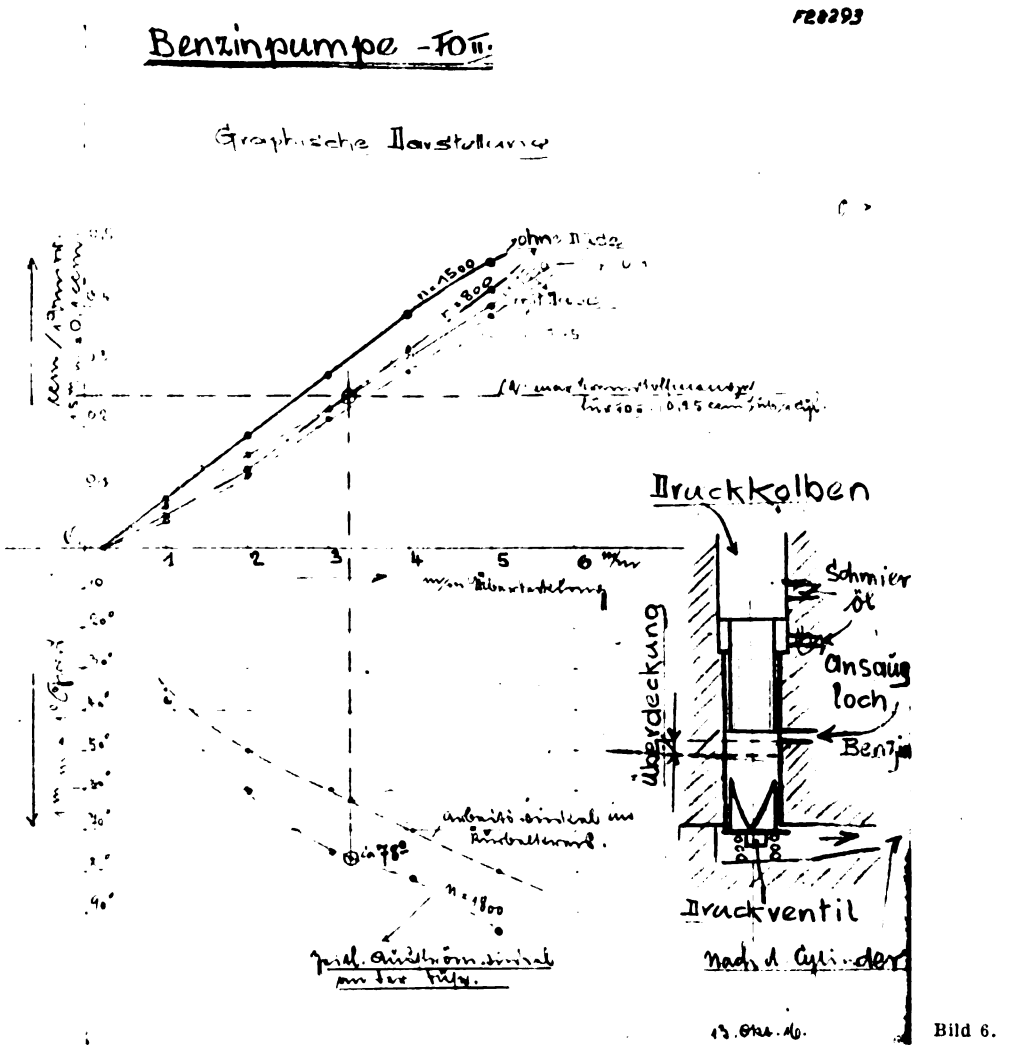


Bild 6.

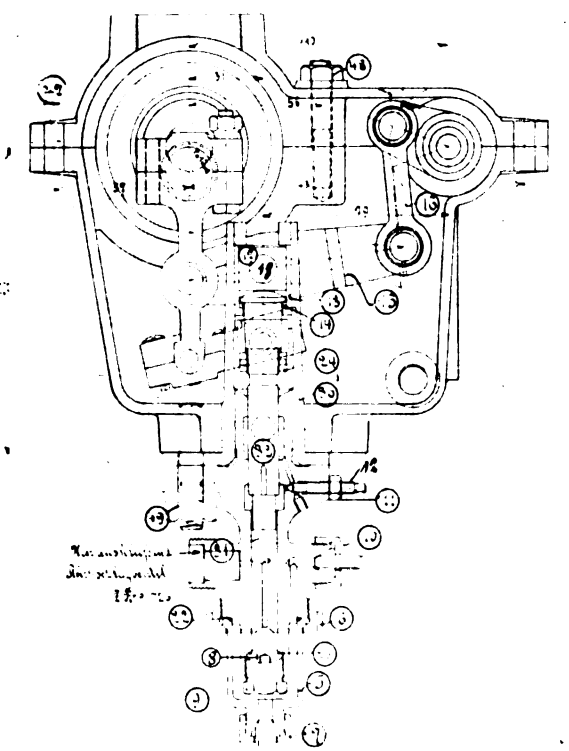


Bild 7.

Die dabei erzielten Ergebnisse waren denen mit Vergaserbetrieb um einen geringen Betrag überlegen, obschon nur wenige Versuche durchgeführt werden konnten. Die Weiterentwicklung dieser Aufgabe mußte nach Friedensschluß aufgegeben werden.

Über die Entwicklung der luftlosen Einspritzung am Diesel-Motor wurde früher an anderer Stelle[1]) berichtet. Hier soll nur noch auf das in den Nachkriegsjahren bei Junkers entwickelte Verfahren der direkten Beobachtung der Verbrennungsvorgänge im Zylinderraum hingewiesen werden. Das auch hierbei angewandte stroboskopische Beobachtungsverfahren dürfte für alle genaueren wissenschaftlichen Untersuchungen damals wie heute von hohem Wert sein.

Heute noch findet der Ingenieur, der sich mit der direkten Einspritzung befaßt, eine Fülle von Problemen. Trotz der gewaltigen Fortschritte der Meßtechnik ist die allgemeine Behandlung und Entwicklung der direkten Einspritzung eine Wissenschaft der Anwendung geblieben, die auf dem Boden des Experimentes die viele Kleinarbeit und ihre logische Auswertung dem Gesamtziel in richtiger Weise unterordnet. Um so mehr mußte zu einer Zeit, in der die Meßmethoden für diese Vorgänge in ihren Anfängen steckten, eine gefühlsmäßige Einsicht weiterhelfen. Es ist doch wohl so, daß nicht die offensichtlichen Seiten eines Vorganges den Erfolg bedingen, sondern als ausschlaggebend sich die vielen versteckten Nebenvorgänge erweisen, die einer rechnerischen

[1]) O. Mader, Die Weiterentwicklung des Junkers-Doppelkolben-Motors in den Junkers-Werken, Dessau. Z. VDI (1925).

Digitized by Google

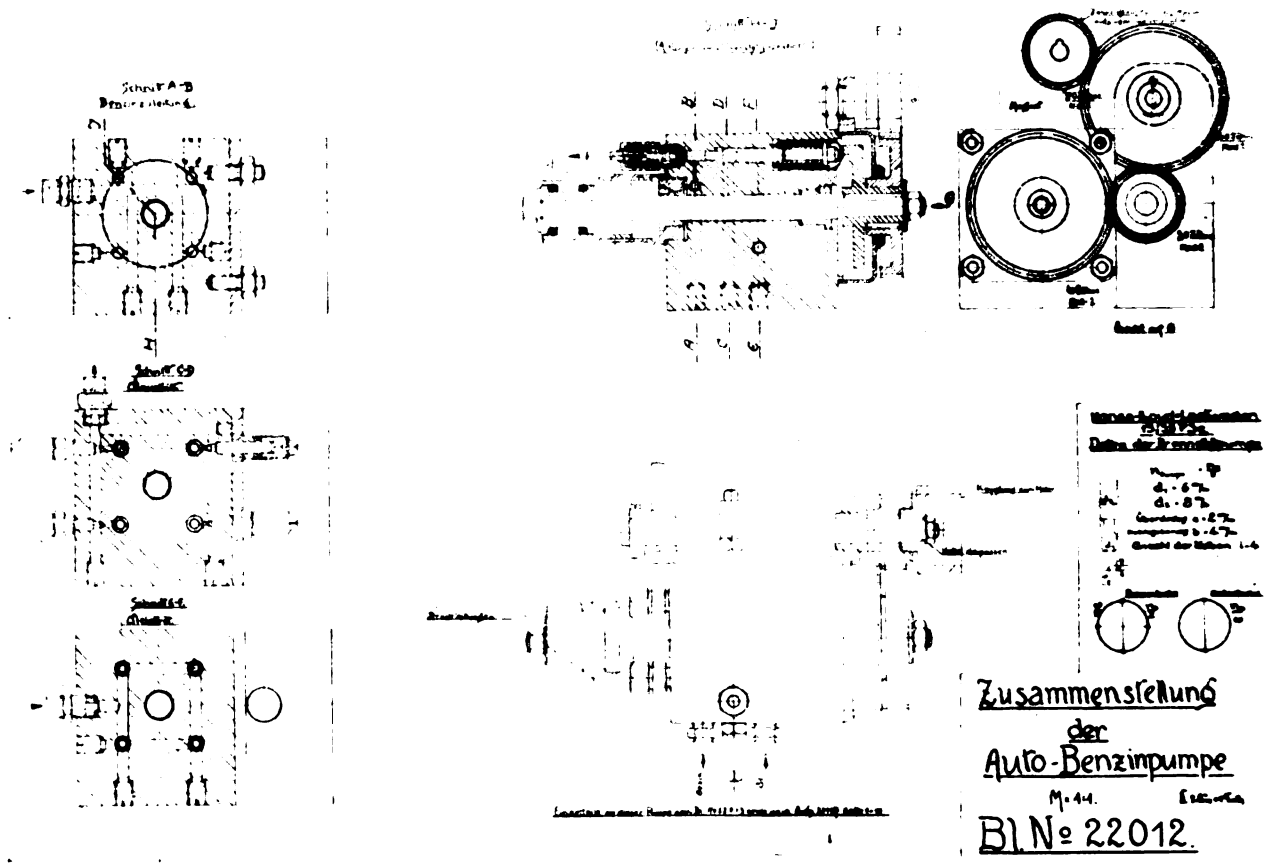


Bild 8.

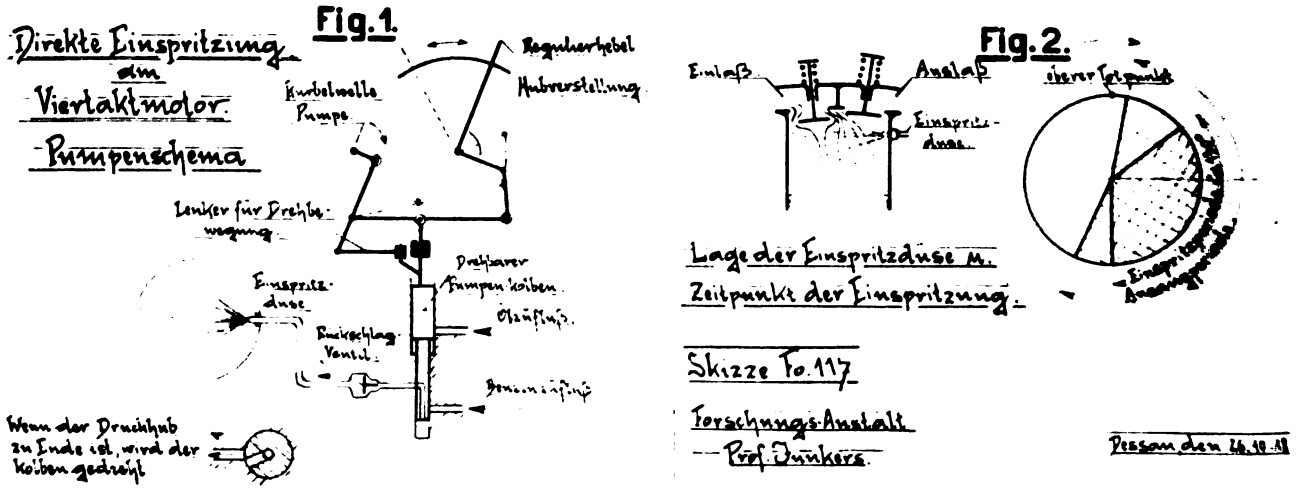


Bild 9.

Verfolgung nicht zugänglich sind. Wenn man aus diesem Gesichtswinkel heraus diese Entwicklungsarbeiten in ihrer Gesamtheit und in ihren Ergebnissen überblickt, so kann man sich nicht des Eindruckes erwehren, daß hier ein ganz sicherer Blick für das Wesentliche in den physikalischen Vorgängen vorliegt und daß eine aktive Beherrschung der Vorgänge offenbar zutage tritt. Von einem Sprung kann auch nicht die Rede sein. Alle Erfolge hierbei sind schließlich das Ergebnis einer Vielzahl technisch zweckmäßig angesetzter Versuche und ihrer logischen Auswertung.

Digitized by Google

Henrich Focke.

Am 8. Oktober 1940 beging Wehrwirtschaftsführer Professor Dr.-Ing. e. h. Henrich Focke seinen 50. Geburtstag. Was er in diesen Jahren geleistet und geschaffen hat, vermögen nur die richtig zu würdigen, die ihm ganz nahe stehen. Ist es doch eine Eigentümlichkeit technischer Leistungen, daß ihre Schöpfer im allgemeinen der Mit- und Nachwelt unbekannt bleiben. Henrich Focke gehört aber zu den wenigen, deren Leistungen so hervorragen, daß ihr Name auch in der Öffentlichkeit einen guten Klang hat.

Als Nachfahre einer alten Bremer, ursprünglich friesischen Gelehrtenfamilie, war seine praktisch technische Neigung durchaus etwas Ungewöhnliches. Manche Schwierigkeiten sind ihm aus seiner abweichenden Familientradition erwachsen, zu denen sich in den Anfangsjahren der Fliegerei die allgemeine Ablehnung gegen jede weitschauende technische Entwicklung gesellte. Er selbst schreibt einmal: »Wer gedenkt heute, wo das Flugwesen getragen wird vom Willen des ganzen neuen Deutschlands, noch der unsäglichen Schwierigkeiten, der Anfeindung und der materiellen Nöte, unter denen das Pioniertum damals zu leiden hatte. Wer in den Jahren 1908 bis 1912, zumal in einer konservativen Hansestadt wie Bremen, vom Fliegen sprach und nun gar selbst die blaue Jacke anzog und Flugzeuge baute, der war in den Augen des braven Bürgers umwittert von einer Atmosphäre gruselig gemischt aus Abenteurertum, Zirkus, Irrenhaus und Friedhof.« Diese Herkunft aus einer ganz anders gearteten Tradition einerseits, und andererseits die harte Schule, welche in der Überwindung der vielen inneren und äußeren Schwierigkeiten gegeben war, formten den Mann mit den ungewöhnlichen Fähigkeiten. Focke ist gleichzeitig gelehrter Forscher und Praktiker. Diese Verbindung schuf seine seltene Befähigung, Theorie und Praxis fruchtbar zu vereinen, das Wesentliche in allen Problemen klar und zielsicher zu erkennen und in einfachster Weise in eine für die Praxis zweckmäßige Form zu übersetzen. Seine Mitarbeiter können immer wieder mit Bewunderung feststellen, wie es ihm bei fachlichen Besprechungen gelingt, durch einfache Anschauung Klarheit in schwierige Probleme zu bringen.

In seine Schulzeit fielen die ersten Anfänge des Fliegens. Diese weltgeschichtlichen Vorgänge haben auch Henrich Focke angeregt, sich mit flugtechnischen Dingen zu befassen, und dieser flugtechnische Gedankenkreis ließ ihn nicht mehr los; ihm war sein weiteres Leben gewidmet. Auf den Bau von Flugmodellen, zusammen mit seinem älteren Bruder Wilhelm Focke, folgte der Bau eines kleinen Gleitflugzeuges, mit dem Henrich Focke seine ersten kleinen Flüge in Bremen zustande brachte. In mühseliger Kleinarbeit wuchsen aus diesen ersten Anfängen allmählich die Aufgaben und auch die Erfolge.

Die bekanntesten von Henrich Focke herausgebrachten Konstruktionen sind die A 16, die Möwe, die Ente, der Sperber, der Bussard, der Falke, der Kiebitz und schließlich der Hubschrauber. Die meisten von ihnen bedeuteten zu ihrer Zeit in irgendeiner Richtung eine besondere Leistung. Schon bei der Konstruktion der Ente zeigte Focke, daß er auch Aufgaben, die vom normalen Weg stark abweichen, gewachsen ist. In noch höherem Maße zeigt sich dieses Streben nach ungewöhnlichem Schaffen in der Konstruktion des Hubschraubers, dessen erfolgreiche Flüge wohl in erster Linie dazu beigetragen haben, den Namen Fockes in der breiten Öffentlichkeit bekannt zu machen. Die aus dem Lizenzbau der Cierva C 30 gesammelten Erfahrungen an Drehflügelflugzeugen bildeten eine gewisse Vorschule für die schwierige Aufgabe. Dazu kamen Erfahrungen, die er in mühevoller, zäher Kleinarbeit aus eigenen Versuchen gewann, und umfangreiche und schwierige theoretische Überlegungen und Berechnungen. Er begnügte sich nicht damit, das Problem des Hubschraubers, seine Steuerbarkeit und Stabilität zu lösen, sondern ermöglichte darüber hinaus auch den automatischen Übergang vom Hub- zum Tragschrauber, was für die Betriebssicherheit von grundlegender Bedeutung war. Der Erfolg ist uns allen bekannt. Es entstand der erste von der Prüfstelle offiziell zugelassene Hubschrauber Focke 61, der mit einem Schlage alle bestehenden Hubschrauberweltrekorde in den Schatten stellte und durch seine Flüge sowohl in geschlossener Halle als auch mehrere tausend Kilometer über Land bei jeder Wetterlage, seine einwandfreie Steuerbarkeit bewies.

Im Weltkrieg war Focke zunächst bei einem Infanterie-Regiment eingesetzt, fand von 1915 bis 1917 als Fliegerfunker der Feldfliegerabteilung 15 im Osten und im An-

Digitized by Google

schluß daran bei der Feldfliegerabteilung A 248 im Westen Verwendung. Nach seinem Absturz in Serraincourt bei Reims wurde er — mit dem EK ausgezeichnet — bis zum Ende des Krieges als Ingenieur zur Flugzeugmeisterei Berlin-Adlershof versetzt. Hier fand er ein reiches Betätigungsfeld und manche Anregung, die für seine späteren Arbeiten richtunggebend gewesen ist.

Die großen Verdienste Fockes blieben nicht ohne Anerkennung. Im Jahre 1930 erhielt er einen ehrenvollen Ruf als Professor auf den Lehrstuhl für Luftfahrttechnik an der Danziger Hochschule. In Treue zu seiner Heimat lehnte er ihn ab und wurde darauf vom Bremer Senat zum Professor ernannt. In die Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung wurde er bei ihrer Gründung als ordentliches Mitglied berufen. Im Jahre 1938 verlieh ihm die Technische Hochschule Hannover die Würde eines Dr.-Ing. e. h. Im gleichen Jahre wurde er mit der Lilienthal-Denkmünze ausgezeichnet und im Jahre darauf zum Wehrwirtschaftsführer ernannt.

Die Leistungen und Erfolge dieses Mannes würden aber nur ein unvollständiges Bild von ihm geben, wenn man nicht auch seine persönlichen Eigenschaften betrachten würde, die letzten Endes ja neben seiner überragenden Begabung die Grundlage bilden, aus denen die großen Leistungen entstanden. Die wesentlichen Züge, welche die Erfolge Henrich Fockes begründen, sind seine unbestechliche Wahrheitsliebe und seine Treue zu seiner Arbeit. Bei aller Kühnheit seiner Ideen ist er aufs äußerste darauf bedacht, nicht mehr zu erwarten und zu versprechen, als er auf Grund seiner Kenntnis der technisch-physikalischen Möglichkeiten gewährleisten kann. Was er aber einmal als richtig und ausführbar erkannt und zur Verwirklichung sich vorgenommen hat, das führt er auch unter voller Hingabe seiner unermüdlichen Arbeitskraft durch. Diese Hingabe und dauernde Betreuung bezieht sich nicht nur auf den Entwurf oder einige ihm besonders gelegene Gebiete, sie erstreckt sich auf die ganze Arbeit vom Anfang bis zum Ende, von der gefaßten Idee bis zur Fertigstellung. Seine Fürsorge beschränkt sich nicht nur auf die technischen Dinge, sondern gilt mit gleicher Sorgfalt den organisatorischen Aufgaben und dem Wohl seiner Gefolgschaft. Dabei stellt er seine eigenen Leistungen gern bescheiden in den Hintergrund. Jede Aufbauschung ist ihm verhaßt. Seinem sich stets für den Erfolg einsetzenden Wesen entspricht es auch, daß er trotz seiner starken Inanspruchnahme durch seine eigenen Aufgaben seinen Rat und seine Hilfe bereitwillig auch allgemeineren Aufgaben zur Verfügung stellt, sei es durch seine Mitarbeit in der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung oder als Vorstandsmitglied der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen oder bei manchen anderen Gelegenheiten.

Wenn Henrich Focke zu seinem 50. Geburtstag die Glückwünsche seiner Freunde und Fachgenossen in besonders reichem Maße zufließen, so ist das nach einem so erfolgreichen Lebensabschnitt durchaus begründet. Möge es ihm noch lange vergönnt sein, mit gleichem Erfolg weiter zu schaffen. Vor allem aber möchten wir wünschen, daß der junge Nachwuchs, der das Glück hat, mit ihm zusammenarbeiten zu können, nicht nur Kenntnisse, sondern auch etwas von den inneren Triebkräften Fockes mit ins Leben nimmt.

A. Betz.

Digitized by Google

Das Zusammenwirken von Flugmotor und Luftschraube.

Von Wilh. Hoff, Berlin-Friedrichshagen.

Ausgehend von den für Luftschrauben und Flugmotoren üblichen Leistungsdarstellungen wird ein Verfahren angegeben, das das Zusammenwirken beider Hauptteile des Triebwerks aufzeigt. An Hand eines in verschiedener Richtung erweiterten Beispiels werden die Ergebnisse erläutert.

Gliederung.

Bezeichnungen.
A. Die von der Luftschraube benötigte Leistung.
B. Die vom Motor abgegebene Leistung.
1. Die Abhängigkeit der Motorleistung von der Drehzahl.
2. Die Abhängigkeit der Motorleistung von der Luftdichte.
3. Das Schaubild der Motorvolleistung.
C. Das Zusammenwirken von Motor und Luftschraube.
1. Allgemeine Zusammenhänge.
2. Schraube mit fester Blatteinstellung.
3. Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und Einhaltung des besten Wirkungsgrades der Schraube.
4. Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und Einhaltung gleicher Drehzahl.
5. Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und mit fallender Drehzahl bei ansteigender Fahrtgeschwindigkeit.
6. Weitere Behandlung der in den Abschnitten C 2, C 3, C 4, C 5 erläuterten Beispiele.
D. Zusammenfassung.
Schrifttum.

Bezeichnungen.

N	Vom Motor abgegebene und von der Luftschraube aufgenommene Leistung,
S	Luftschraubenschub,
R	Außenradius der Luftschraube,
n	Drehzahl des Motors hinter dem letzten Untersetzungsgetriebe gleich Drehzahl der Luftschraube,
ω	Winkelgeschwindigkeit der Luftschraube,
ϱ	Luftdichte,
v	Fahrtgeschwindigkeit der Luftschraube,
q	Fahrtstaudruck der Luftschraube,
η	Wirkungsgrad der Luftschraube (vgl. (A 4)),
η_m	mechanischer Wirkungsgrad des Motors (vgl. (B 2)),
λ	Fortschrittsgrad der Luftschraube (vgl. (A 3)),
k_l	Leistungsgrad (vgl. (A 1)),
k_s	Schubgrad (vgl. (A 2)),
c_l	Leistungsbelastungszahl (vgl. (A 5)),
c_s	Schubbelastungszahl (vgl. (A 6)),
c_1, c_2, c_3	Umrechnungsfaktoren des Motors (vgl. (C 2)),
$a_1, a_2,$ $b_1, b_2,$ $f_1 f_2$	Faktoren in den Gleichungen (C 10) bis (C 18).

Indizes: a gültig für die Ausgangsluftdichte ϱ_a,
z gültig für die Luftdichte ϱ_z,
$*$ gültig für ausgezeichnete Werte,
k gültig für Kurzleistung.

A. Die von der Luftschraube benötigte Leistung.

Von deutschen und ausländischen Versuchsanstalten ist das praktische Verhalten zahlreicher Luftschraubenreihen untersucht und mitgeteilt worden. Die Ergebnisse werden fast immer durch Auftragung des Leistungsgrades k_l, des Schubgrades k_s und des praktischen Wirkungsgrades η über dem Fortschrittsgrad λ, bzw. in gleichwertigen dimensionslosen Größen dargestellt.

Hierbei gelten die allgemeinen Beziehungen:

$$\text{Leistungsgrad:} \quad k_l = \frac{2N}{\pi \varrho \omega^3 R^5} = \frac{N}{4\pi^4 \varrho n^3 R^5} \quad \ldots \quad (A\,1)$$

$$\text{Schubgrad:} \quad k_s = \frac{2S}{\pi \varrho \omega^2 R^4} = \frac{S}{2\pi^3 \varrho n^2 R^4} \quad \ldots \quad (A\,2)$$

$$\text{Fortschrittsgrad:} \quad \lambda = \frac{v}{\omega R} = \frac{v}{2\pi n R} \quad \ldots \quad (A\,3)$$

$$\text{Wirkungsgrad:} \quad \eta = \frac{Sv}{N} = \lambda \frac{k_s}{k_l} \quad \ldots \quad (A\,4)$$

Während früher Versuchswerte für Schrauben mit starren Blättern begehrt wurden, werden heute, nachdem der Entwicklungsstand der Verstell-Luftschrauben wesentlich gehoben ist, Versuchsergebnisse von Schrauben mit veränderlicher Blatteinstellung β verlangt.

Bild 1, 2 und 3 zeigen für das Beispiel einer Vierblattschraube den Verlauf der Werte k_l, k_s und η bei verschiedenen Blatteinstellungen β über dem Fortschrittsgrad λ als Veränderlicher. Die Abbildungen entsprechen den Abb. 43, 42 und 44 in den »Systematischen Windkanalabmessungen an einer Modell-Luftschraubenserie« von B. Dirksen [1].

In Bild 1 und 2 ist die Verbindungslinie der besten Wirkungsgrade eingetragen, sie entspricht der einhüllenden Kurve der Wirkungsgrade η in Bild 3.

Die Kurven für den Blatteinstellwinkel $\beta = 0$ soll bei der im Abschnitt C 2 behandelten Schraube mit fester Blatteinstellung entsprechen.

Mitunter sind an Stelle des Leistungsgrades k_l und des Schubgrades k_s die Leistungsbelastungszahl c_l und Schubbelastungszahl c_s gegeben. In bekannter Weise erfolgt die Umrechnung nach den Beziehungen:

$$k_l = \frac{2N}{\pi \varrho \omega^3 R^5} = \frac{2N\lambda^3}{\pi \varrho v^3 R^2} = \lambda^3 c_l \quad \ldots \quad (A\,5)$$

$$k_s = \frac{2S}{\pi \varrho \omega^2 R^4} = \frac{2S\lambda^2}{\pi \varrho v^2 R^2} = \lambda^2 c_s \quad \ldots \quad (A\,6)$$

B. Die vom Motor abgegebene Leistung.

Die Güte des Triebwerks ist durch die vom Antriebsmotor an die Luftschraube abgegebene Leistung bedingt, die von dem Drehmoment und der Drehzahl der Schraubenwelle, sowie von der Luftdichte, in welcher das Triebwerk arbeitet, abhängig ist.

Zur theoretischen Leistungsermittlung eines Flugmotors sind viele Einflüsse zu beachten, die eine einfache analytische Beziehung mit den Hauptabhängigen Drehmoment, Drehzahl und Luftdichte nicht gestatten. Das zuverlässigere und meist übliche Verfahren ist, die Leistung im praktischen Bremsversuch festzustellen.

1. Die Abhängigkeit der Motorleistung von der Drehzahl.

Neben anderen, dem Nachweis der Betriebstüchtigkeit dienenden Bremsläufen werden für die Musterprüfung eines Flugmotors innerhalb eines genügend weiten Drehzahl-

Digitized by Google

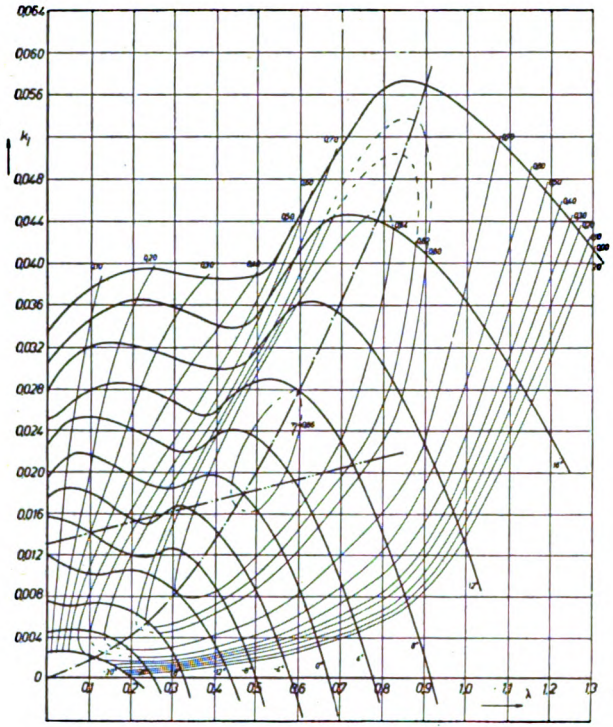


Bild 1.

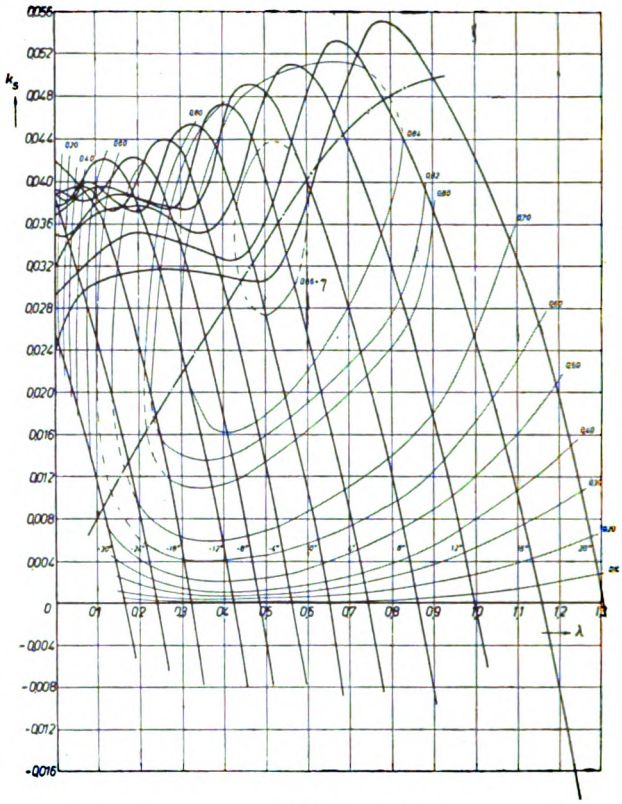


Bild 2.

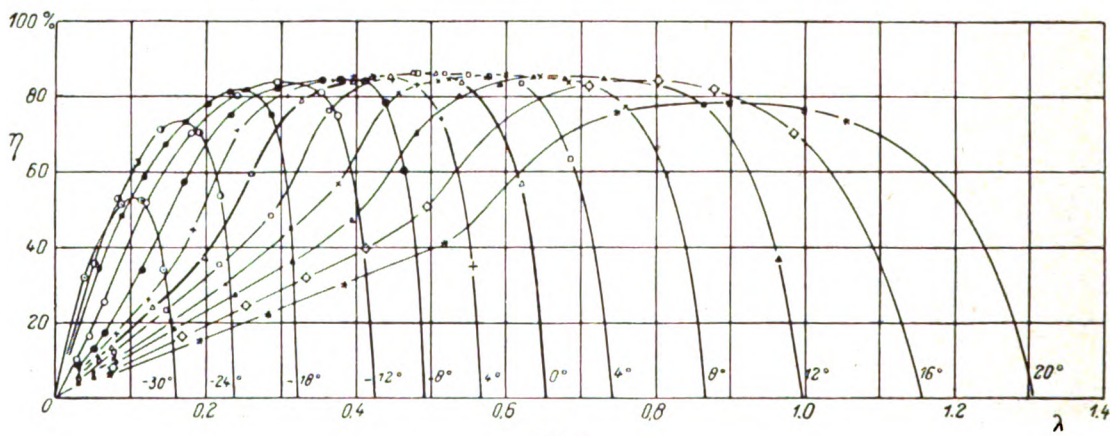


Bild 3.

bereiches die Volleistungen bei voll geöffneter Drossel und etwa angestellten Ladern, sowie Drosselleistungen bei verschieden geschlossener Drossel in ihrer Abhängigkeit von der Drehzahl aufgenommen.

Für die in dieser Arbeit aufgeworfenen Fragen interessieren in erster Linie die Volleistungsschaulinien, meist von der Drehzahl der erhöhten Kurzleistung ausgehend bis herab zu etwa 70% dieser Drehzahl aufgenommen.

Bild 4 zeigt das Beispiel eines neueren Flugmotors [2]. Für die Bodenluftdichte sind die Kurven der erhöhten Kurzleistung und der Kurzleistung sowie für die Volldruckhöhe (2 km) (bzw. die Ausgangsluftdichte $\varrho_a = 0{,}1025$ kg s^2/m^4) und für die Luftdichten in 4 km und 6 km Höhe die entsprechenden Leistungskurven zur Darstellung gebracht.

Als Bezugsleistung wurde die Kurzleistung N_{ak} gewählt, die während des Anstiegs betrieben werden darf. Die dieser Leistung zugehörige Drehzahl ist n_{ak}.

Der Verlauf der praktischen Kurven zeigt, daß das Drehmoment, insbesondere bei höheren Drehzahlen, nicht gleichbleibend verläuft, sondern stark von der Drehzahl abhängig ist.

Wenn vom Flugzeug kurzfristig höchste Flugleistungen verlangt werden, ist für das Zusammenwirken von Motor mit Luftschraube stets von der Kurve der erhöhten Kurzleistung auszugehen.

In erster Annäherung, d. h. für konstantes Drehmoment, verläuft die Leistungskurve parallel einer durch den Koordinatenursprung gelegten Geraden, die der Kurve der inneren Leistung entspricht. Der Leistungsunterschied zwischen dieser Geraden und der Volleistungskurve ergibt die inneren Motorverluste, deren Aufteilung hier nicht erörtert zu werden braucht, die aber annähernd als von der Drehzahl unabhängig angenommen werden können. Unter diesen Voraussetzungen besteht die Beziehung für die Ausgangsluftdichte:

$$\frac{N_a}{N_{ak}} = \frac{1}{\eta_m}\left[\frac{n}{n_{ak}} - (1-\eta_m)\right] = \frac{1}{\eta_m}\cdot\frac{n}{n_{ak}} - \left(\frac{1}{\eta_m} - 1\right) \quad \text{(B 1)}$$

Hierin ist der mechanische Wirkungsgrad des Motors η_m bestimmt durch:

$$\eta_m = \frac{N_{ak}}{N_{aik}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B 2)}$$

Digitized by Google

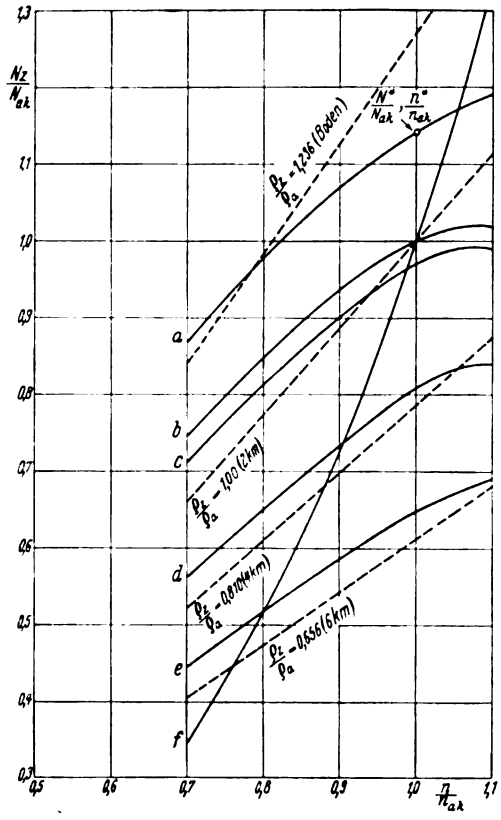


Bild 4. Beispiel eines Flugmotors.

a Erhöhte Kurzleistung am Boden
b Volldruckhöhe (2 km)
c Kurzleistung am Boden
d Höhe 4 km
e Höhe 6 km
f Drosselkurve.

2. Die Abhängigkeit der Motorleistung von der Luftdichte.

In recht guter Annäherung können die innere Leistung eines Flugmotors der Luftdichte verhältig und die Verlustleistung als von der Luftdichte unabhängig angenommen werden. Es besteht dann die der Gleichung (B 1) im Aufbau ähnliche Beziehung:

$$\frac{N_z}{N_a} = \frac{1}{\eta_m}\left[\frac{\varrho_z}{\varrho_a} - (1-\eta_m)\right] = \frac{1}{\eta_m}\frac{\varrho_z}{\varrho_a} - \left(\frac{1}{\eta_m} - 1\right) \quad \text{(B 3)}$$

In etwas abgewandelter Gestalt empfehlen sowohl Gagg und Farrar als auch die Franzosen diese Beziehung, indem jene den Erfahrungswert $\eta_m = 0{,}88$ und diese den Wert $\eta_m = 0{,}90$ einsetzen. Der Festwert $\eta_m = 0{,}88$ deckt sich mit Versuchswerten recht gut und kann deshalb für Umrechnungen in den meisten Fällen, wo das Verhalten der Motoren in verschiedenen Luftdichten nicht auf dem Prüfstand untersucht worden ist, benutzt werden:

$$\frac{N_z}{N_a} = 1{,}13\left(\frac{\varrho_z}{\varrho_a}\right) - 0{,}13 \quad \text{(B 4)}$$

3. Das Schaubild der Motorenvolleistung.

Die Volleistung bei verschiedenen Drehzahlen und veränderten Luftdichten ist für die Flugleistungsbestimmung des Flugzeugs genügend genau nur durch eingehende praktische Versuche zu gewinnen. Wo deren Ergebnisse nicht vorliegen, müssen entweder für eine bestimmte Ausgangsluftdichte ϱ_a am Prüfstand ermittelte Volleistungskurven für andere Luftdichten ϱ_z nach der Beziehung (B 3) bzw. (B 4) umgerechnet werden, was meist befriedigt, oder man vereint die Beziehungen (B 1) und (B 3) zu:

$$\frac{N_a}{N_{ak}}\frac{N_z}{N_a} = \frac{N_z}{N_{ak}} = \frac{1}{\eta_m^2}\left[\frac{n}{n_{ak}} - (1-\eta_m)\right]\left[\frac{\varrho_z}{\varrho_a} - (1-\eta_m)\right] \quad \text{(B 5)}$$

wobei wie bei der Beziehung (B 1) beachtet werden muß, daß die Gleichung nur unter den gemachten Annahmen gilt.

Wird der durch Versuche belegte Wert $\eta_m = 0{,}88$ eingesetzt, so entsteht die Beziehung:

$$\frac{N_z}{N_{ak}} = \left[1{,}13\left(\frac{n}{n_{ak}}\right) - 0{,}13\right]\left[1{,}13\left(\frac{\varrho_z}{\varrho_a}\right) - 0{,}13\right] \quad \text{(B 6)}$$

In Bild 4 wurde der Verlauf von $\frac{N_z}{N_{ak}}$ für verschiedene Luftdichtenverhältnisse $\left(\frac{\varrho_z}{\varrho_a}\right)$ über der Veränderlichen $\left(\frac{n}{n_{ak}}\right)$ aufgetragen.

Der Vergleich mit den Versuchskurven zeigt die Unterschiede zwischen Versuchsergebnis und vereinfachter Annahme, die durch das erhöhte Drehmoment bei kleineren Drehzahlen und das Abfallen des Drehmoments bei höchsten Drehzahlen zu erklären sind.

Die in Bild 4 dargestellten Ausgangskurven sind für die weitere Betrachtung nur mittelbar brauchbar.

Da es zu der Darstellung des Leistungsbedarfs der Luftschrauben wie dies im Abschnitt A gezeigt worden ist, allgemein üblich ist, den Leistungsgrad k_l, vgl. (A 1), zu benutzen, so soll dieser auch den Leistungsschaubildern des Motors zugrunde gelegt werden.

In der Ausgangsluftdichte ϱ_a gilt für die Kurzleistung bei der Drehzahl n_{ak}

$$k_{lak} = \frac{N_{ak}}{4\pi^4 \varrho_a n_{ak}^3 R^5} \quad \text{(B 7)}$$

und in der Luftdichte ϱ_z entsprechend:

$$k_{lz} = \frac{N_z}{4\pi^4 \varrho_z n^3 R^5} \quad \text{(B 8)}$$

Ihr Verhältnis zueinander ist demnach:

$$\frac{k_{lz}}{k_{lak}} = \left(\frac{N_z}{N_{ak}}\right)\left(\frac{n_{ak}}{n}\right)^3\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_z}\right) \text{ bzw. } \frac{k_{lak}}{k_{lz}} = \left(\frac{N_{ak}}{N_z}\right)\left(\frac{n}{n_{ak}}\right)^3\left(\frac{\varrho_z}{\varrho_a}\right) \quad \text{(B 9)}$$

Die Unabhängigkeit von den Luftschraubenabmessungen macht diese Beziehung (B 9) für die Darstellung der Motorleistung besonders geeignet.

Die Verhältnisse $\left(\frac{N_z}{N_{ak}}\right)$, $\left(\frac{n}{n_{ak}}\right)$ und $\left(\frac{\varrho_z}{\varrho_a}\right)$ sind den Kurven in Bild 4 zu entnehmen, so daß nach entsprechender Umrechnung die Kurven $\left(\frac{k_{lak}}{k_{lz}}\right)$ gemäß Beziehung (B 9) wiedergegeben werden können. Dies ist in Bild 5 geschehen.

In der Darstellung in Bild 5 ist auffällig, daß alle Kurven $\left(\frac{k_{lak}}{k_{lz}}\right)$ mit Ausnahme der Kurve der Kurzleistung am Boden dicht beieinander liegen. Die Meßkurven für verschiedene Höhen zeigen untereinander kleine Unterschiede, die auf die Einwirkung des zweiten Gliedes in der Formel (B 4) zurückzuführen sind. Die errechneten Kurven zeigen, was zu erwarten war, einen abweichenden Verlauf, auch sie besitzen untereinander nur kleine Unterschiede für die verschiedenen Höhen.

Die Darstellungen $\left(\frac{k_{lak}}{k_{lz}}\right)$ in Bild 5 sind dazu geeignet, wie in Abschnitt C gezeigt werden wird, von der Motorseite her als Unterlagen zum Zusammenwirken mit der Luftschraube zu dienen. Der Flugzeugkonstrukteur, der beide Hauptteile des Triebwerks zu koppeln hat, würde seine Arbeit wesentlich erleichtert finden, wenn er solche Kurven stets zur Hand hätte.

C. Das Zusammenwirken von Motor und Luftschraube.

1. Allgemeine Zusammenhänge.

Das Triebwerk soll dem Flugzeug die verlangten Flugleistungen sichern. Unter diesen wird meist einer bestimmten, z. B. der Höchstgeschwindigkeit im Waagerechtflug, vor anderen der Vorzug gegeben. Für diese bevorzugte Flugleistung muß in erster Linie die Luftschraubenwahl getroffen werden. In nachstehender Betrachtung sind alle dieser

Digitized by Google

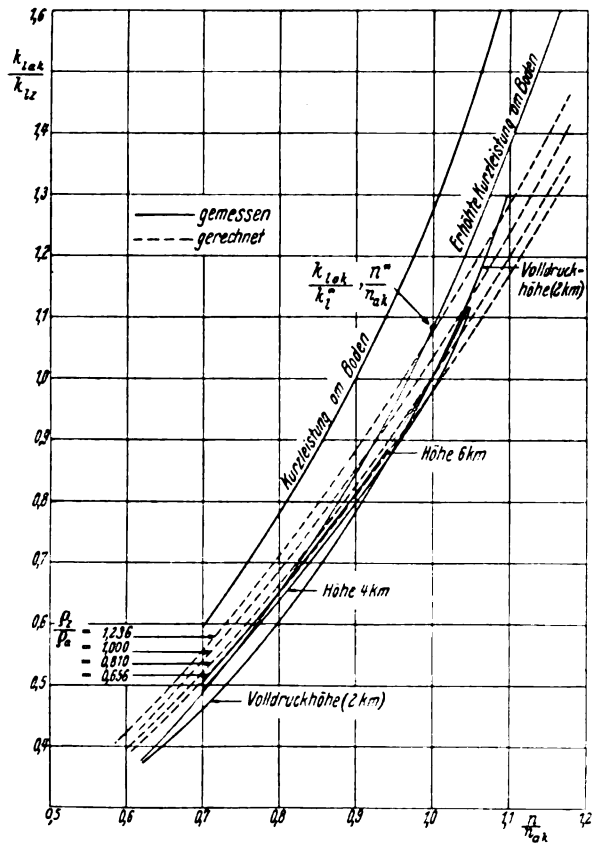


Bild 5. Beispiel eines Flugmotors umgerechnet.

bevorzugten Leistung zugehörigen Werte durch den Stern * gekennzeichnet.

Als Beispiel sind in Bild 4 und 5 auf den zur erhöhten Kurzleistung am Boden $\varrho_0 = \varrho^*$ gehörigen Kurven die Leistung N^* und die zugehörige Drehzahl n^* hervorgehoben. Diese beiden Werte treten in der weiteren Betrachtung an Stelle der Kurzleistung N_{ak} bei der Drehzahl n_k, wenn nicht, was oft geschehen wird, N^* und N_{ak} gleichbedeutend sind.

Das Verhältnis der Leistungsgrade nach Gleichung (B 9) nimmt nunmehr die Form an:

$$\frac{k_{lz}}{k_l^*} = \frac{N_z}{N^*}\left(\frac{n^*}{n}\right)^3\left(\frac{\varrho^*}{\varrho_z}\right) = \frac{N_z}{N_{ak}}\cdot\frac{N_{ak}}{N^*}\left(\frac{n_{ak}}{n}\right)^3\left(\frac{n^*}{n_{ak}}\right)^3\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_z}\right)\left(\frac{\varrho^*}{\varrho_a}\right)$$
$$= \left(\frac{c_1 N_z}{N_{ak}}\right)\left(\frac{n_{ak}}{c_2 n}\right)^3\left(\frac{\varrho_a}{c_3\varrho_z}\right) = \frac{c_1}{c_2^3\cdot c_3}\cdot\frac{k_{lz}}{k_{lak}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C\,1)$$

Die Umrechnungsfaktoren sind bestimmt durch:

$$c_1 = \left(\frac{N_{ak}}{N^*}\right); \quad c_2 = \left(\frac{n_{ak}}{n^*}\right) \text{ und } c_3 = \left(\frac{\varrho_a}{\varrho^*}\right) \quad . \quad . \quad (C\,2)$$

Mit dem Faktor $\left(\frac{c_1}{c_2^3\cdot c_3}\right)$ und den Werten $\left(\frac{k_{lak}}{k_{lz}}\right)$ aus dem Bild 5 können die für die weitere Rechnung benötigten Werte $\frac{k_{lz}}{k_l^*}$ und die zugehörigen Drehzahlverhältnisse $\left(\frac{n}{n^*}\right)$ abgegriffen, bzw. berechnet werden. Hierbei sind zu setzen:

$$\frac{N_z}{N^*} = c_1\frac{N_z}{N_{ak}} \text{ und } \frac{n}{n^*} = c_2\frac{n}{n_{ak}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C\,3)$$

Es ist nicht erforderlich, mit den jeweils gewählten Faktoren c_1, c_2 und c_3 eine Darstellung $\frac{k_{lz}}{k_l^*} = f\left(\frac{n}{n^*}, \frac{\varrho_z}{\varrho_a}\right)$ aufzuzeichnen. Sie ergäben in geänderten Ordinaten- und Abszissenmaßstäben dasselbe Bild wie die Darstellungen in Bild 5.

Mit den bevorzugten Motorenwerten N^* und n^* in der Luftdichte ϱ^* seien bei der Luftschraube die ausgezeichneten Werte k_l^*, k_s^*, λ^* und η^* gekoppelt. Die anderen Luftschraubenwerte folgen dann aus den Beziehungen (A 1), (A 2) und (A 3) in den Verhältniszahlen:

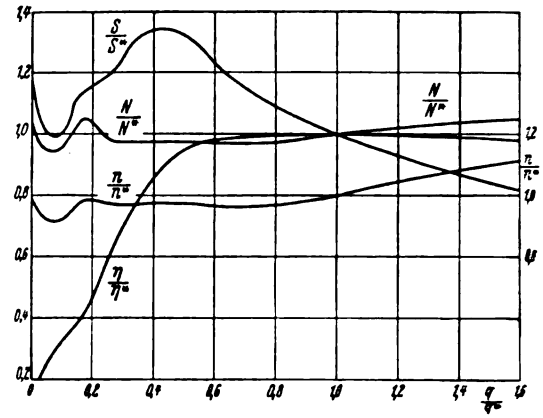


Bild 6. Schraubenblätter fest eingestellt.

Aufgenommene Leistung: $$\left(\frac{N_z}{N^*}\right) = \frac{k_{lz}}{k_l^*}\cdot\left(\frac{n}{n^*}\right)^3\cdot\frac{\varrho_z}{\varrho^*} \quad . \quad . \quad (C\,4)$$

Aufgenommener Schub: $$\left(\frac{S_z}{S^*}\right) = \frac{k_{sz}}{k_s^*}\cdot\left(\frac{n}{n^*}\right)^2\cdot\frac{\varrho_z}{\varrho^*} \quad . \quad . \quad (C\,5)$$

Fahrtgeschwindigkeit: $$\frac{v}{v^*} = \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\cdot\left(\frac{n}{n^*}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (C\,6)$$

Fahrtstaudruck: $$\frac{q}{q^*} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C\,7)$$

In den seltenen Fällen, wo an Stelle des Leistungsgrades k_l und des Schubgrades k_s die Leistungsbelastungszahl c_l und die Schubbelastungszahl c_s gegeben sind, entstehen aus (B 5) und (B 6) nach Umrechnung die Beziehungen:

$$\frac{k_{lz}}{k_l^*} = \left(\frac{\lambda_z}{\lambda^*}\right)^3\frac{c_{lz}}{c_l^*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C\,8)$$

und

$$\frac{k_{sz}}{k_s^*} = \left(\frac{\lambda_z}{\lambda^*}\right)^2\frac{c_{sz}}{c_s^*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C\,9)$$

2. Schraube mit fester Blatteinstellung.

Für das in Bild 1, 2 und 3 gezeigte Luftschraubenbeispiel und das in Bild 4 gegebene Motorenbeispiel seien die Schraubenblätter mit $\beta = 0^0$ fest eingestellt gedacht. Die für k_l, k_s und η erzielten Werte können unmittelbar über λ abgelesen werden.

Als bevorzugte Werte werden für die Luftschrauben die Beizahlen $k_l^* = 0{,}0180$, $k_s^* = 0{,}0323$, $\lambda^* = 0{,}480$ eingesetzt, die dem besten Wirkungsgrad $\eta^* = 0{,}862$ zugehören. Beim Motor wird mit der erhöhten Kurzleistung am Boden gerechnet. Das Dichteverhältnis wird $\varrho_z/\varrho^* = 1{,}00$. Die Umrechnungsfaktoren werden mit $c_1 = 1/1{,}14 = 0{,}877$, $c_2 = 1{,}00$ und $c_3 = 0{,}81$ für den Motor gewählt.

Die Durchrechnung ist in Zahlentafel 1 wiedergegeben. In Bild 6 sind die Verhältnisse $\left(\frac{N_z}{N^*}\right)$, $\left(\frac{S_z}{S^*}\right)$ und $\left(\frac{\eta}{\eta^*}\right)$ über $\left(\frac{q_z}{q^*}\right)$ aufgetragen. Das Ergebnis zeigt, daß die Motorenleistung mit geringen Schwankungen über den ganzen $\left(\frac{q_z}{q^*}\right)$-Bereich fast gleichmäßig verläuft. Da die Drehzahlen des Motors etwa den Leistungskurven folgen, wurde ihre Aufzeichnung um einen konstanten Betrag darunter gezeichnet. Die Schubkurve zeigt nach einem anfänglichen starken Abfall einen Anstieg bis zum Höchstwert bei etwa $\left(\frac{q_z}{q^*}\right) = 0{,}45$ um dann schwach gekrümmt mit dem Staudruck abzunehmen. Die Wirkungsgradkurve steigt zunächst steil an, erreicht schnell einen hohen Wert, der allmählich weiter steigt, um zuletzt wieder abzufallen.

Die Schraube dieses Beispiels zeigt sehr günstiges Verhalten. Sie besitzt insbesondere die Eigenschaft nahezu gleicher Drehzahl über den ganzen Bereich des Staudrucks, ein Verhalten, das von jeher für Luftschrauben als erwünscht

Digitized by Google

galt, das aber erst erklärt werden konnte, als die Abreißerscheinungen bei kleinen Fortschrittsgraden versuchsmäßig festgestellt worden waren.

3. Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und Einhaltung des besten Schraubenwirkungsgrades.

In Bild 1 und 2 sind außer den k_l und k_s Kurven für verschiedene Blatteinstellungen β auch die erreichten Wirkungsgrade und als besondere Kurve die Verbindungslinie ihrer Bestwerte eingetragen.

Der Verlauf dieser Kurve folgt etwa dem Gesetz:

$$k_l = a_1 \lambda^2 - b_1 \lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C 10)}$$

bzw. bezogen auf die ausgezeichneten Werte k_l^* und η^*

$$\frac{k_l}{k_l^*} = a_1^* \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 - b_1^* \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^3 \quad \ldots\ldots \text{(C 11)}$$

Es ist sehr naheliegend, den Verlauf dieser Kurve für eine Verstell-Luftschraube wählen zu wollen.

Andererseits wird nach (B 9) sinngemäß für das konstante Verhältnis $\frac{\varrho^*}{\varrho_z} = f_1$

$$\frac{k_{lz}}{k_l^*} = \left(\frac{N_z}{N^*}\right)\left(\frac{n^*}{n}\right)^3 \left(\frac{\varrho^*}{\varrho_z}\right) = \left(\frac{N_z}{N^*}\right)\left(\frac{n^*}{n}\right)^3 f_1 \quad \ldots \text{(C 12)}$$

und nach (B 6) mit Einführung der weiteren Koeffizienten a_2, b_2 und mit der konstanten Größe $f_2 = 1{,}13 \frac{\varrho_z}{\varrho^*} - 0{,}13$

$$\frac{N}{N^*} = \left[a_2\left(\frac{n}{n^*}\right) - b_2\right] f_2 \quad \ldots\ldots \text{(C 13)}$$

Nach Verbindung von (C 12) und (C 13) wird erhalten:

$$\frac{k_{lz}}{k_l^*} = a_2 f_1 f_2 \left(\frac{n^*}{n}\right)^2 - b_2 f_1 f_2 \left(\frac{n^*}{n}\right)^3 \quad \ldots \text{(C 14)}$$

Wird endlich aus (C 6) eingeführt:

$$\frac{n^*}{n} = \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{v^*}{v}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C 15)}$$

so wird hiermit das Verhältnis der Leistungsgrade:

$$\frac{k_{lz}}{k_l^*} = a_2 f_1 f_2 \left(\frac{v^*}{v}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 - b_2 f_1 f_2 \left(\frac{v^*}{v}\right)^3 \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^3 \quad \ldots \text{(C 16)}$$

Werden die Beziehungen (C 11) und (C 16) bei Gleichsetzung von $k_l = k_{lz}$ miteinander verglichen, so ergibt sich, daß die Bedingung (C 11) nur dann bestehen kann, wenn gleichzeitig das Geschwindigkeitsverhältnis $\left(\frac{v}{v^*}\right)$ eine Konstante ist. Somit werden die Festwerte erhalten:

$$a_1^* = a_2 f_1 f_2 \left(\frac{v^*}{v}\right)^2 \text{ und } b_1^* = b_2 f_1 f_2 \left(\frac{v^*}{v}\right)^3 \quad \ldots \text{(C 17)}$$

Aus diesem Ergebnis ist nun zu folgern, daß eine derartige Verstellschraube ihre Aufgabe, für verschiedene Fahrtgeschwindigkeiten einen günstigen Verlauf der Leistungs- und der Schubkurve zu bewirken, nicht zu erfüllen vermag.

Werden für eine Verstellschraubenbauart die Drehzahl und die Leistung festgehalten, der Luftschraubenradius dagegen veränderlich gedacht, so ergibt sich das Gesetz:

$$\frac{k_l}{k_l^*} = \left(\frac{R^*}{R}\right)^5 \left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right); \text{ bzw. } \frac{R^*}{R} = \left(\frac{k_l}{k_l^*}\right)^{1/5} \left(\frac{\varrho}{\varrho^*}\right)^{1/5} \quad \ldots \text{(C 18)}$$

An Stelle der Beziehungen (C 5), (C 6) und (C 7) treten nunmehr die Gleichungen für die Verhältniszahlen

Aufgenommener Schub: $\left(\frac{S_z}{S^*}\right) = \frac{k_{sz}}{k_s^*} \left(\frac{R}{R^*}\right)^4 \frac{\varrho_z}{\varrho^*} \quad \ldots \text{(C 19)}$

Fahrtgeschwindigkeit: $\frac{v^*}{v} = \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{R}{R^*}\right) \quad \ldots\ldots \text{(C 20)}$

Fahrtstaudruck: $\frac{q^*}{q} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C 21)}$

In Bild 7 sind für dasselbe Beispiel wie in Abschnitt C 2 über dem Staudruckverhältnis $\frac{q}{q^*}$ die Verhältnisse $\left(\frac{S_z}{S^*}\right)$, $\left(\frac{R^*}{R}\right)$, $\frac{\eta}{\eta^*}$ für das als konstant angenommene Verhältnis $\left(\frac{N_z}{N^*}\right) = 1{,}00$ aufgetragen. Die durch beträchtliche Erhöhung des Schraubenradius bewirkte Schubvermehrung bei kleinen Staudruckverhältnissen ist zu erkennen.

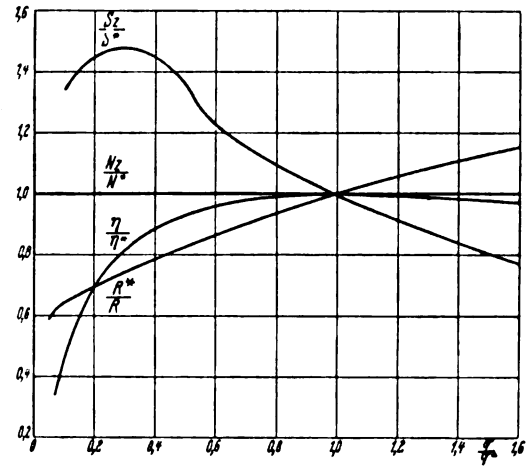


Bild 7. Schraubenblätter mit veränderter Einstellung und bestem Wirkungsgrad bei Einhaltung gleicher Drehzahl.

Damit wäre eine Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und Einhaltung des besten Schraubenwirkungsgrads in allen Stellungen gefunden. Ihre technische Verwirklichung ist jedoch keineswegs anzustreben, dafür sind die erzielbaren Vorteile zu gering und die in Kauf zu nehmenden Nachteile zu groß. Die Betrachtung hat nur theoretisches Interesse.

4. Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und Einhaltung gleicher Drehzahl.

Die am meisten verwendete Verstellschraube ist diejenige mit gleicher Drehzahl und damit auch gleicher Leistungsaufnahme. Der Leistungsgrad k_l wird konstant gehalten. Damit wird auch

$$\frac{k_l}{k_l^*} = 1 = \text{const.}$$

Für das schon in den Abschnitten C 2 und C 3 gewählte Beispiel, d. h. für die bevorzugten Werte der Luftschraube

$k_l^* = 0{,}0180$; $k_s^* = 0{,}0323$; $\lambda^* = 0{,}480$; $\eta^* = 0{,}862$

und für die Werte der erhöhten Kurzleistung des Motors

$c_1 = \left(\frac{N_{ak}}{N^*}\right) = 0{,}877$; $c_2 = \left(\frac{n_{ak}}{n^*}\right) = 1{,}00$ und $c_3 = \frac{\varrho_a}{\varrho^*} = 0{,}81$

wurde in Zahlentafel 2 die Durchrechnung durchgeführt. Die Rechnung ist gegenüber der in Zahlentafel 1 gezeigten wesentlich vereinfacht.

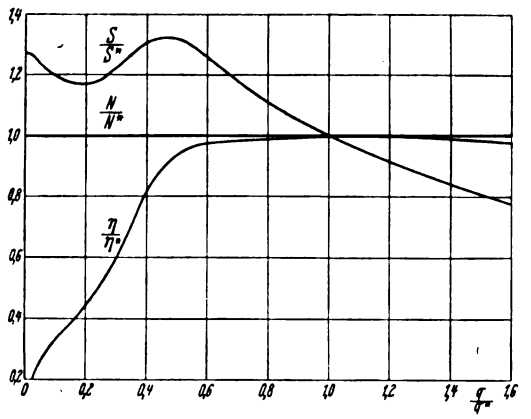


Bild 8. Schraubenblätter mit veränderter Einstellung und Einhaltung gleicher Drehzahl.

Digitized by Google

Zahlentafel 1.

Luftschraube $\beta = 0° = \text{const}$								Motor $\frac{\varrho_z}{\varrho^*} = 1{,}00$			$c_1 = \frac{1}{1{,}14} = 0{,}877$		Ergebnis (vgl. Bild 6)			
$\lambda^* = 0{,}480$		$k_l^* = 0{,}0180$		$k_x^* = 0{,}0323$		$\eta^* = 0{,}862$		$\frac{c_1}{c_2^3 \cdot c_3} = \frac{0{,}877}{1 \cdot 0{,}81} = 1{,}082$			$c_2 = \frac{1}{1{,}00} = 1{,}00$					
											$c_3 = \frac{1}{1{,}236} = 0{,}81$					
λ	$\frac{\lambda}{\lambda^*}$	k_l	$\frac{k_l}{k_l^*}$	k_x	$\frac{k_x}{k_x^*}$	η	$\frac{\eta}{\eta^*}$	$\frac{k_{lak}}{k_{lz}}$	$\frac{n}{n_k}$	$\frac{n}{n^*}$	$\left(\frac{n}{n^*}\right)^2$	$\left(\frac{n}{n^*}\right)^3$	$\frac{N_z}{N^*}$	$\frac{S_z}{S^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{q}{q^*}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0,00	0,000	0,0195	1,083	0,0390	1,207	0,000	0,000	0,999	0,986	0,986	0,972	0,959	1,038	1,170	0,000	
0,05	0,1041	0,0215	1,194	0,0395	1,190	0,092	0,107	0,906	0,928	0,928	0,861	0,799	0,955	1,025	0,097	0,0094
0,10	0,2082	0,0215	1,194	0,0395	1,190	0,184	0,214	0,906	0,928	0,928	0,861	0,799	0,955	1,025	0,193	0,0370
0,15	0,3123	0,0210	1,223	0,0380	1,177	0,271	0,315	0,884	0,920	0,920	0,846	0,779	0,954	0,995	0,308	0,0975
0,20	0,4170	0,0195	1,083	0,0375	1,162	0,341	0,396	0,999	0,986	0,986	0,972	0,959	1,040	1,130	0,407	0,166
0,25	0,5210	0,0190	1,056	0,0405	1,255	0,533	0,619	1,025	0,976	0,976	0,953	0,930	0,982	1,195	0,508	0 259
0,30	0,6250	0,0190	1,056	0,0450	1,394	0,711	0,825	1,025	0,976	0,976	0,953	0,930	0,982	1,330	0,610	0,374
0,35	0,729	0,0193	1,073	0,0455	1,408	0,825	0,957	1,008	0,970	0,970	0,941	0,913	0,980	1,325	0,707	0,509
0,40	0,833	0,0197	1,094	0,0416	1,288	0,845	0,982	0,988	0,962	0,962	0,925	0,890	0,974	1,190	0,801	0,640
0,45	0,937	0,0190	1,056	0,0360	1,116	0,853	0,990	1,025	0,976	0,976	0,953	0,930	0,982	1,105	0,914	0,835
0,48	1,000	0,0180	1,000	0,0323	1,000	0,862	1,000	1,082	1,000	1,000	1,000	1,000	1,00	1,000	1,000	1,000
0,50	1,041	0,0163	0,906	0,0280	0,866	0,858	0,995	1,193	1,040	1,040	1,082	1,125	1,02	0,936	1,082	1,175
0,525	1,093	0,0142	0,790	0,0231	0,715	0,854	0,990	1,365	1,095	1,095	1,199	1,313	1,038	0,857	1,195	1,430
0,55	1,146	0,0135	0,750	0,0208	0,643	0,850	0,987	1,444	1,120	1,120	1,254	1,405	1,055	0,805	1,283	1,650
0,575	1,195	0,0115	0,638	0,0160	0,495	0,800	0,930	1,695	1,190	1,190	1,416	1,686	1,075	0,705	1,425	2,040
0,60	1,250	0,0090	0,500	0,0090	0,278	0,600	0,696	2,16								
0,65	1,255	0,0035	0,1945	0,0000	0,000	0,000	0,000	5,56								
0,70	1,458	−0,0040	−0,2225	−0,0120	−0,371											

Zu Spalte 9: $\frac{k_{lak}}{k_{lz}} = \frac{c_1}{c_2^3 \cdot c_3} \cdot \frac{k_l^*}{k_l}$

zu Spalte 10: zu entnehmen aus Bild 5

zu Spalte 11: $\frac{n}{n^*} = c_2 \frac{n}{n_k}$

zu Spalte 14: $\frac{N_z}{N^*} = \frac{k_{lz}}{k_l^*} \left(\frac{n}{n^*}\right)^3 \left(\frac{\varrho_z}{\varrho^*}\right)$

zu Spalte 15: $\frac{S_z}{S^*} = \frac{k_{sz}}{k_s^*} \left(\frac{n}{n^*}\right)^2 \left(\frac{\varrho_z}{\varrho^*}\right)$

zu Spalte 16: $\frac{v}{v^*} = \left(\frac{\lambda z}{\lambda^*}\right) \left(\frac{n}{n^*}\right)$

zu Spalte 17: $\frac{q}{q^*} = \left(\frac{v}{v^*}\right)^2$

Zahlentafel 2.

Luftschraube $k_l = 0{,}018$ const								Motor $\frac{\varrho_z}{\varrho^*} = 1{,}00$			$c_1 = \frac{1}{1{,}14} = 0{,}877$		Ergebnis (vgl. Bild 8)			
$\lambda^* = 0{,}480$		$k_l^* = 0{,}0180$		$k_x^* = 0{,}0323$		$\eta^* = 0{,}862$		$\frac{c_1}{c_2^3 \cdot c_3} = \frac{0{,}877}{1{,}00 \cdot 0{,}81} = 1{,}082$			$c_2 = \frac{1}{1{,}00} = 1{,}00$					
											$c_3 = \frac{1}{1{,}236} = 0{,}81$					
λ	$\frac{\lambda}{\lambda^*}$	k_l	$\frac{k_l}{k_l^*}$	k_x	$\frac{k_x}{k_x^*}$	η	$\frac{\eta}{\eta^*}$	$\frac{k_{lak}}{k_{lz}}$	$\frac{n}{n_k}$	$\frac{n}{n^*}$	$\left(\frac{n}{n^*}\right)^2$	$\left(\frac{n}{n^*}\right)^3$	$\frac{N_z}{N^*}$	$\frac{S_z}{S^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{q}{q^*}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0,00						0,000										
0,10	0,2082			0,0396	1,227	0,220	0,256							1,227	0,2082	0,044
0,20	0,417			0,0378	1,170	0,420	0,407							1,170	0,417	0,174
0,30	0,625			0,0420	1,300	0,700	0,812							1,300	0,625	0,391
0,40	0,833			0,0382	1,183	0,850	0,987							1,183	0,833	0,692
0,50	1,041			0,0310	0,960	0,861	0,999							0,960	1,041	1,090
0.60	1,25			0,0255	0,790	0,850	0,987							0,790	1,25	1,565
0.70	1,458			0,0208	0,644	0,810	0,942							0,664	1,458	2,13
0,80	1,667			0,0164	0,508	0,730	0,848							0,508	1,667	2,78
0,90	1,875			0,0112	0,347	0,560	0,651							0,347	1,875	3,53

$k_l = 0{,}018 = \text{const}$ | $\frac{k_l}{k_l^*} = 1{,}000 = \text{const}$ | $\frac{k_{lak}}{k_{lz}} = 1{,}082 = \text{const}$ | $\frac{n}{n_k} = 1{,}000 = \text{const}$ | $\frac{n}{n^*} = 1{,}000 = \text{const}$ | $\left(\frac{n}{n^*}\right)^2 = 1{,}000 = \text{const}$ | $\left(\frac{n}{n^*}\right)^3 = 1{,}000 = \text{const}$ | $N_z = 1{,}000 = \text{const}$ | $\frac{N_z}{N^*}$

Vgl. Bemerkungen zu den Spalten der Zahlentafel 1.

In Bild 8 sind die Verhältnisse $\left(\frac{S_z}{S^*}\right)$ und $\left(\frac{\eta}{\eta^*}\right)$ über $\left(\frac{q}{q^*}\right)$ aufgetragen. Der Kurvenverlauf zeigt, daß im Bereiche kleiner Staudrucke ein höherer Schub verfügbar wird, was ja auch angestrebt wurde. Die Wirkungsgrade liegen ebenfalls günstiger, erreichen aber nicht die Bestwerte, wie sie in Bild 7 zu finden sind.

Da das in Abschnitt C 2 behandelte Schraubenbeispiel mit fester Blatteinstellung günstig gewählt worden ist, sind die Vorteile dieser hier behandelten Verstellschraube in dem Vergleich nicht so wesentlich, wie sie in anderen Fällen erzielbar sind. Da es die Aufgabe dieser Arbeit ist, das Zusammenwirken von Luftschraube und Motor aufzuzeigen und nicht eine beste Verstellschraubenanordnung zu suchen, braucht hier auf die Gründe dieses Verhaltens nicht weiter eingegangen zu werden.

5. Schraube mit veränderlicher Blatteinstellung und mit fallender Drehzahl bei ansteigender Fahrtgeschwindigkeit.

Die im vorigen Abschnitt (C 4) geschilderte Schraube hat den Nachteil, daß bei kleinen Fahrtgeschwindigkeiten, wenn die Hauptbeschleunigung des Flugzeugs zu leisten ist, nicht die höchste Motorenleistung aufgenommen wird, es sei denn, daß während des ganzen Startvorgangs mit der höchstmöglichen Leistung durchgefahren wird.

Soll hiervon kein Gebrauch und nur zu Beginn die Höchstleistung benutzt werden, dann muß die Schraubendrehzahl mit zunehmender Fahrtgeschwindigkeit abnehmen. Dies Verhalten tritt ein, wenn die Werte $\frac{k_l}{k_l^*}$ über $\frac{\lambda}{\lambda^*}$ schwach ansteigen. Aus Bild 1 ist der als geradlinig angenommene

Digitized by Google

Verlauf der Kurve zu entnehmen. Für dieses Beispiel wurden die in Bild 9 gezeigten Ergebnisse für $\frac{N_z}{N^*}$, $\frac{S_z}{S^*}$, $\frac{\eta}{\eta^*}$, wie üblich über $\frac{q}{q^*}$ aufgetragen, gewonnen. Wiederum wurden dieselben ausgezeichneten Werte k_l^*, k_s^* und η^* der Luftschraube und dieselben Motorenwerte wie in den früheren Beispielen angenommen.

Die gewonnenen Kurven zeigen den erwarteten Verlauf, d. h. hohe Leistung und hoher Schub zu Beginn, alsdann mit dem Staudruck abnehmend.

Das in diesem Beispiel vorausgesetzte Verhalten einer Verstell-Luftschraube ist konstruktiv nicht leicht zu verwirklichen. Zu Vergleichen hat es jedoch ein gewisses Interesse.

6. Weitere Behandlung der in den Abschnitten C 2, C 3, C 4, C 5 erläuterten Beispiele.

Für die in den Abschnitten C 2, C 3, C 4 und C 5 erläuterten Beispiele besteht die Möglichkeit, weitere Kurven für verschiedene Werte $\frac{\varrho_z}{\varrho^*}$ zu berechnen und aufzuzeichnen. Sie werden sich unwesentlich von den in den Bildern 6, 7, 8, 9 unterscheiden, da nur die geringen Unterschiede im Verlauf der $\left(\frac{k_{la\,k}}{k_{l\,z}}\right)$-Werte (vgl. Bild 5) sich geltend machen werden.

Besteht die Aufgabe, die absoluten Werte N_z, S_z, n, v, q zu verfolgen, so sind zunächst die absoluten Werte ϱ^*, N^* und n^* festzulegen und einzusetzen. Der Radius der Luftschraube wird hiermit berechnet zu:

$$R = \sqrt[5]{\frac{N^*}{4\,\pi^4\,\varrho^*\,n^{*3}\,k_l^*}} \quad \ldots\ldots \text{(C 22)}$$

ferner ergeben sich die Größen

$$S^* = 2\,\pi^3\,\varrho^*\,n^{*2}\,R^4\,k_s^* \quad \ldots\ldots \text{(C 23)}$$

$$v^* = 2\,\pi\,n^*\,R\,\lambda^* \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C 24)}$$

$$q^* = \frac{\varrho^*}{2}\,v^{*2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C 25)}$$

Da die Verhältnisse $\frac{N_z}{N^*}$, $\frac{S_z}{S^*}$, $\frac{n}{n^*}$, $\frac{v}{v^*}$, $\frac{q}{q^*}$ berechnet und dargestellt worden sind, können hiermit die absoluten Werte ohne Mühe angegeben werden. Weitere bildliche Darstellungen ergeben keine neuen Aufschlüsse. Infolgedessen können sie hier fehlen. Für praktische Beispiele werden sie ihrer Übersichtlichkeit wegen jedoch zu empfehlen sein.

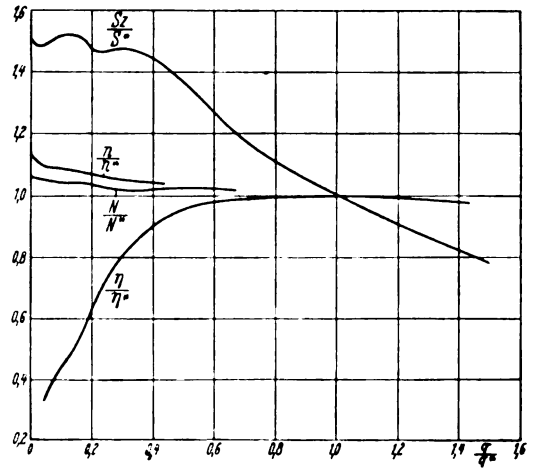


Bild 9. Schrauben mit veränderter Einstellung und fallender Drehzahl bei ansteigender Geschwindigkeit.

D. Zusammenfassung.

Die von einer Luftschraube benötigte Leistung und der von ihr erzeugte Schub werden allgemein in dimensionslosen Beizahlen angegeben, während die vom Motor abgegebene Leistung von diesem Gebrauch abweichend, meist mit voller Dimension mitgeteilt wird. Beide Hauptteile des Triebwerks gehorchen verschiedenen Gesetzen. Durch Angleichung der Darstellung der Motorleistung an die für Luftschrauben übliche Weise, wird auf ein Verfahren verwiesen, durch das die Gesetze des Motors und der Luftschraube miteinander gekoppelt werden können. Das Verfahren ist anwendbar, wenn die allgemeinen Arbeitsgesetze von Motor und Luftschraube in verschiedener Luftdichte und bei verschiedenen Drehzahlen bekannt sind und benötigt zu seiner Anwendung keine Angaben über die absolute Größe der Motorleistung und der Luftschraube. Die Beispiele zeigen das Zusammenwirken eines Motors mit Schrauben fester und veränderlicher Blatteinstellung.

Bei der Vorbereitung dieser Arbeit war mir cand. ing. Albert Schäfer, Technische Hochschule Berlin, behilflich, für dessen Mitwirkung ich hier bestens danke.

Schrifttum.

[1] B. Dirksen, Systematische Windkanalabmessungen an einer Modell-Luftschraubenserie. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I, 371.

[2] Die Motorenkurven verdanke ich Herrn Fritz A. F. Schmidt, Berlin-Adlershof.

Digitized by Google

Knickbiegeversuche.

Von J. Cassens, Bremen.

Bericht der Focke-Wulf-Flugzeugbau G.m.b.H., Bremen.

Für den beidseitig exzentrisch belasteten Knickstab werden Formeln aufgestellt, nach denen man seine Knicklast berechnen kann. Die Berechnung wird insbesondere auf den unelastischen Bereich ausgedehnt. Die Auftragung der Rechen-Ergebnisse geschieht nach dreierlei Methoden. Zwei davon sind — jedenfalls im elastischen Bereich — unabhängig vom Werkstoff. Die dritte (Schaubild 3a und 3b), die immer vom Werkstoff abhängig ist, besitzt aber die bessere Anschaulichkeit und wird daher benutzt, um Versuchs-Ergebnisse mit Rechen-Ergebnissen zu vergleichen.

Im Schaubild 6 wird beiläufig die Knicklast eines exzentrisch belasteten offenen Profiles mit der Verdrill-Knicklast dieses zentrisch belasteten offenen Profiles verglichen. Das exzentrisch belastete hält bei großen Schlankheiten eine größere Last in der Längsrichtung des Stabes.

Gliederung.

Bezeichnungen.
1. Einleitung.
2. Rechnungsansätze.
3. Erläuterung zu den Schaubildern 1, 2 und 3.
4. Vergleich der Theorie mit Versuchsergebnissen.
5. Schlußbetrachtung.
6. Anhang.
7. Schaubild 1 bis 6.

Bezeichnungen.

f	(cm²)	Stabquerschnitt,
a	(cm)	Abstand der äußersten Faser, in der σ_0 herrschen soll, von der neutralen Achse,
J	(cm⁴)	Trägheitsmoment $J = i^2 f$,
i	(cm)	Trägheitsradius,
W	(cm³)	Widerstandsmoment,
e	(cm)	Exzentrizität (Bild 1),
u, l	(cm)	siehe Bild 1,
λ	(—)	$= \frac{l}{i}$ Schlankheit des Stabes,
δ_m	(cm)	Durchbiegung in der Mitte des Stabes,
v	(cm)	Durchbiegung der neutralen Achse $v = f(u)$,
E	(kg/cm²)	Elastizitätsmodul,
T	(kg/cm²)	Knickmodul nach Engesser,
P	(kg)	Längskraft,
M	(cm kg)	Moment, von der Längskraft P abhängig, auch $M(P)$ geschrieben,
P_{Br}	(kg)	Längskraft bei der Zerstörung des Stabes,
P_E	(kg)	Knicklast: $P_E = \frac{\pi^2 f \cdot T}{\lambda^2}$,
P_{E_0}	(kg)	Eulerlast: $P_{E_0} = \frac{\pi^2 f \cdot E}{\lambda^2}$,
ξ	(—)	$\xi = \frac{P_E}{P}$,
x	(—)	$x = \frac{e \cdot a}{i^2}$,
y	(—)	$y = \frac{P_{Br}}{P_E} = \frac{\sigma_{Br}}{\sigma_E}$, $y_0 = \frac{\sigma_{Br}}{\sigma_{E_0}}$,
c	(—)	$c = \frac{\sigma_0}{\sigma_E} = \frac{\sigma_0 \lambda^2}{\pi^2 T}$, $c_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{E_0}}$,
σ	(kg/cm²)	Spannung,
σ_0	(kg/cm²)	Randfaserspannung bei der Zerstörung des Stabes, aus Biegung und Längskraft,

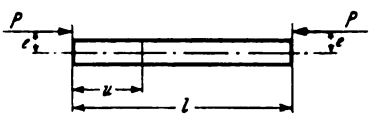


Bild 1. Stab, durch Längskraft P exzentrisch belastet.

σ_E	(kg/cm²)	Knickspannung: $\sigma_E = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}$,
σ_{E_0}	(kg/cm²)	Knickspannung der Eulerlast: $\sigma_{E_0} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$,
σ_g	(kg/cm²)	Grenzspannung, bei der die Eulerhyperbel ihre Gültigkeit verliert,
σ_{Br}	(kg/cm²)	Längsspannung im Schwerpunkt bei der Zerstörung des Stabes,
σ_e	(kg/cm²)	Biegespannung (Bild 3).

1. Einleitung.

Es gibt bei der Knickbiegung einige Probleme, die durch theoretische Überlegungen nicht zu klären sind. Theoretisch läßt sich nur die Fragestellung präzisieren; man muß aber der reinen Erfahrung, die man bei Versuchen gewinnt, die Klärung und letzte Entscheidung überlassen. Es treten zwei Fragen auf, die vornehmlich einer Klärung bedurften:

1. Welche Rolle spielt der Knickmodul bei der Knickbiege-Rechnung?
2. Bei welcher Gesamt-Spannung $\frac{P}{f} + \frac{M(P)}{W}$ hört die Tragfähigkeit des Trägers auf, so daß die äußeren Lasten nicht mehr gesteigert werden können?

Zur Klärung dieser Fragen wurden bei der Firma Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H. eine Reihe von Versuchen gemacht, und zwar mit einer Belastungsart, wie sie in Bild 1 dargestellt ist.

2. Rechnungsansätze.

Die Knickbiegung wurde nach dem Prinzip der »passiven Arbeit«[1]) berechnet: Die Durchbiegung in der Mitte δ_m ergibt sich aus der Berechnung der passiven Arbeit $1 \cdot \delta_m$, die die gedachte Last »1« — die Last »1« wirkt am Ort und in der Richtung der gesuchten Durchbiegung — »erleidet«, wenn die tatsächliche Last P auf den Stab aufgebracht wird.

Aus der bekannten Beziehung ergibt sich:

$$1 \cdot \delta_m = 2 \int_0^{l/2} \frac{(P \cdot e + P \cdot v)\,(1/2 \cdot u)}{E J}\, du,$$

$$\delta_m = P \cdot e \cdot \frac{l^2}{8 \cdot E J} + \int_0^{l/2} \frac{P \cdot v \cdot u}{E J}\, du.$$

Für die Durchbiegung v machen wir einen Ansatz, der die Randbedingungen für $u = 0$; $u = l/2$ und $u = l$ erfüllt:

[1]) Die Bezeichnung ist näher erläutert in der Arbeit des Verfassers »Tafel einiger Knick-Biege-Fälle«, die demnächst in der Luftf.-Forschg. erscheint.

Digitized by Google

$$v = \delta_m \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{u}{l}\right);$$ und ordnen.

Dann erhält man:

$$\delta_m \cdot \left(1 - \frac{P \cdot l^2}{\pi^2 E J}\right) = P \cdot e \cdot \frac{l^2}{8 \cdot E J}.$$

Das größte Biegemoment wirkt in der Mitte und kann aus folgender Gleichung berechnet werden:

$$M_{max} = P \cdot e + P\,\delta_m.$$

Nach einigen Umformungen bekommt man dafür folgenden Ausdruck:

$$M_{max} = P \cdot e \cdot \frac{\xi + 0{,}233}{\xi - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, daß der Knickmodul gleich dem E-Modul ist. Später wird auseinandergesetzt, wie diese Beziehung auch im unelastischen Bereich Gültigkeit hat.

Damit hat man nun einen Ausdruck für die größte Spannung:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{f} + \frac{P \cdot e}{W} \frac{\xi + 0{,}233}{\xi - 1} \leq \sigma_0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wobei σ_0 etwa gleich der Druckfestigkeit des Werkstoffes gesetzt werden kann. Bei dünnwandigen Querschnitten ist es empfehlenswert, dafür die »Stauchfestigkeit« des betreffenden Querschnittes zu setzen, wenn man unter Stauchfestigkeit diejenige Längsspannung versteht, die man aus Druckversuchen mit Trägerstücken geringer Länge erhält; also z. B. aus Versuchen mit einer Schlankheit < 10.

Hiermit ist die in der Einleitung unter Punkt 2 gestellte Frage beantwortet. Allerdings zunächst einmal nur hypothetisch. Erst der Vergleich der Theorie mit den Versuchsergebnissen gibt die Bestätigung, daß dieser Ansatz zu Recht besteht.

Um die Ergebnisse der Gleichung (2) in einem Diagramm zu veranschaulichen, wird die Beziehung umgeformt, und zwar für den Grenzfall der Höchstlast, so daß $\sigma_{max} = \sigma_0$ ist. Es ergibt sich:

$$x = \frac{c/y + y - (1 + c)}{1 + 0{,}233 \cdot y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit

$$c = \frac{\sigma_0}{\sigma_E}; \quad y = \frac{P_{Br}}{P_E} = \frac{\sigma_{Br}}{\sigma_E}; \quad x = \frac{e \cdot a}{i^2}.$$

3. Erläuterung zu den Schaubildern 1, 2 und 3.

Eine Darstellung der Gleichung (3) ist das Schaubild 1. Als Abszisse ist das dimensionslose Verhältnis $x = e \cdot a/i^2$, also ein Ausdruck für die Exzentrizität gewählt. Dabei ist von folgendem Kunstgriff Gebrauch gemacht: Die Kurven sind über x von $0 \div 1$ aufgetragen. Für Werte $x > 1$ ist der reziproke Wert von x gewählt, also y als Funktion von $1/x$ von $1 \div 0$. Dadurch sind alle Möglichkeiten x in dem Schaubild enthalten. — Als Parameter tritt die Größe c_0 auf. In diesem Quotienten ist also die Höchstspannung σ_0, die Schlankheit und der E-Modul bzw. Knickmodul enthalten.

Als Ordinate tritt der Quotient $y_0 = \frac{P_{Br}}{P_{E_0}}$ auf. Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit $\frac{P_{Br}}{P_E}$, solange die Längsspannung so klein ist, daß man unbedingt mit dem Elastizitätsmodul E rechnen kann. Um aber auch bei kurzen Stäben mit kleinerer Exzentrizität, bei denen also Längsspannungen P/f auftreten können, die die Spannung σ_g überschreiten, eine klare Darstellung zu gewinnen, wurde auch bei diesen Stäben die Bruchlast P_{Br} auf die mit dem E-Modul errechnete Eulerlast bezogen. Das hat einmal rechnerische Vorteile, darüber hinaus hat es rein darstellungsmäßig folgenden Vorteil: Würde man P_{Br} auf P_E beziehen, so würden alle Kurven c_0 für $x = 0$ im Punkte $y = 1$ endigen. Das würde für kleine x- und kleine c_0-Werte große Ungenauigkeit der Kurvenscharen bedeuten.

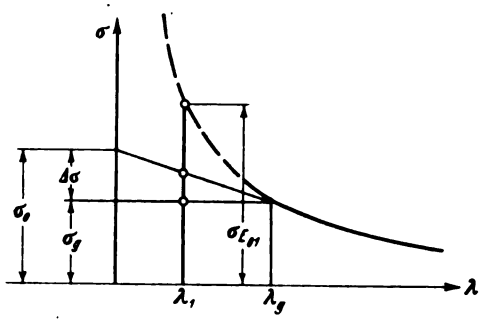


Bild 2. Knickspannungs-Diagramm.

Im Schaubild 1 ist noch die Grenzkurve von Bedeutung. Rechts von der Grenzkurve sind die Längsspannungen so gering, daß man unbedingt die Knickbiegerechnung mit dem E-Modul durchführen kann. Dagegen links von der Grenzkurve ist der Verlauf der Kurvenscharen c_0 vom Werkstoff abhängig, wie überhaupt die Lage der Grenzkurve vom Werkstoff und im gewissen Sinne von der Form des Trägerquerschnittes abhängig ist.

Zur Bestimmung der Grenzkurve ist ein Ansatz gemacht worden. Dieser Ansatz enthält bereits das Kernstück der hier vorliegenden Arbeit, soweit es sich um die in der Einleitung unter Punkt 1 gestellte Frage handelt. Es ist nämlich unterstellt worden, daß der Längsspannungszustand des Stabes, das $\frac{P}{f}$, maßgeblich dafür ist, ob die Knickbiegerechnung mit dem E-Modul oder mit dem Knickmodul durchzuführen ist. Wird $\frac{P}{f} > \sigma_g$, so ist ein dem Spannungszustand entsprechender Knickmodul in die Rechnung einzuführen. Ist $\frac{P}{f} < \sigma_g$, so ist der E-Modul zu nehmen. Die Schwerpunktsspannung ist also entscheidend für die Verwendung des E-Moduls oder des Knickmoduls.

In Bild 2 ist dieser Vorgang veranschaulicht. Es liegt ein Stab zur Berechnung vor von der Schlankheit λ_1. Je nach seiner Exzentrizität kann er Längsspannungen bis zum Bruch aufnehmen, die kleiner oder größer als σ_g sind. Sind sie kleiner als σ_g, soll der E-Modul benutzt werden. An dieser Stelle λ_1, also bei dieser Schlankheit, ist der Grenzpunkt

$$\frac{\sigma_{Br}}{\sigma_{E_{\sigma_1}}} = \frac{\sigma_g}{\sigma_{E_{\sigma_1}}} = y_g = \frac{\sigma_g}{\sigma_0} \cdot c.$$

σ_g und σ_0 sind in erster Linie vom Werkstoff abhängig, in zweiter Linie auch von der Form des Stabes. Durch die Beziehung

$$y_g = \frac{\sigma_g}{\sigma_0} \cdot c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

haben wir jetzt einen einfachen Ansatz zur Hand, das y_g als Funktion von c auszurechnen. Setzt man die Beziehung (4) in die Gleichung (3) ein, und zwar derart, daß das c zum Verschwinden gebracht wird, so bekommt man

$$x = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_g} \cdot \frac{1 - y_g}{1 + 0{,}233\, y_g} \quad \ldots\ldots \quad (4a)$$

oder nach y_g aufgelöst:

$$y_g = \frac{\frac{\Delta\sigma}{\sigma_g} - x}{\frac{\Delta\sigma}{\sigma_g} + 0{,}233 \cdot x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4b)$$

Zur Berechnung der Kurvenscharen c_0 wird ein Ansatz für den Knickmodul in die Beziehung (3) eingeführt, und zwar:

a) $$T = E\,\frac{\sigma_0 - \sigma}{\Delta\sigma},$$

damit erhält man:

$$x = \frac{\sigma_0/\sigma - 1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \cdot c_0}{1 + 0{,}233\,\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\,\frac{c_0}{\sigma_0/\sigma - 1}}.$$

Digitized by Google

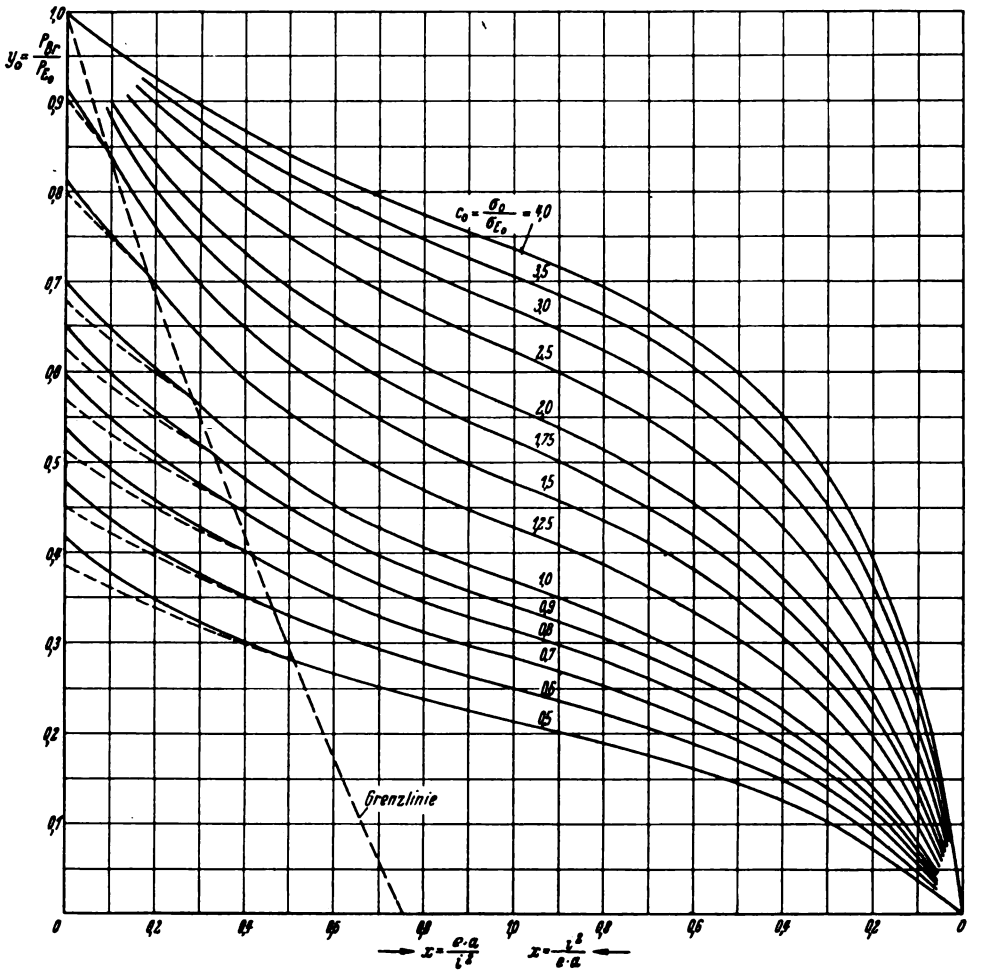


Schaubild 1.

$$y = \frac{\frac{\Delta\sigma}{\sigma_g} - x}{\frac{\Delta\sigma}{\sigma_g} + 0{,}233\,x}$$ Grenzlinie

$$x = \frac{c/y + y - (1+c)}{1 + 0{,}233\,y}$$ gültig rechts d. Grenzlinie

$$x = \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma} - 1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\cdot c_0}{1 + 0{,}233\,\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\cdot\frac{c_0}{\sigma_0/\sigma - 1}}$$ (ausgezogen)

$$x = \frac{(c/y-1) - \frac{\Delta\sigma^2\cdot\sigma_g}{\sigma_0^3}\cdot\frac{c_0\,(c/y)^2}{c/y-1}}{1 + 0{,}233\cdot\frac{\Delta\sigma^2\cdot\sigma_g}{\sigma_0^3}\cdot\frac{c_0\,(c/y)^2}{(c/y-1)^2}}$$ (punktiert)

gültig links d. Grenzlinie

$E = 2\cdot 10^6$ kg/cm²
$\sigma_0 = 6000$ kg/cm²
$\sigma_g = 3400$ kg/cm².

Wir hatten uns aber zur Aufgabe gemacht, x als Funktion von $\frac{\sigma_{Br}}{\sigma_{E_0}}$ darzustellen. Damit bekommt der Ausdruck folgendes Aussehen:

$$x = \frac{c/y - 1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\cdot c_0}{1 + 0{,}233\,\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\,\frac{c_0}{c/y-1}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Es ist selbstverständlich, daß sich auch aus Gleichung (5) die Beziehungen (4a) und (4b) unter Benutzung von (4) ableiten lassen. Zu bemerken ist noch, daß $c/y = c_0/y_0$ ist.

b) Es wird ein Ansatz für den Knickmodul nach der Tetmajer-Geraden in die Gleichung (3) eingeführt, nämlich:

$$T = \frac{\sigma}{\pi^2}\left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\Delta\sigma/\lambda_g}\right)^2.$$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck für die Kurvenscharen c_0 links der Grenzkurve:

$$x = \frac{\sigma_0/\sigma - 1 - \frac{\Delta\sigma^2\cdot\sigma_g}{(\sigma_0-\sigma)\cdot\sigma_{E_0}\cdot\sigma}}{1 + 0{,}233\,\frac{\Delta\sigma^2\cdot\sigma_g}{(\sigma_0-\sigma)^2\cdot\sigma_{E_0}}}.$$

Wenn man wiederum so umformt, daß x als Funktion von $\frac{\sigma_{Br}}{\sigma_{E_0}}$ dargestellt wird, so erhält man:

$$x = \frac{(c/y-1) - \frac{\Delta\sigma^2\cdot\sigma_g}{\sigma_0^3}\cdot\frac{c_0\cdot(c/y)^2}{(c/y-1)}}{1 + 0{,}233\,\frac{\Delta\sigma^2\cdot\sigma_g}{\sigma_0^3}\cdot\frac{c_0\cdot(c/y)^2}{(c/y-1)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Im Schaubild 2 ist die Ordinate beibehalten wie in Schaubild 1, dagegen als Abszisse ist der Quotient c_0 gewählt. Es ergeben sich dabei Kurvenscharen x; die Grenzkurve kann sehr einfach nach (4) eingetragen werden. Rechts der Grenzkurve gilt der E-Modul bei der Knickbiegerechnung, links der Grenzkurve gilt der Knickmodul.

Jetzt soll noch eine dritte Darstellungsform der Knickbiegegleichungen (3), (5) und (6) gezeigt werden. Diese Darstellungsform hat ihren Niederchlag im Schaubild 3 gefunden. Es ist klar, daß man diese Kurven mit den Zahlenwerten, die zur Berechnung der Schaubilder 1 und 2 dienten, auch im Schaubild 3 aufzeichnen kann. Trotzdem wollen wir die Beziehungen so weit umformen, wie es der Darstellungsform entspricht. Es handelt sich darum, σ_{Br} als Funktion von λ mit dem Parameter x zu gewinnen. Man erhält nach einigen Umformungen die Beziehung:

Digitized by Google

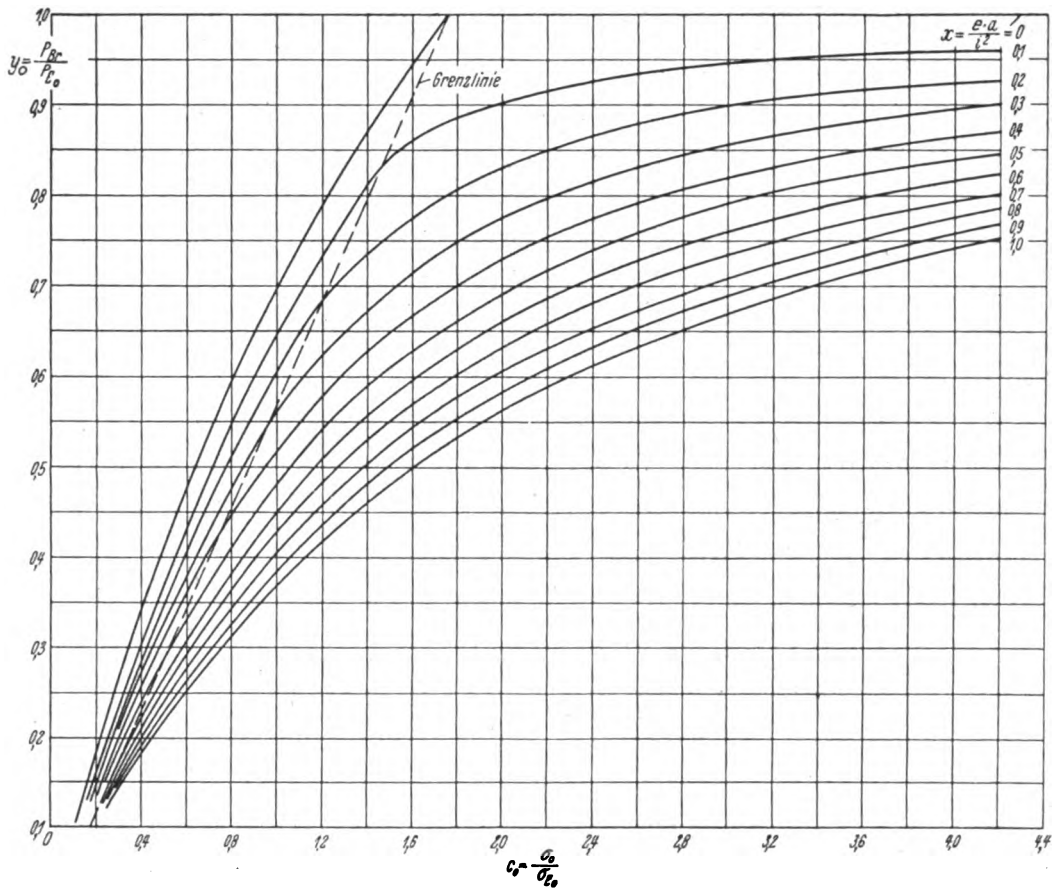


Schaubild 2.

$y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0} \cdot c$ Grenzlinie

$x = \frac{c/y + y - (1+c)}{1 + 0{,}233\, y}$ gültig rechts d. Grenzlinie

$x = \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma} - 1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \cdot c_0}{1 + 0{,}233 \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \frac{c_0}{\sigma_0/\sigma - 1}}$ gültig links d. Grenzlinie

$E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm²
$\sigma_0 = 6000$ kg/cm²
$\sigma_y = 3400$ kg/cm².

$$\lambda^2 = \frac{E\pi^2}{\sigma_{Br}} \cdot \frac{\sigma_0/\sigma_{Br} - (1+x)}{\sigma_0/\sigma_{Br} - (1 - 0{,}233\, x)} \quad \ldots\ (7)$$

In dieser Darstellungsform kommt die Bedeutung des Ansatzes für den Gebrauch des Knickmoduls bei Knickbiegerechnungen besonders klar zum Ausdruck. Die Grenzkurve ist hier ganz einfach die Horizontale $\sigma = \sigma_y$. Oberhalb dieser Linie muß die Beziehung (7) umgeformt werden, und zwar

a) mit dem Knickmodulansatz $T = E \frac{\sigma_0 - \sigma}{\Delta\sigma}$,

$$\lambda^2 = \frac{E\pi^2}{\sigma_{Br}} \frac{\sigma_0/\sigma_{Br} - (1+x)}{\sigma_0/\sigma_{Br} - (1 - 0{,}233\, x)} \frac{\sigma_0 - \sigma_{Br}}{\Delta\sigma} \quad \ldots\ (8)$$

b) mit dem Knickmodul nach der Tetmajer-Geraden:

$$T = \frac{\sigma}{\pi^2}\left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\Delta\sigma}\right)^2 \cdot \lambda_y^2 = E \frac{\sigma}{\sigma_y}\left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\Delta\sigma}\right)^2$$

bekommt Gleichung (7) folgende Gestalt:

$$\lambda^2 = \frac{E\pi^2}{\sigma_{Br}} \frac{\sigma_0/\sigma_{Br} - (1+x)}{\sigma_0/\sigma_{Br} - (1 - 0{,}233\, x)} \cdot (\sigma_0/\sigma_{Br} - 1)^2 \cdot \frac{\sigma_{Br}^3}{\Delta\sigma^2 \cdot \sigma_y} \quad (9)$$

Durch die Kurvenscharen x wird in den Schaubildern 3a und 3b die Spannung der vom Stab aufzunehmenden Längskraft dargestellt. Die Gesamtspannung, die der Stab in der äußeren Faser in der Mitte der Stablänge ertragen kann, ist laut Definition $= \sigma_0$. Diese Verhältnisse sind nochmals in Bild 3 dargestellt. Bei der Exzentrizität x kann der Stab eine Längskraft entsprechend der Spannung σ_{Br} aufnehmen. Dabei bekommt er aus der Biegung die Spannung σ_y.

Um die Zustände in einem auf Knickbiegung belasteten Stab bei anwachsender Längskraft noch einmal eingehend zu erläutern, ist in Bild 4 die Randfaserspannung $\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M(P)}{W}$ über der Längskraft P für verschiedene Exzentrizitäten aufgetragen, und zwar für ein Stahlrohr 30 Dmr. × 1 mit einer Länge von 100 cm. Gestrichelt ist die Linie eingetragen, mit der die reine Längsspannung in dem Stabe bei steigender Längskraft wächst, also bei der Exzentrizität 0. Die Knicklast des Stabes beträgt $P_E =$ 1890 kg. Man sieht auch, wenn man in der Knickbiegerechnung größere Randfaserspannungen als die Euler-Spannung zuläßt, daß trotzdem keine größeren Längskräfte errechnet werden können als die nach der Eulerlast. Bei der Exzentrizität von 5 cm ist noch gestrichelt die Linie $\frac{P}{f} + \frac{M}{W}$ ohne Knickbiegung eingetragen. Bei dieser großen Exzentrizität ist also der Knickbiegeeinfluß sehr gering. Er besteht in dem Unterschied zwischen der ausgezogenen und der gestrichelten Linie. Mit kleiner werdender Exzentrizität schmiegen sich die Kurven immer mehr dem Linienzug $\frac{P}{f}$ und der Grenzlinie P_E an.

Wenn man die Endpunkte der Kurvenscharen bei der Spannung von 6000 kg/cm², und zwar die Werte für P_{Br}, über der Exzentrizität auftragen würde, so erhielte man ein Diagramm ähnlich Schaubild 1. Das hier gewählte Beispiel entspricht etwa einem $c = 3$.

Digitized by Google

Schaubild 3a.

$\sigma = \sigma_g$ Grenzlinie

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Br}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1-0{,}233\,x)} \quad \text{gültig für } \sigma_{Br} \leqq \sigma_g$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Hr}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Hr}} - (1-0{,}233\,x)} \cdot \frac{\sigma_0 - \sigma_{Br}}{\Delta\sigma} \quad \left.\begin{array}{l}\text{(ausgezogen)}\\ \text{gültig für } \sigma_{Br} \geqq \sigma_g\\ \text{(punktiert)}\end{array}\right\}$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Hr}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Hr}} - (1-0{,}233\,x)} \cdot \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_{Br}}{\Delta\sigma}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_{Br}}{\sigma_g}$$

$E = 2 \cdot 10^5$ kg/cm²
$\sigma_0 = 6000$ kg/cm²
$\sigma_u = 3400$ kg/cm².

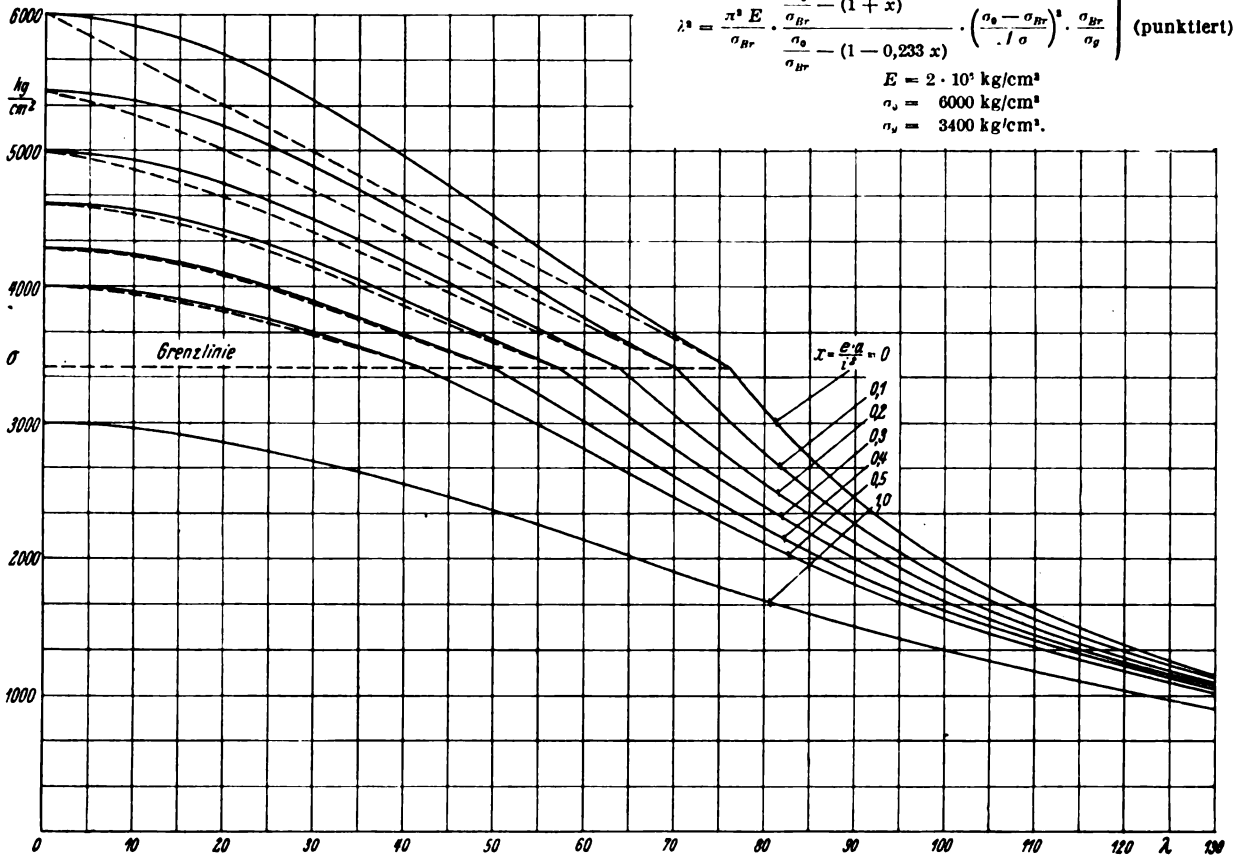


Schaubild 3b.

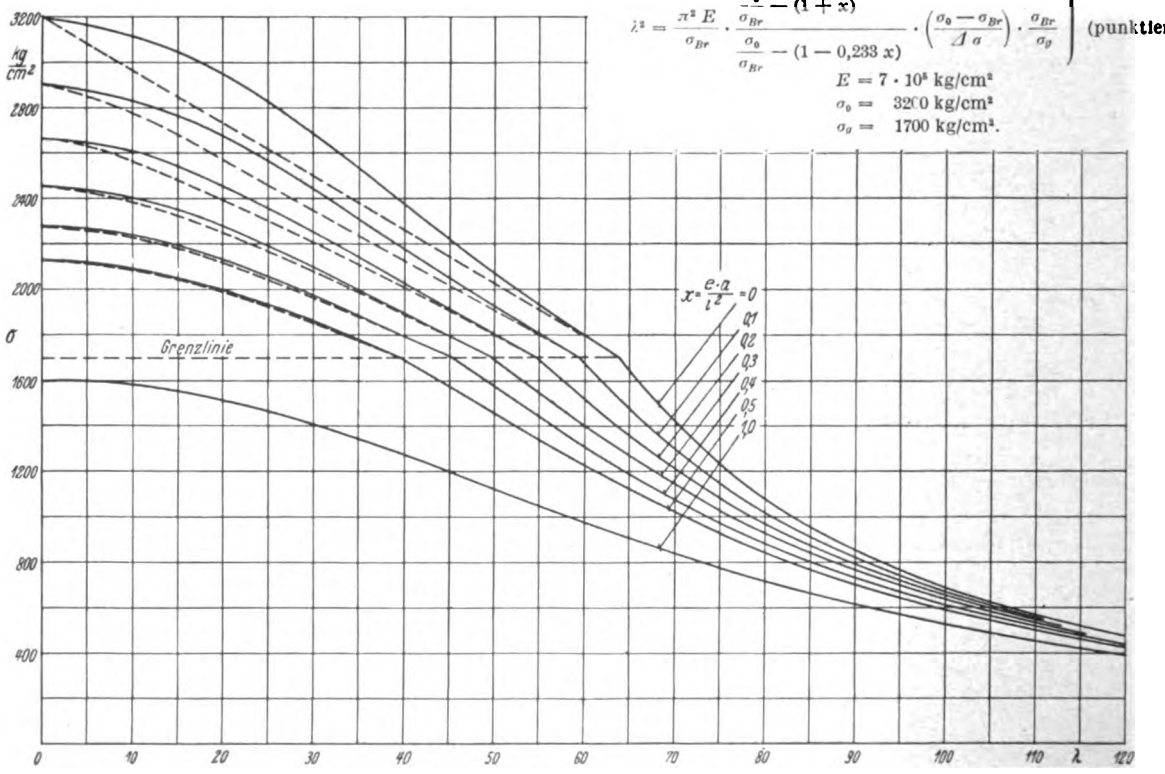
$\sigma = \sigma_g$ Grenzlinie

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Br}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1-0{,}233\,x)} \quad \text{gültig für } \sigma_{Hr} \leqq \sigma_g$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Hr}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1-0{,}233\,x)} \cdot \frac{\sigma_0 - \sigma_{Br}}{\Delta\sigma} \quad \left.\begin{array}{l}\text{(ausgezogen)}\\ \text{gültig für } \sigma_{Br} \geqq \sigma_g\\ \text{(punktiert)}\end{array}\right\}$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Br}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Hr}} - (1-0{,}233\,x)} \cdot \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_{Br}}{\Delta\sigma}\right) \cdot \frac{\sigma_{Br}}{\sigma_g}$$

$E = 7 \cdot 10^5$ kg/cm²
$\sigma_0 = 3200$ kg/cm²
$\sigma_u = 1700$ kg/cm².



Digitized by Google

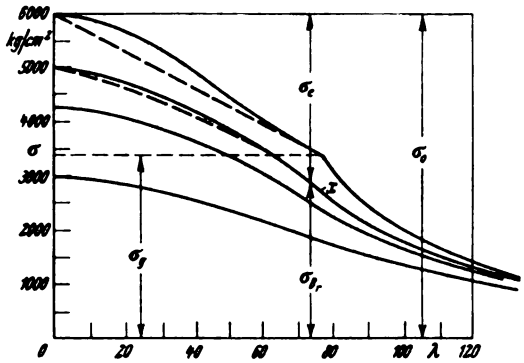


Bild 3. Knickbiege-Diagramm.

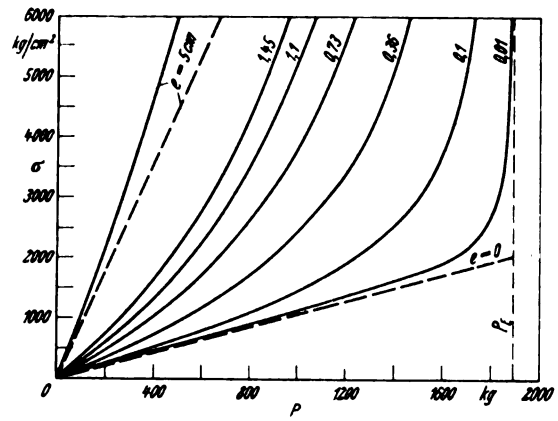


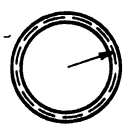
Bild 4. Knickbiegung in einem Stahlrohr 30 × 1 für verschiedene Exzentrizitäten.

4. Vergleich der Theorie mit Versuchsergebnissen.

Die Beantwortung der eingangs gestellten Fragen nach der Verwendung des Knickmoduls und der Höchstspannung soll nun folgendermaßen vor sich gehen: Durch die Versuche und ihre Anordnung sind gewisse Werte x, c, λ usw. festgelegt. Es sind nun in den Schaubildern 4, 5, 6 nur diejenigen Kurven x eingetragen, für die Versuche gemacht sind. Die Schaubilder 4 bis 6 sind analog dem Schaubild 3, und zwar deswegen, weil in dieser Form die Versuchsergebnisse am klarsten zur Darstellung kommen. Der Vergleich mit den erzielten Versuchswerten gibt jetzt eine Kritik, wieweit die vorgeschlagenen Rechnungsmethoden Gültigkeit haben.

Das Gesamtbild ist typisch für Knickversuche, besonders bei kleinen Schlankheiten. Wenn solche Versuche nicht mit laboratoriumsmäßiger Sorgfalt gemacht sind, streuen die Ergebnisse immer recht stark. Die durchgeführten Versuche können aber nicht als Laboratoriumsversuche bezeichnet werden; die in der Technik allgemein gebauten Knickstäbe werden ja auch nicht mit laboratoriumsmäßiger Präzision hergestellt. Im einzelnen ist folgendes zu sagen:

Zu Schaubild 4: Die Werte $x = 2$ liegen recht gut, ebenso die Werte $x = 1{,}33$ und $x = 1$. Lediglich die Werte $x = 0{,}5$ fallen bei der Schlankheit $\lambda = 40$ ziemlich stark aus dem Rahmen. Vergleicht man aber die Werte $x = 0{,}5$ für $\lambda = 40$ und $\lambda = \sim 70$, so stellt man fest, daß sich kaum eine Erhöhung der Bruchlängskraft ergeben hat bei Verringerung der Länge von einer Schlankheit 70 auf die Schlankheit 40. Das ist unwahrscheinlich. Damit wäre eine erneute Überprüfung dieser Punkte zu empfehlen. Die beiden oberen Punkte $x = 0{,}5$ und $\lambda = 40$ deuten darauf hin, daß das $\sigma_g = 3400$ kg/cm² auch etwas reichlich hoch gewählt ist. Um einen anschaulichen Vergleich zu vermitteln, mit welcher Exzentrizität die Versuche durchgeführt wurden, ist in nachfolgender Zahlentafel das Verhältnis der Exzentrizität zum mittleren Radius der Kreisrohre angegeben.



$x \rightarrow$	0,5	1	1,33	2
e/r_m	0,25	0,5	0,67	1

Zu Schaubild 5. Die Versuchspunkte liegen oberhalb der theoretischen Kurve. Man könnte bessere Anschmie-

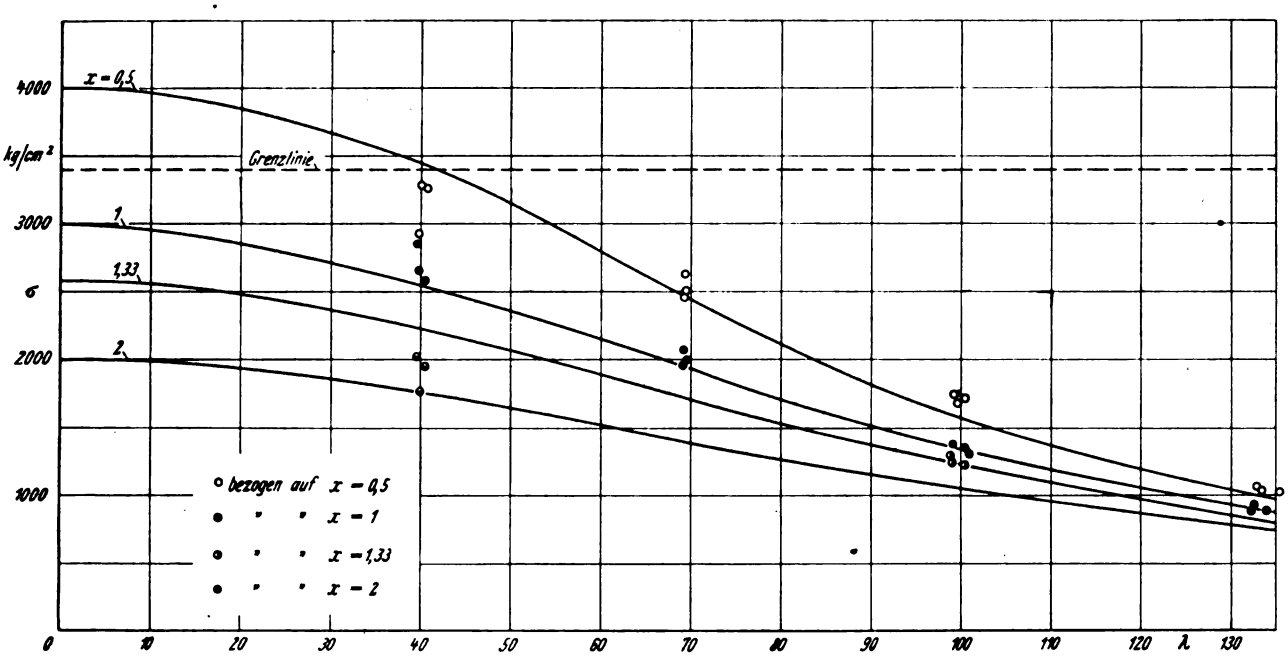


Schaubild 4.

Versuch 1632 (Cr Mo 60 Stahlrohre).

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Br}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1-0{,}233\,x)}$$

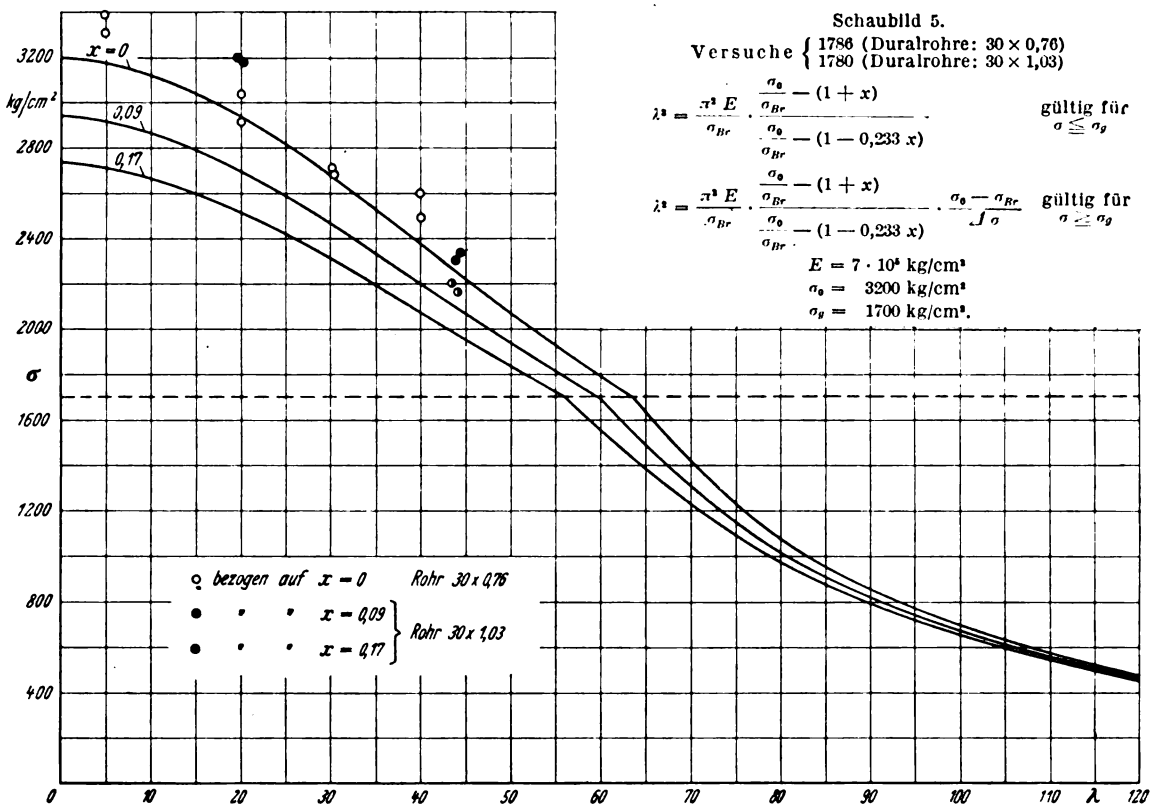
gültig für $\sigma_{Br} \leqq \sigma_g$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Br}} \cdot \frac{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1+x)}{\frac{\sigma_0}{\sigma_{Br}} - (1-0{,}233\,x)} \cdot \frac{\sigma_0 - \sigma_{Br}}{\sigma}$$

gültig für $\sigma_{Br} \geqq \sigma_g$

$E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm²
$\sigma_0 = 6000$ kg/cm²
$\sigma_g = 3400$ kg/cm².

Digitized by Google



gung der Linien an die Versuchspunkte erzielen, wenn man das σ_0 etwa auf 3800 erhöhen würde. Dagegen die Knickkurve $x = 0$ deutet an, daß eine Erhöhung der Werte σ_0 tatsächlich nur mit großer Vorsicht vorgenommen werden darf.

Schaubild 6. zeigt Versuche mit *C*-Profilen, die im Rücken des Profiles angeschlossen sind (Bild 5).

Die Versuchspunkte liegen recht befriedigend. Zur Veranschaulichung ist die Drillknickkurve eines zentrisch belasteten Stabes eingezeichnet, der sich um seinen Schubmittelpunkt frei verdrillen kann, und zwar nach der Arbeit von Kappus, Jahrbuch 1937 der Deutschen Luftfahrt-Forschung S. I 409ff. Man kann hier feststellen, daß bei den gebräuchlichen Schlankheitsgraden das exzentrisch belastete Profil eine größere Längskraft aufnehmen kann als das zentrisch belastete Profil, das einen ungünstigeren Freiheitsgrad besitzt. Die Berechnung der Drillknickwerte befindet sich im Anhang.

Die exzentrischen Knickversuche wurden seinerzeit noch erweitert, und zwar wurden dabei diese und ähnliche Stäbe in einen Fachwerksverband eingebaut. Die Knickwerte der Stäbe im Verband liegen dabei selbstverständlich etwas höher. Das ist wohl in der Hauptsache auf die Einspannung durch die anderen, mit Zug belasteten Stäbe zurückzuführen.

5. Schlußbetrachtung.

Auf Grund der Versuchswerte und aus Vergleichen der Werte mit den theoretischen Kurven kann man behaupten, daß die Tendenz des gesamten Knickvorganges mit befriedigender Genauigkeit durch die Theorie dargestellt wird. Im übrigen regen die Kurven zu folgenden Überlegungen an:

Man sollte statt zentrischer Knickversuche lieber exzentrische, nämlich Knickbiegeversuche, machen. Die Durchführung einwandfreier zentrischer Knickversuche stößt meistens auf große Schwierigkeit. Die Schwierigkeit besteht darin, daß der Knickwert eines zentrischen Knickversuches bestimmt ist durch den Abstand der neutralen Achse jedes Querschnittes von der Verbindungslinie der Lastangriffspunkte. Die Bedeutung dieser Toleranz, die unmeßbar ist, wird vermindert durch das Vorhandensein

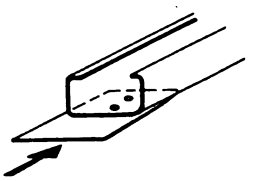


Bild 5. Im Rücken angeschlossenes C-Profil.

einer Exzentrizität. Bei zentrischen Knickversuchen tritt Bruch ein infolge der Momente $P \cdot \Delta$, wenn Δ die Toleranz bedeutet. Im exzentrischen Druckversuch tritt Bruch ein infolge des Momentes $P\ (e + \Delta)$. Hieraus sieht man, daß der Einfluß der Toleranz bei größer werdendem e verschwindet.

In dieser Veröffentlichung sind nur Versuche enthalten, die bei Focke-Wulf gemacht sind. In Vorbereitungsarbeiten sind auch Ergebnisse von Versuchen anderer Stellen ausgewertet. (Thielemann, Jahrbuch 1937 der Deutschen Luftfahrtforschung S. I 386ff.) Die Erfahrungen dabei decken sich fast gänzlich mit den hier niedergelegten Erfahrungen. Eine Erscheinung jedoch, die hier nur undeutlich zu sehen ist, war dort besser zu erkennen.

Bei großer Schlankheit liegen die Versuchswerte etwas unter der theoretischen Kurve, bei kleinerer Schlankheit liegen sie darüber, und zwar um so mehr, je größer der Biegeanteil an der Belastung ist (Bild 3), also je größer das σ_f. Mit anderen Worten: bei großer Schlankheit überwiegt der Stabilitätsanteil bei Zerstörung des Stabes, bei kleiner Schlankheit überwiegt der Spannungsanteil und in dem Bereich kleiner Schlankheit kommt ein Effekt zur Auswirkung, den man »Biegefaktor« nennt (siehe J. Cassens, Einige Bemerkungen zur Gewichtsfrage, Querschnitt und Gewichtsaufwand. Z. Flugtechn. [1933] S. 382 u. 383).

Die Zahlenrechnung und die Aufstellung der Kurvenblätter ist von Herrn Dudeck bearbeitet.

Außer den im Text bereits erwähnten Schrifttumstellen sei von dem sehr reichhaltigen Schrifttum insbesondere das Buch von Karl Ježek, »Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl«, Verlag Springer, Wien 1937, erwähnt. Das Werk behandelt sehr eingehend die Fließvorgänge — also das, was kurz vorher unter der Bezeichnung

Digitized by Google

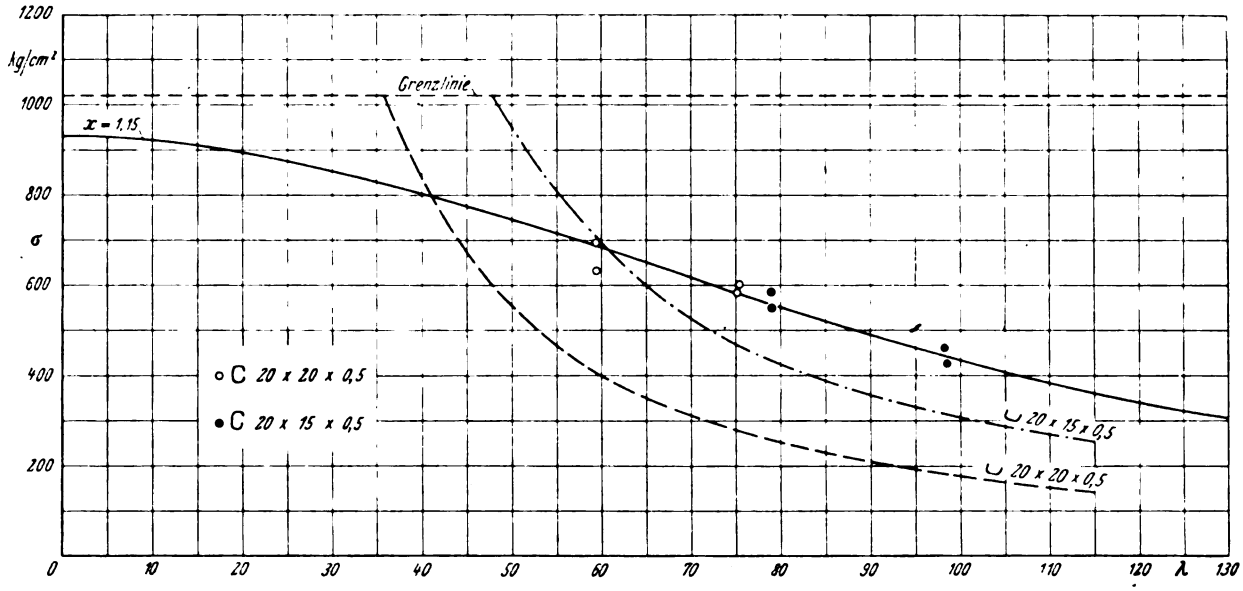


Schaubild 6.

Versuch 1026: **C**-Profile $20\times20\times0{,}5$ und $20\times15\times0{,}5$,

$$\begin{cases} \lambda^2 = \dfrac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \cdot \dfrac{\dfrac{\sigma_e}{\sigma_{Kr}} - (1+x)}{\dfrac{\sigma_e}{\sigma_{Kr}} - (1-0{,}233\,x)} & \text{gültig für } \sigma_{Kr} \leqq \sigma_u \\ \lambda^2 = \dfrac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \cdot \dfrac{\dfrac{\sigma_e}{\sigma_{Kr}} - (1+x)}{\dfrac{\sigma_e}{\sigma_{Kr}} - (1-0{,}233\,x)} \cdot \dfrac{\sigma_e - \sigma_{Kr}}{J\sigma} & \text{gültig für } \sigma_{Kr} \geqq \sigma_u \end{cases}$$

Zum Vergleich: Drillknicken (Lufo 1937, S. 449/450).

$$\begin{cases} \sigma_D = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[0{,}18 + 0{,}079\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2\right] \text{ für: } \llcorner\!\lrcorner\ 20\times20\times0{,}5 \text{ (punktierte Kurve)} \\ \sigma_D = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[0{,}31 + 0{,}136\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2\right] \text{ für: } \llcorner\!\lrcorner\ 20\times15\times0{,}5 \text{ (strichpunktierte Kurve)} \end{cases}$$

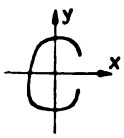
$E = 7\cdot10^5$ kg/cm²
$\sigma_e = 2000$ kg/cm²
$\sigma_u = 1020$ kg/cm².

»Biegefaktor« gestreift wurde — und den Einfluß der Querschnittsformen. Es ist ganz speziell auf den Stahlbau zugeschnitten.

Anhang.

Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich (R. Kappus, Luftf.-Forschg. Bd. 14 [1937] S. 448/449).

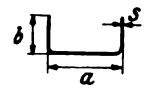
Nach den Gleichungen (47), 48), (56), (58) gilt für die Drill-Knickspannung σ_D eines zur x-Achse symmetrischen Profils:



$$\text{(I)}\qquad \sigma_D = \frac{\sigma_s + \sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_s - \sigma_x}{2}\right)^2 + \varrho_x^2}.$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\pi^2}{l^2}\dfrac{E\cdot J_x}{F} \\ \sigma_s = \dfrac{G\,J_T + \dfrac{\pi^2}{l^2} E\,C}{J_p} \\ \varrho_x = \dfrac{\pi^2}{l^2}\dfrac{E\,R_x}{\sqrt{F\,J_p}} \end{cases} \quad \begin{cases} J_x = \text{Trägheitsmoment bezügl. } x\text{-Achse}, \\ J_p = \text{Polares Trägheitsmoment}, \\ J_T = \dfrac{1}{3}U\cdot s^3 \text{ Drillingswiderstand} \\ \quad (U = \text{Umfang}, s = \text{Dicke}), \\ R_x = \int y\cdot w\,dF \text{ Wölbemoment für die } x\text{-Achse}, \\ C = \int w^2\,dF - \dfrac{1}{F}(w\,dF)^2 \\ \quad \text{Wölbewiderstand bezügl. Schwerpunkt} \\ w = \text{Einheitsverwölbung}. \end{cases}$$

Für ein U-Profil lassen sich die Gleichungen (I) und (II), wenn die Wurzel der Gleichung (I) approximiert wird, in die Gestalt bringen (vgl. die Gleichungen (69) bis (72) der obigen Arbeit).



$$\text{(III)}\qquad \sigma_D = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[\alpha + \beta\cdot\lambda^2\right].$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{A_1 + A_2}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{A_1 - A_2}{2}\right)^2 + A_3^2} \\ \beta = \dfrac{B}{2}\left(1 - \dfrac{A_1 - A_2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{A_1 - A_2}{2}\right)^2 + A_3^2}}\right) \end{cases}$$

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{3\,a^2(a+2b)(2a^2+15ab+26b^2)}{(2a+b)\{a^2(a+6b)(a+2b)+4b^2(2a+b)\}}, \\ A_2 = \dfrac{a^2(a+6b)(a+2b)}{4b^3(2a+b)}, \\ A_3 = \dfrac{6a^2(a+2b)(a+3b)}{b(2a+b)\sqrt{3\{a^2(a+6b)(a+2b)+4b^3(2a+b)\}}}, \\ B = \dfrac{\dfrac{4G}{\pi^2 E}(a+2b)^2\cdot s^2}{\{a^2(a+6b)(a+2b)+4b^3(2a+b)\}}. \end{cases}$$

Man erhält in den speziellen Fällen:

$$\begin{cases} \llcorner\!\lrcorner\ 20\times20\times0{,}5 & \sigma_D = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[0{,}18 + 0{,}079\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2\right] \\ \llcorner\!\lrcorner\ 20\times15\times0{,}5 & \sigma_D = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[0{,}31 + 0{,}136\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2\right] \end{cases} \qquad \lambda = \frac{l}{i_y}.$$

Digitized by Google

Über ein besonderes Ersatzsystem zur Berechnung von Flügelschwingungen.

Von W. Biermann und W. Dessecker.

Bericht der Ernst Heinkel-Flugzeugwerke, Seestadt Rostock.

Die bisher behandelten Verfahren erfordern zur Bestimmung von Frequenzen und Schwingungsformen im allgemeinen eine ganze Anzahl von Iterationen und Integrationen, sofern die Verteilungen von Massen und Steifigkeiten sehr unstetig sind. Das vorliegende Verfahren ist durch seine große Anpassungsfähigkeit besonders zur Erfassung solcher unstetiger Massen- und Steifigkeitsverteilungen geeignet.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.
a) Reine Biegeschwingungen des freien Flügels.
b) Reine Drehschwingungen des freien Flügels.
III. Angleichung der Federungsgrößen.
a) Reine Biegeschwingungen.
b) Reine Drehschwingungen.
IV. Berechnung der Koppelfrequenzen und -schwingungsformen.
V. Verbesserung der Koppelschwingungen.
VI. Vergleich von Ergebnissen der Rechnung und des Versuches an einem Flügel.

I. Einleitung.

Zur Durchführung von Flatterberechnungen für ein neues Baumuster ist es von Bedeutung, zuvor durch Rechnungen eine möglichst sichere Kenntnis zu erhalten von den zu erwartenden Ergebnissen des Standschwingungsversuches.

Im folgenden soll deshalb ein weiteres Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und -schwingungsformen abgeleitet werden, das darauf beruht, daß der Flügel in seinen mechanischen Eigenschaften durch ein besonderes System[1]) ersetzt wird, das eine vereinfachte Rechnung ermöglicht. Das zu behandelnde Verfahren erweist sich in der praktischen Rechnung besonders geeignet zur Erfassung von Unstetigkeiten in Massen- und Steifigkeitsverteilungen.

Wir beschränken uns darauf, nur Flügel mit gerader elastischer Achse zu betrachten, um die sie sich bei reiner Momentenbelastung verwölbungsfrei drehen.

II. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

a) Reine Biegeschwingungen des freien Flügels.

Der freischwingende Flügel soll in seinen mechanischen Eigenschaften ersetzt werden durch eine Kette federnd angelenkter starrer Flügelabschnitte. Dabei sollen die Flügelabschnitte als starre gleichförmige Stäbe betrachtet werden, während die Gelenke Einzelmassen tragen können, Bild 1. Die Frequenzgleichung wird dann mit Hilfe der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aufgestellt.

Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus den kinetischen Energien der Stäbe und Einzelmassen

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{y}_i^2 + \frac{1}{6}\sum m_{i,i+1}(\dot{y}_i^2 + \dot{y}_i\dot{y}_{i+1} + \dot{y}^2{}_{i+1}).$$

Die potentielle Energie steckt ausschließlich in den Gelenken und wird durch das Quadrat des Neigungswinkels zusammenstoßender Stäbe ermittelt.

[1]) Vgl. A. Teichmann, Gedankengänge zur Flatterberechnung. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (21. 9. 39), Lfg. 6.

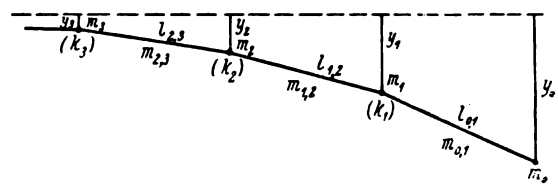


Bild 1. Ersatzsystem für Biegeschwingungen.

$$V = \frac{1}{2}\sum k_i\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{l_{i,i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i,i-1}}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum (\Delta^2 y_i)^2 k_i.$$

Nach Ansatz der Lagrangeschen Gleichungen in der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0$$

ergibt sich bei $2n$ zur Flügelmitte symmetrisch gelegenen Gelenken des Gesamtflügels unter Zusammenfassung entsprechender Glieder ein System von n linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Lösungsansatz $y_i(t) = Y_i \sin \nu t$ erhält man die auf Tafel 1 dargestellte Frequenzdeterminante.

Aus dieser Determinante lassen sich in bekannter Weise die Frequenzen und der Amplitudenverlauf der ungekoppelten Biegeschwingungen symmetrischer und antisymmetrischer Art errechnen. Für die Auswertung empfiehlt es sich, in gleichen Intervallen feste Werte ν^2 anzunehmen und für diese Werte die Determinante zu berechnen. Durch Anwendung einer der bekannten Interpolationsformeln erhält man das Polynom für ν^2, aus dem sich die Wurzeln in einfacher Weise ermitteln lassen. — Nach Einsetzen der gefundenen ν^2-Werte ergeben sich die y_i durch Auflösen des gewonnenen linearen Gleichungssystems.

b) Reine Drehschwingungen des freien Flügels.

Der Flügel soll als ein Zusammenhang von einzelnen Abschnitten angesehen werden, von denen näherungsweise angenommen wird, daß das Trägheitsmoment und die Verdrehsteifigkeit innerhalb eines jeden solchen Abschnitts konstant sei, Bild 2. Die Drehwinkel des schwingenden Flügels sollen innerhalb eines jeden Abschnittes als linear verlaufend angenommen werden. An den Schnittstellen zweier zusammenstoßender Abschnitte sollen wiederum Einzelmassen mitberücksichtigt werden.

Die Drehenergie des Flügels läßt sich in dieser Form angeben durch

$$T = \frac{1}{2}\sum J_i \dot{\beta}_i^2 + \frac{1}{6}\sum J_{i,i+1}(\dot{\beta}_i^2 + \dot{\beta}_i\dot{\beta}_{i+1} + \dot{\beta}^2{}_{i+1})$$

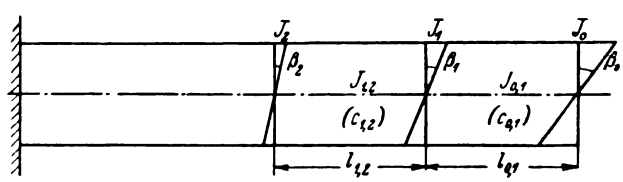


Bild 2. Ersatzsystem für Drehschwingungen.

Digitized by Google

Tafel 1. Frequenzdeterminante für Biegeschwingungen eines symmetrischen Systems mit $2n$-Gelenken.
Obere Vorzeichen: Symmetrische Schwingungsformen. Untere Vorzeichen: Antisymmetrische Schwingungsformen.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
-\nu^2\left(m_0+\frac{m_{0.1}}{3}\right)+\frac{k_1}{l_{0.1}^2} & -\nu^2\frac{m_{0.1}}{6}-\frac{k_1}{l_{0.1}}\left(\frac{1}{l_{0.1}}+\frac{1}{l_{1.2}}\right) & \frac{k_1}{l_{0.1}\cdot l_{1.2}} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\nu^2\frac{m_{0.1}}{6}-\frac{k_1}{l_{0.1}}\left(\frac{1}{l_{0.1}}+\frac{1}{l_{1.2}}\right) & \begin{array}{l}-\nu^2\left(\frac{m_{0.1}}{3}+m_1+\frac{m_{1.2}}{3}\right)\\ +k_1\left(\frac{1}{l_{0.1}}+\frac{1}{l_{1.2}}\right)^2+k_2\frac{1}{l_{1.2}^2}\end{array} & \begin{array}{l}-\nu^2\frac{m_{1.2}}{6}-\frac{k_1}{l_{0.1}\cdot l_{1.2}}\\ -\frac{k_1+k_2}{l_{1.2}^2}-\frac{k_2}{l_{1.2}\cdot l_{2.3}}\end{array} & \frac{k_2}{l_{1.2}\cdot l_{2.3}} & 0 & 0 \\
\hline
\frac{k_1}{l_{0.1}\,l_{1.2}} & \begin{array}{l}-\nu^2\frac{m_{1.2}}{6}-\frac{k_1}{l_{0.1}\cdot l_{1.2}}\\ -\frac{k_1+k_2}{l_{1.2}^2}-\frac{k_2}{l_{1.2}\cdot l_{2.3}}\end{array} & \begin{array}{l}-\nu^2\left(\frac{m_{1.2}}{3}+m_2+\frac{m_{2.3}}{3}\right)+\frac{k_1}{l_{1.2}^2}\\ +k_2\left(\frac{1}{l_{1.2}}+\frac{1}{l_{2.3}}\right)^2+\frac{k_3}{l_{2.3}^2}\end{array} & — & — & 0 \\
\hline
0 & \frac{k_2}{l_{1.2}\cdot l_{2.3}} & — & — & — & \frac{k_{n-1}}{l_{n-2,n-1}\cdot l_{n-1,n}} \\
\hline
0 & 0 & — & — & \begin{array}{l}-\nu^2\left(\frac{m_{n-2,n-1}}{3}+m_{n-1}+\frac{m_{n-1,n}}{3}\right)\\ +\frac{k_{n-2}}{l_{n-2,n-1}^2}+k_{n-1}\left(\frac{1}{l_{n-2,n-1}}\right.\\ \left.+\frac{1}{l_{n-1,n}}\right)^2+k_n\frac{1}{l_{n-1,n}^2}\end{array} & \begin{array}{l}-\nu^2\frac{m_{n-1,n}}{6}-\frac{k_{n-1}}{l_{n-2,n-1}\cdot l_{n-1,n}}\\ -\frac{k_{n-1}+k_n}{l_{n-1,n}^2}-\frac{k_n}{l_{n-1,n}\cdot l_{n,n}}\\ \pm\frac{k_n}{l_{n-1,n}\cdot l_{n,n}}\end{array} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{k_{n-1}}{l_{n-2,n-1}\cdot l_{n-1,n}} & \begin{array}{l}-\nu^2\frac{m_{n-1,n}}{6}-\frac{k_{n-1}}{l_{n-2,n-1}\cdot l_{n-1,n}}\\ -\frac{k_{n-1}+k_n}{l_{n-1,n}^2}-\frac{k_n}{l_{n-1,n}\cdot l_{n,n}}\\ \pm\frac{k_n}{l_{n-1,n}\cdot l_{n,n}}\end{array} & \begin{array}{l}-\nu^2\left(\frac{m_{n-1,n}}{3}+m_n+\frac{m_{n,n}}{3}\right)\mp\nu^2\frac{m_{n,n}}{6}\\ +\frac{k_{n-1}}{l_{n-1,n}^2}+k_n\left(\frac{1}{l_{n-1,n}}+\frac{1}{l_{n,n}}\right)^2\\ +\frac{k_n}{l_{n,n}^2}\mp 2\frac{k_n}{l_{n,n}}\left(\frac{1}{l_{n-1,n}}+\frac{1}{l_{n,n}}\right)\end{array} \\
\hline
\end{array}
= 0
$$

Digitized by Google

Tafel 2. Frequenzdeterminante für Drehschwingungen eines symmetrischen Systems mit $2n$-Gelenken.
Obere Vorzeichen: Symmetrische Schwingungsformen. Untere Vorzeichen: Antisymmetrische Schwingungsformen.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
-\nu^2\left(J_0 \mp \frac{J_{0,1}}{3}\right) \mp c_{0,1} & -\nu^2\frac{J_{0,1}}{6} - c_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\nu^2\frac{J_{0,1}}{6} - c_{0,1} & -\nu^2\left(\frac{J_{0,1}}{3} \mp J_1 \mp \frac{J_{1,2}}{3}\right) \mp c_{0,1} \mp c_{1,2} & -\nu^2\frac{J_{1,2}}{6} - c_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -\nu^2\frac{J_{1,2}}{6} - c_{1,2} & -\nu^2\left(\frac{J_{1,2}}{3} \mp J_2 \mp \frac{J_{2,3}}{3}\right) \mp c_{1,2} \mp c_{2,3} & - & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & - & - & - & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & - & -\nu^2\left(\frac{J_{n-2,n-1}}{3} \mp J_{n-1} \mp \frac{J_{n-1,n}}{3}\right) \mp c_{n-2,n-1} \mp c_{n-1,n} & -\nu^2\frac{J_{n-1,n}}{6} - c_{n-1,n} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -\nu^2\frac{J_{n-1,n}}{6} - c_{n-1,n} & -\nu^2\left(\frac{J_{n-1,n}}{3} + J_n + \frac{J_{n\,n}}{3}\right) \mp \nu^2\frac{J_{n,n}}{6} \mp c_{n-1,n} \mp c_{n,n}(1 \mp 1) \\
\hline
\end{array}
= 0
$$

Digitized by Google

die potentielle Energie durch

$$V = \frac{1}{2}\sum c_{i,i+1}(\beta_{i+1} - \beta_i)^2 = \frac{1}{2}\sum (\Delta\beta_i)^2 c_{i,i+1}.$$

Der Ansatz $\beta(x,t) = \beta(x) \sin \nu t$ liefert nach Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen bei $2n$ symmetrisch zur Flügelmitte gelegenen Abschnittsstoßstellen folgende Frequenzdeterminante, Tafel 2.

III. Angleichung der Federungsgrößen an die gegebenen Steifigkeiten des Flügels.

a) Reine Biegeschwingungen des freien Flügels.

Für die Angleichung der Federungsgrößen soll der gleichförmige Balken zugrunde gelegt werden, dessen Eigenfrequenzen bis zu hoher Genauigkeit leicht angebbar sind. Dieser Balken werde in eine Anzahl von Abschnitten gleicher Länge geteilt, entsprechend werde die Federkonstante in allen Gelenken gleich gesetzt. Durch Gleichsetzen der allgemeinen Lösungen für die Frequenz aus den unter II a) angegebenen Frequenzdeterminanten mit den bekannten Lösungen des gleichförmigen Balkens ergeben sich dann allgemeine Bestimmungsgleichungen für die Federkonstante. Die Lösungen dieser Bestimmungsgleichungen ergaben folgende Werte:

Bezeichnungen:

$k_{(1)} = \lambda_{(1)} \cdot \frac{EJ}{l}$ Federkonstante unter Zugrundelegung der Grundschwingung,

$k_{(2)} = \lambda_{(2)} \cdot \frac{EJ}{l}$ Federkonstante unter Zugrundelegung der 1. Oberschwingung,

l = Länge eines Abschnittes,
EJ = konstante Biegesteifigkeit,
n = Anzahl der Abschnitte.

1. Symmetrische Biegeschwingungen.

n	$\lambda_{(1)}$	$\lambda_{(2)}$	$\lambda_{(3)}$
6	1,0008	1,0497	1,6507
8	1,0002	1,0107	1,1116
9	1,000095	1,006	1,0566

2. Antisymmetrische Biegeschwingungen.

n	$\lambda_{(1)}$	$\lambda_{(2)}$
6	1,0089	1,1989
8	1,0021	1,0374
9	1,00112	1,00503

b) Reine Drehschwingungen des freien Flügels.

Auch für die Angleichung der Drehfederung soll der gleichförmige Balken herangezogen werden. Auf Grund der Forderung der Frequenzgleichheit von Ersatzsystem und wahrem Flügel läßt sich in ähnlicher Weise wie bei den Biegeschwingungen eine allgemeine Beziehung für die Verdrehkonstante eines Abschnittes finden. Es wurden folgende Werte gefunden

$$c = \varkappa \cdot \frac{G J_d}{l}$$

Antisymmetrische Drehschwingungen

n	$\varkappa_{(1)}$	$\varkappa_{(2)}$
6	0,97738	0,822
9	0,9899	0,914

Aus diesen Ermittlungen ergibt sich, daß man für die Federungen gute Näherungswerte erhält, wenn man für vier Abschnitte und mehr setzt:

a) für Biegeschwingungen: $k = \frac{EJ}{l}$

b) für Drehschwingungen: $c = \frac{G J_d}{l}$.

Handelt es sich jetzt um Flügel mit veränderlicher Massen- und Steifigkeitsverteilung, so findet man gute Näherungswerte für die Federungen durch Bildung von

$$k = \frac{1}{\int_0^l \frac{dx}{EJ}} \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{1}{\int_0^l \frac{dx}{GJ_d}},$$

wobei das Integral zweckmäßig von Mitte zu Mitte Abschnitt der an dem betreffenden Gelenk anstoßenden Abschnitte zu nehmen ist.

Bei geringer Änderung der Steifigkeiten innerhalb eines Abschnittes wird es jedoch auch genügen, die Federkonstanten aus

$$k = \frac{EJ}{l}; \quad c = \frac{GJ_d}{l}$$

zu bestimmen, wobei für die Steifigkeiten Mittelwerte zu nehmen sind.

IV. Berechnung der Koppelfrequenzen und Koppelschwingungsformen.

Für die Berechnung der Koppelschwingungen soll an Stelle des wirklichen Flügels ein nach Abschnitt II a und b zusammengesetztes, dem Flügel angepaßtes, stabzugartiges Ersatzsystem zugrunde gelegt werden. Bei geschickter Wahl der Größen des Ersatzsystems darf man erwarten, daß die Frequenzen und Schwingungsformen denen des wirklichen Flügels sehr nahekommen.

Die Koppelschwingungen dieses Ersatzsystems können durch Erweiterung unserer Formeln exakt berechnet werden. Eine solche Rechnung führt jedoch auf eine Determinante höheren Grades, deren Auswertung schwer durchzuführen ist. Da man im allgemeinen nur eine kleine Anzahl von Koppelschwingungen sucht, empfiehlt sich nunmehr die Anwendung des Ritzschen Verfahrens auf unser System.

Hierbei liefern die nach Abschnitt II a und b berechneten »reinen«, d. h. ungekoppelten Schwingungsformen des Ersatzsystems besonders geeignete Ansatzfunktionen für die Rechnung, so daß man im allgemeinen mit der Verwendung der Schwingungsformen 1. und 2. Ordnung für Biegung und Drehung auskommen wird.

Die Anwendung des Ritzschen Verfahrens, d. h. die Benutzung eines Ersatzsystems vorgegebener Formänderungsfähigkeit ist bereits von Borkmann eingehend behandelt worden. Im folgenden sollen deshalb nur die Formeln hingeschrieben werden, die sich bei Anwendung des Ritzschen Verfahrens auf das besonders gewählte Ersatzsystem ergeben.

Wir schreiben die Biege- bzw. Drehamplituden der Koppelschwingung in der Form

$$y(x) = \sum_{l=1}^{p} a_l y_l(x)$$

$$\beta(x) = \sum_{l=1}^{q} b_l \beta_l(x).$$

Hierbei bedeuten die $y_l(x)$ feste Amplituden der reinen Biegeschwingungen, die $\beta_l(x)$ feste Amplituden der reinen Drehschwingung, a_l bzw. b_l zeitlich veränderliche Koeffizienten.

Zur Angabe der gesamten kinetischen und potentiellen Energie der Koppelschwingungen sollen folgende Abkürzungen eingeführt werden:

Hierbei setzen wir fest: Der 1. Faktor der in den Klammern vorkommenden Produkte bezieht sich auf die $l$te, der 2. Faktor auf die $m$te Schwingungsform.

Digitized by Google

$$F_{lm} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_{i,i+1}}{6} (2\, y_i\, y_i + y_i\, y_{i+1} + y_{i+1}\, y_i + 2\, y_{i+1}\, y_{i+1})_{lm} + \frac{m_{n,n+1}}{12} (2\, y_n\, y_n + y_n\, y_{n+1} + y_{n+1}\, y_n + 2\, y_{n+1}\, y_{n+1})_{lm} + \sum_{i=0}^{n} m_i\, y_i\, y_{i\,lm}$$

y_{n+1} sei für symmetrische Schwingungen $= y_n$, für antisymmetrische $= -y_n$. Entsprechend sei auch β_{n+1} definiert.

$$G_{lm} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_{i,i+1}\, s_{i,i+1}}{6} (2\, y_i \beta_i + y_i \beta_{i+1} + y_{i+1} \beta_i + 2\, y_{i+1} \beta_{i+1})_{lm} + \frac{m_{n,n+1}\, s_{n,n+1}}{12} (2\, y_n \beta_n + y_n \beta_{n+1} + y_{n+1} \beta_n + 2\, y_{n+1} \beta_{n+1})_{lm} + \sum_{i=0}^{n} m_i\, s_i\, y_i \beta_{i\,lm}$$

$$H_{lm} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{J_{i,i+1}}{6} (2\beta_i\beta_i + \beta_i\beta_{i+1} + \beta_{i+1}\beta_i + 2\beta_{i+1}\beta_{i+1})_{lm} + \frac{J_{n,n+1}}{12} (2\beta_n\beta_n + \beta_n\beta_{n+1} + \beta_{n+1}\beta_n + 2\beta_{n+1}\beta_{n+1})_{lm} + \sum_{i=0}^{n} J_i \beta_i \beta_{i\,lm}$$

$$P_{lm} = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2} \Delta^2 y_i \Delta^2 y_{i\,lm}$$

$$Q_{lm} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_{i,i+1}}{2} \Delta \beta_i \Delta \beta_{i\,lm} + \frac{c_{n,n+1}}{2} \Delta \beta_i \Delta \beta_{i\,lm}.$$

Damit werden nun die Energien:

$$T = \sum_{l=1}^{p} \mathring{a}_l^2 F_{ll} + 2 \cdot \sum_{l=1}^{p} \sum_{m=1}^{q} \mathring{a}_l \mathring{b}_m G_{lm} + \sum_{m=1}^{q} \mathring{b}_m^2 H_{mm}$$

$$V = \sum_{l=1}^{p} a_l^2 P_{ll} + \sum_{m=1}^{q} b_m^2 Q_{mm}.$$

Die Gleichungen von Lagrange liefern die Frequenzdeterminante, der wir folgende symbolische Form geben können:

$$\begin{vmatrix} -\nu^2 F_{ll} + P_{ll} & -\nu^2 G_{lm} \\ -\nu^2 G_{lm} & -\nu^2 H_{mm} + Q_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Hauptminoren, die die gesamten F bzw. H enthalten, haben nur Glieder in der Hauptdiagonale. Dies erklärt sich aus den Orthogonalitätseigenschaften der reinen Schwingungsformen.

V. Verbesserung der Koppelschwingungen.

Man setzt:

$$y(x) = \sum_{l=1}^{p} a_l\, y_l(x); \qquad \beta(x) = \sum_{l=1}^{p} a_l \beta_l(x),$$

wobei die $y_l(x)$ und $\beta_l(x)$ zusammengehörige feste Amplituden einer Koppelschwingung, die a_l deren zeitlich veränderliche Koeffizienten bedeuten.

Zur Darstellung der kinetischen und potentiellen Energie der verbesserten Koppelschwingungsformen sollen neben den bereits definierten Größen F_{lm}, G_{lm} und H_{lm} bzw. P_{lm} und Q_{lm} folgende neue Größen eingeführt werden:

$$L_{lm} = F_{lm} + G_{lm} + G_{ml} + H_{lm},$$
$$S_{lm} = P_{lm} + Q_{lm}.$$

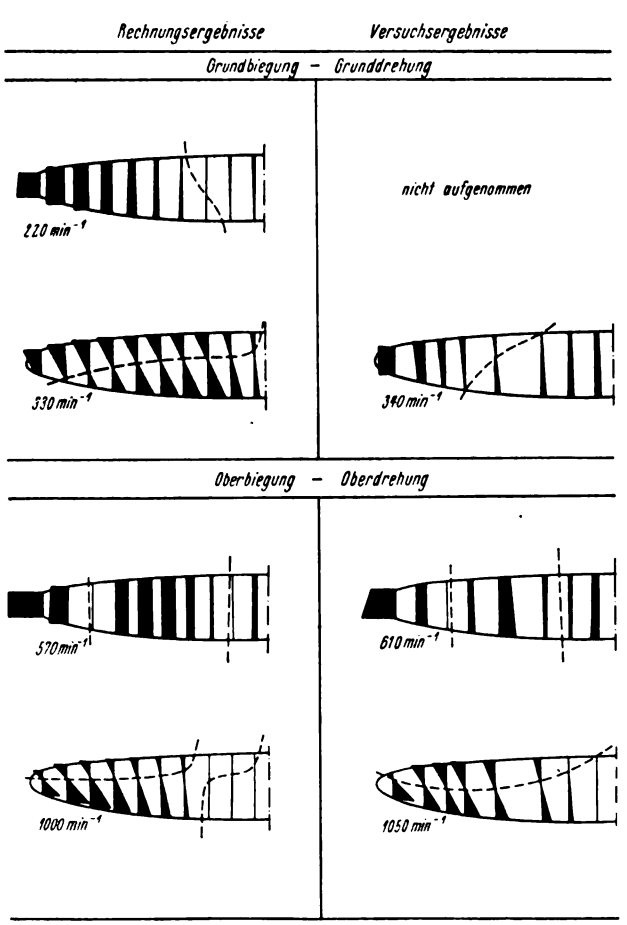


Bild 3. Symmetrische Schwingungsformen.

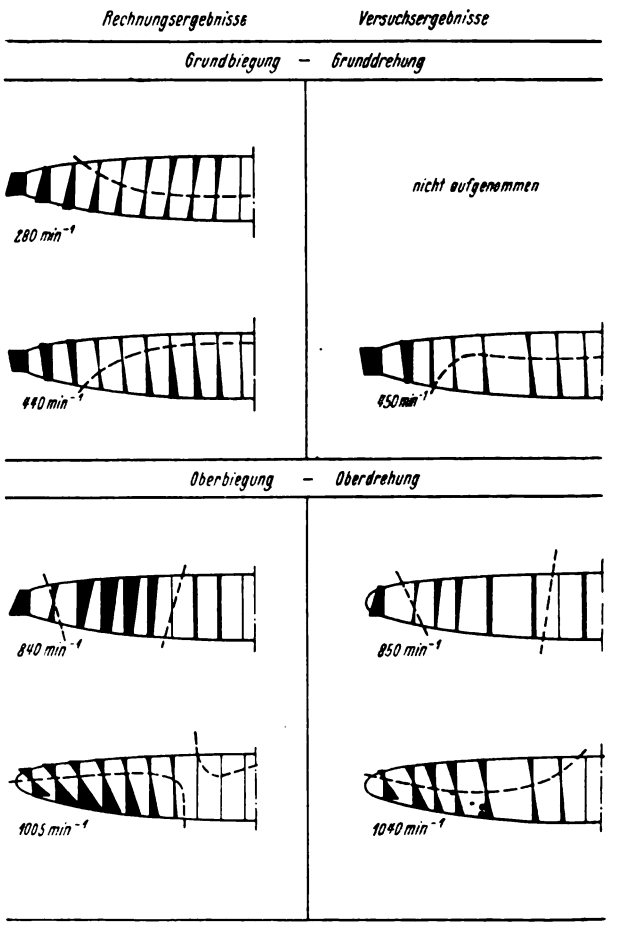


Bild 4. Antisymmetrische Schwingungsformen.

Digitized by Google

Die Energien lassen sich dann in folgender Form schreiben:

$$T = \sum_{l,m=1}^{p} \mathring{a}_l \mathring{a}_m L_{lm}$$

$$V = \sum_{l,m=1}^{p} \mathring{a}_l \mathring{a}_m S_{lm}.$$

Daraus ergibt sich wieder die Frequenzdeterminante, der wir nun folgende symbolische Form geben:

$$-\nu^2 L_{lm} + S_{lm} = 0.$$

Aus dieser Determinante errechnen sich die besseren Koppelfrequenzen- bzw. Schwingungsformen des Flügels.

VI. Vergleich der errechneten Eigenfrequenzen und Schwingungsformen mit Versuchswerten an einem Flügel.

Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen eines Flügels eines mehrmotorigen Flugzeuges sind nach dem vorgenannten Verfahren berechnet worden. Hierbei wurde für die Bestimmung der reinen Biege- bzw. Drehschwingungen der gesamte Flügel in acht symmetrisch zur Rumpfmitte gelegene Abschnitte unterteilt. Für die Ermittlung der Koppelschwingungen sind jeweils nur lineare Kombinationen von symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungsformen der reinen Grundbiege-, Grunddreh-Schwingung bzw. Oberbiege-, Oberdreh-Schwingung berechnet worden. Eine Verbesserung erwies sich als unnötig. Die Ergebnisse befinden sich in Bild 3 und 4. Ein Vergleich der Ergebnisse mit den Versuchswerten zeigt gute Übereinstimmung.

Digitized by Google

Einflüsse auf die Zeit- und Dauerfestigkeit der Werkstoffe.

Von F. Bollenrath*).

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Eine Reihe von Umständen werden angeführt, die zeigen, wie sehr sich der Verlauf der Beanspruchung auf Zeit- und Dauerfestigkeit im praktischen Betrieb von den bei der Materialprüfung der Technik meist herrschenden Verhältnissen unterscheidet. Solche Einflüsse sind z. B. Betriebsunterbrechungen, periodisch wechselnde Spannungsgrenzen und Mittelspannungen mit periodischer Folge weniger Gruppen und Beanspruchungszustände, statistische Änderungen und Aufeinanderfolge der Spannungsgrenzen und Mittelspannungen, Reibkorrosion in Einspannstellen und Kerbeinflüsse. An Hand einiger dem Flugzeugbau entnommener Beispiele wird auseinandergesetzt, wie die Materialprüfung der Technik derartige Einflüsse in Abwandlung der seit Wöhler meist üblichen Prüfverfahren bei der Untersuchung der Werkstoffe auf ihre Festigkeit gegenüber wechselnden Beanspruchungen berücksichtigen kann, um dem Konstrukteur brauchbare Unterlagen für eine bessere Ausnutzung der Werkstoffe zu schaffen. Zahlreiche richtungsweisende Versuchsergebnisse werden besprochen.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Beanspruchung im Betrieb und bei der Prüfung.
3. Zusammenfassung.

1. Einleitung.

In der Werkstoffprüfung der Technik wird die Untersuchung der Werkstoffe hinsichtlich ihrer Festigkeit gegenüber schwingender Beanspruchung vorzugsweise nach dem von Wöhler angegebenen Verfahren angestellt. Zwischen gleichbleibenden Spannungsgrenzen erfolgt ein periodischer Wechsel der Beanspruchung einfacher Probestäbe entweder bis ein Bruch eintritt oder wenigstens mit mehreren Millionen Lastspielen. Hierbei folgert man aus der durchschnittlichen Abhängigkeit der Spannungsgrenzen von der Lastwechselzahl bis zum Bruch, daß bei Unterschreiten gewisser Spannungsgrenzen praktisch beliebig viele Lastwechsel ohne Bruch ausgehalten werden. Diese Prüfverfahren haben gute Dienste bei der Entwicklung von Werkstoffen mit hoher Dauerfestigkeit geleistet und sind für den Vergleich verschiedener Werkstoffe miteinander unerläßlich.

Bei der Verwendung der Werkstoffe für technische Bauwerke sind nun viele Einflußgrößen wirksam, die in verschiedenem Maße die Festigkeit gegenüber schwingender Beanspruchung ändern und in der Werkstoffprüfung manchesmal nicht oder nur z. T. berücksichtigt werden. Hiervon seien einige angeführt, wie z. B. Form und Größe des Bauteiles, Oberflächenbeschaffenheit, mechanische Bearbeitung, Temperatur, Einflüsse chemischer Natur, Art der Spannungsverteilung, sowohl infolge der Form, der äußeren Lasten als auch der Eigenspannungen, und zeitlicher Spannungsverlauf.

Im Rahmen eines Berichtes würde es zu weit führen, wollte man die Wirkung all dieser Einflüsse auch nur annähernd umfassend und eingehend behandeln. Eine Reihe betrieblicher Umstände wird auch bereits in großem Umfange bei der Prüfung der Werkstoffe für bestimmte Verwendungszwecke berücksichtigt. Daher sollen sich die folgenden Ausführungen auf einige Einflüsse beschränken, die zunehmend dadurch Bedeutung gewinnen, daß man bei neuzeitlichen technischen Bauwerken bestrebt ist, in einem unseren Kenntnissen entsprechenden Maße den Werkstoff bis an die Grenzen seiner Tragfähigkeit auszunutzen und so Werkstoff oder, was gleichbedeutend ist, Gewicht zu sparen. Dies ist ein Merkmal des modernen Leichtbaus, das deutlich bei den jüngeren Schöpfungen der Technik, bei den schnellen Verkehrsmitteln wie Kraftfahrzeugen und besonders Luftfahrzeugen hervortritt. Wirtschaftlichkeit und Höchstleistung werden in Zukunft fordern, daß noch mehr als bisher die eingeschlagenen Wege beschritten werden.

2. Beanspruchung im Betrieb und bei der Prüfung.

Der Aufbau der Dauerfestigkeitsprüfmaschinen bedingt fast durchweg einen sinusförmigen Ablauf der Spannungswechsel zwischen gleichbleibenden Grenzen, so daß unter Berücksichtigung der Wechselfrequenz ein kosinusförmiger Verlauf der Belastungsgeschwindigkeit erfolgt. Darüber, wie sich die Wöhlerkurve verlagert, wenn der zeitliche Spannungsverlauf sich ändert, ist meines Wissens nur sehr wenig gearbeitet worden, obwohl tatsächlich — wie später besprochen wird — Abweichungen von dem sinusförmigen Verlauf sehr oft vorkommen. Einen Grenzfall stellen Dauerschlagversuche dar, die den Einfluß einer stoßweisen Beanspruchung untersuchen, wobei jedoch die Wirkung der Schlaggeschwindigkeit selten näher verfolgt wird. Bezogen auf die Lastgrenzen werden jeweils Einstufenversuche durchgeführt bis zum Bruch bzw. bis zur Ermittlung der Dauerfestigkeit.

Die Wöhlerkurve ist also das Ergebnis von lauter Einstufenversuchen. Entsprechende Beanspruchungen kommen bei Kraft- und Arbeitsmaschinen, die in langen ununterbrochenen Betriebszeiten mit gleicher Leistung laufen, tatsächlich überwiegend vor, so daß für dieses Anwendungsgebiet die Dauerfestigkeitswerte unter Berücksichtigung einiger weiterer, von Fall zu Fall sich ändernder Einflußgrößen wie Maßstab, Form und ähnliche die Dauerfestigkeit eine ausreichende Unterlage für die Werkstoffwahl und Bauteilmessung bietet; dies ist besonders zutreffend bei vielen ortsfesten Maschinen, die für sehr lange Lebenszeit und wirtschaftlichen Verbrauch gebaut werden, und bei denen das Gewicht keine große Rolle spielt, so daß schon zur Hintanhaltung des Verschleißes nur niedrige Beanspruchungen zugelassen werden.

Besondere Umstände können es gelegentlich erfordern, daß unter Inkaufnahme einer beschränkten Lebenszeit eines Bauteiles gleichbleibende Spannungsausschläge zugelassen werden, die höher als die Dauerfestigkeit sind. Man geht dann bewußt in das Gebiet der Zeitfestigkeit hinein. Hier erhebt sich nun die Frage, ob die Wöhlerlinie noch eine ausreichende Grundlage für die Bemessung bietet. — Zunächst erscheint es erforderlich, zur Abschätzung der Sicherheit auch bei begrenzter Lastwechselzahl bis zum Bruch die Wöhlerkurven bis zu Spannungsausschlägen aufzunehmen, die über die tatsächlich beabsichtigten Beanspruchungen hinausreichen. Ferner ist es notwendig, durch eine größere Anzahl von Proben den Umfang des Bruchbereiches festzulegen. Man erhält dann Wöhlerkurven nach Bild 1, die von der statischen Festigkeit bis zur Dauerfestigkeit reichen und den Bruchbereich begrenzen.

Vollständige Wöhlerkurven werden auch benötigt, wie später noch näher besprochen wird, als Unterlagen zu Unter-

*) Vorgetragen vor der 28. Verbandsversammlung des Deutschen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik in München am 12. und 13. Juni 1940.

Digitized by Google

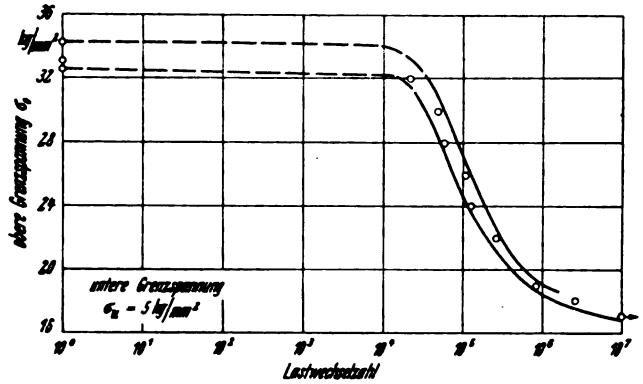


Bild 1. Wöhlerkurve für eine Aluminium-Knetlegierung mit 6 % Mg und 1 % Zn.

suchungen über die Festigkeit bei wechselnden Grenzen der Spannungsausschläge durch Betriebsbeanspruchungen. Die Wöhlerkurve zeigt im wesentlichen, daß die Sicherheit besser nach der Spannungshöhe als nach der Lastwechselzahl bis zum Bruch beurteilt wird. Dann ist der vollständigen Wöhlerkurve zu entnehmen, daß von der statischen Festigkeit bis zum Beginn des Steilabfalles bei Tausenden Lastwechseln nur eine geringe Abnahme des Spannungsausschlages entspricht. Die Dauerbrüche streuen aber in einem mehr oder weniger breiten Bereich, dem sogenannten Brüchbereich; danach kann man als zuverlässige Bruchlastwechselzahlen nur diejenigen ansehen, die durch die untere Begrenzungskurve des Bruchbereiches gekennzeichnet sind.

Liegen Wählerkurven für verschiedene untere Grenzspannungen vor, so lassen sich aus ihnen vollständige Zeit- und Dauerfestigkeitsschaubilder, Bild 2, zusammenstellen. Das als Beispiel gebrachte Diagramm bezieht sich auf vergütete Chrom-Molybdänstahlrohre (28 mm Außendurchmesser, 1 mm Wandstärke) mit einer Querbohrung von 2 mm Durchmesser in Rohrmitte. In Abhängigkeit von der Mittelspannung sind die oberen und unteren Grenzspannungen eingezeichnet für die auf $5 \cdot 10^6$ Lastwechsel bezogenen Dauerfestigkeiten und weiter für die Spannungsgrenzen, die bei 10^6, 10^5 und 10^4 Lastwechseln der unteren Grenze des Bruchbereiches zugehören. Aus derartigen Diagrammen lassen sich verschiedene Arten von Wöhlerkurven ableiten, die normalerweise bei der Werkstoffprüfung nicht aufgenommen werden, jedoch praktisch wertvoll sein können wie z. B. für gleichbleibende Mittelspannungen oder für gleibleibende obere Grenzspannungen. Der von einem derartigen Schaubild bestrichene Beanspruchungsbereich kommt für die tatsächlichen Verhältnisse nicht zur Anwendung, sondern wird entsprechend den verschiedenen Werkstoffen, entsprechend der Zuverlässigkeit der Unterlagen über die zu erwartenden Beanspruchungen usw. begrenzt durch gewisse Sicherheitszahlen, die sich auf die Streckgrenze, Bruchfestigkeit oder auch auf Verformungen beziehen können.

Der Bruch selbst ist jedoch erst das Endergebnis eines über viele Lastwechsel sich erstreckenden Bruchvorganges, wobei diese Lastwechselzahl schon an sich je nach Art der Betriebsbedingungen sehr verschieden groß sein kann. Aus diesem Grunde dürfte die Lastwechselzahl bei Bruchbeginn als Bezugsgröße für die Sicherheit vorzuziehen sein. Der Bruch ist in seinen ersten Anfängen kaum feststellbar und es ist auch noch kein hierfür geeignetes und allgemein verwendbares Verfahren nachgewiesen. Erfahrungen liegen bisher im wesentlichen nur darüber vor, in welchem Maße eine Reihe von Lastspielen zwischen höheren Spannungsgrenzen sich auf die Dauerfestigkeit oder auch auf die Zeitfestigkeit zwischen niedrigen Spannungsgrenzen auswirkt. Zu erwähnen sind hier z. B. Arbeiten von H. F. Moore und Wishart[1]), H. F. Moore und I. B. Kommers[2]),

[1]) Proc. Amer. Soc. Test. Mater. Bd. 33 (1933) II, S. 334/47.
[2]) Univ. Illinois Bull. Eng. Exp. Station Bd. 19 (1922) Bull. Nr. 124.

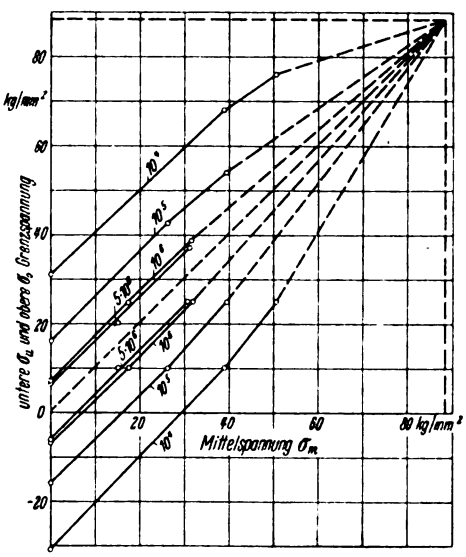


Bild 2. Zeit- und Dauerfestigkeitsschaubild für vergütete Chrom-Molybdän-Stahlrohre, Fliegwerkstoff 1452, mit einer Querbohrung mit 2 mm Dmr.

H. F. Moore und T. Jasper[3]), I. B. Kommers[4]), H. B. Wishart und S. W. Lyon[5]), H. J. French[6]), Müller-Stock[7]) u. a. m. Diese Verfahren kann man als Zweistufenversuche bezeichnen, wobei als besonderes Merkmal die ununterbrochene Aufeinanderfolge der Lastwechsel in den einzelnen Stufen gelten kann, und die höhere Stufe der niedrigen vorausgeht oder umgekehrt.

Alle Lastwechselzahlen, die zu einer Abminderung der Dauerfestigkeit oder einer Zeitfestigkeit führen, liegen auf einer sogenannten Schadenlinie. Ob diese Art der Schadenlinie die Lastwechselzahlen des Rißbeginns kennzeichnet, ist noch nicht eindeutig nachgewiesen. Mit welcher Empfindlichkeit andere Verfahren zur Ermittlung der ersten Schädigung arbeiten, ist durch Vergleichsuntersuchungen noch wenig geklärt. Gedacht ist hier z. B. an die Arbeiten von F. Oshiba[8]), der die Abhängigkeit der Kerbschlagbiegefestigkeit von der Zahl der Lastspiele untersuchte. Bei den erwähnten Methoden ist unangenehm die große Menge der erforderlichen Proben und die lange Versuchsdauer.

Ein anderer Weg wurde von F. Bollenrath und W. Bungardt[9]) eingeschlagen, die nach Bild 3 bei jeweils gleich-

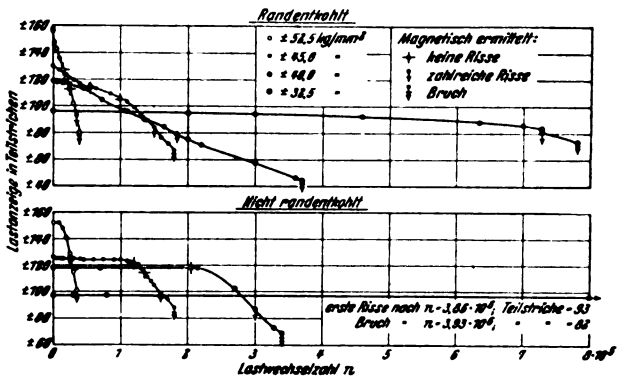


Bild 3. Abhängigkeit der Verdrehspannungsgrenzen von der Zahl der Lastwechsel für Spanndrähte bei verschiedenen Verformungsgrenzen.

[3]) Univ. Illinois Bull. Eng. Exp. Station Bd. 20 (1923) Bull. Nr. 37, S. 19; 21 Bd. 21 (1924) Bull. Nr. 142 S. 49.
[4]) Engineering Bd. 143 (1937) S. 260/22 u. 676/78; Proc. Amer. Soc. Test. Mater. Bd. 38 (1938) II, S. 249/68.
[5]) Preprint 32 Amer. Soc. Met. Cong. (1936) Oct. 19/23.
[6]) Trans. Amer. Soc. Steel Treat. Bd. 21 (1933) S. 899/946.
[7]) Mitt. Kohle- und Eisenforschung G. m. b. H. Bd. 2 (1938) S. 83/107.
[8]) Sci. Rep. Tohoku Univ. Bd. 23 (1934/35) S. 589/611 und Bd. 26 (1937) S. 232.
[9]) Archiv f. d. Eisenhüttenwesen Bd. 12 (1938/39) S. 213/18.

Digitized by Google

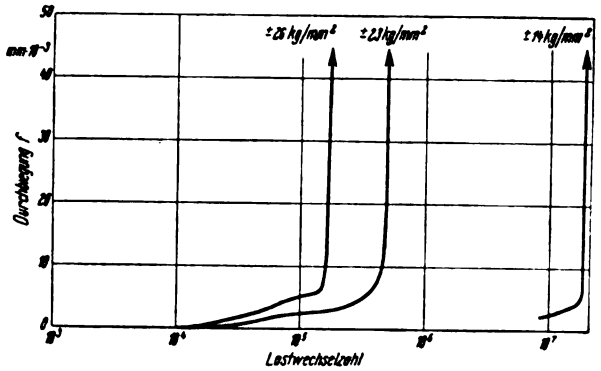


Bild 4. Abhängigkeit der Durchbiegungszunahme von der Lastwechselzahl für Duralumin bei umlaufender Biegung.

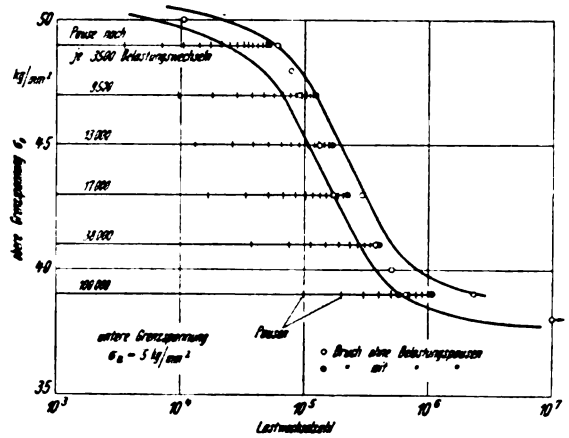


Bild 5. Einfluß der Entlastungspausen auf die Wöhlerfestigkeit eines austenitischen Chrom-Nickelstahles (18 % Cr, 8 % Ni).

bleibenden Grenzen für die Verformungsamplitude die Abhängigkeit der Spannungsausschläge von der Lastwechselzahl beobachteten und gleichzeitig nach dem Magnetpulververfahren die Bildung von Anrissen verfolgten. In dem Nachlassen der Spannung, das um so früher beginnt, je höher die Verformungsausschläge sind, macht sich eine Verminderung der Tragfähigkeit und damit eine Schädigung bemerkbar. Prinzipiell identisch mit diesem Verfahren ist die Ableitung der Schädigung aus einer mit der Lastwechselzahl zunehmenden Verformung bei gleichbleibenden Spannungsamplituden. So deutet z. B. nach Bild 4 in den Durchbiegungskurven bei umlaufender Biegung nach gewissen Lastwechselzahlen die starke Verformungszunahme auf eine Abminderung der Tragfähigkeit hin. Vergleichsuntersuchungen bewiesen, daß der Grad der Schädigung, der nach den vorhin beschriebenen verschiedenen Verfahren festgestellt wird, nicht der gleiche ist. Dies ist ohne weiteres einzusehen, wenn man bedenkt, daß je nach dem Verfahren eine andere Frage beantwortet wird, nämlich ob die Dauerfestigkeit, eine bestimmte Zeitfestigkeit, die Kerbschlagzähigkeit oder die weitere Tragfähigkeit beim Einstufenversuch beeinträchtigt wird. Lange bevor die Durchbiegung stärker zunimmt, wird z. B. bereits die Dauerfestigkeit und Zeitfestigkeit vermindert. Es ist also fraglich, ob bei der verschiedenen Fragestellung die Schädigungskurven in eine bestimmte Beziehung miteinander gebracht werden können. Daher bedarf die Frage, welche Schadenlinie der Bemessung eines Bauteiles zugrunde gelegt werden soll, besonderer Aufmerksamkeit.

Für praktisch vorkommende Beanspruchungsverhältnisse werden die Schadenlinien der beschriebenen Art nur selten nützlich sein können. Bauteile, die zunächst mit einer bestimmten Zahl von Lastwechseln in ununterbrochener Folge im Gebiete der Zeitfestigkeit und dann auf Dauerfestigkeit beansprucht werden, gibt es nur wenige. Hiermit soll in keiner Weise die Bedeutung solcher Untersuchungen für die Erforschung der Werkstoffe hinsichtlich der Festigkeit bei wechselnder Beanspruchung unterschätzt

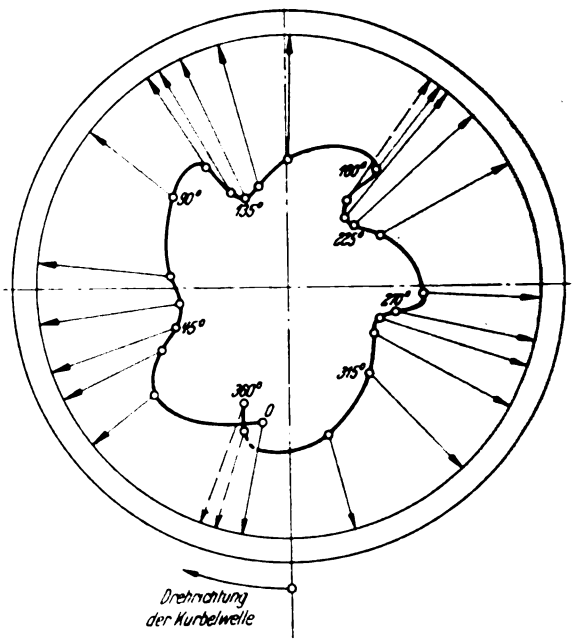


Bild 6. Verlauf des Druckes im Hubzapfenlager eines Sternmotors nach Größe und Richtung während einer Kurbelwellenumdrehung.

werden. Alle Arbeiten der erwähnten Art sind unerläßlich für die Grundlagenforschung. Gleichzeitig gilt es aber, die Beziehungen zwischen den durch diese Arbeiten gewonnenen Ergebnissen und den Fragen aufzudecken, die durch die effektive Betriebsbeanspruchungen gestellt werden. Auf einige aus dieser Fragestellung herrührende Aufgaben soll im folgenden näher eingegangen werden.

Zunächst folgen, selbst wenn die Spannungsamplituden zwischen gleichen Grenzen bleiben, fast nie alle Lastspiele ohne Pausen aufeinander. Daraus erhebt sich die Frage nach dem Einfluß der Betriebspausen auf die Zeit- und Dauerfestigkeit, die man im großen und ganzen durch die Arbeiten von K. Daeves, E. Gerold und E. H. Schulz[10]) an ferritischen Stählen sowie durch die Arbeiten des Instituts für Werkstofforschung der DVL[11]) an den verschiedensten Werkstoffen als beantwortet ansehen kann. Diesen Arbeiten*) nach scheinen weiches Eisen und unlegierte Stähle mit »freiem Ferrit« durch Betriebspausen eine Erhöhung der Lastwechselzahlen bis zum Bruch zu erfahren, die nach den Versuchen der zuerst genannten Verfasser durch Lagerung in den Pausen bei erhöhten Temperaturen verstärkt wird. Sonst ist nach den Arbeiten von F. Bollenrath und H. Cornelius[11]) bei legierten Stählen und den anderen von ihnen untersuchten Werkstoffen kein Einfluß der Betriebspausen auf den Verlauf der Wöhlerkurve vorhanden, wie Bild 5 für einen austenitischen Stahl mit 18% Cr und 8% Ni zeigt. In diesem Beispiel liegen alle Bruchlastwechselzahlen innerhalb des Bruchbereiches für ununterbrochen beanspruchte Proben.

Daß gleich hohe Amplituden um eine gleichbleibende Mittellast wie bei der Materialprüfung aufgebracht werden, ist im praktischen Betriebe oft nicht der Fall. Sehen wir uns z. B. den Druckverlauf in einem Hauptpleuellager eines Sternmotors während einer Kurbelwellenumdrehung, Bild 6, an, so stellen wir eine periodische Folge der Belastungswechsel mit gleicher Häufigkeit zwischen wenigen abgestuften Grenzen und um abgestufte Mittellasten fest. Die Frequenz ist gleich der halben Drehzahl, da es sich um einen Viertaktmotor handelt. Noch an einem weiteren Beispiel möchte ich zeigen, wie die Betriebsbeanspruchung von der Praxis der Materialprüfung abweicht, nämlich in der Blatt-

[10]) Stahl und Eisen, Bd. 60 (1940) S. 100/03.
[11]) F. Bollenrath und H. Cornelius, Z. VDI Bd. 84 (1940) S. 295/99; F. Bollenrath, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, Ergänzungsband S. 147/57.
*) Siehe auch 18).

Digitized by Google

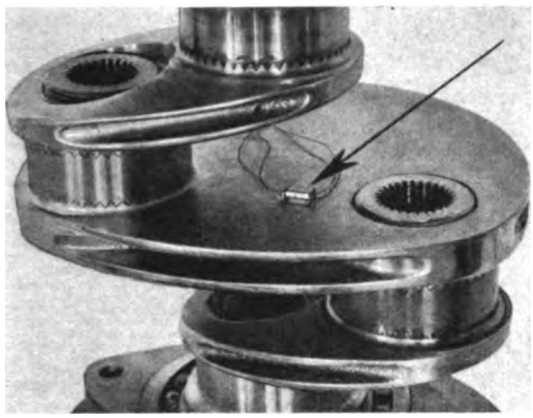


Bild 7. Elektrischer (induktiver) Dehnungsmesser des Instituts für Triebwerkmechanik der DVL.

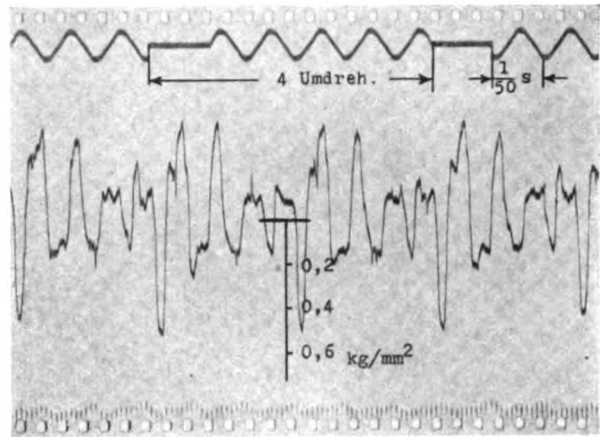


Bild 8. Spannungsverlauf an einer Luftschraubenwurzel, gemessen mit dem in Bild 7 gezeigten Gerät (Motor BMW 132, $n = 2150$/min).

wurzel einer Luftschraube, die in einen Reihenmotor einbaut ist. Vorerst soll ein Dehnungsmesser gezeigt werden, der es erlaubt, den Spannungsverlauf an Triebwerksteilen im Betrieb zu messen. In Bild 7 ist ein solcher Dehnungsschreiber auf einer Hirth-Kurbelwelle angebracht. Es handelt sich hier um ein elektrisch induktiv arbeitendes sehr kleines Gerät, das im Institut für Triebwerksmechanik der DVL entwickelt wurde; es wiegt nur 0,5 g und ist 10 mm lang. Die Befestigung erfolgt durch Aufkitten und verträgt eine Beanspruchung von etwa 1500 g. Mit diesem Gerät, das außerordentlich empfindlich mißt, wurde der Spannungsverlauf an der Blattwurzel gemessen; Bild 8 zeigt einen solchen Spannungsschrieb, der bei einer Drehzahl von 2150/min aufgenommen wurde. Wir sehen, daß es sich um sinusförmige Beanspruchungen handelt mit einer Frequenz, die gleich der halben Drehzahl ist, weil die Luftschraube an einen Viertaktmotor montiert ist. Durch Überlagerung verschiedener sinusförmiger Schwingungen tritt eine Schwebung auf, aus der mit großer Annäherung sich Spannungswechsel ergeben, die mit gleicher Häufigkeit in wenige abgestufte Spannungsgrenzen eingeordnet werden können. Für die praktische Untersuchung eines Werkstoffes auf die Eignung für derartige Beanspruchungen wird man — wenn die Untersuchung nicht im Motor selbst durchgeführt wird — gleich große Spannungsausschläge immer zu Gruppen zusammenfassen und aus versuchstechnischen Gründen gruppenweise aufbringen. Welche Zahl gleicher Amplituden eine Gruppe jeweils umfassen soll, und in welcher Reihenfolge die verschiedenen Gruppen aufeinanderfolgen müssen, damit man der Beanspruchbarkeit im praktischen Betrieb möglichst nahekommt, ist noch zu klären.

Einige Hinweise geben hier bereits vorliegende Untersuchungen, wie sie z. B. F. Körber und M. Hempel[12]) durchführten. Bild 9 bringt ein Ergebnis einiger Mehrstufenversuche, die im Sinne der Betriebsbeanspruchung angestellt wurden. Es handelt sich im wesentlichen um Zweistufenversuche, in denen zwei verschieden große Gruppen der Biegespannungswechsel aufeinanderfolgen. Danach ist es nicht gleichgültig, welche Lastwechselzahl jede Gruppe enthält. Bei einer Unterteilung in kleinere Gruppen werden viel größere Lastwechselzahlen oberhalb der Dauerfestigkeit von 23 kg/mm² ertragen, als bei der Zusammenfassung großer Lastwechselzahlen. Bemerkenswert ist in dem gezeigten Beispiel, daß die zwischen den Gruppen mit hohen Spannungsausschlägen eingeschalteten Gruppen mit Beanspruchungen in Höhe der Dauerfestigkeit, die Zahl der erträglichen, in dem Gebiet der Zeitfestigkeit liegenden Spannungsausschläge erheblich vermehren können. Auf diese Erscheinung wird später noch näher eingegangen.

Eine den eben beschriebenen Untersuchungen entsprechende Beanspruchung der Triebwerke für Flugzeuge kommt nur zeitweise vor. Für die Kurbelwelle eines Flugmotors bestehen in dem praktischen Drehzahlbereich mehrere Resonanzlagen. Die Drehzahlen der Resonanzbereiche fährt man immer möglichst kurzzeitig, da bei ihnen die absolut höchsten Beanspruchungen auftreten. Die normalen Drehzahlen z. B. beim Reiseflug werden außerhalb der Resonanzbereiche gefahren und damit bleibt die größte Zahl der Lastwechsel innerhalb erheblich niedrigerer Spannungsgrenzen. Bei Drehzahlwechsel oder beim Anfahren müssen einige Resonanzbereiche jedoch immer durchfahren werden, so daß auf eine große Zahl Belastungswechsel zwischen niedrigen, abgestuften Grenzen eine beschränkte Zahl mehrstufiger Wechsel zwischen hohen Grenzen kommen.

Abgesehen hiervon treten höhere Beanspruchungen zwischendurch noch auf wie z. B. beim Start mit Volleistung oder beim Sturzflug usw. Eine Bemessung auf eine beliebig große Zahl der höchsten, beim Durchfahren der Resonanzen auftretenden Beanspruchungswechsel geht nicht an und wird nicht durchgeführt. Ließe man einen Motor dauernd bei einer solchen kritischen Drehzahl laufen, so würde die Kurbelwelle vielleicht 10 oder 20 Stunden halten, bei einer anderen Kritischen vielleicht 50 Stunden, während bei einer dazwischen liegenden Drehzahl die Kurbelwelle viele hundert Stunden hält oder überhaupt nicht bricht. Es kommt demnach darauf an, das Verhalten der Werkstoffe schon bei der Materialprüfung gegenüber solchen in die normalen Beanspruchungen etwa beim Reiseflug eingestreuten gelegentlichen höheren Beanspruchungen prinzipiell zu untersuchen.

Grundsätzlich verschieden von den für ein Triebwerk geschilderten Verhältnissen sind die z. B. für das Tragwerk eines Flugzeuges vorliegenden Arten der Beanspruchungen. Am deutlichsten wird dieser Unterschied vielleicht bei einer Gegenüberstellung eines Beanspruchungsschriebes eines Triebwerkteiles, wie der vorhin gezeigten Luftschraube,

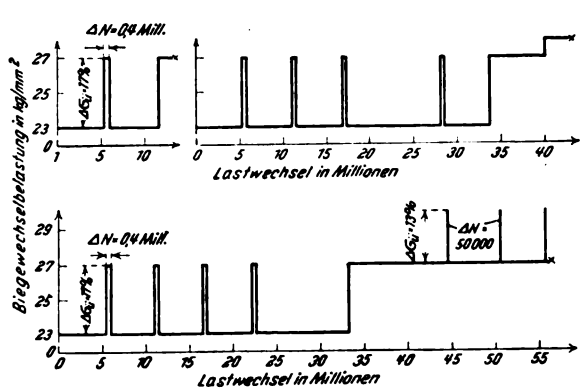


Bild 9. Änderung der Biegewechselfestigkeit eines unlegierten, geglühten Stahls mit 0,2 % C bei Trainierung durch Überlastung (F. Körber).

[12]) F. Körber, Stahl und Eisen Bd. 59 (1939) S. 618/26.

Digitized by Google

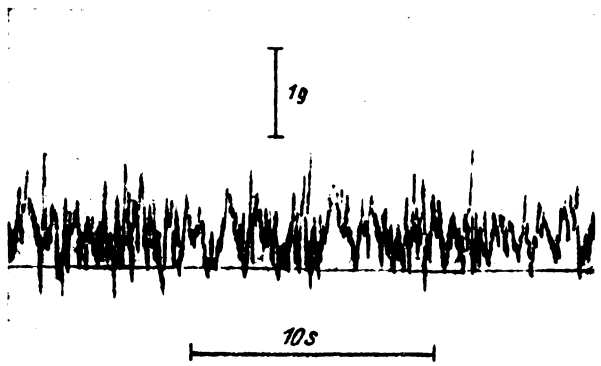


Bild 10. Beschleunigungsverlauf in einem Flugzeug beim Reiseflug infolge Senkrechtböen (He 70, UDAS).

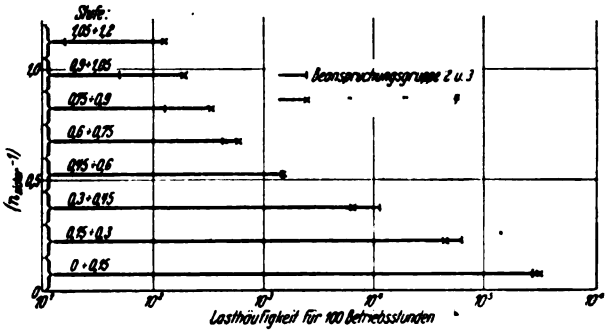


Bild 11. Häufigkeit der Lasten in Vielfachen von ($n_{sicher} - 1$) für 100 Betriebsstunden (umgerechnet auf eine Fluggeschwindigkeit von 350 km/h); ($n_{sicher} - 1$) ist die sichere Last, die infolge der Böen zusätzlich zu der Last im ungestörten und unbeschleunigten Geradeausflug nach den Bauvorschriften für Flugzeuge auftritt.

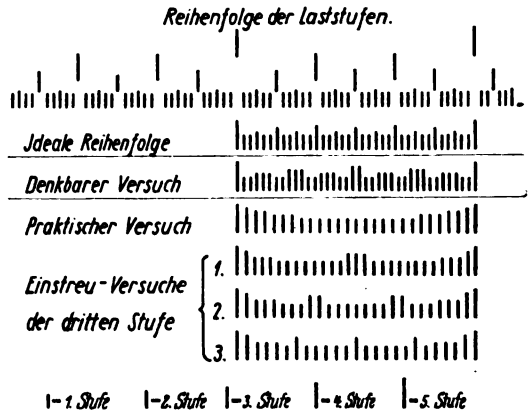


Bild 12. Reihenfolgen der Laststufen (A. Teichmann).

und eines Teiles der Flugzeugzelle. In Bild 10 ist ein Beschleunigungsschrieb eines He 70-Flugzeuges der Lufthansa wiedergegeben, der im Geradeausflug-Reiseflug aufgenommen wurde. Es handelt sich um Senkrechtbeschleunigungen, die das Flugzeug durch Böen erfährt. Die Beschleunigungen wurden mit dem DVL-Beschleunigungsschreiber registriert und lassen unmittelbar auf den Beanspruchungsverlauf im Flügel schließen. Die durchschnittliche Belastung entspricht der Beschleunigung 1 g. Im Gegensatz zu dem periodischen Spannungsverlauf bei einem Triebwerkteil herrscht hier vollkommene Regellosigkeit sowohl in bezug auf die Lastfolge und Lasthöhe als auch bezüglich der Mittellast in jedem Augenblick.

Hier erheben sich die für den Flugzeugbau äußerst wichtigen Fragen: Wie sind unter bester Ausnutzung der Werkstoffe die Bauteile für solche Beanspruchungen zu bemessen, und was kann man mit den Ergebnissen der in der Materialprüfung der Technik üblichen Festigkeitsprüfungen hierbei anfangen? Diese Fragen können vorerst noch nicht endgültig beantwortet werden. Bei ihrer Diskussion ist es wichtig zu berücksichtigen, daß die Flugzeuge aus Gründen, die mit der technischen Entwicklung, Wirtschaftlichkeit und dem Verwendungszweck zusammenhängen, nur eine begrenzte Lebensdauer zu haben brauchen. In Zahlen ausgedrückt heißt dies, daß das Flugzeug nur für eine bestimmte Betriebsstundenzahl oder entsprechend der Fluggeschwindigkeit für eine begrenzte Gesamtflugstrecke ein ausreichend zuverlässiges und sicheres Verhalten aufweisen muß.

Im folgenden soll kurz dargestellt werden, welcher Weg im Flugzeugbau beschritten wurde, um die Festigkeit eines Werkstoffes oder eines Bauteiles gegenüber Beanspruchungen nach Bild 10 festzustellen. Die Beschleunigungsschriebe werden entsprechend der Genauigkeit der Messungen statistisch nach der Häufigkeit ausgewertet, mit der innerhalb bestimmter Stufen Beschleunigungsspitzen auftreten[13]). Die Basis ist die Erdbeschleunigung. Da die Beschleunigungen in einem bekannten Verhältnis zu den Spannungen stehen, ist damit eine Statistik gewonnen, die angibt, wie oft bestimmte Spannungsspitzen innerhalb gewisser Spannungsstufen vorkommen. Ein Beispiel einer solcher Statistik zeigt Bild 11. Da die Einheitsverteilung annähernd symmetrisch zur Grundlast gefunden wurde, hat W. Kaul nach einer einfachen und zugleich auf der sicheren Seite liegenden Möglichkeit zur Aufstellung einer Regel für Belastungsversuche immer zwei gleich große, in Wirklichkeit aber nicht unmittelbar aufeinanderfolgende entgegengesetzt gerichtete Böen zu einem Lastspiel zusammengefaßt und dabei als Mittellast die Belastung des ungestörten Geradeausflugs gewählt. In Bild 11 ist in Anlehnung an die für Wöhlerkurven üblichen Darstellung für die Beanspruchungsgruppen 2 und 3 sowie 4 aufgetragen, wie oft während 100 Betriebsstunden solche Lastwechsel in die Stufen der gewählten Klassen-Teilung hineinragen.

Die für diese Fälle näher zu beantwortende Frage ist: Mit welcher Gesamthäufigkeit hält ein Bauteil oder Werkstoff bei gegebenem Spannungsmaßstab die Statistik aus oder welcher Spannungsmaßstab ist einer gegebenen statistischen Gesamthäufigkeit zuzuordnen? Versuche zur Klärung dieser Frage nennen wir Festigkeitsversuche im Sinne einer Stastitik. Wenn ich nun zu diesen Fragen spreche, folge ich im wesentlichen Überlegungen, die A. Teichmann und E. Gaßner vom Institut für Festigkeit der DVL anstellten. Nach Bild 12 läßt sich die betriebliche und vollkommen willkürliche Reihenfolge der Laststufen vergleichen mit einer idealen Reihenfolge: Unmittelbare Wiederholungen gleicher Stufen kommen nur in der untersten Stufe vor, monoton an- bzw. absteigende Folgen nur zwischen der untersten und der nächst höheren Stufe. Versuche mit einer solchen idealen Reihenfolge sind in Anbetracht der mehreren Millionen Belastungsgänge nicht durchführbar. Faßt man deshalb gleiche Stufen zu Gruppen und noch nach gewissen Monotonien des An- und Abstiegs geordnet zusammen, so vereinfacht man die Reihenfolge zunehmend für einen denkbaren Versuch und einen weniger Aufwand erfordernden praktischen Versuch. Indem man eine Gruppe, z. B. hier zunächst die der dritten Stufe, herausnimmt und in die zu prüfende Reihenfolge nacheinander in verschiedener Aufteilung einstreut, kann man sukzessive den Einfluß der Abweichung von der idealen Reihenfolge feststellen.

Für die Durchführung eines praktischen Versuchs leiten A. Teichmann und E. Gaßner[14]) aus der Flugstatistik für eine gewählte Flugstrecke bzw. -zeit eine Summenkurve K_1 ab, die in der für Wöhlerkurven gebräuchlichen Weise in Bild 13 dargestellt ist. Zur Einschränkung des Versuchsaufwandes wird nach einer im Versuch einhaltbaren Klasseneinteilung die stetig verlaufende Summenkurve K_1 durch eine Treppenlinie K_2 ersetzt, die möglichst gut mit der Summenkurve K_1 übereinstimmt und angibt, mit welcher Häufigkeit H eine bestimmte Laststufe überschritten wird. Die rechts und links von K_2 eingezeichneten

[13]) W. Kaul, Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung I S. 274/88 und Ergänzungsband S. 307/13. München und Berlin 1938.

[14]) Luftwissen Bd. 6 (1939) S. 61/64.

Digitized by Google

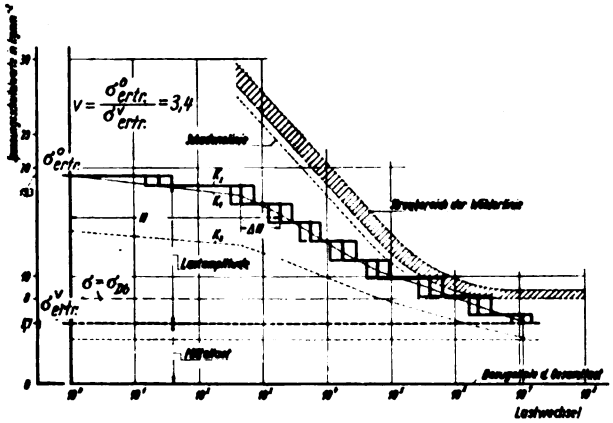


Bild 13. Summarische Darstellung eines Festigkeitsversuches im Sinne der Flugstatistik (E. Gaßner).

Versuchsstück: Rohr 50 · 1 aus Duralumin (Flieg 3115) mit 5 mm Bohrung in der höchstbeanspruchten Faser; $\sigma_B = 46$ kg/mm², $\sigma_{0,2} = 34$ kg/mm². (Zulässige Mindestwerte des Werkstoffs: $\sigma_B = 40$ kg/mm², $\sigma_{0,2} = 28$ kg/mm²).

K_1 = gegebene Summenkurve der Betriebsbelastungen (s. Bild 1)
K_2 = Summenkurve des Versuchs,
K_3 = zulässige Summenkurve bei einer Sicherheitszahl 1,35.
H = Häufigkeit des Überschreitens einer bestimmten Stufe der Böenzusatzlast beim Versuch.
$\int H$ = Häufigkeit des Erreichens einer bestimmten Stufe der Böenzusatzlast beim Versuch.

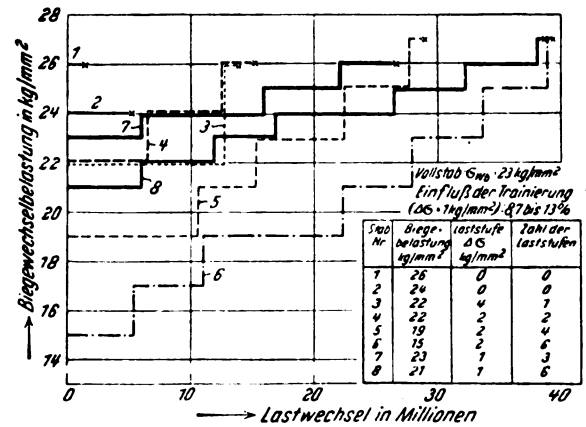


Bild 14. Änderung der Biegewechselfestigkeit durch Trainierung; unlegierter Stahl mit 0,2 % C (F. Körber).

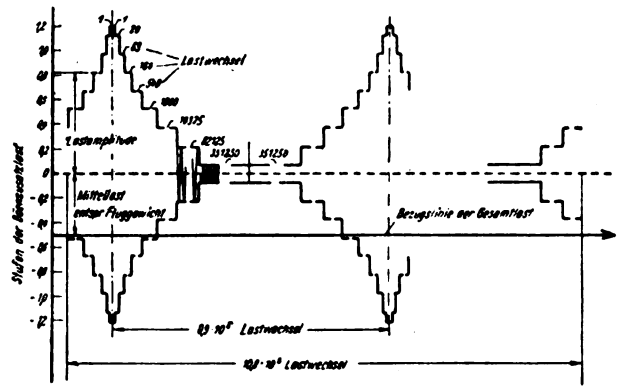


Bild 15. Ablauf eines Festigkeitsversuches im Sinne der Flugstatistik (E. Gaßner).

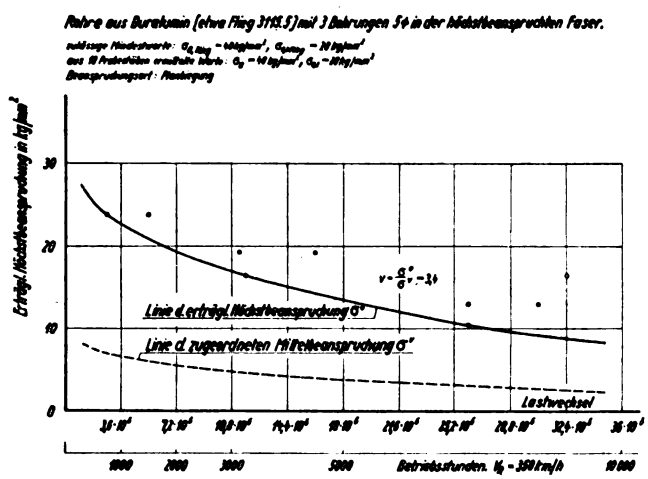


Bild 16. Maßstablinie für Rohre aus Duralumin mit 3 Bohrungen (je 5 mm Dmr.) in der höchstbeanspruchten Faser (E. Gaßner).

Treppenlinien geben den Streubereich der Häufigkeiten an, der sich bei mehreren gleichartigen Versuchen und ungefähr gleich dem Streubereich der Wöhlerlinie ergibt. Im Versuch werden die Belastungen in einer Reihe von Teilsummenkurven aufgebracht, von denen jede z. B. die statistisch in 250 Betriebsstunden anfallenden Belastungen enthält. Für eine vorgesehene Betriebszeit von 3000 Flugstunden muß ein Bauteil mit Sicherheit dann 12 solcher Teilsummenkurven aushalten.

In welcher Weise müssen nun im Versuch die Lasten aufgebracht werden? Welchen Einfluß hat die Reihenfolge der Lastwechsel zwischen monoton abnehmenden, monoton zunehmenden oder wechselnd ab- und zunehmenden Grenzen? Aus einigen bereits vorliegenden Untersuchungen von F. Körber[12]) und M. Hempel, deren Ergebnisse Bild 14 für einen geglühten unlegierten Stahl mit 0,2% C zeigt, ist der Einfluß steigender Laststufen zu entnehmen. Die Biegewechselfestigkeit beträgt $\pm$ 23 kg/mm². Dadurch, daß die zuerst aufgebrachten Lastwechsel zwischen Grenzen unterhalb der Dauerfestigkeit liegen, tritt eine Trainierwirkung ein, die sich dadurch äußert, daß die Wechselfestigkeit um 8,7 bis 13% erhöht wird. Lastwechsel oberhalb der Dauerfestigkeit werden demnach in größerer Zahl ertragen bei ansteigenden Laststufen. Nach Untersuchungen von A. Teichmann und E. Gaßner an Bauteilen aus Stahl und Duralumin wächst der mit einer bestimmten Lastwechselzahl erträgliche Spannungsmaßstab in folgender Reihenfolge: monoton fallende, abwechselnd steigende und fallende, monoton steigende Grenzen. Die Maßstäbe für die Spannung können dabei um rd. 70 bis 80% zunehmen.

Der Ablauf eines Festigkeitsversuches erfolgt im Sinne der Betriebsstatistik nach Bild 15. Die Lastwechsel liegen um die Last infolge des Fluggewichtes im ungestörten Geradeausfluge als Mittellast. Der Beginn liegt bei einer mittleren Stufe der Spannungsscheitelwerte. Eine Teilfolge umfaßt in dem gezeigten Versuch $0{,}9 \cdot 10^6$ Lastwechsel. Gefragt wird in diesem Falle nach dem für eine Gesamtzahl von $10{,}8 \cdot 10^6$ Lastwechseln anwendbaren Spannungsmaßstab entsprechend 3000 Betriebsstunden bei einer Reisegeschwindigkeit von 350 km/h.

In einer etwas allgemeineren Behandlung des Problems wird die Untersuchung nach Bild 16 auf größere Bereiche der Betriebsstundenzahl ausgedehnt. Aus einer Versuchsreihe mit Rohren (50 mm Dmr. und 1 mm Wandstärke) aus Duralumin, die in den bei Wechselbiegung höchst beanspruchten Zonen durch 3 Bohrungen (5 mm Dmr.) gekerbt sind, ergab sich die gezeigte Abhängigkeit der in der Statistik als Höchstlast σ^0 vorkommenden und damit aller übrigen Spannungsscheitelwerte von der Betriebsstundenzahl. Die im ungestörten Geradeausflug herrschende Spannung σ^v oder Mittelspannung steht zu der statistisch erfaßten Höchstspannung σ^0 in dem Verhältnis von 1 zu 3,4. Deshalb ergibt sich durch die Versuchsreihe gleichzeitig die Abhängigkeit der Mittelspannung oder der Spannung im ungestörten Geradeausflug von der Betriebsstundenzahl oder geforderten Lebensdauer.

Untersuchungen im Sinne der Betriebsstatistik haben weiterhin gezeigt, daß nach Bild 13 die Tragfähigkeit eines Versuchsstückes noch keineswegs erschöpft zu sein braucht, wenn die Summenkurve K_2 wie hier bei der Stufe für die

Digitized by Google

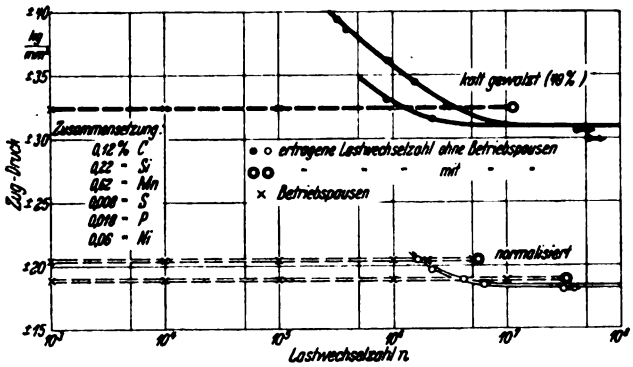


Bild 17. Einfluß einer Kaltverformung und der Betriebspausen auf die Wöhlerfestigkeit eines Stahles (H. J. Gough und W. A. Wood).

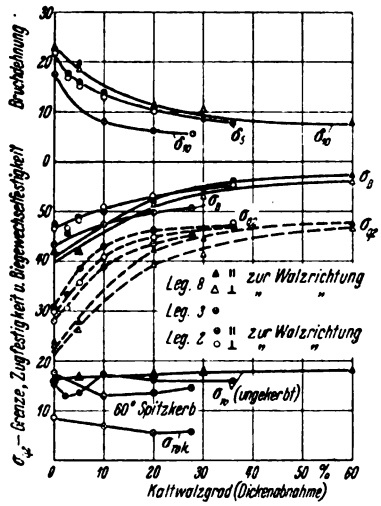


Bild 18. Abhängigkeit der Festigkeitseigenschaften vom Kaltwalzgrad für einige Aluminiumlegierungen.

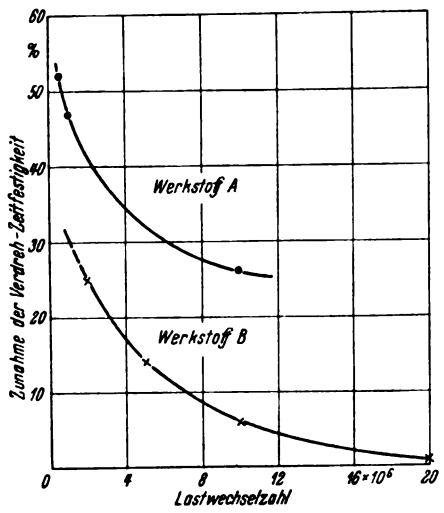


Bild 19. Einfluß des Drückens des Bohrungsrandes auf die Verdrehzeitfestigkeit quergebohrter Wellen aus zwei Aluminiumlegierungen.

Spannungsscheitelwerte bis 10 kg/mm² die Schadenlinie nach French überschreitet.

In die Untersuchungen der geschilderten Art können noch verschiedene Parameter wie die Lastenfolge, veränderliche Mittellast, Betriebspausen u. a. aus den Betriebsbedingungen sich ergebende einbezogen werden. Aber eine Besprechung dieser Umstände würde hier zu weit führen.

Durch einige örtlich wirkende Umstände muß manchmal ein wechselnd beanspruchtes Bauteil reichlicher bemessen werden als es die im allgemeinen herrschenden Spannungen erfordern. Dies sind einzelne Spannungsspitzen an Kerbstellen und Einspannstellen, zu denen im letzteren Falle noch die Wirkung gleitender Reibung kommt infolge der unterschiedlichen wechselnden Verformungen in den zusammengespannten Teilen. Zu diesen Punkten möchte ich noch kurz einige Versuchsergebnisse aus dem Institut für Werkstofforschung mitteilen.

Der Einfluß des Oberflächendrückens, der besonders eingehend von O. Föppl und A. Thum[15]) behandelt wurde, wurde an wechselnd auf Verdrehung beanspruchten Wellen mit einer Querbohrung untersucht. Die Versuche sollten zur Klärung der Frage beitragen, in welchem Maße das Oberflächendrücken an einer Kerbstelle — in diesem Falle an der Querbohrung — durch die Kaltverformung bzw. durch den damit verbundenen Eigenspannungszustand zur Verbesserung der Dauerhaltbarkeit beiträgt[16]). Die Probestücke wurden aus zwei Leichtmetallknetlegierungen hergestellt, von denen auf Grund früherer Untersuchungen bekannt war, wie eine Kaltverformung die Dauerfestigkeit ändert[17]).

Bei Stählen kann durch Kaltverformung die Dauerfestigkeit stark gesteigert werden, wie Bild 17 nach Versuchen von H. J. Gough und W. A. Wood[18]) für einen schwach legierten Stahl zeigt: Kaltwalzen um 49% erhöhte die Dauerfestigkeit um 70%. Deshalb ist hier schwer zu entscheiden, wieviel die Kaltverformung beim Drücken zur Verbesserung der Dauerfestigkeit beiträgt.

Bei Aluminium-Kupfer-Magnesium- und Aluminium-Magnesium-Knetlegierungen wird dagegen durch Kaltwalzen bis 60% die Dauerfestigkeit glatter Stäbe nicht oder höchstens um 10% erhöht, die gekerbter Stäbe sogar erniedrigt, Bild 18. Die Wellen wurden nach den Erfahrungen an quergebohrten Wellen aus Stahl mit einem pyramidenförmigen Stempel mit abgerundeten Kanten an der Querbohrung gedrückt[19]). Einige Ergebnisse der Verdrehwechselversuche bringt Bild 19. Aufgetragen ist in Abhängigkeit von der Zahl der Lastspiele die Verbesserung der Wöhlerfestigkeit als prozentuale Zunahme der Verdrehzeitfestigkeit. Die Verbesserung ist bei dem Werkstoff A (Gattung Al-Cu-Mg) größer als bei dem Werkstoff B (Gattung Al-Mg), für beide Werkstoffe jedoch recht erheblich. Mit zunehmender Zahl der Lastwechsel bis zum Bruch wird die Verbesserung geringer und ist für Werkstoff B nach 20 Millionen Lastspielen kaum noch vorhanden.

F. Gisen und R. Glocker[20]) fanden mit Hilfe röntgenographischer Spannungsmessungen an einer Welle aus Stahl mit gedrücktem Querbohrungsrand, daß die durch Drücken des Bohrungsrandes erzeugten Eigenspannungen sich mit zunehmender Zahl der Verdrehwechsel ändern. In gleicher Richtung liegen die mit Röntgenstrahlen von F. Wever und G. Martin[21]) gemessenen Änderungen innerer Spannungen an Proben aus verschiedenen Stählen. Diese Untersuchungen deuten darauf hin, daß die Verbesserung der Wöhlerfestigkeit durch Drücken mehr dem entstehenden Eigenspannungszustand als der Kaltverfestigung und der Beseitigung von Oberflächenfehlern zuzuschreiben ist. Letztere ist nach den Untersuchungen von G. Sachs[22]) über die Dauerfestigkeit von Propellern aus einer Magnesiumlegierung in der Einspannung kein wesentlicher Zug des Oberflächendrückens. G. Sachs fand nämlich, daß die Einspanndauerfestigkeit durch Drücken sehr verbessert wurde,

[15]) s. Z. VDI Bd. 77 (1933) S. 1335/37; Mitt. Wöhler-Inst. Braunschweig, Heft 33 (1938) S. 55/65; Heft 35 (1939) S. 56/70.

[16]) F. Bollenrath und H. Cornelius, Einfluß des Oberflächendrückens auf die Verdrehzeitfestigkeit quergebohrter Leichtmetall-Wellen. Z. Metallkunde, Bd. 32 (1940) S. 249/52.

[17]) F. Bollenrath und K. Bungardt, Metallwirtschaft Bd. 18 (1939) S. 2/6.

[18]) Proc. Roy. Soc. of London, Series A Nr. 922 Bd. 165 (1938) S. 358/71.

[19]) Das Drücken wurde vorgenommen in der unter Leitung von Herrn Professor A. Thum stehenden Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Darmstadt, dem die DVL hierfür zu großem Dank verpflichtet ist.

[20]) Z. Metallkunde Bd. 30 (1938) S. 297/98.

[21]) Mitt. Kaiser-Wilhelm-Inst. Eisenforschung Düsseldorf Bd. 21 (1939) S. 213/18.

[22]) Metals and Alloys Bd. 10 (1939) S. 19/23.

Digitized by Google

obwohl die Reibkorrosion in der Einspannung nicht merklich abnahm.

Der Einfluß der verschiedenen an einer Einspannung beteiligten Faktoren wie Werkstoffart, Oberflächenbehandlung, gleitende Reibung, Erosion, Reiboxydatiou usw. auf die Dauerfestigkeit ist der Gegenstand zahlreicher Arbeiten gewesen[23]). Die in der Einspannung bei Dauerbeanspruchung auftretenden Erscheinungen sind dadurch im wesentlichen geklärt worden. Immerhin ist es noch notwendig, quantitativ die Wirkung der einzelnen Parameter zu erfassen.

Einen Beitrag hierzu will eine kürzlich abgeschlossene Arbeit[24]) des Instituts für Werkstofforschung liefern. Einige Ergebnisse dieser Untersuchungen sollen kurz geschildert werden. Von besonderem Interesse ist auf diesem Gebiete die Klärung der Frage, welchen Anteil die in der Einspannung erzeugte Spannungsspitze und die hin- und hergehende Reibung an der Erniedrigung der Dauerfestigkeit haben. Betrachtet man z. B. die von W. Müller[25]) an Flachstäben aus einer Aluminium-Kupfer-Magnesium-Legierung mit aufgepreßten Briden (im Mittel 0,53 kg/mm² Flächenpressung) gefundenen Wöhlerkurven nach Bild 20, so gewinnt man den Eindruck, daß es für die Flachstäbe mit Einspannung keine Dauerfestigkeit gibt. Die entsprechende Wöhlerkurve zeigt auch bei hohen Lastwechselzahlen noch keine Tendenz, einem Grenzwert zuzustreben und hat in ihrem Verlauf große Ähnlichkeit mit Wöhlerkurven, die bei gleichzeitiger Korrosion erhalten werden. Daher liegt es nahe, der stetigen, in ihrem Ausmaß von der Lastwechselzahl abhängigen Reibkorrosion einen erheblichen Teil der Erniedrigung der Wöhlerfestigkeit zuzuschreiben.

Bei den eigenen Untersuchungen an Flachstäben aus einem normal geglühten, unlegierten Stahl (St C 35.61), die auf Zug schwellend beansprucht wurden, zeigte sich die in Bild 21 dargestellte Abhängigkeit der Reiboxydation von der Flächenpressung für 10^6 Lastspiele. In der Einspannung wurde der Stahl St C 35.61 in Zusammenwirkung mit sich selbst (Kurve *a*), mit einem auf 400 kg/mm² Brinellhärte vergüteten Chrom-Molybdänstahl (Kurve *b*) und mit Messing Ms 67 (Kurve *c*) geprüft. Mit der Flächenpressung in der Einspannung nimmt die Reiboxydation zunächst sehr stark zu und erreicht bei einer Flächenpressung von rd. 0,5 kg/mm² einen Höchstwert; mit stärker werdender Flächenpressung nimmt die Reiboxydation dann wieder stark ab und wird bei 5 kg/mm² Flächenpressung unwägbar gering. Bei Einspannung in den vergüteten Stahl ist die Reiboxydation am größten, bei Einspannung in St C 35.61 etwas geringer und bei Einspannung in Messing beträgt sie nur noch den vierten Teil derjenigen bei der Einspannung in den vergüteten Stahl. In Bild 22 ist die Einspann-Zug-Ursprungsfestigkeit in Abhängigkeit von der Flächenpressung in der Einspannung aufgetragen. Danach nimmt die Dauerfestigkeit im allgemeinen linear mit der Flächenpressung ab. Dies ist als Folge der mit der Flächenpressung steigenden örtlichen Spannungserhöhung in der Einspannung anzusehen. Nur bei niedrigen Drücken in der Einspannung ist die Abnahme stärker.

Nach den eben gezeigten Beziehungen zwischen Reiboxydation und Anpreßdruck der Einspannstücke wird der Unterschied zwischen linearer und tatsächlich vorhandener Abnahme der Zug-Ursprungsfestigkeit der Reiboxydation zuzuschreiben sein. Da die Reiboxydation und die von ihr verursachte Kerbwirkung und Querschnittsverminderung eine Funktion der Lastwechselzahl ist, scheint es zweckmäßig zu sein, bei ähnlichen Verhältnissen zwischen Stabquerschnitt und Einspannfläche keinen kleineren Einspann-

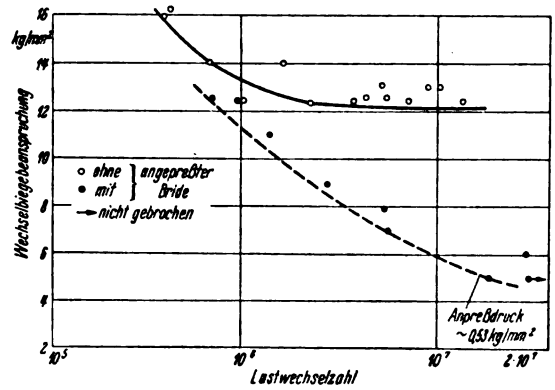


Bild 20. Einfluß einer Einspannung auf die Wöhlerfestigkeit einer Aluminium-Legierung (Gattung Al-Cu-Mg) bei wechselnder Biegung (W. Müller).

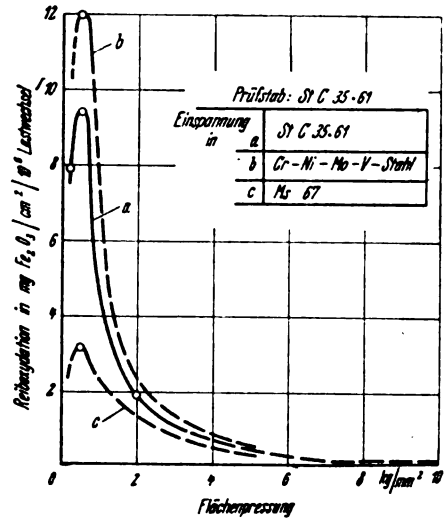


Bild 21. Reiboxydation in Abhängigkeit von Flächenpressung und Werkstoffpaarung in der Einspannung für St C 35 · 61.

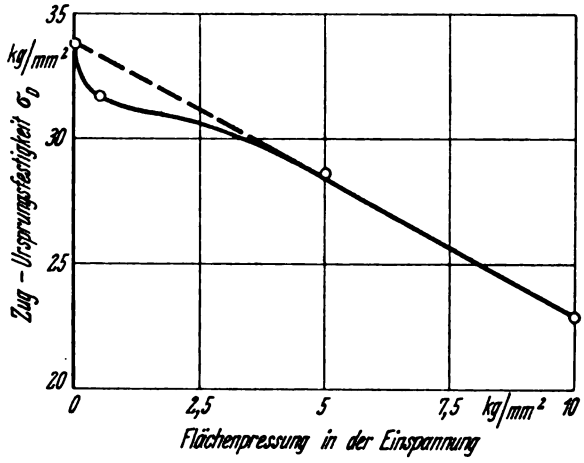


Bild 22. Zug-Ursprungsfestigkeit in Abhängigkeit von der Flächenpressung in der Einspannung für St C 35 · 61.

druck als 4 kg/mm² für St 35.61 anzuwenden, wenn das Bauteil auf Dauerfestigkeit bemessen wird. Bei Bemessung auf Zeitfestigkeit wäre es denkbar, daß geringere Flächenpressungen trotz der dann höher auffallenden Reiboxydation zweckmäßig sind. Untersuchungen mit weiteren Werkstoffen in dieser Richtung sind noch nicht abgeschlossen.

[23]) s. Schrifttumsübersicht in Metallwirtschaft Bd. 18 (1939) S. 992/95.

[24]) H. Cornelius und F. Bollenrath, Dauerfestigkeit eines unlegierten Stahls in Einspannungen. Arch. Eisenhüttenwes. demnächst.

[25]) Schweizer Archiv angew. Wissenschaft und Technik Bd. 5 (1939) S. 294/307.

Digitized by Google

3. Zusammenfassung.

Den in der Materialprüfung der Technik vorwiegend angewendeten Verfahren zur Untersuchung der Festigkeit der Werkstoffe gegenüber wechselnden Beanspruchungen wird der im Betriebe tatsächlich auftretende Verlauf der Beanspruchung gegenübergestellt. Zu unterscheiden sind Bauteile, die vorwiegend gesetzmäßig und periodisch wechselnden Beanspruchungen zwischen wenigen abgestuften Grenzen oder Grenzgruppen mit sehr großer Lastwechselzahl ausgesetzt sind, und Bauteile, bei denen die Schwankungen der Beanspruchungen zwischen unregelmäßig sich ändernden Grenzen mit sehr unterschiedlicher, aber entsprechend einer vorgegebenen Lebensdauer beschränkten Häufigkeit erfolgen. Daraus ergeben sich folgende beiden Fragestellungen für die Beurteilung der Werkstoffe: Für jene ist zu untersuchen, welche Dauerfestigkeit die Werkstoffe bei mehrstufigen Grenzen für die Spannungsausschläge aufweisen, und welchen Einfluß irgendwelche Folgen von Grenzgruppen verschiedener Häufigkeit ausüben. Bei diesen dagegen wird unter der Voraussetzung einer statistischen Erfassung der Betriebsbeanspruchung nach dem Spannungsmaßstab gesucht, der bei einem vorgegebenen Häufigkeitsmaßstab ohne Beeinträchtigung der Sicherheit erträglich ist. Bei der Besprechung dieser Probleme wird eingegangen auf den Einfluß der Betriebspausen auf die Wöhlerfestigkeit und auf die Wege, die zur Annäherung der Prüfverfahren an die betrieblichen Beanspruchungen eingeschlagen werden können. An einigen Beispielen aus dem Flugzeugbau wird gezeigt, wie im Sinne einer Statistik die Werkstoffe geprüft werden können. Wenn die Festigkeit der Werkstofferforschung unter den dargelegten Gesichtspunkten durchgeführt wird, kann erwartet werden, daß eine breitere Basis für die Bemessung gegenüber den in Wirklichkeit ablaufenden Beanspruchungen unter zuverlässiger Abschätzung der Sicherheit geschaffen wird, wodurch gleichzeitig eine hohe Ausnutzung der Baustoffe möglich wird. Zum Schlusse werden noch die Ergebnisse einiger Untersuchungen mitgeteilt, die sich mit der Dauerfestigkeit in Einspannungen und dem Einfluß des Oberflächendrückens auf die Zeit- und Dauerfestigkeit befaßten.

Digitized by Google

Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet.

Von Ernst Lamla.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Gasdynamik.

Nach der Näherungsmethode von Janzen und Lord Rayleigh wird die ebene symmetrische Potentialströmung eines kompressiblen Gases um einen Kreiszylinder, der sich auf der Mittellinie eines geraden Kanals befindet, in zweiter Näherung untersucht. Die Abweichung des Profils von der exakten Kreisgestalt läßt sich, wie gezeigt wird, in einfacher Weise auf derselben Größe halten wie bei der inkompressiblen Strömung. Die Geschwindigkeiten in der engsten Stelle an der Kanalwand und am Profilrand werden genauer erörtert.

Um die ebene Potentialströmung einer inkompressibeln Flüssigkeit um einen Kreiszylinder zu erhalten, der sich in einem Kanal mit ebenen Wänden befindet, bedient man sich der Spiegelungsmethode; man spiegelt den Dipol, den man sich im Kreismittelpunkt denken kann, an den Kanalwänden und addiert die Wirkungen aller Bildpunkte. Die so gewonnene Lösung ist exakt; freilich ist das umströmte Profil kein genauer Kreis mehr, aber die Abweichung von der Kreisform ist in der Regel sehr gering. Bezeichnen wir diese der inkompressibeln Strömung entsprechende Lösung als erste Näherung, so wollen wir im folgenden die Bewegung eines Gases um einen Kreiszylinder im Kanal betrachten, bei der der Einfluß der Kompressibilität in zweiter Näherung berücksichtigt wird. Wir bedienen uns dazu eines zuerst von O. Janzen[1]) und bald darauf von Lord Rayleigh[2]) angegebenen Verfahrens[3]).

Wir legen den Betrachtungen die Stromfunktion ψ zugrunde. Es sei ϱ die Dichte, p der Druck, w die Geschwindigkeit, a die zugehörige Schallgeschwindigkeit, a_0 die Schallgeschwindigkeit im ruhenden Medium. Die Eulerschen Gleichungen liefern für eine stationäre, wirbelfreie Bewegung bei Abwesenheit von Massenkräften

$$\frac{1}{2} w^2 + \int \frac{dp}{\varrho} = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}(\varrho w) = 0$ wird bei Einführung der Stromfunktion ψ durch den Ansatz erfüllt

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \quad U \frac{\varrho_\infty}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w_y &= -U \frac{\varrho_\infty}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

U ist die Anströmgeschwindigkeit, ϱ_∞ die Dichte im Unendlichen (ungestörte Strömung). Die Mittellinie des Kanals ist X-Achse. Wegen der Wirbelfreiheit der ganzen Bewegung gilt $\operatorname{rot}_z w = 0$. Setzen wir hier die Werte (2) ein, so erhalten wir

$$\Delta \psi = \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \log \varrho \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Da allgemein $dp = a^2 d\varrho$ ist, folgt aus (1)

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} w^2 + a^2 \operatorname{grad} \log \varrho = 0$$

und daher nach (3)

$$\Delta \psi + \frac{1}{2 a^2} \operatorname{grad} w^2 \cdot \operatorname{grad} \psi = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Verlaufen die betrachteten Prozesse adiabatisch, so gilt

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2} w^2 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

wobei $\varkappa = c_p/c_v$ ist.

Wir nehmen nun mit Janzen und Lord Rayleigh an, daß sich die Größe ψ in eine Reihe entwickeln läßt, die nach Potenzen des Verhältnisses α von Anblasegeschwindigkeit U zur Schallgeschwindigkeit a_0 fortschreitet[4]). Der Bau der Gleichungen (4) und (5) hat zur Folge, daß nur gerade Potenzen von α auftreten. Wir setzen also

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= U/a_0 \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \alpha^{2n} \\ w^2/U^2 = K &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n \alpha^{2n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Die Größen ψ_n und K_n hängen dabei nicht mehr von U und von a_0 ab.

Wir ersetzen nun in (4) zunächst a^2 durch den Wert (5) und führen dann den Ansatz (6) ein. Wir ordnen auf beiden Seiten nach Potenzen von α und vergleichen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten der Gleichung. Das führt zu den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta \psi_0 &= 0 \\ \Delta \psi_{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n} (-\operatorname{grad} \psi_m \cdot \operatorname{grad} K_{n-m} + (\varkappa - 1) K_{n-m} \cdot \Delta \psi_m) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hieraus lassen sich die ψ_n nacheinander ermitteln. Die Berechnung der Werte K_n aus den ψ_n erfolgt mit Hilfe der Gleichungen (2) und (5) und der aus der Adiabatengleichung folgenden Beziehung

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} \frac{w^2}{a_0^2}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \quad \ldots\ldots (8)$$

Die Ermittelung der Geschwindigkeiten aus ψ ist (wegen des Auftretens der Dichte ϱ) etwas komplizierter als die aus φ. Die Benutzung von ψ verdient aber wegen der unmittelbaren Beziehung zur Profilform in vielen Fällen den Vorzug. Wollen wir nur bis zur zweiten Näherung gehen, also nur ψ_1 ermitteln, so brauchen wir nur die Größe K_0 und erhalten dafür aus (2), (6), (7)

$$\left.\begin{aligned} \Delta \psi_0 &= 0 \\ K_0 &= \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)^2 \\ \Delta \psi_1 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial K_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial K_0}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (9)$$

[1]) Oskar Janzen, Beitrag zur Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten. Phys. Z. Bd. 14 (1913), S. 639/643.

[2]) Lord Rayleigh, On the flow of compressible fluid past an obstacle. Phil. Mag. (6) Bd. 32 (1916), S. 1/6. Scient. Pap. Bd. 6, S. 402/406.

[3]) Für den Kreiszylinder (und die Kugel) im freien Gasraum sind nach diesem Verfahren Potential φ und Stromfunktion ψ vom Verfasser erstmalig bis zur vierten Näherung berechnet worden.

[4]) $\alpha = U/a_0$ stimmt hier im wesentlichen mit der Machschen Zahl $M = U/a_\infty$ der ungestörten Strömung überein.

Digitized by Google

Die Lösungen ψ_0 und ψ_1 von (9) sind so zu bestimmen, daß im Unendlichen gemäß (2) $\psi = y$ wird, daß überall im Endlichen die geraden Linien $y = \pm \frac{1}{2} H$ Stromlinien sind (H ist die Breite des Kanals), und daß schließlich die Stromlinie $\psi = 0$ ein Kreis ist oder ihm doch möglichst nahe kommt. Als Lösung ψ_0 nehmen wir diejenige, die sich nach der üblichen Spiegelungsmethode ergibt, nämlich

$$\psi_0 = y - \frac{R^2 \pi}{H} \frac{\sin \frac{2\pi y}{H}}{\mathfrak{Cof} \frac{2\pi x}{H} - \cos \frac{2\pi y}{H}} \quad \ldots \quad (10)$$

Der Ansatz (10) genügt der Gleichung $\Delta \psi_0 = 0$ und erfüllt die beiden ersten der eben genannten Randbedingungen exakt. Die umströmte Kontur $\psi_0 = 0$ ist allerdings kein genauer Kreis; aber die Abweichungen vom Kreise sind sehr gering, wie die folgende Zahlentafel zeigt. Darin bedeuten r_0, r_{45} und r_{90} die Werte des Radiusvektors r nach denjenigen Punkten des Profilrandes, die zu $\vartheta = 0^0$, 45^0 und 90^0 gehören.

$H/2R$	r_0/R	r_{45}/r_0	r_{90}/r_0
3	0,9592	0,99868	0,99725
5	0,9842	0,99979	0,99960
10	0,9959	0,99999	0,99997
20	0,9990	1,00000	1,00000

Die beiden letzten Spalten der Zahlentafel lassen erkennen, daß die Abweichung des Profils von der Kreisform praktisch bedeutungslos ist[5]; selbst in dem extremen Fall, daß das Profil $\frac{1}{3}$ der Kanalbreite einnimmt, ist die Dicke des Profils nur um 0,27% kleiner als die Breite. Zu beachten ist, daß R nicht der Kreisradius ist, wie die zweite Spalte zeigt.

Die Lösung zweiter Näherung lautet $\psi = \psi_0 + \psi_1 \alpha^2$. Um ψ_1 zu finden, haben wir zunächst nach (9) und (10) die Größe K_0 zu bilden. Es wird

$$K_0 = 1 - \frac{4R^2\pi^2}{H^2} \frac{\mathfrak{Cof} \frac{2\pi x}{H} \cos \frac{2\pi y}{H} - 1}{\left(\mathfrak{Cof} \frac{2\pi x}{H} - \cos \frac{2\pi y}{H}\right)^2} + \frac{4R^4\pi^4}{H^4} \frac{1}{\left(\mathfrak{Cof} \frac{2\pi x}{H} - \cos \frac{2\pi y}{H}\right)^2} \quad \ldots \quad (11)$$

Um die Gleichungen kürzer schreiben zu können, führen wir die folgenden Abkürzungen ein

$$\frac{2\pi x}{H} = u; \qquad \frac{2\pi y}{H} = v; \qquad \frac{2\pi R}{H} = q \quad \ldots \quad (12)$$

Dann erhält die letzte Gleichung (9) nach einfacher Umformung die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial v^2} \\ &= \frac{H}{2\pi} \sin v \left[\frac{q^2 \mathfrak{Cof} u}{2N^2} + \frac{q^4 - 2q^2 \mathfrak{Sin}^2 u}{2N^3} + \frac{q^6 \mathfrak{Cof} u}{8N^4} \right], \\ &\text{wobei} \qquad N = \mathfrak{Cof} u - \cos v \\ &\text{ist.} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Lösung von (13) setzen wir nun in Analogie zu (10) in der Form an

$$\psi_1 = -\frac{H}{2\pi} \sum_{p=1}^{P} \frac{g_p(u) \cdot \sin v}{N^p} \quad \ldots \quad (14)$$

Darin hat N den in (13) angegebenen Wert; die $g_p(u)$ sind Funktionen von u allein, und P ist eine passend zu wählende ganze Zahl. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in folgendem: Ist eine Lösung der Form (14) überhaupt möglich, so erfüllt sie ohne weiteres die Grenzbedingungen an der Kanalwand; denn für $y = \pm \frac{1}{2} H$ wird nach (12) $v = \pm \pi$, also $\psi_1 = 0$ und $\psi = \psi_0 = \pm \frac{1}{2} H$. Es zeigt sich, daß der Ansatz (14) in der Tat brauchbar ist, und daß für große x stets $\psi = \psi_0 = y$ wird. Setzen wir (14) in die Hauptgleichung (13) ein, so können wir durch $H/2\pi$ und durch $\sin v$ kürzen, und wir erhalten, wenn die Ableitungen nach u durch Striche bezeichnet werden:

$$\sum_{p=1}^{P} \left[\frac{(p-1)^2 g_p - g_p''}{N^p} + \frac{2p g_p' \mathfrak{Sin} u - 2p(p-1) g_p \mathfrak{Cof} u}{N^{p+1}} \right] = \frac{q^2 \mathfrak{Cof} u}{2N^2} + \frac{q^4 - 2q^2 \mathfrak{Sin}^2 u}{2N^3} + \frac{q^6 \mathfrak{Cof} u}{8N^4} \quad \ldots \quad (15)$$

Da v nur noch in der Funktion $N = \mathfrak{Cof} u - \cos v$ vorkommt, ergeben sich durch Vergleich der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von N auf beiden Seiten der Gleichung (15) ohne weiteres nacheinander die Differentialgleichungen für die Funktionen g_p. Damit ist zugleich auch die Möglichkeit des Ansatzes (14) erwiesen. Der Nenner N^1 tritt in (15) nur einmal (und zwar auf der linken Seite für $p = 1$) auf; der zugehörige Zähler muß verschwinden:

$$g_1'' = 0.$$

Da wir die Umströmung eines Profils betrachten, das nicht nur zur X-Achse, sondern auch zur Y-Achse symmetrisch ist, muß ψ und müssen daher auch alle g_p in x und damit auch in u gerade Funktionen sein. Mithin

$$g_1 = \text{const} = C_0 \quad \ldots \quad (16a)$$

Die zu den Nennern N^2 gehörigen Glieder liefern:

$$g_2 - g_2'' + 2 g_1' \mathfrak{Sin} u = \frac{1}{2} q^2 \mathfrak{Cof} u$$

oder

$$g_2'' - g_2 = -\frac{1}{2} q^2 \mathfrak{Cof} u,$$

$$g_2 = C_1 \mathfrak{Cof} u - \frac{1}{4} q^2 u \mathfrak{Sin} u \quad \ldots \quad (16b)$$

Entsprechend ergeben sich die weiteren Funktionen g_p:

$$g_3 = C_2 \mathfrak{Cof} 2u + C_1 + \frac{1}{8} q^4 \quad \ldots \quad (16c)$$

$$g_4 = C_3 \mathfrak{Cof} 3u + \frac{3}{2} D \mathfrak{Cof} u \quad \ldots \quad (16d)$$

$$g_5 = C_4 \mathfrak{Cof} 4u + (2C_3 + D) \mathfrak{Cof} 2u + \frac{3}{2} D \quad \ldots \quad (16e)$$

$$g_6 = C_5 \mathfrak{Cof} 5u + \left(\frac{5}{2} C_4 + \frac{5}{4} C_3 + \frac{5}{8} D\right) \mathfrak{Cof} 3u + \left(\frac{5}{2} C_3 + \frac{15}{4} D\right) \mathfrak{Cof} u \quad \ldots \quad (16f)$$

usw. Dabei ist D eine Abkürzung für

$$D = C_2 + C_1 + \frac{1}{8} q^4 + \frac{1}{96} q^6 \quad \ldots \quad (16g)$$

Die Größen C_1, C_2 usw. sind Integrationskonstanten. Für alle Werte $p \geq 4$ gilt

$$g_{p+1}'' - p^2 g_{p+1} = 2p g_p' \mathfrak{Sin} u - 2p(p-1) g_p \mathfrak{Cof} u \quad \ldots \quad (17)$$

Wir erkennen, daß, wie schon gesagt, ψ_1 für große Werte u zu Null wird; denn für große u verschwinden die einzelnen Summanden von (14) wie e^{-u}. Die noch verfügbaren Integrationskonstanten sind nun so zu bestimmen, daß ψ_1 für die Punkte der ursprünglichen Kontur $\psi_0 = 0$ verschwindet. Die strenge Durchführung dieser Forderung wird auf eine unendliche Reihe von Funktionen g_p führen. Wir können uns aber auch auf eine endliche Zahl solcher Funktionen beschränken. Wählen wir z. B. $C_3 = -\frac{3}{2} D$; $C_4 = -\frac{1}{2} C_3 - \frac{1}{4} D = \frac{1}{2} D$ und $C_5 = 0$, so verschwindet g_6 identisch, und nach (17) können wir dann auch alle folgenden Funktionen $g_7 = g_8 = \ldots = 0$ setzen. Der Ansatz (14) führt dann auf eine endliche Reihe mit $P = 5$ Gliedern. Diese 5 Glieder enthalten insgesamt noch 3 willkürliche Konstante C_0, C_1, C_2. Diese bestimmen wir so, daß ψ_1 für die zu $\vartheta = 0^0$, 45^0 und 90^0 gehörigen Punkte des Profils erster Näherung ($\psi_0 = 0$) exakt verschwindet. Dann stimmt das Profil zweiter Näherung wenigstens in insgesamt 8 Punkten mit dem Profil erster Näherung überein. Durch Vergrößerung von P können wir exakte Übereinstimmung in mehr Punkten erzielen.

[5]) Die Abweichungen der Werte r_{45}/r_0 und r_{90}/r_0 von 1 sind proportional $(R/H)^4$.

Digitized by Google

Wir wollen uns im folgenden schon mit $P = 3$ begnügen. Die Berechtigung dieses Schrittes werden wir weiter unten darlegen. Dann müssen alle g_p für $p \geq 4$ identisch verschwinden. Dazu genügt nach (16), daß wir $D = 0$ und ferner $C_3 = C_4 = \ldots = 0$ setzen. Führen wir statt C_0 und C_1 zwei neue Konstante ein durch

$$C_0 = c_0 q^2; \quad C_1 = c_1 q^4 \quad \ldots\ldots \quad (18a)$$

so folgt nach (16 g) aus $D = 0$:

$$C_2 = -\left(c_1 + \frac{1}{8}\right) q^4 - \frac{1}{96} q^6 \quad \ldots\ldots \quad (18b)$$

Mit diesen Werten liefert der Ansatz (14) im vorliegenden Fall, wenn wir die Funktionen g_p aus (16) entnehmen:

$$\psi_1 = -\frac{H}{2\pi} \sin v \left[\frac{c_0 q^2}{N} + \frac{c_1 q^4 \operatorname{Cof} u - \frac{1}{4} q^2 u \operatorname{Sin} u}{N^2} + \frac{\left(c_1 + \frac{1}{8}\right) q^4 (1 - \operatorname{Cof} 2u) - \frac{1}{96} q^6 \operatorname{Cof} 2u}{N^3} \right] \quad \ldots \quad (19)$$

Wir bestimmen nun c_0 und c_1 so, daß für die zu $\vartheta = 0^0$ und $\vartheta = 90^0$ gehörigen Punkte des Profilrandes ($\psi_0 = 0$) die eckige Klammer in (19) exakt verschwindet. Für kleinere Werte q dürfen wir Reihenentwicklungen benutzen, um zunächst die Größen u und v für diese Punkte nach (10) zu bestimmen und danach aus (19) die Größen c_0 und c_1 zu ermitteln. Die elementare Rechnung führt zu folgendem Ergebnis:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \frac{5}{12} + \frac{5}{48} q^2 + \frac{1}{144} q^4 + \frac{1}{4320} q^6 \cdots \\ c_1 &= -\frac{3}{16} - \frac{1}{72} q^2 + \frac{1}{1440} q^4 - \frac{1}{5670} q^6 \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

Durch (19) und (20) ist ψ_1 gegeben. Wir haben c_0 und c_1 so bestimmt, daß ψ_1 nur für 4 Punkte des ursprünglichen Profilrandes exakt zu Null wird; tatsächlich verschwindet das so gewonnene ψ_1, wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt, für alle Punkte des ursprünglichen Profilrandes bis zu den Gliedern mit q^4 einschließlich identisch. Das Profil $\psi_0 + \psi_1 \alpha^2 = 0$ ist also mit derselben Genauigkeit als Kreis zu betrachten wie das Profil $\psi_0 = 0$ (vgl. Anm. 5), und damit ist die Berechtigung der Wahl $P = 3$ erwiesen.

Lassen wir den Kanal breiter und breiter werden, also q gegen 0 gehen, so nimmt ψ_1 den aus der Theorie der freien Strömung eines Gases um einen Kreiszylinder bekannten Wert an[6])

$$\psi_1 = -\frac{R^2 \sin\vartheta}{r}\left(-\frac{7}{12} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{12}\frac{R^4}{r^4}\right) + \frac{R^2 \sin 3\vartheta}{r}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{r^2}\right) \quad \ldots \quad (21)$$

Die Bestimmung der Geschwindigkeit erfolgt nun nach (2). Da ϱ_∞ zu $w = U$ gehört, so folgt aus (6) und (8) bei Beschränkung auf die Größen der Ordnung α^2:

$$\frac{\varrho_\infty}{\varrho} = 1 + \frac{1}{2}(K_0 - 1)\alpha^2 + \ldots$$

Daher (mit demselben Grad der Genauigkeit):

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_x}{U} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\frac{K_0 - 1}{2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right]\alpha^2 \ldots \\ \frac{w_y}{U} &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\frac{K_0 - 1}{2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]\alpha^2 \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

Wir betrachten nun nicht den allgemeinen Ausdruck (22) weiter, sondern beschränken uns auf den engsten Querschnitt, also auf die Stellen $x = 0$ oder $u = 0$. Für diesen Fall ergibt sich aus (9) und (19)

$$\left.\begin{aligned} (w_y)_{x=0} &= 0 \\ \left(\frac{w_x}{U}\right)_{x=0} &= 1 + \frac{q^2}{2N_0} + \left[\left(\frac{11}{6} + \frac{7}{12} q^2 + \frac{1}{24} q^4\right)\frac{q^2}{2N_0} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{q^2}{12} + \frac{q^4}{120}\right)\frac{q^4}{4N_0^2} + \frac{q^6}{96 N_0^3}\right]\alpha^2 \ldots \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

[6]) Vgl. z. B. die in Anm. 3 auf S. 1 genannte Arbeit.

Hierin ist

$$N_0 = 1 - \cos v = 2 \sin^2 \frac{v}{2}.$$

Wir betrachten 2 Hauptfälle, nämlich einmal die größte Geschwindigkeit an der Kanalwand (w_K); hier ist $y = \frac{1}{2} H$, also $v = \pi$, $N_0 = 2$; daher

$$\frac{w_K}{U} = 1 + \frac{1}{4} q^2 + \left[\frac{11}{24} q^2 + \frac{19}{192} q^4 \ldots\right]\alpha^2 \ldots \quad (24a)$$

Zweitens berechnen wir die größte Geschwindigkeit am Profilrand (w_P); für $\vartheta = 90^0$ folgt aus (10)

$$\frac{y}{R} = 1 - \frac{1}{24} q^2 + \frac{11}{5760} q^4 \ldots$$

und damit

$$\frac{w_P}{U} = 2 + \frac{1}{6} q^2 + \frac{1}{180} q^4 \ldots + \left[\frac{7}{6} + \frac{43}{72} q^2 + \frac{47}{432} q^4 \ldots\right]\alpha^2 \ldots \quad (24b)$$

Ist der Kanal breit genug, so dürfen wir die Glieder mit q^4 gegenüber denen mit q^2 vernachlässigen. Dann ist R in der hier benutzten Näherung dem Kreisradius gleich zu setzen; ebenso dürfen wir ohne großen Fehler $\alpha = M$, der Machschen Zahl $M = U/a_\infty$ in der ungestörten Strömung setzen. Denn aus (5) folgt

$$M = \alpha \Big/ \sqrt{1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\alpha^2} = \alpha\left[1 + \frac{\varkappa - 1}{4}\alpha^2 \ldots\right],$$

und die ganze Betrachtung ist nur bis etwa $\alpha = 0{,}4$ gültig, da sonst die Maximalgeschwindigkeit am Profilrand bereits den Wert der örtlichen Schallgeschwindigkeit erreicht. Daher können wir (24a) und (24b) in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_K}{U} &= 1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{11}{6} M^2\right)\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2 \\ \frac{w_P}{U} &= 2\left(1 + \frac{7}{12} M^2\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{43}{12} M^2\right)\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25)$$

$M = 0$ liefert die Verhältnisse in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Zu dem Wert 2 für das Verhältnis w_P/U kommt ein von der Kanalbreite abhängiger Zusatzbetrag. Infolge der Kompressibilität wird in zweiter Näherung sowohl der Wert 2 als auch der Zusatzbetrag gesteigert. Wesentlich ist nun, daß die prozentuale Steigerung des Zusatzbetrages sehr erheblich größer ist als die Steigerung des Grundbetrages 2; sie beträgt nämlich $\frac{43}{12} M^2$ statt $\frac{7}{12} M^2$, also etwas mehr als das Sechsfache.

Führen wir den Begriff der »Korrektur der Anströmgeschwindigkeit« ΔU durch die Frage ein: »Auf welchen Betrag $U + \Delta U$ müßte die Anströmgeschwindigkeit gesteigert werden, damit im freien Gasraum dieselben Geschwindigkeiten auftreten wie im Kanal bei der Anströmgeschwindigkeit U?«, so wird offenbar diese Korrektur für die Stelle größter Geschwindigkeit an der Kanalwand

$$\frac{(\Delta U)_K}{U} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{11}{6} M^2\right)\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2, \quad \ldots \quad (26a)$$

für die Stelle maximaler Geschwindigkeit am Profilrand dagegen

$$\frac{(\Delta U)_P}{U} = \frac{1}{12}\frac{1 + \frac{43}{12} M^2}{1 + \frac{7}{12} M^2}\left(\frac{2\pi \Re}{H}\right)^2 = \frac{1}{12}(1 + 3M^2)\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2 \quad \ldots \quad (26b)$$

Das Verhältnis der beiden Korrekturen, das im Fall der inkompressibeln Flüssigkeit $^1/_3$ beträgt, wird hier

$$\frac{(\Delta U)_P}{(\Delta U)_K} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{7}{6} M^2\right) \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Die Gleichungen (26) zeigen, daß sich der Einfluß der Kompressibilität des Gases auf die Geschwindigkeitskorrektur ΔU am Profilrand prozentual stärker auswirkt als an der Kanalwand, und zwar etwa 1½mal so stark.

Digitized by Google

Die graphische Ermittlung von Ausströmvorgängen.

Von O. Lutz.

Mitteilung aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Verschiedene Probleme des Motorenbaues verlangen die Ermittlung des Ablaufes von Ausströmvorgängen, die dadurch erschwert ist, daß neben den mannigfaltigen äußeren Veränderlichen — Änderung des Ausströmquerschnitts während des Vorgangs, Änderung des Volumens des Behälters (Zylinders), Änderung des Druckes usw. — noch Schwierigkeiten durch die Änderung der thermischen Werte des strömenden Mittels auftreten.

Soll der Vorgang einigermaßen richtig erfaßt werden, ohne daß der Arbeitsaufwand zu groß wird, so kann nur von der weitgehenden Verwendung der i, s-Darstellung eine Lösung erhofft werden.

Der Bericht gibt die Lösung in Form einer Differenzenmethode unter Verwendung der J, S-Tafel von Lutz und Wolf.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Ableitung der Beziehungen.
3. Durchführung eines Beispiels.

1. Einleitung.

Die meisten bei Motoren interessierenden Ausströmvorgänge verlaufen vom überkritischen Gebiet aus und bei solchen Temperaturen, daß die Veränderlichkeit der spez. Wärmen — also auch der Adiabatenziffer — nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf. Es empfiehlt sich deshalb die Anwendung der i, s-Darstellung. Besonders durchsichtig und einfach wird die Verfolgung der Vorgänge, wenn man die neuerdings zur Verfügung stehende J, S-Tafel[1]) verwendet.

Wegen der Mannigfaltigkeit der äußeren Veränderlichen — Öffnungsquerschnitt, Zylinderinhalt, Gegendruck u. a. — ist schon aus diesem Grund eine geschlossene Lösung nicht möglich; alle Ansätze in dieser Richtung[2]) komplizieren die Ermittlung nur. Die Verwendung der J, S-Tafel schließt solche Ansätze von vornherein aus.

Es wird deshalb ein Differenzenverfahren angewendet, das den Vorzug besitzt, anschaulich zu sein und dabei alle äußeren und auch thermischen Veränderlichen berücksichtigen zu können.

2. Ableitung der Beziehungen.

Die Ausströmung erfolge aus einem Arbeitszylinder, Bild 1, dessen augenblickliche Größe durch die Kolbenfläche f_k und den jeweiligen Abstand h des Kolbens vom Zylinderkopf gekennzeichnet sein soll. Bei gewölbtem Kopf bzw. Kolbenboden ergibt sich h aus der Überlegung, daß h_{max} sich zum Kolbenhub h_0 verhalten muß wie ε zu $\varepsilon - 1$ (ε = Verdichtungsverhältnis). Der Ausströmquerschnitt (also unter Berücksichtigung von Einschnürungen im Strahl) sei f, die Ausströmgeschwindigkeit im engsten Strahlquerschnitt w_a, Zustandsgrößen des Gases im Innern des Zylinders sollen mit dem Index i bezeichnet werden.

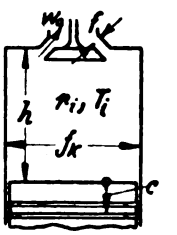


Bild 1
Bezeichnungen.

Für w_a gilt:

$$w_a = 91{,}5\sqrt{\frac{\mathfrak{J}_i - \mathfrak{J}}{M}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei $\mathfrak{J}$ die Enthalpie im Ausströmquerschnitt und M das Molekulargewicht des strömenden Mittels ist. In der J, S-Tafel ist angegeben[3]), wie bei Verbrennungsgasen, die gegenüber Luft abweichende thermische Eigenschaften besitzen, die entsprechenden Werte ermittelt werden können.

Die Enthalpie $\mathfrak{J}$ im Ausströmquerschnitt entspricht nur bei unterkritischem Ausströmen dem Zustand im Außenraum; bei überkritischem Ausströmen ist sie besonders zu ermitteln.

Setzt man adiabatischen Ablauf voraus, so gilt für die Zustandsänderung im Zylinder:

$$\frac{dp_i}{p_i} = \frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{dG_i}{G_i} - \frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{dh}{h} \quad \ldots\ldots (2)$$

wobei mit $\mathfrak{C}$ die Molwärme, mit G_i das augenblickliche Gasgewicht bezeichnet und die verhältnismäßige Volumenänderung durch $\frac{dh}{h}$ gekennzeichnet ist.

Für die zeitlichen Änderungen folgt:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{p_i}{\gamma_i f_k h} \frac{dG_i}{dt} - \frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{p_i}{h} \frac{dh}{dt};$$

nun ist aber $\frac{dh}{dt}$ gleich der augenblicklichen Kolbengeschwindigkeit c, und $\frac{dG_i}{dt}$ kann durch $-\gamma f w_a$ ersetzt werden, so daß

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{p_i}{h} \left(\frac{f}{f_k} \frac{\gamma}{\gamma_i} w_a + c \right)$$

wird, wofür auch

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{p_i}{h} \left(\frac{f}{f_k} \frac{\mathfrak{V}_i}{\mathfrak{V}} w_a + c \right) \quad \ldots\ldots (3)$$

geschrieben werden kann ($\mathfrak{V}$ = Molvolumen).

Bei motorischen Aufgaben empfiehlt sich die Bezugnahme auf den Kurbelwinkel φ; da Zeitelement dt und Kurbelwinkelelement $d\varphi$ durch

$$dt = \frac{d\varphi}{6n}$$

zusammenhängen (n = Drehzahl/min), folgt schließlich — bei gleichzeitigem Übergehen auf Differenzen Δp_i —:

$$\Delta p_i = -\frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}} \frac{p_i}{6nh} \left(\frac{f}{f_k} \frac{\mathfrak{V}_i}{\mathfrak{V}} w_a + c \right) \Delta\varphi \quad \ldots (3a)$$

[1]) O. Lutz und F. Wolf, J, S-Tafel für Luft und Verbrennungsgase. Berlin 1938.

[2]) W. Schule, Techn. Thermodynamik. Bd. 2, S. 390. Berlin 1923.

[3]) A. a. O. S. 6 u. f.

Digitized by Google

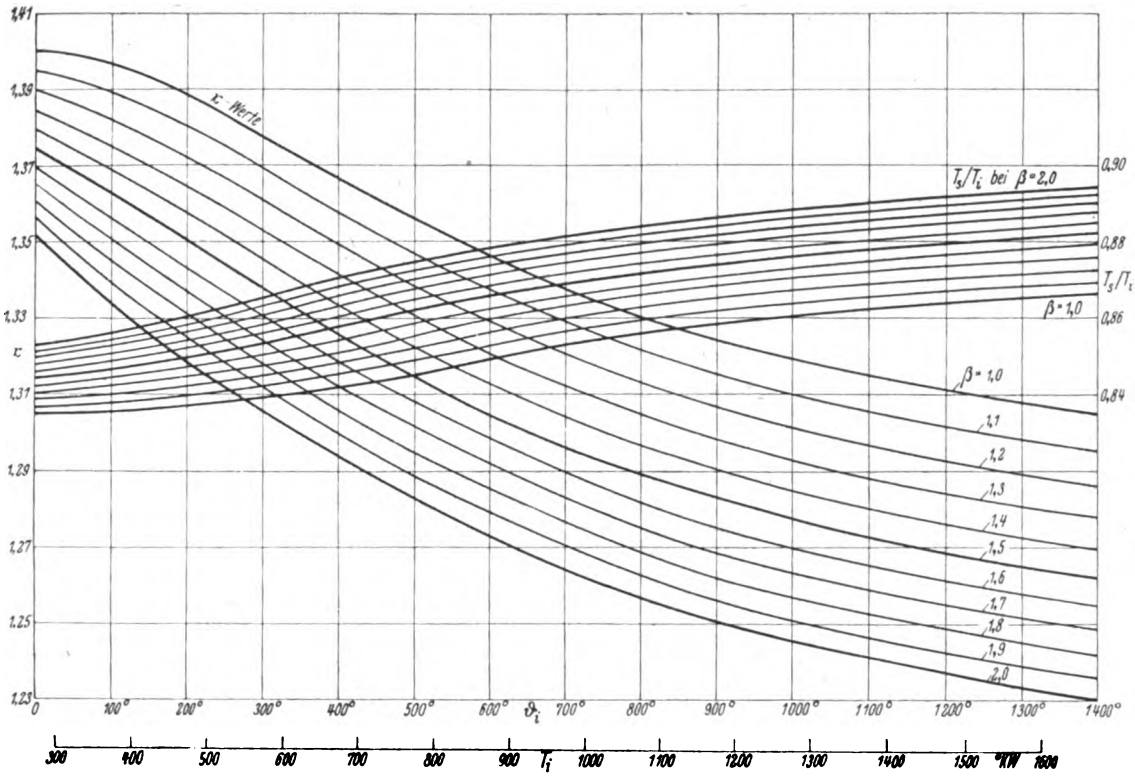


Bild 2. $\varkappa$- und $\frac{T_\varkappa}{T_i}$-Werte in Abhängigkeit von der Temperatnr und dem Tafelfaktor β.

Von äußeren Größen sind hierin bekannt: die Drehzahl n, der Kolbenabstand vom Zylinderkopf h, das Querschnittsverhältnis $\frac{f}{f_k}$ und die augenblickliche Kolbengeschwindigkeit c; als Randbedingung muß ferner der Ausgangszustand p_i, $\mathfrak{V}_i$ gegeben sein. Die übrigen Größen sind aus der $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{S}$-Tafel zu ermitteln, wobei für die Bestimmung des Verhältnisses $\varkappa_i \equiv \frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}}$ der spezifischen Wärmen und des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{V}_i}{\mathfrak{V}}$ der Molvolumina bei überkritischem Ausströmen noch weitere Überlegungen anzustellen sind.

Zunächst sind in Bild 2 die $\varkappa$-Werte in Abhängigkeit vom jeweiligen Temperaturbereich und dem Kennzeichnungsfaktor β der $\mathfrak{J}$,$\mathfrak{S}$-Tafel[4]) aufgezeichnet. Es soll in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen werden, daß man die $\varkappa$-Werte auch unmittelbar aus der $\mathfrak{J}$,$\mathfrak{S}$-Tafel bestimmen kann, wenn keine zu großen Ansprüche an Genauigkeit gestellt werden. Bekanntlich gilt für die Isobaren der $\mathfrak{J}$,$\mathfrak{S}$-Tafel

$$d\,\mathfrak{S}_p = \mathfrak{C}_p \frac{d\,T}{T}$$

und für die Isochoren

$$d\,\mathfrak{S}_v = \mathfrak{C}_v \frac{d\,T}{T}.$$

Wenn man wieder zu Differenzen übergeht, folgt für das gesuchte Verhältnis der spez. Wärmen

$$\frac{\mathfrak{C}_p}{\mathfrak{C}_v} = \frac{\frac{\Delta\,\mathfrak{S}_p}{\Delta\,T}}{\frac{\Delta\,\mathfrak{S}_v}{\Delta\,T}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Um $\frac{\mathfrak{C}_p}{\mathfrak{C}_v}$ zu finden, hat man demnach in der $\mathfrak{J}$,$\mathfrak{S}$-Tafel nach Bild 3 in einem kleinen Abstand $\Delta\,T$ vom Zustandspunkt a die Abschnitte $\Delta\,\mathfrak{S}_v$ und $\Delta\,\mathfrak{S}_p$ zwischen der Isotropen, der Isochoren und Isobaren abzugreifen; dann ist

$$\frac{\mathfrak{C}_p}{\mathfrak{C}_v} = \frac{\Delta\,\mathfrak{S}_p}{\Delta\,\mathfrak{S}_v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4\,a)$$

[4]) A. a. O. S. 5.

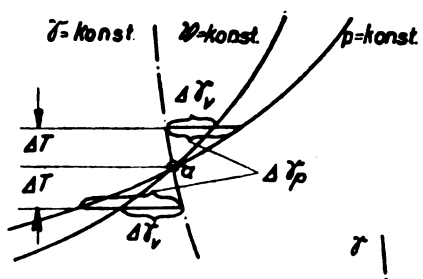


Bild 3. Zur Bestimmung von $\varkappa$

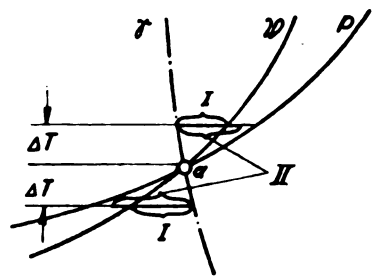


Bild 4. Zur Bestimmung von $\frac{T_\varkappa}{T_i}$.

Um den Fehlereinfluß der Krümmung der Zustandslinien zu verkleinern, wird man die Ermittlung zweckmäßig für eine positive und eine negative Temperaturdifferenz durchführen und die Ergebnisse mitteln.

Die genaue Bestimmung des kritischen Druckverhältnisses, aus dem sich die Ausströmgeschwindigkeit bei überkritischem Ausströmen und das entsprechende Molvolumen ergibt, ist explizit nicht möglich. Geht man davon aus, daß bei überkritischem Ausströmen das den Ausströmquerschnitt durchsetzende Gewicht $f\frac{w_a}{\mathfrak{V}_s}$ ein Maximum bleibt, so muß gelten:

$$\frac{d\,w_a}{w_a} - \frac{d\,\mathfrak{V}_s}{\mathfrak{V}_s} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

oder mit (1)

$$-\frac{d\,\mathfrak{J}_s}{2\,(\mathfrak{J}_i - \mathfrak{J}_s)} - \frac{d\,\mathfrak{V}_s}{\mathfrak{V}_s}.$$

Digitized by Google

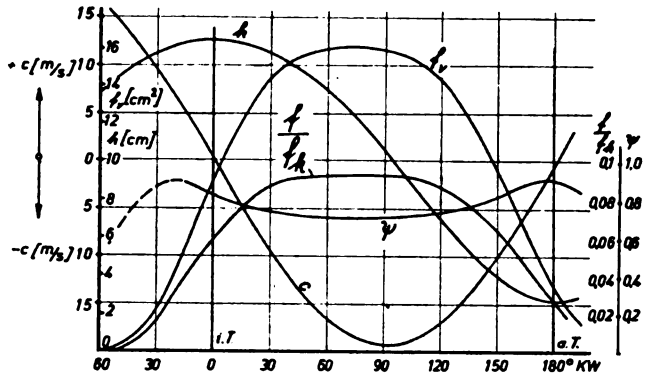


Bild 5. Kolbenweg h, Kolbengeschwindigkeit c, Ventilquerschnitt f_v, Einschnürungsziffer ψ und Verhältnis $\frac{f}{f_k}$ des Ausströmquerschnittes zur Kolbenfläche.

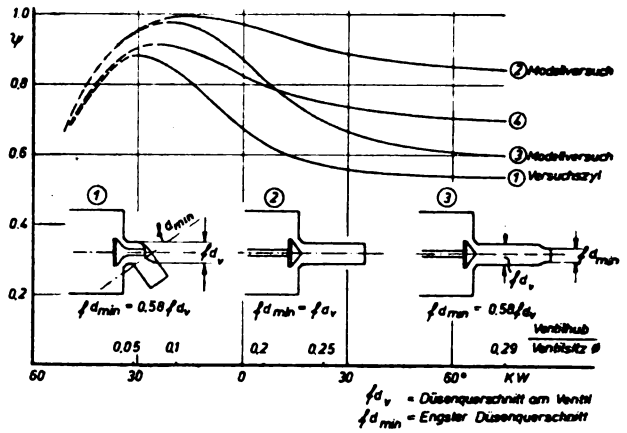


Bild 6. Einschnürungsziffer ψ für verschiedene Anordnungen.

Nun ist $d\mathfrak{J}_s = \mathfrak{C}_{p_s}\, dT_s$ und $\frac{d\mathfrak{V}_s}{\mathfrak{V}_s}$ für adiabatischen Ablauf $= -\frac{\mathfrak{C}_{v_s}}{A\mathfrak{R}}\frac{dT_s}{T_s}$, so daß schließlich

$$\frac{\mathfrak{J}_i - \mathfrak{J}_s}{T_s} = \frac{\mathfrak{C}_{p_s}}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}_{p_s}}{\mathfrak{C}_{v_s}} - 1\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

folgt. Diese Gleichung — die noch keine Vernachlässigungen enthält — kann nur graphisch gelöst werden. Für den vorliegenden Zweck ist aus der $\mathfrak{J},\mathfrak{S}$-Tafel das Verhältnis der Temperaturen $\frac{T_s}{T_i}$ bestimmt worden, Tafel 1, indem vom Zustand $\mathfrak{J}_s$, T_s ausgehend auf $\mathfrak{J}_i$ geschlossen wurde.

Auch hier kann ein Näherungsverfahren angegeben werden. Gleichung (6) kann meist dahingehend vereinfacht werden, daß die spez. Wärme für den Entspannungsvorgang vom Zylinderinneren bis zur Öffnung konstant und gleich dem Wert C_{p_s} in der Öffnung gesetzt wird. Dann ergibt sich

$$\frac{T_i}{T_s} = \frac{\mathfrak{C}_{p_s} + \mathfrak{C}_{v_s}}{2\mathfrak{C}_{v_s}} \quad \ldots\ldots (6a)$$

Die rechte Seite wird ähnlich wie in Bild 3 ermittelt, mit dem Unterschied, daß die eine Strecke (II) nur bis zur Mitte zwischen der Isochore und der Isobare abgegriffen wird, Bild 4. Dann ist

$$\frac{T_s}{T_i} = \frac{I}{II} \quad \ldots\ldots (6b)$$

es kann also T_s bestimmt und damit der Zustand in der $\mathfrak{J},\mathfrak{S}$-Tafel festgelegt werden. Zu berücksichtigen ist, daß die Konstruktion an der Stelle des erst zu findenden Zustandes s durchzuführen wäre; man wird also im allgemeinen eine Korrektur anbringen müssen.

Bei unterkritischem Ausströmen ist der Endzustand gleich dem Zustand im Außenraum, also bekannt.

Damit sind alle Größen der Formel (3a) bekannt und der Ausströmvorgang kann ohne wesentlichen Arbeitsaufwand schrittweise verfolgt werden.

Im folgenden Abschnitt wird die Anwendung an einem Beispiel gezeigt.

3. Durchführung eines Beispiels.

Es soll der Entleerungsvorgang eines Zylinders von 1,64 l Inhalt ermittelt werden, wobei der Ausgangszustand $p_i = 6{,}0$ ata, $\vartheta_i = 1400°$ sei; die Ventilöffnungskurve ist in Bild 5 aufgezeichnet.

Nach der Gleichung (3a) werden zur Ermittlung des Druckverlaufs zunächst die mit den Abmessungen des Motors zusammenhängenden Werte h, c und $\frac{f}{f_k}$ benötigt; sie sind in Bild 5 zusammengetragen. Da $\frac{f}{f_k}$ das Verhältnis des engsten Strömungsquerschnittes (nicht des Ventilquerschnittes f_v) zur Kolbenfläche kennzeichnen soll, ist durch besonderen Versuch die Einschnürungsziffer des betreffenden Steuerorganes festzustellen. In Bild 6 sind die ψ-Werte einiger Ventilanordnungen aufgezeichnet[5]; entsprechend diesen Ergebnissen ist die Kurve 4 als für den vorliegenden Fall ungefähr zutreffend ausgewählt und die Kurve $\frac{f}{f_k}$ in Bild 5 bestimmt worden.

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, im Gebiet des überkritischen Ausströmens die Rechnungsschritte zu 10° KW, im Gebiet des unterkritischen Ausströmens zu 5° KW anzunehmen.

[5]) Nach Versuchen, die Flugbaumeister Dipl.-Ing. E. Hummel im Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring durchgeführt hat. Bei der Übertragung von stationär gemessenen Werten auf dynamische Vorgänge ist insofern Vorsicht zu üben, als durch Anlauf- und Schwingungsvorgänge in der Ventilanordnung die Werte sich ändern können. Hierüber wird später berichtet werden.

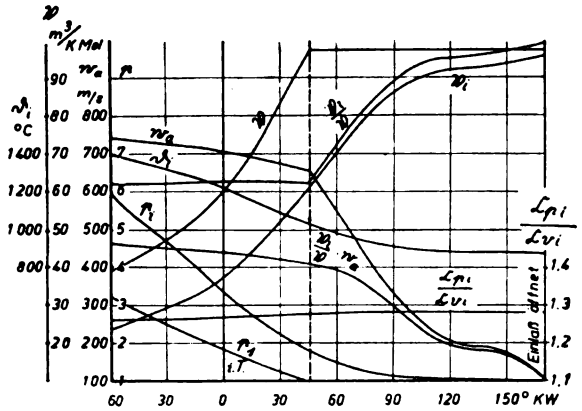


Bild 7, Graphische Durchführung des Ausströmvorgangs.

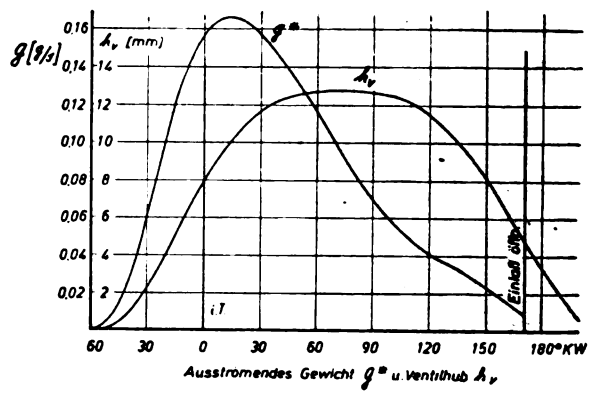


Bild 8. Ausströmendes Gewicht G^* und Ventilhub h_v.

Digitized by Google

Für den ersten Schritt sind die Ausgangswerte $p_i = 6$ ata, $\vartheta_i = 1400^0$, $h_{55^\circ} = 0{,}141$ m, $c_{55^\circ} = 15{,}63$ m/s und $\left(\frac{f}{f_k}\right)_{55^\circ} = 0{,}00083$ gegeben; das Verhältnis $\frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}}$ der spezifischen Wärmen bei der Ausgangstemperatur $T_i = 1673^0$ K kann aus Bild 2 zu 1,262 entnommen werden (wobei für das Verbrennungsgas eines stöchiometrischen Benzin-Luftgemisches der Tafelfaktor β zu 1,50 anzunehmen ist, vgl. J,S-Tafel). Aus Bild 2 folgt für das Temperaturverhältnis $\frac{T_a}{T_i}$ der Wert 0,882, womit sich aus der J,S-Tafel das Molvolumenverhältnis $\frac{\mathfrak{V}_i}{\mathfrak{V}}$ zu 0,612 bestimmen läßt; die Ausströmgeschwindigkeit w_a wird schließlich gleich 743 m/s.

Damit folgt für den ersten Schritt

$$\Delta p = -1{,}262 \frac{6{,}0}{6 \cdot 2700 \cdot 0{,}141} (0{,}00083 \cdot 0{,}612 \cdot 743 + 15{,}63) \cdot 10 = -0{,}530 \text{ at.}$$

Dieser Druckabfall ist immerhin so groß, daß der erste Schritt (für den die Anfangswerte 6,0 ata und 1400° verwendet worden sind, nicht die mittleren Werte — die zur genaueren Rechnung einzusetzen wären —) korrigiert werden muß. Die Rechnung wird deshalb mit $p_i = 5{,}74$ at und $\vartheta_i = 1384^0$ (aus der J,S-Tafel) wiederholt und ergibt

$$\Delta p = -1{,}262 \frac{5{,}740}{6 \cdot 2700 \cdot 0{,}141} (0{,}00083 \cdot 0{,}620 \cdot 783 + 15{,}63) \cdot 10 = -0{,}508 \text{ at.}$$

Damit erhält man für den nächsten Schritt den Anfangswert $p_{i\,50^\circ} = 5{,}492$ ata und aus der J,S-Tafel $\vartheta_{i\,50^\circ} = 1369^0$. Diese Werte sind in Bild 7 eingetragen. Man kann nun ziemlich genau den mittleren Rechnungswert $p_{i\,45^\circ}$ für den zweiten Schritt abschätzen und damit diesen Rechnungsschritt durchführen; eine Korrektur wird meist nicht mehr nötig sein.

Die Genauigkeit des Rechnungsverfahrens ist abhängig:

a) von der Größe der Rechnungsschritte,

b) von der Genauigkeit, mit der die Werte $\frac{\mathfrak{C}_{p_i}}{\mathfrak{C}_{v_i}}$, p_i, $\frac{\mathfrak{V}_i}{\mathfrak{V}}$ u. w_a (s. Gleichung (3a)) jeweils für einen halben Schritt im voraus abgeschätzt bzw. korrigiert werden,

c) von der Ablesegenauigkeit beim Bestimmen der Werte ϑ_i, und w_a aus der J,S-Tafel.

Es empfiehlt sich, anstatt $\mathfrak{V}$ die entsprechenden p- und ϑ-Werte, die genauer abzulesen sind, aus der J,S-Tafel zu entnehmen, und $\mathfrak{V}$ nach der Gasgleichung zu bestimmen.

Bild 7 zeigt das Ergebnis der Auswertung.

In Bild 8 ist schließlich noch das in der Zeiteinheit austretende Gasgewicht G^* ermittelt; es ist kurz nach Erreichen der inneren Totlage am größten und zeigt am Ende des Vorgangs noch eine geringe Ungleichförmigkeit, die von der dort großen Kolbengeschwindigkeit herrührt.

Digitized by Google

Digitized by Google

E Eng X

JAN 22 1941

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 11/12 enthält Arbeiten von: H. G. Küssner und L. Schwarz S. 337—354, H. G. Küssner S. 355—361, L. Schwarz S. 362—369, H. G. Küssner S. 370—378, L. Schwarz S. 379—386, Th. Schade S. 387—400, H. Söhngen S. 401—420

LUFTF.-FORSCHG. BAND 17 | LFG. 11/12 SEITE 337 BIS 420 | MÜNCHEN, 10. 12. 1940

Diese Lieferung enthält den Bandtitel und das Jahresinhaltsverzeichnis von Band 17

Digitized by Google

Mitarbeiter:

Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder. Von H. G. Küssner und L. Schwarz . . . . . Seite 337

Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegungen der Flüssigkeit. Von H. G. Küssner . . . . . Seite 355

Berechnung der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ für größere Werte von s. Von L. Schwarz . . . . . Seite 362

Allgemeine Tragflächentheorie. Von H. G. Küssner . . . . . Seite 370

Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung. Von L. Schwarz . . . . . Seite 379

Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Von Th. Schade . . . . . Seite 387

Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (Ebenes Problem). Von H. Söhngen . . . . . Seite 401

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 63 82 11 — Drahtanschrift: Luftfahrt Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Eine wertvolle Ergänzung zur „Luftfahrt-Forschung" stellt die Zeitschrift

DEUTSCHE LUFTWACHT **Ausgabe: Luftwissen**

Preis des Jahrgangs RM. 12.—

dar. Die Zeitschrift ist zu beziehen vom Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW 68, vom Verlag R. Oldenbourg, München 1, sowie durch alle Buchhandlungen

Digitized by Google

Luftfahrt-Forschung

Band 17 | 10. Dezember 1940 | Lfg. 11/12

Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder.

Von H. G. Küssner und L. Schwarz.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Institut für instationäre Vorgänge.

Das zweidimensionale Problem des schwingenden Flügels mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder wird in der Weise behandelt, daß der Flügel durch eine Platte mit Knicken und Stufen, das Flügelprofil durch eine Skelettlinie ersetzt wird, welche aus einem oder mehreren Geradenzügen besteht. Die berechneten Formeln und Zahlentafeln gestatten unter dieser Voraussetzung die Berechnung der Druckverteilung und der aerodynamischen Reaktionen von schwingenden Rudern und Hilfsrudern mit beliebiger Lage der Ruderachse in bezug auf die Rudervorderkante.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Druckverteilung des schwingenden Flügels.
III. Berechnung der Kräfte und Momente.
IV. Zerlegung der Flügelbewegung in 6 Freiheitsgrade.
V. Kräfte und Momente der einzelnen Freiheitsgrade.
VI. Druckverteilung und aerodynamische Beiwerte der einzelnen Freiheitsgrade.
VII. Systematische Zusammenstellung der Ergebnisse.
VIII. Schrifttum.
Anhang. Vergleich mit der Arbeit von Dietze [2].

I. Einleitung.

Die Grundlage der vorliegenden Arbeit bildet der zusammenfassende Bericht des erstgenannten Verfassers über den instationären Auftrieb von Flügeln [1]. Dort werden für das linearisierte zweidimensionale Problem des schwingenden Flügels allgemeine Formeln zur Berechnung der Druckverteilung angegeben, welche auf beliebige periodische Verformungen des Profilskeletts anwendbar sind. Als Beispiel wurde in [1] die Platte mit einem Knick behandelt, welche einem Flügel mit um die Rudervorderkante drehbarem Ruder entspricht. Um die Steuerkräfte klein zu halten, wird jedoch häufig die Ruderachse nach rückwärts verlegt, oder es wird an die Ruderhinterkante noch ein kleineres Hilfsruder angesetzt. Da die Kenntnis der aerodynamischen Reaktionen schwingender Flügel mit solchen, wie man sagt, aerodynamisch ausgeglichenen Rudern wichtig ist für die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit des Flügelflatterns, erschien es wünschenswert, auch hierfür unter geeigneten Annahmen Formeln abzuleiten, welche unmittelbar in der Praxis angewandt werden können.

Verhältnismäßig einfach ist die Erweiterung der Theorie für einen Flügel mit Ruder und Hilfsruder. Man hat dann an Stelle der Platte mit einem Knick die Platte mit zwei Knicken zu berechnen. Diese Aufgabe ist mittlerweile auch von anderer Seite in Angriff genommen. Während der Fertigstellung dieser Arbeit erschien eine Arbeit von F. Dietze [2], welche diesen Gegenstand behandelt. Schwieriger ist die Behandlung des Ruders mit rückverlegter Ruderachse, des sogenannten aerodynamischen Innenausgleichs. Hier liegt das Problem zweier unabhängig voneinander schwingender Platten vor, das bisher noch nicht streng behandelt worden ist. Ist der Spalt zwischen beiden Platten jedoch klein und sind die Schwingungsamplituden klein, so kann man in erster Näherung mit den für eine Platte entwickelten Formeln rechnen, ohne eine zweite Abflußbedingung befriedigen zu müssen. Dieser Fall liegt beim Doppelflügel vor. Bei den häufiger benutzten Ruderbauarten mit stumpfem Flossenende wird der Spalt bei kleinem Ruderwinkel nicht durchströmt. Man ersetzt diese Anordnung daher besser durch ein zwischen Flossenhinterkante und Rudervorderkante durchgehendes Profilskelett.

Betrachtet man die senkrechte Translationsbewegung des Ruders als neuen Freiheitsgrad »Stufenschwingung«, so ist es möglich, im Verein mit den Freiheitsgraden der einfach und doppelt geknickten Platte, Rudersysteme mit beliebiger Lage der Ruder- und Hilfsruderachse zu berechnen. Die hierfür nötigen Formeln werden im folgenden abgeleitet, wobei von einer neuen Integraldarstellung für die Berechnung der Druckverteilung Gebrauch gemacht wird.

II. Druckverteilung des schwingenden Flügels.

Wir betrachten zunächst die Bewegung des Flügels. Einer gleichförmig geradlinigen Bewegung des Flügels als Ganzem mit der Fluggeschwindigkeit v sei eine zur Flugrichtung senkrechte harmonische Schwingungsbewegung $z(t)$ mit kleiner Amplitude überlagert. Um das vorliegende Problem mathematisch bewältigen zu können, sind wir vorerst zur Linearisierung der Ansätze gezwungen. Wir müssen daher das Flügelprofil durch eine aerodynamisch möglichst gleichwertige Skelettlinie ersetzen. In der Ruhelage sei die Skelettlinie eine mit der horizontalen x-Achse zusammenfallende Gerade, die sich von $x = -1$ bis $x = +1$ erstreckt. Die harmonische Schwingungsbewegung eines beliebigen Punktes der Skelettlinie ist dann in komplexer Schreibweise gegeben durch

$$z = f(x) \cdot e^{i\nu t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

worin ν die Kreisfrequenz und t die Zeit bedeutet. Im allgemeinen ist $f(x)$ eine komplexe Funktion. Physikalische Bedeutung soll immer der rein imaginäre Term der Gleichungen haben. Die Skelettlinie kann also nicht nur Translation und Drehung, sondern auch beliebige Verformungen bei der Schwingung erfahren, wobei jedoch immer zu beachten ist, daß die Schwingungsbewegung senkrecht zur x-Achse erfolgt und die Amplituden klein sein müssen.

Wir bezeichnen mit »Abwind« die Vertikalgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens in einem Koordinatensystem, in dem die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. Der Abwind

Digitized by Google

an der Skelettlinie ist leicht angebbar. Er besteht aus einem stationären Anteil infolge Entlanggleitens des Flüssigkeitsteilchens an der entsprechend $\partial z/\partial x$ geneigten Skelettlinie mit der Geschwindigkeit v und aus einem instationären Anteil infolge Mitführung des Flüssigkeitsteilchens mit der schwingenden Skelettlinie entsprechend ihrer Vertikalgeschwindigkeit $\partial z/\partial t$. Die Annahme, daß das Flüssigkeitsteilchen überall an der Skelettlinie mit der konstanten Geschwindigkeit v entlanggleitet, ist natürlich nur eine im Rahmen der Linearisierung zulässige Näherungsannahme. Man vernachlässigt hierbei kleine Störungsgeschwindigkeiten Δv gegenüber der Fluggeschwindigkeit v. Führen wir die reduzierte Frequenz $\omega = i\nu l/v$ ein, worin l die halbe Flügeltiefe ist, so erhalten wir mit (1) als Abwind an der Skelettlinie

$$w = v \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = v\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\omega z}{l}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Es erweist sich nun als zweckmäßig, eine neue Variable $x = -\cos\Theta$ einzuführen und w als Funktion von Θ und t zu betrachten. Wir können dann die Fourier-Entwicklung aufstellen

$$w(\Theta, t) = v\, e^{i\nu t}\left[P_0 + 2\sum_1^\infty P_n \cos n\,\Theta\right] \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

Ist der Abwind in dieser Form gegeben, so liefert die zweidimensionale Tragflächentheorie eine eindeutige Beziehung zwischen dem Abwind und der Druckverteilung auf der Skelettlinie, wobei als Druck der Druckunterschied zwischen der Ober- und Unterseite der Skelettlinie an einer gewissen Stelle x bezeichnet wird. Zunächst ist es klar, daß der Druck ebenfalls eine harmonische Funktion der Zeit sein muß, wenn der Abwind eine harmonische Funktion der Zeit ist. Ferner muß der Druck proportional dem Staudruck, also proportional ϱv^2 sein. Wir machen dementsprechend den Ansatz

$$\Pi(\Theta, t) = \varrho\, v^2\, e^{i\nu t}\left[2\,a_0 \cdot \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + 4\sum_1^\infty a_n \frac{\sin n\,\Theta}{n}\right], \quad (4)$$

welcher den glatten Abfluß der Flüssigkeit an der Flügelhinterkante gewährleistet. Der Druck hängt mit der in der Arbeit [1] benutzten Verteilung der gebundenen Wirbel γ durch die Beziehung $\Pi = \varrho v \gamma$ zusammen. Man kann nun nicht nur mit Hilfe von Ansätzen, welche von der Wirbelvorstellung Gebrauch machen, sondern auch mit Hilfe des Prandtlschen Beschleunigungspotentials zu folgender allgemeinen Beziehung zwischen den Koeffizienten a_n und P_n gelangen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1+T}{2}(P_0 - P_1) + P_1 \\ a_n &= \frac{\omega}{2} P_{n-1} - n\,P_n - \frac{\omega}{2} P_{n+1};\quad n \geq 1 \\ T = T(-i\omega) &= \frac{H_0^{(2)}(-i\omega) + i H_1^{(2)}(-i\omega)}{-H_0^{(2)}(-i\omega) + i H_1^{(2)}(-i\omega)} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Auswertung dieses allgemeinen Ergebnisses in speziellen Fällen erfordert

1. Bestimmung der P_n aus der Plattenbewegung gemäß Gl. (2) und (3);
2. Berechnung der a_n aus Gl. (5);
3. Berechnung der Druckverteilung Gl. (4) durch Summation der darin auftretenden Reihe.

Um zu einer Beziehung zwischen w und Π zu gelangen, ist der Umweg über die Fourierentwicklungen (3) und (4) nicht notwendig. Wir leiten im folgenden eine Integralbeziehung zwischen Π und w her. Die hier verwendete Methode gehört zum Gedankenkreis des Poissonschen Integrals. Wir setzen zu diesem Zweck

$$w(\Theta, t) = v\, e^{i\nu t} W(\Theta),$$

$$W(\Theta) = P_0 + 2\sum_1^\infty P_n \cos n\,\Theta$$

und betrachten diese Funktion für $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ und nicht nur für $0 \leq \Theta < \pi$ wie seither.

$W(\Theta)$ sei stückweise stetig. Die Fourierkoeffizienten P_n sind

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi W(\vartheta)\cdot\cos n\,\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\vartheta)\, e^{-i n \vartheta}\, d\vartheta, \quad n \geq 0.$$

Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\vartheta)\,\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta$$

analytisch für $|z| < 1$ und wird dort durch die Potenzreihe

$$f(z) = P_0 + 2\sum_1^\infty P_n z^n$$

dargestellt, vgl. Hurwitz-Courant [4].

Multipliziert man a_n $(n \geq 1)$ nach (5) mit $2z^{n-1}$ und summiert von $n = 1$ bis ∞, so ergibt sich

$$2\sum_1^\infty a_n z^{n-1} = \frac{\omega}{2}(f(z) + P_0) - f'(z) - \frac{\omega}{2}\frac{1}{z^2}(f(z) - P_0 - 2P_1 z) = \frac{\omega}{2}\left[f(z)\cdot\left(1-\frac{1}{z^2}\right) + P_0\left(1+\frac{1}{z^2}\right) + \frac{2P_1}{z}\right] - f'(z)$$

und durch Integration von 0 bis z

$$2\sum_1^\infty a_n \frac{z^n}{n} = \frac{\omega}{2}\int_0^z\left[f(z)\cdot\left(1-\frac{1}{z^2}\right) + P_0\left(1+\frac{1}{z^2}\right) + \frac{2P_1}{z}\right]dz - f(z) + P_0$$

Setzt man für $f(z)$, P_0, P_1 die obigen Integraldarstellungen ein und vertauscht die Integrationen, so erhält man

$$2\sum_1^\infty a_n \frac{z^n}{n} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} W(\vartheta)\left[\omega i \ln(1 - e^{-i\vartheta}\cdot z)\cdot\sin\vartheta + \frac{z}{e^{i\vartheta}-z}\right]d\vartheta.$$

Macht man nun den Grenzübergang $z \to e^{i\Theta}$, so ergibt sich, falls die linke Seite konvergiert,

$$2\sum_1^\infty a_n \frac{e^{i n\Theta}}{n} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} W(\vartheta)\cdot\left[\omega i \ln(1 - e^{i(\Theta-\vartheta)})\cdot\sin\vartheta + \frac{e^{i\Theta}}{e^{i\vartheta}-e^{i\Theta}}\right]\cdot d\vartheta - W(\Theta).$$

Dabei ist das Integral auf der rechten Seite, zum mindesten aber das Integral über den mit $e^{i\Theta}/(e^{i\vartheta} - e^{i\Theta})$ behafteten Bestandteil als Cauchyscher Hauptwert zu nehmen, bei dem die kritische Stelle des Integranden, $\vartheta = \Theta$, von beiden Seiten symmetrisch angegangen wird. Der Zusatzterm $-W(\Theta)$ ergibt sich bei der exakten Durchführung des Grenzüberganges, vgl. entsprechende Überlegungen bei Hurwitz-Courant [4].

Zur Abkürzung setzen wir

$$\omega i \ln(1 - e^{i(\Theta-\vartheta)})\cdot\sin\vartheta + \frac{e^{i\Theta}}{e^{i\vartheta}-e^{i\Theta}} = K(\vartheta, \Theta).$$

Da $W(\vartheta)$ gerade und periodisch von der Periode 2π ist, wird

Digitized by Google

$$\int_0^{2\pi} W(\vartheta)\, K(\vartheta, \Theta)\, d\vartheta = \int_0^{\pi} W(\vartheta)\, [K(\vartheta, \Theta) + K(-\vartheta, \Theta)] \cdot d\vartheta$$

und folglich

$$4i \sum_1^{\infty} a_n \frac{\sin n\Theta}{n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} W(\vartheta)\, K_1(\vartheta, \Theta)\, d\vartheta$$

mit

$$K_1(\vartheta, \Theta) = K(\vartheta, \Theta) + K(-\vartheta, \Theta) - K(\vartheta, -\Theta) - K(-\vartheta, -\Theta)$$

oder ausgerechnet

$$K_1(\vartheta, \Theta) = \omega i \cdot (-2 \sin\vartheta \cdot L(\Theta, \vartheta)) + \frac{2i \sin\Theta}{\cos\vartheta - \cos\Theta},$$

wobei

$$L(\Theta, \vartheta) = \ln \left| \frac{\sin\frac{\Theta+\vartheta}{2}}{\sin\frac{\Theta-\vartheta}{2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)}; \qquad (6)$$

somit ist

$$4 \sum_1^{\infty} a_n \frac{\sin n\Theta}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} W(\vartheta) \left[\omega L(\Theta, \vartheta) \sin\vartheta - \frac{\sin\Theta}{\cos\vartheta - \cos\Theta} \right] d\vartheta.$$

Damit ist die unter 3. genannte Summation ein für allemal ausgeführt. Nehmen wir die fehlenden Terme noch hinzu, so wird die Druckverteilung

$$H(\Theta, t) = \varrho v^2 e^{i\nu t} \cdot [(1+T)(P_0 - P_1) + 2P_1] \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + \varrho v \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(\vartheta, t) \cdot \left[\omega L(\Theta, \vartheta) \sin\vartheta - \frac{\sin\Theta}{\cos\vartheta - \cos\Theta} \right] d\vartheta \quad \ldots \quad (7)$$

Drückt man die Fourierkoeffizienten P_0, P_1 noch durch Integrale aus, so ergibt sich die von Fourieranalyse völlig freie Integraldarstellung der Druckverteilung

$$\Pi(\Theta, t) = \varrho v \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(\vartheta, t) \left[\left\{ \frac{1+T}{2} (1 - \cos\vartheta) + \cos\vartheta \right\} \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + \omega L(\Theta, \vartheta) \sin\vartheta - \frac{\sin\Theta}{\cos\vartheta - \cos\Theta} \right] d\vartheta \quad \ldots \quad (8)$$

Damit ist Π durch w und nach (2) durch z gegeben. Zum Schluß sei bemerkt, daß eine unabhängige Ableitung dieses Ergebnisses, welche nicht von Fourierentwicklungen Gebrauch macht, sondern an die bekannte Lösung einer einfachen Integralgleichung anknüpft, in der Arbeit [3] des zweitgenannten Verfassers enthalten ist. Auch H. Söhngen hat gemäß mündlicher Mitteilung dieses Ergebnis unabhängig erhalten.

III. Berechnung der Kräfte und Momente.

Ist die Druckverteilung Π als Funktion von Θ gegeben, so ist die auf einen Bereich $x_1 < x < 1$ der Skelettlinie ausgeübte Kraft

$$K_1 = \int_{x_1}^{1} \Pi\, dx = \int_{\chi_1}^{\pi} \Pi(\Theta, t) \sin\Theta \cdot d\Theta \quad \ldots \quad (9)$$

Darin ist $x_1 = -\cos\chi_1$ gesetzt. Die Stelle $x = 1$ bzw. $\Theta = \pi$ bezeichnet die Flügelhinterkante, das Ende der Skelettlinie. Entsprechend wird das Moment um den Bezugspunkt $x_2 = -\cos\chi_2$ definiert durch

$$M_1 = \int_{x_1}^{1} \Pi \cdot (x - x_2)\, dx = \int_{\chi_1}^{\pi} \Pi(\Theta, t)\, (\cos\chi_2 - \cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta \quad \ldots \quad (10)$$

Hierin ist die halbe Flügeltiefe $l = 1$ gesetzt. K_1 und M_1 gelten nur für einen Plattenstreifen der Breite 1. Will man die Kraft und das Moment für eine beliebige Platte mit der Tiefe $2l$ und der Breite b haben, so ist allgemein

$$K = K_1 \cdot lb,$$
$$M = M_1 \cdot l^2 b$$

zu setzen. Das Moment ist positiv, wenn es kopflastig wirkt.

IV. Zerlegung der Flügelbewegung in 6 Freiheitsgrade.

Die Linearisierung unseres Problems stellte zunächst eine mathematische Notmaßnahme dar. Sie hat jedoch auch eine wertvolle Seite, indem sie die Übersicht über die Lösungen außerordentlich erleichtert. Die Linearisierung des Ansatzes ermöglicht es, komplizierte Bewegungen und Verformungen des Flügels in einfachere Anteile, sogenannte »Freiheitsgrade«, zu zerlegen und die sich für die einzelnen Anteile ergebenden Druckverteilungen hieraus zu superponieren, um zur Endlösung zu gelangen.

Wir legen unseren Betrachtungen einen Flügel mit Ruder und Hilfsruder, beide aerodynamisch ausgeglichen, zugrunde. Die Skelettlinie dieses Gebildes ist in Bild 1 gegeben. Der Flügel als Ganzes ist freibeweglich; die Beweglichkeit des Ruders ist dadurch eingeschränkt, daß einer seiner Punkte, die Ruderachse, starr mit dem Flügel verbunden ist, ebenso ist die Hilfsruderachse starr mit dem Ruder verbunden. Demnach läßt sich der Bewegungszustand aus folgenden 4 Anteilen überlagern, s. Bild 2:

a) Schlagschwingungen,
b) Flügeldrehschwingungen um den vorderen Neutralpunkt $x = -1/2$,
c), d) Ruderdrehschwingungen um die Ruderdrehachse [$x = -\cos\chi_R$; Rudervorderkante bei $x = -\cos\varphi$; Flügelhinterkante bei $x = -\cos(\varphi - \delta_R)$],
e), f) Hilfsruderdrehschwingungen um die Hilfsruderdrehachse [$x = -\cos\chi_H$; Hilfsrudervorderkante bei $x = -\cos\psi$; Ruderhinterkante bei $x = -\cos(\psi - \delta_H)$].

Wir zerlegen die Ruderdrehschwingung in zwei Anteile, die wir getrennt behandeln wollen, nämlich eine Drehschwingung um die Rudervorderkante und eine Translationsschwingung, die wir »Stufenschwingung« nennen (Bild 3a und 3b). Dasselbe gilt für das Hilfsruder. Diese Zerlegung bietet den Vorteil, daß beide Anteile in der Hauptsache nur von einem geometrischen Parameter φ bzw. ψ abhängen. Die wirkliche Ruderschwingung mit beliebiger Drehachse und beliebigen Amplituden ergibt sich dann als Linearform dieser beiden Anteile.

Hiernach können wir eine beliebige Flügel-Ruder-Hilfsruderschwingung aus folgenden sechs Freiheitsgraden zusammensetzen:

a) Schlagschwingung des ganzen Flügels, reine Translation des Flügels;
b) Flügeldrehschwingung um den vorderen Neutralpunkt;
c) Ruderdrehschwingung um die Rudervorderkante;
d) Ruderstufenschwingung, Translation des Ruders;
e) Hilfsruderdrehschwingung um die Hilfsrudervorderkante;
f) Hilfsruderstufenschwingung, Translation des Hilfsruders.

Zu bemerken ist, daß im Flügel das Ruder und Hilfsruder einbegriffen ist, im Ruder das Hilfsruder. Die Amplituden dieser sechs Freiheitsgrade bezeichnen wir mit A, B, C, D, E, F. Die Amplitude D bestimmt sich aus der Forderung, daß der der Ruderachse entsprechende Punkt $x = -\cos\chi_R$ bei der aus den Freiheitsgraden c und d überlagerten Schwingung fest bleibt. Nun erfährt dieser Punkt durch den Freiheitsgrad c den maximalen Ausschlag $C(\cos\varphi - \cos\chi_R)$, durch den Freiheitsgrad d den Ausschlag D. Soll die Ruderachse fest bleiben, so muß

$$C(\cos\varphi - \cos\chi_R) + D = 0 \quad \ldots \quad (11)$$

Digitized by Google

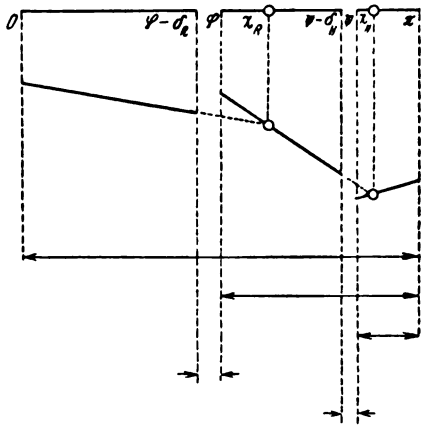


Bild 1. Die geometrischen Abmessungen der Platte.

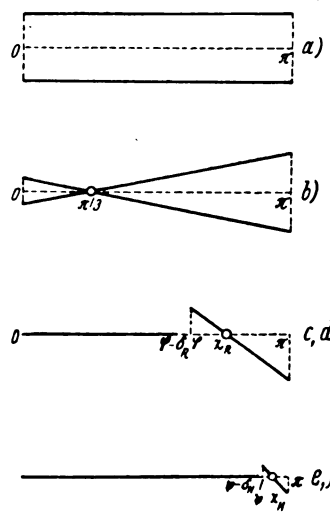


Bild 2. Flügel- und Ruderschwingungen.
Die Skelettlinie ist in den Stellungen des maximalen Ausschlages gezeichnet.

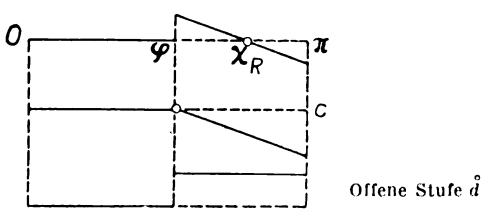


Bild 3a. Ist eine merkliche Durchströmung des Spaltes vorhanden, so ist die Idealisierung zur Spaltbreite 0 zulässig. Das Skelett der Flosse ist bis η durchgezogen. Der Spalt zwischen Flossenhinterkante und Rudernase ist nicht überbrückt. Die zugehörige Verformung wird zerlegt in die Freiheitsgrade c (Ruderdrehschwingung) und $\overset{\circ}{d}$ (Ruderstufenschwingung bei offener Stufe).

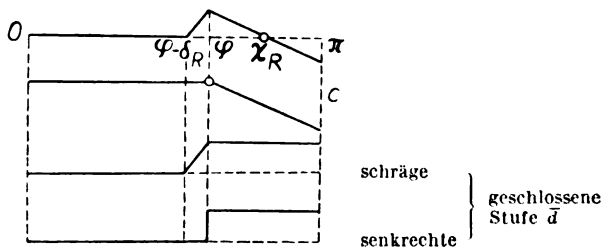


Bild 3b. Bei Flosse und Ruder mit zurückverlegter Ruderachse wird im Fall verschwindender Spaltdurchströmung der Spalt durch eine Schräge überbrückt; die zugehörige Verformung wird zerlegt in die Freiheitsgrade c (Ruderdrehschwingung) und $\bar{d}$ (Ruderstufenschwingung bei geschlossener schräger Stufe). Der Grenzübergang zur Spaltbreite 0 ist nur unvollständig und unter besonderer Vorsicht ausführbar (geschlossene senkrechte Stufe).

sein. Eine entsprechende Formel gilt für das Hilfsruder

$$E\,(\cos\psi - \cos\chi_H) + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die einzelnen Freiheitsgrade und ihre Überlagerungen sind in Bild 2 und 3a, b dargestellt. Bei den Freiheitsgraden *d* und *f* wollen wir allgemein zwei Fälle unterscheiden, nämlich die »offene Stufe«, bei welcher der Ruderspalt voll durchströmt wird, und die »geschlossene Stufe«, bei welcher der Ruderspalt gar nicht durchströmt wird. Der erste Fall ist annähernd verwirklicht bei einem Doppelflügel mit schneidenartigem Flossenende und dünnem Ruder oder ein wenig vertikal versetztem Ruder. Der zweite Fall ist bei Anordnungen mit stumpfem Flossenende und dickerem Ruder annähernd verwirklicht, da die Dickenabmessung die Durchströmung des Spaltes bei kleinen Ruderwinkeln gänzlich verhindert und auch bei größeren Ruderwinkeln stark drosselt; vgl. hierzu und zu dem Folgenden Bild 3a und 3b.

Die offene Stufe, kenntlich durch ein hochgesetztes °, besteht aus zwei ebenen, parallelen Platten. Aus stationären Untersuchungen der geknickten Platte mit Spalt von Kleinwächter [4] und von H. Söhngen [5] weiß man, daß im Grenzfalle unendlich kleinen Spaltes die Druckverteilung unabhängig von einer vertikalen Translation des Ruders ist, falls diese klein ist. Die Befriedigung einer zweiten Abflußbedingung ist in diesem Grenzfalle also nicht erforderlich, und man gewinnt die Druckverteilung aus der bekannten Lösung der Integralgleichung einer Platte, die sich von der Flossenvorderkante bis zur Ruderhinterkante erstreckt[1]). Wir nehmen an, daß dies auch für instationäre Strömung gilt.

Die geschlossene Stufe, kenntlich durch ein hochgesetztes ¯, besteht aus zwei ebenen, parallelen Platten, die durch

[1]) Herr Dr. Söhngen hat uns mündlich darauf aufmerksam gemacht, wofür wir ihm an dieser Stelle danken.

Digitized by Google

eine Schräge mit der Projektion $2\,l\,\tau_{sR}$ verbunden sind. Die Skelettlinie besteht also aus einem lückenlosen Geradenzug. Wir nehmen an, daß die Breite $2\,l\,\tau_{sR}$ des durch eine Gerade überbrückten Spaltes klein sei und werden in den folgenden Formeln der Einfachheit halber diejenigen Glieder weglassen, welche mit τ_{sR} nach Null gehen. Es bleibt dann nur ein logarithmisches Glied im Ausdruck für die stationäre Ruderkraft bestehen, welches τ_{sR} enthält. Bei verschwindender Stufenbreite $\tau_{sR} \to 0$, also beim Übergang zur senkrechten Stufe, strebt dies Glied nach ∞, was verständlich ist, da die linearisierte Theorie nur für kleine Neigungswinkel der Skelettlinie gilt. Man kann diese Schwierigkeit umgehen, indem man entweder eine endliche Stufenbreite $2\,l\,\tau_{sR}$ wählt oder eine »Abschneidevorschrift« macht. Logarithmische Singularitäten treten übrigens häufig in den Ergebnissen der theoretischen Physik auf und werden dort durch Abschneidevorschriften unschädlich gemacht.

Für die Hilfsruderstufenschwingung gilt eine entsprechende Unterscheidung von offener und geschlossener Stufe.

Bezüglich des Ersatzes des Flügelprofils durch eine Skelettlinie, welche aus einem oder mehreren Geradenzügen besteht, ist allgemein zu sagen, daß es sich hier um einen Notbehelf handelt. Hätten wir genügend genaue instationäre Druckmessungen zur Verfügung, so könnten wir ein Ersatzskelett berechnen, welches die gemessenen Drücke im Rahmen der linearisierten Theorie möglichst weitgehend reproduziert. Die Skelettlinie würde im allgemeinen krummlinig sein und mit einer größeren Zahl von Parametern behaftet sein. Die Ausarbeitung einfacher Formeln für die aerodynamischen Beiwerte wäre dann wohl kaum möglich, und man müßte diese Beiwerte selbst den Messungen entnehmen.

V. Kräfte und Momente der einzelnen Freiheitsgrade.

K = Auftrieb des ganzen Flügels.
M_0 = Moment des ganzen Flügels um den vorderen Neutralpunkt.
R = Auftrieb des Ruders.
N = Moment des Ruders um die Rudervorderkante.
P = Auftrieb des Hilfsruders.
Q = Moment des Hilfsruders um die Hilfsrudervorderkante.

Diese Kräfte und Momente $K, \ldots . Q$ setzen sich aus verschiedenen Anteilen zusammen, die von den einzelnen Freiheitsgraden $a, \ldots f$ herrühren:

$$K = K_a + K_b + \ldots + K_f$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q = Q_a + Q_b + \ldots + Q_f,$$

wobei z. B. K_a den Anteil des Flügelauftriebs bedeutet, der von dem Freiheitsgrad a mit der Amplitude A kommt.

k_a	m_a	$r_a(\varphi)$	$n_a(\varphi)$	$p_a(\psi)$	$q_a(\psi)$
k_b	m_b	$r_b(\varphi)$	$n_b(\varphi)$	$p_b(\psi)$	$q_b(\psi)$
$k_c(\varphi)$	$m_c(\varphi)$	$r_c(\varphi)$	$n_c(\varphi)$	$p_c(\varphi,\psi)$	$q_c(\varphi,\psi)$
$k_d(\varphi)$	$m_d(\varphi)$	$r_d(\varphi)$	$n_d(\varphi)$	$p_d(\varphi,\psi)$	$q_d(\varphi,\psi)$
$k_e(\psi)$	$m_e(\psi)$	$r_e(\varphi,\psi)$	$n_e(\varphi,\psi)$	$p_e(\psi)$	$q_e(\psi)$
$k_f(\psi)$	$m_f(\psi)$	$r_f(\varphi,\psi)$	$n_f(\varphi,\psi)$	$p_f(\psi)$	$q_f(\psi)$

Bild 4. Schema der Kraft- und Momentbeiwerte der sechs Freiheitsgrade.

	φ	ψ
φ	φ	φ,ψ
ψ	φ,ψ	ψ

Bild 5. Abhängigkeit der Beiwerte des Schemas von φ und ψ.

Wir haben demnach die 36 Größen

$$K_g, M_{0g}, R_g, N_g, P_g, Q_g, (g = a, \ldots f)$$

zu untersuchen. Sie werden dimensionslos gemacht und vom Faktor $e^{i\nu t}$ befreit durch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} K_g &= \pi\varrho v^2 l\ b \cdot G e^{i\nu t} \cdot k_g \\ M_{0g} &= \pi\varrho v^2 l^2 b \cdot G e^{i\nu t} \cdot m_g \\ R_g &= \pi\varrho v^2 l\ b \cdot G e^{i\nu t} \cdot r_g \\ N_g &= \pi\varrho v^2 l^2 b \cdot G e^{i\nu t} \cdot n_g \\ P_g &= \pi\varrho v^2 l\ b \cdot G e^{i\nu t} \cdot p_g \\ Q_g &= \pi\varrho v^2 l^2 b \cdot G e^{i\nu t} \cdot q_g \end{aligned}\right\} \quad g = a, \ldots, f \qquad (13)$$

Somit haben wir die endgültigen Formeln, die die Kräfte und Momente auf die dimensionslos gemachten Kräfte und Momente der einzelnen Freiheitsgrade zurückführen:

$$\left.\begin{aligned} K &= \pi\varrho v^2 l\ b \cdot e^{i\nu t} \cdot \Sigma G \cdot k_g \\ M_0 &= \pi\varrho v^2 l^2 b \cdot e^{i\nu t} \cdot \Sigma G \cdot m_g \\ R &= \pi\varrho v^2 l\ b \cdot e^{i\nu t} \cdot \Sigma G \cdot r_g \\ N &= \pi\varrho v^2 l^2 b \cdot e^{i\nu t} \cdot \Sigma G \cdot n_g \\ P &= \pi\varrho v^2 l\ b \cdot e^{i\nu t} \cdot \Sigma G \cdot p_g \\ Q &= \pi\varrho v^2 l^2 b \cdot e^{i\nu t} \cdot \Sigma G \cdot q_g \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \qquad (14)$$

Dabei sind die Summen über sämtliche vorkommenden Freiheitsgrade g zu erstrecken. G bedeutet die Amplitude des Freiheitsgrades g. Wir weisen noch ausdrücklich darauf hin, daß hier das Rudermoment N auf die Vorderkante des Ruders, das Hilfsrudermoment Q auf die Vorderkante des Hilfsruders bezogen ist. Die 36 aerodynamischen Beiwerte, die zu bestimmen sind, ordnet man zweckmäßig in dem Schema, Bild 4, an.

Das Schema besteht aus 9 quadratischen Feldern zu je 4 Beiwerten, die sich in 3 Reihen bzw. in 3 Kolonnen anordnen. Die Abhängigkeit von ω ist nicht notiert. Die Beiwerte in den Feldern der 2. Reihe und 2. Kolonne hängen von φ, die der 3. Reihe und 3. Kolonne von ψ ab, vgl. Bild 5.

Es sind also

1. 4 Beiwerte von φ und ψ unabhängig,
2. 12 Beiwerte Funktionen von φ,
3. 12 Beiwerte Funktionen von ψ,
4. $2 \cdot 4$ Beiwerte Funktionen von φ und ψ.

VI. Druckverteilung und aerodynamische Beiwerte der einzelnen Freiheitsgrade.

Wir stellen im folgenden die Berechnung aller 6 Freiheitsgrade systematisch zusammen, auch der bereits aus [1] bekannten.

a) Schlagschwingung.

Die Platte schwingt harmonisch, indem sie sich senkrecht zur Anströmrichtung parallel verschiebt:

$$z_a = A e^{i\nu t};$$

dann ist

$$w_a = v\,\omega\,A\,e^{i\nu t},$$

die Fourierkoeffizienten von w_a sind demnach

$$P_0 = \omega A,\ P_n = 0 \text{ für } n > 0,$$

woraus sich die a_n ergeben zu

$$a_0 = \frac{1+\frac{T}{2}}{2}\,\omega A,\ a_1 = \frac{\omega}{2} A,\ a_n = 0 \text{ für } n > 1;$$

somit wird

$$\Pi_a = \Pi_a(A;\ \Theta, t) =$$
$$= \varrho\, v^2\, e^{i\nu t} \cdot A \left[(1+T)\,\omega \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + 2\,\omega^2 \sin\Theta\right] \qquad (15)$$

Durch Integration dieser Druckverteilung nach Gl. (9) und (10) ergeben sich folgende Kräfte und Momente bzw. die sie ersetzenden dimensionslosen Beiwerte:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} k_a &= \omega(1+T)+\omega^2 \\ m_a &= \frac{1}{2}\omega^2 \\ \pi r_a(\varphi) &= (1+T)\,\omega\,\Phi_{31}+\omega^2\Phi_3 \\ \pi n_a(\varphi) &= \frac{1}{2}\omega\,\Phi_8(1+T)+\frac{1}{2}\omega^2\Phi_4 \\ p_a(\psi) &= r_a(\psi) \\ q_a(\psi) &= n_a(\psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

Die Größen $\Phi_n = \Phi_n(\varphi)$ sind Funktionen von φ und werden in der Liste der Φ-Funktionen, VII, 5, angegeben. Da in Π_a die Größe φ als Parameter nicht auftritt, gehen die Integrale für p_a, q_a aus denen für r_a, n_a dadurch hervor, daß φ durch ψ ersetzt wird.

b) Drehschwingung.

Da wir uns auf kleine Drehwinkel beschränken, wird die Bewegung der Platte dargestellt durch

$$z_b = B\left(\frac{1}{2}-\cos\Theta\right)e^{i\nu t}.$$

Man findet

$$w_b = v\,B\,e^{i\nu t}\cdot\left[\omega\left(\frac{1}{2}-\cos\Theta\right)+1\right],$$

woraus sich die Fourierkoeffizienten zu

$$P_0 = B\left(1+\frac{\omega}{2}\right);\quad P_1 = -\frac{\omega}{2}B;\quad P_n = 0 \text{ für } n>1$$

ergeben.

Daraus bestimmen sich die Koeffizienten a_n, wie folgt:

$$a_0 = \frac{1+T}{2}(1+\omega)\,B-\frac{\omega}{2}B$$

$$a_1 = \omega B+\frac{\omega^2}{4}B$$

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{4}B,\quad a_n = 0 \text{ für } n>2.$$

Somit wird die Druckverteilung

$$\begin{aligned} \Pi_b &= \Pi_b(B;\,\Theta,t) = \\ &= \varrho\,v^2 e^{i\nu t}\cdot B\cdot\left[\left\{(1+\omega)(1+T)-\omega\right\}\cot g\frac{\Theta}{2}\right. \\ &\left.+(4\omega+\omega^2)\sin\Theta-\omega^2\sin\Theta\cos\Theta\right] \quad \ldots (17) \end{aligned}$$

Durch Integration erhält man für die Kraft- und Momentenbeiwerte:

$$\left.\begin{aligned} k_b &= (1+\omega)(1+T)+\omega+\frac{1}{2}\omega^2 \\ m_b &= \omega+\frac{3}{8}\omega^2 \\ \pi r_b(\varphi) &= (1+T)(1+\omega)\,\Phi_{31}+\omega\,\Phi_{32}+\frac{\omega^2}{4}\Phi_6 \\ \pi n_b(\varphi) &= \frac{1}{2}(1+\omega)(1+T)\,\Phi_8+\frac{1}{2}\omega\,\Phi_9+\frac{1}{4}\omega^2\Phi_7 \\ p_b(\psi) &= r_b(\psi) \\ q_b(\psi) &= n_b(\psi) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

c) Ruderdrehschwingung.

Wir betrachten die einmal geknickte Platte, wobei der abgeknickte Teil um den Knickpunkt harmonische Drehschwingungen ausführt. Dann drückt sich der Bewegungszustand durch

$$z_c = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le \Theta \le \varphi \\ C\,e^{i\nu t}(\cos\varphi-\cos\Theta) & \text{für } \varphi < \Theta < \pi \end{cases}$$

aus, wenn man sich ebenso wie bei den Drehungen der ganzen Platte auf kleine Schwingungen des Ruders beschränkt. Für w_c ergibt sich

$$w_c = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le \Theta < \varphi \\ v\,C\,e^{i\nu t}\cdot[\omega(\cos\varphi-\cos\Theta)+1] & \text{für } \varphi \le \Theta \le \pi. \end{cases}$$

Wir benützen für die Berechnung von Π_c die Integraldarstellung des Abschnittes II. Zunächst gewinnen wir durch Fourieranalyse die beiden ersten Fourierkoeffizienten des Abwindes

$$P_0 = \frac{C}{\pi}\left[\pi-\varphi+\omega\cdot\left\{(\pi-\varphi)\cos\varphi+\sin\varphi\right\}\right],$$

$$P_1 = \frac{C}{\pi}\left[-\sin\varphi+\frac{\omega}{2}\left\{-\pi+\varphi-\sin\varphi\cdot\cos\varphi\right\}\right].$$

Dann wird der Faktor von $\cot g\frac{\Theta}{2}$

$$\begin{aligned} &(P_0-P_1)(1+T)+2P_1 \\ &\quad = \frac{C}{\pi}\left[(1+T)\,\Phi_1+(1+T)\,\omega\frac{1}{2}\Phi_2-2\sin\varphi-\omega\,\Phi_3\right]. \end{aligned}$$

Bei der Trennung nach den 5 Funktionen von ω, nämlich

$$(1+T),\ (1+T)\,\omega,\ 1,\ \omega,\ \omega^2$$

geht die Integraldarstellung über in

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \Pi_c(C,\varphi;\,\Theta,t) = \varrho\,v^2 e^{i\nu t}\cdot\frac{C}{\pi} \\ &\times[(1+T)\,\Pi_{c1}+(1+T)\,\omega\,\Pi_{c2}+\Pi_{c3}+\omega\Pi_{c4}+\omega^2\Pi_{c5}] \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots (19) \end{aligned}$$

mit

$$\Pi_{c1} = \Phi_1\cot g\frac{\Theta}{2}$$

$$\Pi_{c2} = \frac{1}{2}\Phi_2\cot g\frac{\Theta}{2}$$

$$\Pi_{c3} = -2\sin\varphi\cdot\cot g\frac{\Theta}{2}-2\int_{\varphi}^{\pi}\frac{\sin\Theta\cdot d\vartheta}{\cos\vartheta-\cos\Theta}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{c4} &= -\Phi_3\cot g\frac{\Theta}{2}+ \\ &+2\int_{\varphi}^{\pi}\left[\frac{\cos\vartheta-\cos\varphi}{\cos\vartheta-\cos\Theta}\sin\Theta+L(\Theta,\vartheta)\right]\sin\vartheta\,d\vartheta \end{aligned}$$

$$\Pi_{c5} = 2\int_{\varphi}^{\pi}(\cos\varphi-\cos\vartheta)\cdot L(\Theta,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Nach Ausführung der Integrationen erhält man

$$\Pi_{c3} = -2\sin\varphi\cdot\cot g\frac{\Theta}{2}+2L(\Theta,\varphi)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{c4} &= -\Phi_3\cot g\frac{\Theta}{2}+4(\pi-\varphi)\sin\Theta \\ &\quad +4(\cos\varphi-\cos\Theta)\,L(\varphi,\Theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{c5} &= [(\pi-\varphi)\cdot 2\cos\varphi+\sin\varphi]\sin\Theta \\ &\quad -(\pi-\varphi)\sin\Theta\cos\Theta+L(\varphi,\Theta)(\cos\varphi-\cos\Theta)^2. \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis gewinnt man durch direkte Summation der Fourierreihe nach einer bereits im Bericht [1] verwendeten Methode. Die Ableitung nimmt aber einen wesentlich größeren Raum ein als die hier gegebene und soll daher hier nicht durchgeführt werden.

Durch Integration der Druckverteilung (19) gemäß Gl. (9) und (10) ergeben sich die Größen k_c, m_c, r_c, n_c übereinstimmend mit früheren Ergebnissen wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \pi k_c(\varphi) &= (1+T)\left(\Phi_1+\frac{1}{2}\omega\Phi_2\right)+\omega\Phi_3+\frac{1}{2}\omega^2\Phi_4 \\ \pi m_c(\varphi) &= \Phi_5+\frac{1}{2}\omega\Phi_6+\frac{1}{4}\omega^2\Phi_7 \\ \pi^2 r_c(\varphi) &= (1+T)\left(\Phi_1+\frac{1}{2}\omega\Phi_2\right)\Phi_{31}+\Phi_{35}+\omega\Phi_{36} \\ &\quad +\frac{1}{2}\omega^2\Phi_{37} \\ \pi^2 n_c(\varphi) &= (1+T)\left(\Phi_1+\frac{1}{2}\omega\Phi_2\right)\frac{1}{2}\Phi_8+\Phi_{10}+\frac{1}{2}\omega\Phi_{11} \\ &\quad +\frac{1}{4}\omega^2\Phi_{12} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Während diese Größen von φ allein abhängen, geht in die Kraft- und Momentenbeiwerte des Hilfsruders, d. h. in p_c und q_c, außer φ auch ψ ein. Es ergibt sich

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\pi^2 p_c(\varphi,\psi) &= (1+T)\,X_1 + (1+T)\,\omega\,X_2 \\ &\quad + X_3 + \omega\,X_4 + \omega^2\,X_5 \\ \pi^2 q_c(\varphi,\psi) &= (1+T)\,X_6 + (1+T)\,\omega\,X_7 \\ &\quad + X_8 + \omega\,X_9 + \omega^2\,X_{10}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Dabei sind die $X_i = X_i(\varphi, \psi)$ Funktionen von φ und ψ, die in der Liste der X-Funktionen, VII, 6, angegeben sind.

d) Ruderstufenschwingung.

$\mathring{d}$. Offene Stufe.

Beim Freiheitsgrad d unterscheiden wir, wie schon auseinandergesetzt, zwei Fälle: die offene Stufe und die geschlossene Stufe. Wir behandeln zunächst die offene Stufe. Ihr entspricht die Verformung

$$\begin{aligned} z_{\mathring{d}} = z_{\mathring{d}}(D,\varphi,\Theta) &= 0 \qquad \text{für } 0 < \Theta < \varphi \\ &= D\,e^{i\nu t} \quad \text{für } \varphi < \Theta < \pi. \end{aligned}$$

Daraus findet man

$$\begin{aligned} w_{\mathring{d}} &= 0 \qquad \text{für } 0 < \Theta < \varphi \\ &= v\,D\,e^{i\nu t}\,\omega \quad \text{für } \varphi < \Theta < \pi. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Druckverteilung benützen wir wieder die Integraldarstellung (7). Die ersten Fourierkoeffizienten des Abwindes sind

$$P_0 = \frac{D\,\omega}{\pi}(\pi - \varphi), \qquad P_1 = -\frac{D\,\omega}{\pi}\sin\varphi.$$

Der Faktor von $\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}$ wird also

$$(P_0 - P_1)(1+T) + 2\,P_1 = \frac{D}{\pi}\cdot[-2\,\omega\sin\varphi + (1+T)\,\omega\,\Phi_1].$$

Für die Druckverteilung findet man dann nach (7)

$$\Pi_{\mathring{d}} = \Pi_{\mathring{d}}(D,\varphi;\ \Theta,t) = \varrho\,v^2\,e^{i\nu t}\cdot\frac{D}{\pi}$$
$$\times\,[(1+T)\,\Pi_{\mathring{d}1} + (1+T)\,\omega\,\Pi_{\mathring{d}2} + \Pi_{\mathring{d}3} + \omega\,\Pi_{\mathring{d}4} + \omega^2\,\Pi_{\mathring{d}5}] \quad \ldots\ldots (22)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{\mathring{d}1} &= 0 \\ \Pi_{\mathring{d}2} &= \Phi_1\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} \\ \Pi_{\mathring{d}3} &= 0 \\ \Pi_{\mathring{d}4} &= -2\sin\varphi\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} - 2\int_\varphi^\pi \frac{\sin\Theta}{\cos\vartheta - \cos\Theta}\,d\vartheta \\ \Pi_{\mathring{d}5} &= 2\int_\varphi^\pi L(\Theta,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta \end{aligned}\right\}$$

Nach Ausführung der Integrationen ist

$$\Pi_{\mathring{d}4} = -2\sin\varphi\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + 2\,L(\Theta,\varphi)$$
$$\Pi_{\mathring{d}5} = +2\,(\pi - \varphi)\sin\Theta + 2\,(\cos\varphi - \cos\Theta)\,L(\varphi,\Theta).$$

Integration gemäß Gl. (9) und (10) gibt uns die Beiwerte $k_{\mathring{d}}$, $m_{\mathring{d}}$, $r_{\mathring{d}}$, $n_{\mathring{d}}$, $p_{\mathring{d}}$, $q_{\mathring{d}}$, wobei die beiden letzteren außer von φ auch von ψ abhängen; und zwar finden wir

$$\left.\begin{aligned} \pi\,k_{\mathring{d}}(\varphi) &= (1+T)\,\omega\,\Phi_1 + \omega^2\,\Phi_3 \\ \pi\,m_{\mathring{d}}(\varphi) &= \omega\,\Phi_5 + \omega^2\,\frac{1}{4}\,\Phi_6 \\ \pi^2\,r_{\mathring{d}}(\varphi) &= (1+T)\,\omega\,\Phi_1\,\Phi_{31} + \omega\,\Phi_{35} + \omega^2\,\Phi_{17} \\ \pi^2\,n_{\mathring{d}}(\varphi) &= (1+T)\,\omega\,\frac{1}{2}\,\Phi_1\,\Phi_8 + \omega\,\Phi_{10} + \omega^2\cdot\frac{1}{2}\,\Phi_{37} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} \pi^2\,p_{\mathring{d}}(\varphi,\psi) &= (1+T)\,\omega\,X_1 + \omega\,X_3 + \omega^3\,X_{14} \\ \pi^2\,q_{\mathring{d}}(\varphi,\psi) &= (1+T)\,\omega\,X_6 + \omega\,X_8 + \omega^2\,X_{18} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (24)$$

Dabei sind die Funktionen $\Phi_i = \Phi_i(\varphi)$ der Liste der Φ-Funktionen, VII, 5, die Funktionen $X_i = X_i(\varphi, \psi)$ der Liste der X-Funktionen, VII, 6, zu entnehmen.

$\bar{d}$. Geschlossene Stufe.

Ihr liegt als Skelettlinie die geschlossene schräge Stufe zugrunde, s. Bild 3b. Sie läßt sich aus zwei einmal geknickten Platten kombinieren:

$$z = z_c(C, \varphi - \delta_R;\ \Theta) + z_c(-C, \varphi;\ \Theta).$$

Die Stufenhöhe D ergibt sich für $\Theta = \varphi$:

$$D = C\cdot[\cos(\varphi - \delta_R) - \cos\varphi],$$

woraus man

$$z = \frac{z_c(D,\varphi - \delta_R;\ \Theta) - z_c(D,\varphi;\ \Theta)}{\cos(\varphi - \delta_R) - \cos\varphi}$$

erhält. Da der »Spalt«, der hier durch die schräge Linie überbrückt wird, sehr eng, d. h. δ_R sehr klein ist, liegt es nahe, die schräge Stufe durch die senkrechte Stufe zu ersetzen, die durch den Grenzübergang $\delta_R \to 0$ entsteht, s. Bild 3b.

Dann ergibt sich die Druckverteilung

$$\Pi_{\bar{d}}(D,\varphi;\ \Theta,t) = \lim_{\delta_R\to 0}\frac{\Pi_c(D,\varphi-\delta_R;\ \Theta,t) - \Pi_c(D,\varphi;\ \Theta,t)}{\cos(\varphi - \delta_R) - \cos\varphi}$$
$$= -\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\partial\,\Pi_c(D,\varphi;\ \Theta,t)}{\partial\varphi}.$$

Führt man diese Differentiation unter Heranziehung des Formelsystems für Π_c aus, so ergibt sich für $\Pi_{\bar{d}}$:

$$\Pi_{\bar{d}}(D,\varphi;\ \Theta,t) = \varrho\,v^2\,e^{i\nu t}\cdot\frac{D}{\pi}$$
$$\times\,[(1+T)\,\Pi_{\bar{d}1} + (1+T)\,\omega\,\Pi_{\bar{d}2} + \Pi_{\bar{d}3} + \omega\,\Pi_{\bar{d}4} + \omega^2\,\Pi_{\bar{d}5}], \quad (25)$$

wobei

$$\Pi_{\bar{d}i} = -\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\partial\,\Pi_{ci}}{\partial\varphi}; \quad i = 1,\ldots,5;$$

im einzelnen

$$\begin{aligned} \Pi_{\bar{d}1} &= \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} \\ \Pi_{\bar{d}2} &= \Phi_1\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} \\ \Pi_{\bar{d}3} &= 2\operatorname{cotg}\varphi\cdot\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} - \frac{2}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\Theta}{\cos\varphi - \cos\Theta} \\ \Pi_{\bar{d}4} &= -2\sin\varphi\cdot\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + 4\,L(\varphi,\Theta) \\ \Pi_{\bar{d}5} &= 2\,(\pi - \varphi)\sin\Theta + 2\,L(\varphi,\Theta)\,(\cos\varphi - \cos\Theta). \end{aligned}$$

Die Kräfte und Momente für Flügel und Ruder ergeben sich durch Ausintegrieren nach Gl. (9) und (10) ganz entsprechend wie bei den früheren Freiheitsgraden:

$$\left.\begin{aligned} \pi\,k_{\bar{d}}(\varphi) &= (\Phi_{13} + \omega\,\Phi_1)(1+T) + \omega\,\Phi_{14} + \omega^2\,\Phi_3 \\ \pi\,m_{\bar{d}}(\varphi) &= \Phi_{15} + 2\,\omega\,\Phi_5 + \frac{1}{4}\,\omega^2\,\Phi_6 \\ \pi^2\,r_{\bar{d}}(\varphi) &= (\Phi_{13} + \omega\,\Phi_1)\,\Phi_{31}\,(1+T) \\ &\quad + \pi^2\,r^*_{\bar{d}} + \omega\,\Phi_{16} + \omega^2\,\Phi_{17} \\ \pi^2\,n_{\bar{d}}(\varphi) &= \frac{1}{2}\,\Phi_8\,(\Phi_{13} + \omega\,\Phi_1)(1+T) \\ &\quad + \Phi_{18} + \omega\,\Phi_{19} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\Phi_{37} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Eine gewisse Schwierigkeit bereitet dabei das von ω freie Glied von $\pi^2 r_{\bar{d}}$, das mit $\pi^2 r^*_{\bar{d}}$ bezeichnet ist. Wir hatten angenommen, daß die Luft den engen Spalt zwischen Flosse und Ruder nicht durchströmt. Um dies in der Theorie zu gewährleisten, schlossen wir den Spalt durch ein Verbindungsstück, das von der Flossenhinterkante zur Rudervorderkante führt. Wir erhielten so für den Freiheitsgrad $\bar{d}$ eigentlich die schräge Stufe, die jedoch zur senkrechten geschlossenen Stufe idealisiert wurde. Für die letztere sind die Kraft- und Momentbeiwerte berechnet. Dabei erweist sich der von ω freie Summand in $r_{\bar{d}}$, $r^*_{\bar{d}}$, als ∞, ein Zeichen dafür, daß die Idealisierung zu weit getrieben ist. Zur Berechnung dieses Summanden greifen wir deshalb auf die schräge Stufe zurück und erhalten für ihn den Ausdruck

$$\pi^2\,r^*_{\bar{d}} = 2\ln\tau_{SR} + \Phi_{21},$$

wenn man beachtet, daß unter Vernachlässigung von Gliedern, die mit verschwindender Spaltbreite Null werden.

$$\delta_R \sim \frac{2\,\tau_{SR}}{\sin\varphi}$$

ist.

Digitized by Google

Im übrigen sei bemerkt, daß diese Schwierigkeit auch im stationären Fall ($\omega = 0$) besteht und keine Besonderheit der instationären Rechnung darstellt. Man könnte das Glied $r_{\bar{a}}^{*}$ also auch stationären Messungen oder einer nicht linearisierten stationären Theorie entnehmen.

Die Beiwerte $p_{\bar{a}}$ und $q_{\bar{a}}$, die von φ und ψ abhängen, erhalten wir unter Zugrundelegung der senkrechten Stufe.

$$\left.\begin{aligned} \pi^2 p_{\bar{a}}(\varphi,\psi) &= (1+T)X_{11} + (1+T)\omega X_1 \\ &\quad + X_{12} + \omega X_{13} + \omega^2 X_{14} \\ \pi^2 q_{\bar{a}}(\varphi,\psi) &= (1+T)X_{15} + (1+T)\omega X_6 \\ &\quad + X_{16} + \omega X_{17} + \omega^2 X_{18} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die Funktionen $X_i = X_i(\varphi, \psi)$ sind der Zusammenstellung, Abschnitt VII, 6 zu entnehmen.

Die unvollständige Ausführung des Grenzübergangs $\delta_K \to 0$, die sich in dem Rückgriff auf die schräge Stufe kundgibt, läßt folgende mathematisch einwandfreie Deutung zu:

Dem Freiheitsgrad d liegt als Plattenverformung die schräge Stufe, Bild 3b, zugrunde. Bei der Berechnung des Druckes und der aerodynamischen Beiwerte werden jedoch solche Ausdrücke vernachlässigt, die beim Grenzübergang $\delta_K \to 0$ verschwinden.

Trotzdem werden wir, da sich bis auf den Term $r_{\bar{a}}^{*}$ von $r_{\bar{a}}$ alle Beiwerte als unabhängig von der Spaltbreite erweisen, in der systematischen Zusammenstellung VII den Freiheitsgrad $\bar{d}$ durch die senkrechte Stufe kennzeichnen.

Eine Probe für die Berechnung der Größen $k_{\bar{a}}$, $m_{\bar{a}}$, $r_{\bar{a}}$, $n_{\bar{a}}$, $p_{\bar{a}}$, $q_{\bar{a}}$ ergibt sich, wenn man beachtet, daß $\Pi_{\bar{a}}$ sich aus Π_c durch Differentiation gewinnen läßt. So erhält man folgende Formeln:

$$k_{\bar{a}} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial k_c}{\partial \varphi}$$

$$m_{\bar{a}} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial m_c}{\partial \varphi}$$

$$\pi^2 r_{\bar{a}} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial \pi^2 r_c}{\partial \varphi} - [(1+T)\Pi_{c1} + (1+T)\omega\Pi_{c2} + \Pi_{c3} + \omega\Pi_{c4} + \omega^2\Pi_{c5}]_{\Theta=\varphi}$$

$$n_{\bar{a}} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial n_c}{\partial \varphi} - r_c$$

$$p_{\bar{a}} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial p_c}{\partial \varphi}$$

$$q_{\bar{a}} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial q_c}{\partial \varphi}$$

Als Beispiel sei die vierte der Formeln bewiesen. Es ist

$$-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{\varphi}^{\pi}\Pi_c(D,\varphi;\Theta,t)\cdot(\cos\varphi-\cos\Theta)\sin\Theta\,d\Theta$$

$$= -\frac{1}{\sin\varphi}\cdot[-\Pi_c(D,\varphi;\Theta,t)\cdot(\cos\varphi-\cos\Theta)\sin\Theta]_{\Theta=\varphi}$$

$$+\int_{\varphi}^{\pi}\frac{-1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}[\Pi_c(D,\varphi;\Theta,t)\cdot(\cos\varphi-\cos\Theta)]\sin\Theta\,d\Theta$$

$$= \int_{\varphi}^{\pi}\Pi_{\bar{a}}(D,\varphi;\Theta,t)\cdot(\cos\varphi-\cos\Theta)\sin\Theta\,d\Theta$$

$$+\int_{\varphi}^{\pi}\Pi_c(D,\varphi;\Theta,t)\sin\Theta\,d\Theta,$$

mit $l^2 b$ multipliziert

$$-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}N_c(D,\varphi,t) = N_{\bar{a}}(D,\varphi,t) + l\cdot R_c(D,\varphi,t)$$

oder durch $\pi\varrho v^2 l^2 b\cdot D\,e^{i\nu t}$ dividiert,

$$-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial n_c}{\partial\varphi} = n_{\bar{a}} + r_c.$$

e) Hilfsruderdrehschwingung.

f) Hilfsruderstufenschwingung.

Die Freiheitsgrade e und f werden leicht aus c und d gewonnen, denn e und f beziehen sich in ebensolcher Weise auf das Hilfsruder wie c und d auf das Ruder. Bei dem Übergang von c zu e sowie d zu f sind also C durch E, D durch F, τ_{sk} durch τ_{sH} zu ersetzen; im übrigen vertauschen Ruder und Hilfsruder ihre Rollen, so daß φ, r, n mit ψ, p, q zu vertauschen sind. Somit ergeben sich die aerodynamischen Beiwerte:

$$\left.\begin{aligned} k_e(\psi) &= k_c(\psi) & k_f(\psi) &= k_d(\psi) \\ m_e(\psi) &= m_c(\psi) & m_f(\psi) &= m_d(\psi) \\ r_e(\varphi,\psi) &= p_c(\psi,\varphi) & r_f(\varphi,\psi) &= p_d(\psi,\varphi) \\ n_e(\varphi,\psi) &= q_c(\psi,\varphi) & n_f(\varphi,\psi) &= q_d(\psi,\varphi) \\ p_e(\psi) &= r_c(\psi) & p_f(\psi) &= r_d(\psi) \\ q_e(\psi) &= n_c(\psi) & q_f(\psi) &= n_d(\psi) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

In den Formeln, die Beiwerte der Freiheitsgrade d und f enthalten, ist für Ruder und Hilfsruder beidemal die offene bzw. die geschlossene Stufe zugrunde zu legen.

VII. Systematische Zusammenstellung der Ergebnisse.

In Bild 6 stellen wir zunächst die 6 Freiheitsgrade zusammen, wobei der Einfachheit halber die geschlossenen Stufen der Freiheitsgrade d und f senkrecht gezeichnet sind. Einen beliebigen Freiheitsgrad bezeichnen wir, wie bereits oben erwähnt, mit g, seine Amplitude mit G. Es sei bemerkt, daß die Bezeichnung »Ruderdrehschwingung« dem Schema der Theorie angehört. Die wirkliche Ruderdrehschwingung etwa eines Ruders mit aerodynamischem Innenausgleich setzt sich zusammen aus Ruderdreh- und Ruderstufenschwingung (Freiheitsgrade c und d).

In Abschnitt V sind die aerodynamischen Beiwerte (13) eingeführt, welche zur Berechnung der Kräfte und Momente (14) dienen. Diese Beiwerte sind dann in einem Schema geordnet, s. Bild 4. Ihre Abhängigkeit von den geometrischen Parametern φ und ψ ist skizzenhaft in Bild 5 dargestellt. Diese Beiwerte sind dann im Abschnitt VI berechnet und werden im folgenden zusammengestellt, wobei als Ordnungsprinzip die Abhängigkeit von φ und ψ zugrunde gelegt wird.

1. Die von φ und ψ unabhängigen Beiwerte.

$$k_a = (1+T)\omega + \omega^2$$

$$m_a = \frac{1}{2}\omega^2$$

$$k_b = (1+T)(1+\omega) + \omega + \frac{1}{2}\omega^2$$

$$m_b = \omega + \frac{3}{8}\omega^2.$$

2. Die von φ allein abhängigen Beiwerte.

$$\pi k_c(\varphi) = (1+T)\left(\Phi_1 + \frac{1}{2}\omega\Phi_2\right) + \omega\Phi_3 + \frac{1}{2}\omega^2\Phi_4$$

$$\pi m_c(\varphi) = \Phi_5 + \frac{1}{2}\omega\Phi_6 + \frac{1}{4}\omega^2\Phi_7$$

$$\pi k_{\bar{a}}(\varphi) = (1+T)\omega\Phi_1 + \omega^2\Phi_3$$

$$\pi k_{\bar{a}}(\varphi) = (1+T)(\Phi_{13} + \omega\Phi_1) + \Phi_{14}\omega + \Phi_3\omega^2$$

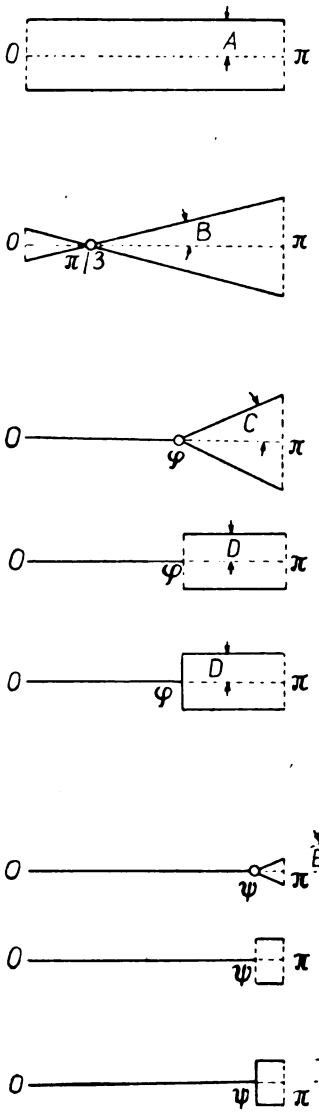
$$\pi m_{\bar{a}}(\varphi) = \omega\Phi_5 + \frac{1}{4}\omega^2\Phi_6$$

$$\pi m_{\bar{a}}(\varphi) = \Phi_{15} + 2\omega\Phi_5 + \frac{1}{4}\omega^2\Phi_6$$

$$\pi r_a(\varphi) = (1+T)\omega\Phi_{31} + \omega^2\Phi_3$$

$$\pi n_a(\varphi) = (1+T)\omega\frac{1}{2}\Phi_8 + \frac{1}{2}\omega^2\Phi_4$$

Digitized by Google



a Schlagschwingung des ganzen Flügels (reine Translation).

b Flügeldrehschwingung um den vorderen Neutralpunkt $\left(\Theta = \frac{\pi}{3},\ x = -\frac{1}{2}\right)$.

c Ruderdrehschwingung um die Rudervorderkante.

$\hat{d}$ Ruderstufenschwingung (reine Translation) bei offener Stufe.

$\bar{d}$ Ruderstufenschwingung (reine Translation) bei geschlossener Stufe.

e Hilfsruderdrehschwingung um die Hilfsrudervorderkante.

$\hat{f}$ Hilfsruderstufenschwingung (reine Translation) bei offener Stufe.

$\bar{f}$ Hilfsruderstufenschwingung (reine Translation) bei geschlossener Stufe.

Bild 6. Zusammenstellung der 6 Freiheitsgrade.

$$\pi\, r_b(\varphi) = (1+T)(1+\omega)\,\Phi_{31} + \omega\,\Phi_{32} + \frac{1}{4}\,\omega^2\,\Phi_6$$

$$\pi\, n_b(\varphi) = (1+T)(1+\omega)\,\frac{1}{2}\,\Phi_8 + \frac{1}{2}\,\omega\,\Phi_9 + \frac{1}{4}\,\omega^2\,\Phi_7$$

$$\pi^2\, r_c(\varphi) = (1+T)\left(\Phi_1 + \frac{1}{2}\,\omega\,\Phi_2\right)\Phi_{31} + \Phi_{35} + \omega\,\Phi_{36} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\Phi_{37}$$

$$\pi^2\, n_c(\varphi) = (1+T)\left(\Phi_1 + \frac{1}{2}\,\omega\,\Phi_2\right)\frac{1}{2}\,\Phi_8 + \Phi_{10} + \frac{1}{2}\,\omega\,\Phi_{11} + \frac{1}{4}\,\omega^2\,\Phi_{12}$$

$$\pi^2\, r_{\hat{d}}(\varphi) = (1+T)\,\omega\,\Phi_1\,\Phi_{31} + \omega\,\Phi_{35} + \omega^2\,\Phi_{17}$$

$$\pi^2\, r_{\bar{d}}(\varphi) = (1+T)\,(\Phi_{13} + \omega\,\Phi_1)\,\Phi_{31} + (2\ln\tau_{sR} + \Phi_{21}) + \omega\,\Phi_{16} + \omega^2\,\Phi_{17}$$

$$\pi^2\, n_{\hat{d}}(\varphi) = (1+T)\,\omega\,\frac{1}{2}\,\Phi_1\,\Phi_8 + \omega\,\Phi_{10} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\Phi_{37}$$

$$\pi^2\, n_{\bar{d}}(\varphi) = (1+T)\,(\Phi_{13} + \omega\,\Phi_1)\,\frac{1}{2}\,\Phi_8 + \Phi_{18} + \omega\,\Phi_{19} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\Phi_{37}.$$

Dabei sind die Funktionen $\Phi_i = \Phi_i(\varphi)$ der Liste der Φ-Funktionen, VII, 5, zu entnehmen.

Das Auftreten von τ_{sR} (Verhältnis von Ruderspaltbreite zur Flügeltiefe) in der Formel für $r_{\bar{d}}$ ist in Abschnitt VI besonders erläutert.

3. Die von ψ allein abhängigen Beiwerte.

Sie sind dieselben wie die von φ allein abhängigen Beiwerte; es ist nur φ durch ψ und die den Ruderspalt charakterisierende Größe τ_{sR} durch die entsprechende den Hilfsruderspalt charakterisierende Größe τ_{sH} zu ersetzen.

$$\begin{aligned} p_a(\psi) &= r_a(\psi) & q_a(\psi) &= n_a(\psi)\\ p_b(\psi) &= r_b(\psi) & q_b(\psi) &= n_b(\psi)\\ k_e(\psi) &= k_c(\psi) & m_e(\psi) &= m_c(\psi)\\ k_f(\psi) &= k_d(\psi) & m_f(\psi) &= m_d(\psi)\ ^2)\\ p_e(\psi) &= r_c(\psi) & q_e(\psi) &= n_c(\psi)\\ p_f(\psi) &= r_d(\psi) & q_f(\psi) &= n_d(\psi)\ ^2). \end{aligned}$$

4. Die von φ und ψ abhängigen Beiwerte.

$$\pi^2\, p_c(\varphi,\psi) = (1+T)\,X_1 + (1+T)\,\omega\,X_2 + X_3 + \omega\,X_4 + \omega^2\,X_5$$

$$\pi^2\, q_c(\varphi,\psi) = (1+T)\,X_6 + (1+T)\,\omega\,X_7 + X_8 + \omega\,X_9 + \omega^2\,X_{10}$$

$$\pi^2\, p_{\hat{d}}(\varphi,\psi) = (1+T)\,\omega\,X_1 + \omega\,X_3 + \omega^2\,X_{14}$$

$$\pi^2\, p_{\bar{d}}(\varphi,\psi) = (1+T)\,X_{11} + (1+T)\,\omega\,X_1 + X_{12} + \omega\,X_{13} + \omega^2\,X_{14}$$

$$\pi^2\, q_{\hat{d}}(\varphi,\psi) = (1+T)\,\omega\,X_6 + \omega\,X_8 + \omega^2\,X_{18}$$

[2]) Es sei nochmals daran erinnert, daß in den Formeln, die die Freiheitsgrade d und f miteinander in Beziehung setzen, derselbe Stufentyp für Ruder und Hilfsruder gemeint ist, also beidemal die offene Stufe oder beidemal die geschlossene.

Damit soll natürlich nicht ausgeschlossen sein, daß für einen vorliegenden Flügel mit Ruder und Hilfsruder für das Ruder der eine und für das Hilfsruder der andere Stufentyp Anwendung findet.

Digitized by Google

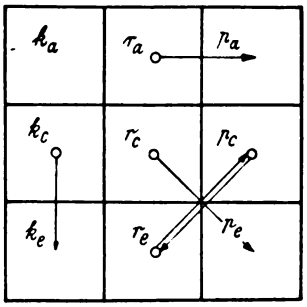


Bild 7. Abhängigkeit der Beiwerte des Schemas untereinander. Pfeil deutet Ersatz von φ durch ψ an.

$$\pi^2 q_{\bar{a}}(\varphi,\psi) = (1+T)\,X_{15} + (1+T)\,\omega\,X_6 + X_{16} + \omega\,X_{17} + \omega^2 X_{18}.$$

Dabei sind die Funktionen $X_i = X_i(\varphi,\psi)$ der Liste der X-Funktionen zu entnehmen.

Die restlichen 4 Funktionen ergeben sich aus den soeben aufgeführten durch Vertauschung von φ und ψ:

$$r_e(\varphi,\psi) = p_c(\psi,\varphi) \qquad n_e(\varphi,\psi) = q_c(\psi,\varphi)$$
$$r_f(\varphi,\psi) = p_d(\psi,\varphi) \qquad n_f(\varphi,\psi) = q_d(\psi,\varphi)\ ^2).$$

Zum Schluß seien die Funktionen, die sich aufeinander zurückführen ließen, in ihrer Stellung im Schema betrachtet. Bezeichnen wir ein Feld des Schemas durch die in ihm links oben stehende Funktion, so können wir an Hand von Bild 7 sagen:

Die Funktionen des Feldes p_a werden aus denen des Feldes r_a erhalten, indem man φ durch ψ ersetzt, ebenso Feld k_e aus Feld k_c und Feld p_e aus Feld r_c. Die Funktionen des Feldes p_c werden aus denen des Feldes r_e erhalten, indem man φ und ψ vertauscht.

In den so erhaltenen aerodynamischen Beiwerten treten Funktionen Φ und X auf, die im folgenden formelmäßig zusammengestellt und für die praktisch wichtigen Parameterbereiche berechnet sind.

5. Φ-Funktionen.

$$\Phi_1(\varphi) = \pi - \varphi + \sin\varphi$$
$$\Phi_2(\varphi) = (\pi-\varphi)(1+2\cos\varphi) + \sin\varphi\,(2+\cos\varphi)$$
$$\Phi_3(\varphi) = \pi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi$$
$$\Phi_4(\varphi) = (\pi-\varphi)\cdot 2\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\frac{2}{3}\,(2+\cos^2\varphi)$$
$$\Phi_5(\varphi) = \sin\varphi\cdot(1-\cos\varphi)$$
$$\Phi_6(\varphi) = 2(\pi-\varphi) + \sin\varphi\cdot\frac{2}{3}\,(2-\cos\varphi)(1+2\cos\varphi)$$
$$\Phi_7(\varphi) = (\pi-\varphi)\left(\frac{1}{2}+2\cos\varphi\right) + \sin\varphi\cdot\frac{1}{6}\,(8+5\cos\varphi+4\cos^2\varphi-2\cos^3\varphi)$$
$$\Phi_8(\varphi) = (\pi-\varphi)(-1+2\cos\varphi) + \sin\varphi\,(2-\cos\varphi)$$
$$\Phi_9(\varphi) = (\pi-\varphi)(1+2\cos\varphi) + \sin\varphi\cdot\frac{1}{3}\,(2+3\cos\varphi+4\cos^2\varphi)$$
$$\Phi_{10}(\varphi) = \Phi_{31}(\varphi)\cdot\Phi_5(\varphi)$$
$$\Phi_{11}(\varphi) = \Phi_2(\varphi)\cdot\Phi_3(\varphi)$$
$$\Phi_{12}(\varphi) = (\pi-\varphi)^2\left(\frac{1}{2}+4\cos^2\varphi\right) + (\pi-\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\cdot(7+2\cos^2\varphi) + \sin^2\varphi\left(2+\frac{5}{2}\cos^2\varphi\right)$$
$$\Phi_{13}(\varphi) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$
$$\Phi_{14}(\varphi) = 2\sin\varphi$$
$$\Phi_{15}(\varphi) = \Phi_{13}(\varphi) - \Phi_{11}(\varphi)$$
$$\Phi_{16}(\varphi) = \Phi_1(\varphi)\cdot\Phi_{14}(\varphi) = 2\,\Phi_1(\varphi)\cdot\sin\varphi$$
$$\Phi_{17}(\varphi) = [\Phi_3(\varphi)]^2 + \sin^4\varphi$$
$$\Phi_{18}(\varphi) = -\Phi_{13}(\varphi)\cdot[(\pi-\varphi)(1+2\cos\varphi) - \sin\varphi\cdot\cos\varphi]$$
$$\Phi_{19}(\varphi) = \frac{1}{2}\,\Phi_3(\varphi)\cdot\Phi_{14}(\varphi) = \Phi_3(\varphi)\cdot\sin\varphi$$
$$\Phi_{20}(\varphi) = \sin\varphi\,(1+\cos\varphi)$$
$$\Phi_{21}(\varphi) = -2(\cos\varphi + \ln\sin^2\varphi)$$
$$\Phi_{31}(\varphi) = \pi - \varphi - \sin\varphi$$
$$\Phi_{32}(\varphi) = \pi - \varphi + \sin\varphi\,(1+2\cos\varphi)$$
$$\Phi_{35}(\varphi) = 2\sin^2\varphi$$
$$\Phi_{36}(\varphi) = \Phi_{32}(\varphi)\cdot\Phi_3(\varphi) + 2\sin^4\varphi$$
$$\Phi_{37}(\varphi) = \Phi_3(\varphi)\cdot[\Phi_2(\varphi) - \Phi_3(\varphi)].$$

Φ_1 bis Φ_{12} wurden vom erstgenannten Verfasser [1], Φ_{31} bis Φ_{37} von Dietze [3] eingeführt. Φ_{13} bis Φ_{21} sind neu.

6. X-Funktionen.

$$L(\varphi,\psi) = \ln\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(\varphi+\psi)}{1-\cos(\varphi-\psi)}$$

$$3\,X_0(\varphi,\psi) = [(\pi-\varphi)\sin^3\psi - (\pi-\psi)\sin^3\varphi] + (\cos\varphi-\cos\psi)\cdot[2\sin\varphi\sin\psi - (\cos\varphi-\cos\psi)^2\,L(\varphi,\psi)]$$
$$X_1(\varphi,\psi) = \Phi_1(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi)$$
$$X_2(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\,\Phi_2(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi)$$
$$X_3(\varphi,\psi) = 2\sin\varphi\cdot\sin\psi - 2(\cos\varphi-\cos\psi)\,L(\varphi,\psi)$$
$$X_4(\varphi,\psi) = \Phi_3(\varphi)\cdot\Phi_{32}(\psi) + 2\,\Phi_5(\varphi)\cdot\Phi_{20}(\psi) + (\cos\varphi-\cos\psi)\,X_3(\varphi,\psi)$$
$$X_5(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}[\Phi_2(\varphi) - \Phi_3(\varphi)]\cdot\Phi_3(\psi) + X_0(\varphi,\psi)$$
$$X_6(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\,\Phi_1(\varphi)\cdot\Phi_8(\psi)$$
$$X_7(\varphi,\psi) = \frac{1}{4}\,\Phi_2(\varphi)\cdot\Phi_8(\psi)$$
$$X_8(\varphi,\psi) = \Phi_5(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi) - \frac{1}{2}\,(\cos\varphi-\cos\psi)\,X_3(\varphi,\psi)$$
$$X_9(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\,\Phi_3(\varphi)\cdot\Phi_2(\psi) - 2\,X_0(\varphi,\psi)$$
$$4\,X_{10}(\varphi,\psi) = (\pi-\varphi)(\pi-\psi)\left(\frac{1}{2}+4\cos\varphi\cos\psi\right) + (\pi-\varphi)\sin\psi\left(3\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos\psi+\cos\varphi\cos^2\psi\right) + (\pi-\psi)\sin\varphi\left(3\cos\psi+\frac{1}{2}\cos\varphi+\cos\psi\cos^2\varphi\right) + \sin\varphi\sin\psi\left[2+\frac{5}{2}\cos\varphi\cos\psi+(\cos\varphi-\cos\psi)^2\right] - (\cos\varphi-\cos\psi)\,X_0(\varphi,\psi)$$
$$X_{11}(\varphi,\psi) = \Phi_{13}(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi)$$
$$X_{12}(\varphi,\psi) = \Phi_{13}(\varphi)\cdot\Phi_{14}(\psi) - 2\,L(\varphi,\psi)$$
$$X_{13}(\varphi,\psi) = \Phi_{14}(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi) + 2\,X_3(\varphi,\psi)$$
$$X_{14}(\varphi,\psi) = \Phi_3(\varphi)\cdot\Phi_3(\psi) + \Phi_5(\varphi)\cdot\Phi_{20}(\psi) + \frac{1}{2}\,(\cos\varphi-\cos\psi)\,X_3(\varphi,\psi)$$
$$X_{15}(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\,\Phi_{13}(\varphi)\cdot\Phi_8(\psi)$$
$$X_{16}(\varphi,\psi) = \Phi_{13}(\varphi)\cdot\Phi_3(\psi) - [\Phi_{14}(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi) + X_3(\varphi,\psi)]$$
$$X_{17}(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\,\Phi_{14}(\varphi)\cdot\Phi_3(\psi) - [\Phi_{14}(\varphi)\cdot\Phi_{31}(\psi) + X_3(\varphi,\psi)]\cdot(\cos\varphi-\cos\psi)$$
$$X_{18}(\varphi,\psi) = X_5(\psi,\varphi).$$

7. Bemerkungen zur numerischen Berechnung der Φ- und X-Funktionen.

Bei den gebräuchlichen Flugzeugmustern sind die Werte von τ_R und τ_H in folgenden Intervallen gelegen

$$0{,}6 \geq \tau_R > 0{,}1; \qquad 0{,}1 \geq \tau_H \geq 0{,}0.$$

Für die Tabulierung der Φ- und X-Funktionen legen wir deshalb die Werte

$$\tau_R = 0{,}60 \quad 0{,}55 \ldots . \quad 0{,}10$$
$$\tau_H = 0{,}10 \quad 0{,}09 \ldots . \quad 0{,}00.$$

Digitized by Google

zugrunde. Dem entsprechen φ und ψ mit

$$-\cos\varphi = 1 - 2\tau_R = -0{,}2 \quad -0{,}1 \quad 0 \quad 0{,}1 \ldots 0{,}8$$
$$-\cos\psi = 1 - 2\tau_H = \quad 0{,}80 \quad 0{,}82 \quad . \quad \ldots\ldots 1{,}00$$

Bei den Φ-Funktionen ist 0,9 und 1,0 den Werten von $-\cos\varphi$ zugefügt und der Wertbereich von $-\cos\psi$ dann gewissermaßen als verfeinerte Einteilung von $-\cos\varphi$ betrachtet. Bei der Benutzung der Zahlentafeln treten diese Werte als Werte von $-\cos\psi$ auf.

Unter die X-Funktionen sind die beiden Hilfsfunktionen $L(\varphi, \psi)$ und $X_0(\varphi, \psi)$ aufgenommen, da sie beim Aufbau vieler X-Funktionen eine Rolle spielen. Nicht tabuliert sind die Funktionen X_i von der Form

$$X_i(\varphi, \psi) = \Phi_n(\varphi) \cdot \Phi_m(\psi).$$

Alle anderen Funktionen sind tabuliert, auch mit vertauschten Argumenten, also $X_i(\varphi, \psi)$ und $X_i(\psi, \varphi)$; die Vertauschung der Argumente ist überflüssig für L, X_0, X_{10}, X_{14}, da diese in den Veränderlichen teils symmetrisch, teils antisymmetrisch sind:

$$L(\varphi, \psi) = L(\psi, \varphi)$$
$$X_0(\varphi, \psi) = -X_0(\psi, \varphi)$$
$$X_{10}(\varphi, \psi) = X_{10}(\psi, \varphi)$$
$$X_{14}(\varphi, \psi) = X_{14}(\psi, \varphi).$$

Sämtliche Zahlenwerte der nachfolgenden 25 Zahlentafeln sind 7stellig berechnet worden. Dabei wurden wir wirksam durch Herrn Dr. Dingel unterstützt. Um Rechenfehler nach Möglichkeit auszuschalten, sind alle Zahlenrechnungen mindestens zweimal durchgeführt worden.

Zahlentafel 1. Funktionen $\Phi_1(\varphi)$ bis $\Phi_8(\varphi)$.

τ_R	$-\cos\varphi$	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8
0,60	- 0,2	2,75195	4,63657	1,96811	2,04138	0,78384	5,19037	3,08815	0,70034
0,55	- 0,1	2,66595	4,09463	1,77046	1,66748	0,89549	4,85431	2,58554	0,55371
0,50	0,0	2,57080	3,57080	1,57080	1,33333	1,00000	4,47493	2,11873	0,42920
0,45	0,1	2,46562	3,06698	1,37113	1,03916	1,09449	4,05564	1,69189	0,32472
0,40	0,2	2,34923	2,58530	1,17348	0,78475	1,17576	3,60110	1,30878	0,23834
0,35	0,3	2,22004	2,12814	0,97992	0,56949	1,24012	3,11729	0,97265	0,16829
0,30	0,4	2,07579	1,69828	0,79267	0,39236	1,28312	2,61184	0,68605	0,11293
0,25	0,5	1,91322	1,29904	0,61418	0,25184	1,29904	2,09440	0,45068	0,07067
0,20	0,6	1,72730	0,93454	0,44730	0,14591	1,28000	1,57726	0,26716	0,03995
0,15	0,7	1,50954	0,61023	0,29550	0,07192	1,21404	1,07661	0,13469	0,01923
0,10	0,8	1,24350	0,33390	0,16350	0,02640	1,08000	0,61500	0,05055	0,00690
0,05	0,9	0,88692	0,11866	0,05873	0,00472	0,82819	0,22788	0,00924	0,00121
0,00	1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10	0,80	1,24350	0,33390	0,16350	0,02640	1,08000	0,61500	0,05055	0,00690
0,09	0,82	1,18175	0,28538	0,14005	0,02033	1,04170	0,53010	0,03910	0,00529
0,08	0,84	1,11610	0,23941	0,11774	0,01518	0,99836	0,44846	0,02932	0,00393
0,07	0,86	1,04582	0,19616	0,09667	0,01089	0,94915	0,37052	0,02114	0,00281
0,06	0,88	0,96991	0,15582	0,07696	0,00743	0,89295	0,29679	0,01447	0,00191
0,05	0,90	0,88692	0,11866	0,05873	0,00472	0,82819	0,22788	0,00924	0,00121
0,04	0,92	0,79463	0,08499	0,04215	0,00271	0,75248	0,16457	0,00532	0,00069
0,03	0,94	0,68934	0,05526	0,02746	0,00132	0,66188	0,10787	0,00261	0,00033
0,02	0,96	0,56379	0,03011	0,01499	0,00048	0,54880	0,05926	0,00095	0,00012
0,01	0,98	0,39933	0,01066	0,00532	0,00009	0,39402	0,02114	0,00017	0,00002
0,00	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 2. Funktionen $\Phi_9(\varphi)$ bis $\Phi_{17}(\varphi)$.

τ_R	$-\cos\varphi$	Φ_9	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{13}	Φ_{14}	Φ_{15}	Φ_{16}	Φ_{17}
0,60	- 0,2	3,38243	0,62108	9,12529	6,54742	0,81650	1,95959	-1,14310	5,39270	4,79507
0,55	- 0,1	2,78125	0,60533	7,24939	4,67963	0,90453	1,98997	-1,08544	5,30518	4,11464
0,50	0,0	2,23746	0,57080	5,60899	3,23370	1,00000	2,00000	-1,00000	5,14159	3,46740
0,45	0,1	1,75360	0,52058	4,20523	2,14543	1,10554	1,98997	-0,88443	4,90651	2,86010
0,40	0,2	1,33116	0,45812	3,03379	1,35379	1,22474	1,95959	-0,73485	4,60354	2,29865
0,35	0,3	0,97069	0,38712	2,08541	0,80178	1,36277	1,90788	-0,54511	4,23557	1,78835
0,30	0,4	0,67178	0,31150	1,34618	0,43709	1,52753	1,83303	-0,30551	3,80499	1,33393
0,25	0,5	0,43301	0,23535	0,79785	0,21281	1,73205	1,73205	0,00000	3,31380	0,93972
0,20	0,6	0,25187	0,16294	0,41802	0,08797	2,00000	1,60000	0,40000	2,76367	0,60967
0,15	0,7	0,12461	0,09865	0,18032	0,02809	2,38048	1,42829	0,95219	2,15606	0,34742
0,10	0,8	0,04590	0,04698	0,05459	0,00560	3,00000	1,20000	1,80000	1,49220	0,15633
0,05	0,9	0,00823	0,01254	0,00697	0,00035	4,35890	0,87178	3,48712	0,77320	0,03955
0,00	1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	∞	0,00000	∞	0,00000	0,00000
0,10	0,80	0,04590	0,04698	0,05459	0,00560	3,00000	1,20000	1,80000	1,49220	0,15633
0,09	0,82	0,03537	0,03857	0,03997	0,00368	3,17980	1,14473	2,03507	1,35278	0,12694
0,08	0,84	0,02643	0,03088	0,02819	0,00230	3,39117	1,08517	2,30599	1,21116	0,10053
0,07	0,86	0,01898	0,02395	0,01896	0,00135	3,64496	1,02059	2,62437	1,06735	0,07715
0,06	0,88	0,01295	0,01782	0,01199	0,00073	3,95811	0,94995	3,00817	0,92136	0,05682
0,05	0,90	0,00823	0,01254	0,00697	0,00035	4,35890	0,87178	3,48712	0,77320	0,03955
0,04	0,92	0,00473	0,00812	0,00358	0,00014	4,89898	0,78384	4,11514	0,62286	0,02537
0,03	0,94	0,00231	0,00463	0,00152	0,00005	5,68624	0,68235	5,00389	0,47037	0,01430
0,02	0,96	0,00084	0,00208	0,00045	0,00001	7,00000	0,56000	6,44000	0,31573	0,00637
0,01	0,98	0,00015	0,00053	0,00006	0,00000	9,94987	0,39800	9,55188	0,15893	0,00160
0,00	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	∞	0,00000	∞	0,00000	0,00000

Digitized by Google

Zahlentafel 3. Funktionen $\Phi_{18}(\varphi)$ bis $\Phi_{37}(\varphi)$.

τ_R	$-\cos\varphi$	Φ_{18}	Φ_{19}	Φ_{20}	Φ_{21}	Φ_{31}	Φ_{32}	Φ_{35}	Φ_{36}	Φ_{37}
0,60	−0,2	1,86574	1,92835	1,17576	−0,31836	0,79236	3,14387	1,92000	8,03069	5,25182
0,55	−0,1	1,72373	1,76159	1,09449	−0,17990	0,67598	2,86495	1,98000	7,03248	4,11485
0,50	0,0	1,57080	1,57080	1,00000	0,00000	0,57080	2,57080	2,00000	6,03820	3,14159
0,45	0,1	1,41067	1,36426	0,89549	0,22010	0,47564	2,26662	1,98000	5,06803	2,32523
0,40	0,2	1,24633	1,14977	0,78384	0,48164	0,38964	1,95732	1,92000	4,14007	1,65674
0,35	0,3	1,08016	0,93479	0,66776	0,78862	0,31216	1,64768	1,82000	3,27080	1,12516
0,30	0,4	0,91417	0,72650	0,54991	1,14871	0,24276	1,34258	1,68000	2,47543	0,71785
0,25	0,5	0,75000	0,53190	0,43301	1,57536	0,18117	1,04720	1,50000	1,76817	0,42063
0,20	0,6	0,58908	0,35784	0,32000	2,09257	0,12730	0,76730	1,28000	1,16241	0,21794
0,15	0,7	0,43263	0,21103	0,21424	2,74669	0,08126	0,50974	1,02000	0,67083	0,09300
0,10	0,8	0,28170	0,09810	0,12000	3,64330	0,04350	0,28350	0,72000	0,30555	0,02786
0,05	0,9	0,13722	0,02560	0,04359	5,12146	0,01514	0,10231	0,38000	0,07821	0,00352
0,00	1,0	0,00000	0,00000	0,00000	∞	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10	0,80	0,28170	0,09810	0,12000	3,64330	0,04350	0,28350	0,72000	0,30555	0,02786
0,09	0,82	0,25226	0,08016	0,10303	3,87192	0,03702	0,24307	0,65520	0,24869	0,02035
0,08	0,84	0,22308	0,06388	0,08681	4,12563	0,03093	0,20455	0,58880	0,19743	0,01433
0,07	0,86	0,19418	0,04933	0,07144	4,41107	0,02523	0,16812	0,52080	0,15187	0,00962
0,06	0,88	0,16556	0,03655	0,05700	4,73798	0,01996	0,13395	0,45120	0,11210	0,00607
0,05	0,90	0,13722	0,02560	0,04359	5,12146	0,01514	0,10231	0,38000	0,07821	0,00352
0,04	0,92	0,10917	0,01652	0,03135	5,58681	0,01080	0,07350	0,30720	0,05028	0,00181
0,03	0,94	0,08142	0,00937	0,02047	6,18145	0,00699	0,04793	0,23280	0,02841	0,00076
0,02	0,96	0,05397	0,00420	0,01120	7,01186	0,00379	0,02619	0,15680	0,01269	0,00023
0,01	0,98	0,02683	0,00106	0,00398	8,41785	0,00134	0,00930	0,07920	0,00319	0,00003
0,00	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	∞	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 4. Funktion $L(\varphi, \psi) = L(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\varphi$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R / τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,55840	0,62236	0,69315	0,77340	0,86701	0,98010	1,12323	1,31696	1,60944	2,16158	∞
0,82	0,09	0,52531	0,58506	0,65103	0,72560	0,81222	0,91629	1,04697	1,22164	1,47942	1,93964	3,53721
0,84	0,08	0,49119	0,54669	0,60781	0,67671	0,75643	0,85173	0,97051	1,12750	1,35462	1,74232	2,79354
0,86	0,07	0,45574	0,50690	0,56313	0,62632	0,69918	0,78585	0,89315	1,03351	1,23305	1,56133	2,33243
0,88	0,06	0,41857	0,46527	0,51647	0,57387	0,63982	0,71792	0,81400	0,93850	1,11277	1,39073	1,98270
0,90	0,05	0,37911	0,42114	0,46715	0,51857	0,57748	0,64694	0,73189	0,84102	0,99166	1,22567	1,68924
0,92	0,04	0,33647	0,37356	0,41406	0,45924	0,51083	0,57140	0,64509	0,73900	0,86701	1,06139	1,42542
0,94	0,03	0,28918	0,32087	0,35542	0,39386	0,43763	0,48883	0,55078	0,62917	0,73482	0,89208	1,17360
0,96	0,02	0,23435	0,25989	0,28768	0,31854	0,35356	0,39440	0,44357	0,50536	0,58779	0,70834	0,91629
0,98	0,01	0,16449	0,18232	0,20169	0,22314	0,24744	0,27566	0,30949	0,35174	0,40756	0,48795	0,62236
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 5. Funktion $X_0(\varphi, \psi) = -X_0(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\varphi$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R / τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,13162	0,11598	0,10030	0,08476	0,06957	0,05491	0,04101	0,02815	0,01665	0,00699	0,00000
0,82	0,09	0,11522	0,10178	0,08829	0,07491	0,06180	0,04914	0,03710	0,02592	0,01586	0,00731	0,00091
0,84	0,08	0,09896	0,08762	0,07623	0,06492	0,05383	0,04309	0,03286	0,02333	0,01470	0,00730	0,00159
0,86	0,07	0,08298	0,07363	0,06424	0,05491	0,04574	0,03685	0,02837	0,02043	0,01321	0,00696	0,00202
0,88	0,06	0,06743	0,05997	0,05246	0,04499	0,03765	0,03051	0,02369	0,01729	0,01144	0,00632	0,00221
0,90	0,05	0,05251	0,04679	0,04104	0,03531	0,02967	0,02419	0,01893	0,01398	0,00944	0,00544	0,00216
0,92	0,04	0,03844	0,03433	0,03018	0,02605	0,02198	0,01801	0,01420	0,01061	0,00729	0,00435	0,00191
0,94	0,03	0,02554	0,02285	0,02014	0,01743	0,01477	0,01216	0,00966	0,00729	0,00509	0,00313	0,00148
0,96	0,02	0,01421	0,01274	0,01126	0,00977	0,00831	0,00687	0,00549	0,00419	0,00297	0,00188	0,00094
0,98	0,01	0,00514	0,00461	0,00408	0,00356	0,00303	0,00252	0,00203	0,00156	0,00112	0,00073	0,00038
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 6. Funktion $X_3(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\varphi$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0.3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R / τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,05895	0,07373	0,09096	0,11122	0,13534	0,16463	0,20123	0,24906	0,31622	0,42466	0,72000
0,82	0,09	0,04997	0,06247	0,07704	0,09413	0,11445	0,13906	0,16971	0,20951	0,26484	0,35199	0,54535
0,84	0,08	0,04158	0,05196	0,06405	0,07821	0,09501	0,11532	0,14053	0,17309	0,21792	0,28712	0,42762
0,86	0,07	0,03379	0,04222	0,05201	0,06347	0,07705	0,09343	0,11369	0,13973	0,17529	0,22922	0,33246
0,88	0,06	0,02663	0,03326	0,04095	0,04995	0,06060	0,07340	0,08920	0,10942	0,13681	0,17774	0,25274
0,90	0,05	0,02012	0,02512	0,03092	0,03769	0,04569	0,05530	0,06711	0,08217	0,10243	0,13231	0,18522
0,92	0,04	0,01430	0,01785	0,02196	0,02675	0,03241	0,03919	0,04751	0,05806	0,07218	0,09276	0,12820
0,94	0,03	0,00923	0,01151	0,01416	0,01724	0,02087	0,02522	0,03054	0,03726	0,04620	0,05910	0,08080
0,96	0,02	0,00499	0,00622	0,00765	0,00931	0,01127	0,01360	0,01645	0,02004	0,02479	0,03158	0,04279
0,98	0,01	0,00175	0,00219	0,00269	0,00327	0,00395	0,00477	0,00576	0,00701	0,00865	0,01097	0,01475
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Digitized by Google

Zahlentafel 7. Funktion $X_3(\psi, \varphi)$.

	$-\cos\varphi$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$-\cos\psi$	t_R/t_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	2,29256	2,31424	2,30904	2,27675	2,21617	2,12483	1,99840	1,82941	1,60378	1,28929	0,72000
0,82	0,09	2,19323	2,21550	2,21242	2,18385	2,12875	2,04494	1,92861	1,77321	1,56673	1,28301	0,82832
0,84	0,08	2,08492	2,10750	2,10630	2,08126	2,03148	1,95506	1,84863	1,70649	1,51836	1,26282	0,87459
0,86	0,07	1,96614	1,98873	1,98917	1,96747	1,92288	1,85373	1,75708	1,62798	1,45766	1,22847	0,89224
0,88	0,06	1,83488	1,85711	1,85894	1,84042	1,80091	1,73898	1,65208	1,53594	1,38311	1,17906	0,88720
0,90	0,05	1,68821	1,70970	1,71264	1,69713	1,66264	1,60795	1,53089	1,42780	1,29242	1,11284	0,86092
0,92	0,04	1,52170	1,54197	1,54572	1,53306	1,50359	1,45627	1,38929	1,29958	1,18196	1,02678	0,81240
0,94	0,03	1,32790	1,34635	1,35054	1,34062	1,31625	1,27662	1,22023	1,14460	1,04556	0,91549	0,73802
0,96	0,02	1,09238	1,10816	1,11235	1,10507	1,08610	1,05481	1,01004	0,94990	0,87121	0,76826	0,62921
0,98	0,01	0,77815	0,78981	0,79330	0,78873	0,77596	0,75456	0,72378	0,68234	0,62815	0,55748	0,46285
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 8. Funktion $X_4(\varphi, \psi)$.

	$-\cos\varphi$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$-\cos\psi$	t_R/t_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,80503	0,78320	0,75809	0,72925	0,69607	0,65775	0,61317	0,56061	0,49725	0,41761	0,30555
0,82	0,09	0,69088	0,67234	0,65104	0,62658	0,59846	0,56603	0,52834	0,48400	0,43073	0,36422	0,27318
0,84	0,08	0,58193	0,56648	0,54874	0,52838	0,50499	0,47804	0,44676	0,41003	0,36604	0,31143	0,23807
0,86	0,07	0,47869	0,46612	0,45169	0,43513	0,41613	0,39425	0,36889	0,33917	0,30366	0,25982	0,20175
0,88	0,06	0,38175	0,37183	0,36045	0,34740	0,33243	0,31521	0,29527	0,27193	0,24413	0,20997	0,16523
0,90	0,05	0,29184	0,28433	0,27572	0,26586	0,25455	0,24155	0,22652	0,20896	0,18808	0,16253	0,12940
0,92	0,04	0,20984	0,20449	0,19837	0,19135	0,18332	0,17409	0,16343	0,15099	0,13624	0,11826	0,09513
0,94	0,03	0,13695	0,13350	0,12954	0,12501	0,11983	0,11388	0,10702	0,09902	0,08955	0,07805	0,06337
0,96	0,02	0,07490	0,07303	0,07089	0,06844	0,06564	0,06242	0,05872	0,05441	0,04931	0,04315	0,03532
0,98	0,01	0,02661	0,02595	0,02520	0,02434	0,02335	0,02222	0,02092	0,01941	0,01763	0,01548	0,01277
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 9. Funktion $X_4(\psi, \varphi)$.

	$-\cos\varphi$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$-\cos\psi$	t_R/t_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,76110	0,74676	0,73310	0,71112	0,68341	0,64934	0,60796	0,55770	0,49590	0,41718	0,30555
0,82	0,09	0,65277	0,64070	0,62925	0,61073	0,58734	0,55859	0,52369	0,48137	0,42947	0,36378	0,27315
0,84	0,08	0,54950	0,53953	0,53011	0,51478	0,49541	0,47159	0,44269	0,40770	0,36489	0,31100	0,23800
0,86	0,07	0,45175	0,44370	0,43614	0,42374	0,40807	0,38880	0,36542	0,33715	0,30264	0,25942	0,20167
0,88	0,06	0,36006	0,35377	0,34787	0,33816	0,32586	0,31074	0,29241	0,27025	0,24327	0,20961	0,16515
0,90	0,05	0,27510	0,27038	0,26598	0,25868	0,24943	0,23805	0,22426	0,20761	0,18738	0,16223	0,12932
0,92	0,04	0,19769	0,19436	0,19127	0,18611	0,17957	0,17151	0,16176	0,14999	0,13570	0,11802	0,09506
0,94	0,03	0,12895	0,12682	0,12485	0,12154	0,11733	0,11216	0,10589	0,09834	0,08918	0,07789	0,06331
0,96	0,02	0,07049	0,06934	0,06829	0,06651	0,06425	0,06146	0,05809	0,05402	0,04910	0,04305	0,03529
0,98	0,01	0,02503	0,02463	0,02426	0,02364	0,02285	0,02187	0,02069	0,01927	0,01755	0,01545	0,01276
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 10. Funktion $X_5(\varphi, \psi)$.

	$-\cos\varphi$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$-\cos\psi$	t_R/t_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,34977	0,30598	0,26380	0,22340	0,18498	0,14877	0,11504	0,08413	0,05648	0,03272	0,01393
0,82	0,09	0,30208	0,26453	0,22834	0,19366	0,16066	0,12954	0,10051	0,07387	0,04998	0,02935	0,01285
0,84	0,08	0,25606	0,22445	0,19397	0,16476	0,13694	0,11069	0,08618	0,06364	0,04339	0,02582	0,01162
0,86	0,07	0,21196	0,18598	0,16092	0,13688	0,11398	0,09235	0,07214	0,05353	0,03677	0,02217	0,01026
0,88	0,06	0,17011	0,14940	0,12942	0,11024	0,09197	0,07470	0,05854	0,04364	0,03019	0,01843	0,00877
0,90	0,05	0,13086	0,11504	0,09977	0,08511	0,07113	0,05790	0,04552	0,03409	0,02375	0,01468	0,00717
0,92	0,04	0,09468	0,08331	0,07233	0,06179	0,05173	0,04221	0,03329	0,02504	0,01756	0,01099	0,00550
0,94	0,03	0,06218	0,05476	0,04760	0,04072	0,03415	0,02793	0,02209	0,01669	0,01178	0,00745	0,00382
0,96	0,02	0,03422	0,03017	0,02625	0,02249	0,01889	0,01548	0,01228	0,00932	0,00662	0,00424	0,00222
0,98	0,01	0,01223	0,01079	0,00940	0,00806	0,00679	0,00557	0,00444	0,00338	0,00242	0,00156	0,00084
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Digitized by Google

Zahlentafel 11. Funktion $X_5(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_K/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,03606	0,03486	0,03353	0,03205	0,03041	0,02858	0,02652	0,02418	0,02146	0,01819	0,01393
0,82	0,09	0,02779	0,02688	0,02586	0,02473	0,02347	0,02207	0,02050	0,01871	0,01664	0,01416	0,01097
0,84	0,08	0,02077	0,02009	0,01933	0,01849	0,01756	0,01652	0,01536	0,01404	0,01251	0,01068	0,00835
0,86	0,07	0,01492	0,01443	0,01389	0,01329	0,01263	0,01189	0,01106	0,01012	0,00904	0,00774	0,00611
0,88	0,06	0,01018	0,00985	0,00948	0,00908	0,00863	0,00813	0,00757	0,00693	0,00620	0,00533	0,00424
0,90	0,05	0,00647	0,00626	0,00603	0,00578	0,00549	0,00518	0,00482	0,00442	0,00396	0,00342	0,00274
0,92	0,04	0,00371	0,00360	0,00346	0,00332	0,00316	0,00298	0,00278	0,00255	0,00229	0,00198	0,00159
0,94	0,03	0,00181	0,00176	0,00169	0,00162	0,00154	0,00146	0,00136	0,00125	0,00112	0,00097	0,00079
0,96	0,02	0,00066	0,00064	0,00062	0,00059	0,00056	0,00053	0,00050	0,00046	0,00041	0,00036	0,00029
0,98	0,01	0,00012	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00007	0,00006	0,00005
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 12. Funktion $X_8(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	τ_K/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,00462	0,00578	0,00712	0,00868	0,01055	0,01279	0,01557	0,01915	0,02406	0,03158	0,04698
0,82	0,09	0,00353	0,00441	0,00544	0,00663	0,00805	0,00976	0,01187	0,01457	0,01826	0,02383	0,03453
0,84	0,08	0,00262	0,00327	0,00403	0,00491	0,00596	0,00722	0,00877	0,01075	0,01344	0,01745	0,02485
0,86	0,07	0,00187	0,00233	0,00287	0,00350	0,00424	0,00513	0,00623	0,00763	0,00951	0,01230	0,01728
0,88	0,06	0,00126	0,00158	0,00194	0,00236	0,00287	0,00347	0,00420	0,00514	0,00640	0,00824	0,01145
0,90	0,05	0,00080	0,00099	0,00122	0,00149	0,00181	0,00218	0,00264	0,00323	0,00401	0,00515	0,00709
0,92	0,04	0,00045	0,00057	0,00070	0,00085	0,00103	0,00124	0,00150	0,00183	0,00227	0,00291	0,00397
0,94	0,03	0,00022	0,00027	0,00034	0,00041	0,00050	0,00060	0,00073	0,00089	0,00110	0,00140	0,00189
0,96	0,02	0,00008	0,00010	0,00012	0,00015	0,00018	0,00022	0,00026	0,00032	0,00039	0,00050	0,00067
0,98	0,01	0,00001	0,00002	0,00002	0,00003	0,00003	0,00004	0,00005	0,00006	0,00007	0,00009	0,00012
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 13. Funktion $X_8(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_K/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	2,00203	1,77146	1,54007	1,31056	1,08567	0,86834	0,66187	0,47008	0,29786	0,15222	0,04698
0,82	0,09	1,94395	1,72330	1,50169	1,28166	1,06580	0,85687	0,65790	0,47244	0,30494	0,16163	0,05360
0,84	0,08	1,87521	1,66539	1,45451	1,24493	1,03908	0,83952	0,64906	0,47098	0,30929	0,16952	0,06092
0,86	0,07	1,79412	1,59619	1,39711	1,19909	1,00438	0,81533	0,63455	0,46500	0,31032	0,17540	0,06806
0,88	0,06	1,69837	1,51360	1,32763	1,14249	0,96024	0,78305	0,61328	0,45361	0,30730	0,17867	0,07433
0,90	0,05	1,58474	1,41469	1,24342	1,07277	0,90462	0,74092	0,58378	0,43560	0,29929	0,17858	0,07907
0,92	0,04	1,44839	1,29506	1,14054	0,98647	0,83449	0,68634	0,54389	0,40924	0,28490	0,17409	0,08148
0,94	0,03	1,28135	1,14751	1,01255	0,87788	0,74491	0,61513	0,49014	0,37173	0,26200	0,16364	0,08045
0,96	0,02	1,06843	0,95830	0,84718	0,73621	0,62656	0,51940	0,41604	0,31791	0,22668	0,14447	0,07421
0,98	0,01	0,77131	0,69284	0,61362	0,53445	0,45615	0,37955	0,30555	0,23515	0,16950	0,11006	0,05880
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 14. Funktion $X_9(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	τ_K/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0.30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,06534	0,06362	0,06164	0,05938	0,05678	0,05379	0,05032	0,04624	0,04138	0,03535	0,02730
0,82	0,09	0,05039	0,04907	0,04756	0,04583	0,04384	0,04156	0,03891	0,03580	0,03210	0,02754	0,02150
0,84	0,08	0,03767	0,03669	0,03557	0,03429	0,03281	0,03112	0,02916	0,02687	0,02414	0,02078	0,01639
0,86	0,07	0,02707	0,02637	0,02558	0,02466	0,02361	0,02241	0,02101	0,01938	0,01744	0,01507	0,01199
0,88	0,06	0,01848	0,01801	0,01746	0,01685	0,01614	0,01532	0,01438	0,01328	0,01197	0,01038	0,00832
0,90	0,05	0,01175	0,01146	0,01111	0,01072	0,01028	0,00976	0,00917	0,00848	0,00765	0,00666	0,00537
0,92	0,04	0,00675	0,00658	0,00639	0,00616	0,00591	0,00562	0,00528	0,00488	0,00442	0,00385	0,00313
0,94	0,03	0,00330	0,00322	0,00312	0,00302	0,00289	0,00275	0,00259	0,00240	0,00217	0,00190	0,00155
0,96	0,02	0,00120	0,00117	0,00114	0,00110	0,00105	0,00100	0,00094	0,00088	0,00079	0,00070	0,00057
0,98	0,01	0,00021	0,00021	0,00020	0,00020	0,00019	0,00018	0,00017	0,00016	0,00014	0,00012	0,00010
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Digitized by Google

Zahlentafel 15. Funktion $X_9(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,64228	0,56670	0,49251	0,42026	0,35048	0,28379	0,22086	0,16249	0,10970	0,06387	0,02730
0,82	0,09	0,55512	0,49028	0,42662	0,36458	0,30463	0,24729	0,19312	0,14280	0,09716	0,05736	0,02521
0,84	0,08	0,47088	0,41629	0,36268	0,31040	0,25985	0,21147	0,16571	0,12313	0,08442	0,05052	0,02284
0,86	0,07	0,39008	0,34519	0,30109	0,25807	0,21645	0,17657	0,13882	0,10365	0,07160	0,04341	0,02019
0,88	0,06	0,31327	0,27749	0,24232	0,20799	0,17477	0,14291	0,11273	0,08456	0,05884	0,03613	0,01727
0,90	0,05	0,24115	0,21381	0,18693	0,16068	0,13526	0,11086	0,08773	0,06611	0,04632	0,02879	0,01413
0,92	0,04	0,17460	0,15495	0,13562	0,11674	0,09844	0,08088	0,06420	0,04859	0,03428	0,02157	0,01085
0,94	0,03	0,11474	0,10192	0,08931	0,07698	0,06503	0,05355	0,04263	0,03241	0,02302	0,01465	0,00755
0,96	0,02	0,06319	0,05618	0,04928	0,04254	0,03599	0,02970	0,02372	0,01811	0,01295	0,00833	0,00439
0,98	0,01	0,02260	0,02011	0,01766	0,01526	0,01294	0,01070	0,00857	0,00657	0,00473	0,00307	0,00166
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 16. Funktion $X_{10}(\varphi, \psi) = X_{10}(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,02891	0,02536	0,02194	0,01866	0,01554	0,01259	0,00983	0,00729	0,00500	0,00302	0,00140
0,82	0,09	0,02239	0,01966	0,01702	0,01449	0,01208	0,00980	0,00767	0,00571	0,00394	0,00240	0,00113
0,84	0,08	0,01682	0,01477	0,01280	0,01091	0,00911	0,00740	0,00581	0,00434	0,00301	0,00184	0,00089
0,86	0,07	0,01214	0,01067	0,00926	0,00790	0,00660	0,00537	0,00422	0,00316	0,00220	0,00136	0,00067
0,88	0,06	0,00832	0,00732	0,00636	0,00543	0,00454	0,00370	0,00292	0,00219	0,00154	0,00096	0,00048
0,90	0,05	0,00532	0,00468	0,00407	0,00348	0,00291	0,00238	0,00188	0,00142	0,00100	0,00063	0,00032
0,92	0,04	0,00307	0,00270	0,00235	0,00201	0,00169	0,00138	0,00109	0,00083	0,00058	0,00037	0,00019
0,94	0,03	0,00151	0,00133	0,00116	0,00099	0,00083	0,00068	0,00054	0,00041	0,00029	0,00019	0,00010
0,96	0,02	0,00055	0,00049	0,00042	0,00036	0,00031	0,00025	0,00020	0,00015	0,00011	0,00007	0,00004
0,98	0,01	0,00010	0,00009	0,00008	0,00006	0,00005	0,00004	0,00004	0,00003	0,00002	0,00001	0,00001
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 17. Funktion $X_{12}(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	−0,13701	−0,15928	−0,18629	−0,22016	−0,26434	−0,32488	−0,41343	−0,55545	−0,81888	−1,46659	$-\infty$
0,82	0,09	−0,11595	−0,13468	−0,15733	−0,18565	−0,22244	−0,27258	−0,34534	−0,46056	−0,66939	−1,15428	−3,64024
0,84	0,08	−0,09633	−0,11180	−0,13045	−0,15371	−0,18381	−0,22461	−0,28339	−0,37542	−0,53889	−0,90142	−2,33157
0,86	0,07	−0,07818	−0,09065	−0,10567	−0,12433	−0,14839	−0,18087	−0,22732	−0,29931	−0,42492	−0,69317	−1,60309
0,88	0,06	−0,06152	−0,07128	−0,08300	−0,09753	−0,11620	−0,14128	−0,17693	−0,23165	−0,32565	−0,52013	−1,11555
0,90	0,05	−0,04642	−0,05374	−0,06251	−0,07336	−0,08726	−0,10584	−0,13211	−0,17207	−0,23976	−0,37608	−0,76313
0,92	0,04	−0,03294	−0,03811	−0,04429	−0,05192	−0,06165	−0,07462	−0,09284	−0,12035	−0,16636	−0,25688	−0,49932
0,94	0,03	−0,02123	−0,02454	−0,02849	−0,03336	−0,03955	−0,04777	−0,05926	−0,07648	−0,10495	−0,15984	−0,30015
0,96	0,02	−0,01146	−0,01324	−0,01536	−0,01797	−0,02127	−0,02564	−0,03172	−0,04077	−0,05557	−0,08361	−0,15258
0,98	0,01	−0,00402	−0,00464	−0,00538	−0,00629	−0,00743	−0,00894	−0,01103	−0,01413	−0,01914	−0,02848	−0,05074
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 18. Funktion $X_{12}(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	4,76197	4,72520	4,61371	4,42312	4,14475	3,76343	3,25263	2,56224	1,58112	−0,03830	$-\infty$
0,82	0,09	5,18049	5,15759	5,05753	4,87652	4,60667	4,23409	3,73473	3,06429	2,12883	0,66238	−3,25866
0,84	0,08	5,66293	5,65496	5,56670	5,39492	5,13243	4,76647	4,27509	3,61867	2,71662	1,35890	−1,51769
0,86	0,07	6,23114	6,23957	6,16366	6,00074	5,74427	5,38244	4,89502	4,24623	3,36584	2,08339	−0,29091
0,88	0,06	6,91914	6,94601	6,88328	6,72881	6,47664	6,11576	5,62734	4,97865	4,10744	2,87186	0,78434
0,90	0,05	7,78344	7,83181	7,78351	7,63695	7,38670	7,02237	6,52622	5,86780	4,99092	3,77442	1,85221
0,92	0,04	8,92706	9,00173	8,96983	8,83037	8,57835	8,20385	7,68980	7,00729	6,10434	4,87436	3,02794
0,94	0,03	10,56435	10,67373	10,66164	10,52775	10,26745	9,87100	9,32148	8,59051	7,62834	6,33742	4,47629
0,96	0,02	13,24844	13,41004	13,42464	13,29275	13,01001	12,56635	11,94408	11,11364	10,02443	8,58132	6,56742
0,98	0,01	19,16871	19,43536	19,49637	19,35371	19,00282	18,43183	17,61944	16,53021	15,10467	13,23536	10,69512
1,00	0,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Digitized by Google

Zahlentafel 19. Funktion $X_{13}(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\eta$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R/τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,20315	0,23403	0,26893	0,30900	0,35592	0,41225	0,48221	0,57346	0,70205	0,91144	1,49220
0,82	0,09	0,17249	0,19862	0,22812	0,26193	0,30144	0,34875	0,40728	0,48315	0,58891	0,75685	1,13512
0,84	0,08	0,14376	0,16547	0,18994	0,21796	0,25063	0,28965	0,33775	0,39974	0,48532	0,61841	0,89235
0,86	0,07	0,11704	0,13465	0,15448	0,17716	0,20355	0,23500	0,27363	0,32316	0,39094	0,49448	0,69520
0,88	0,06	0,09238	0,10624	0,12183	0,13963	0,16031	0,18489	0,21499	0,25340	0,30555	0,38398	0,52943
0,90	0,05	0,06991	0,08036	0,09211	0,10550	0,12104	0,13947	0,16197	0,19055	0,22907	0,28624	0,38861
0,92	0,04	0,04976	0,05718	0,06551	0,07499	0,08598	0,09898	0,11481	0,13483	0,16164	0,20094	0,26936
0,94	0,03	0,03216	0,03694	0,04230	0,04840	0,05545	0,06378	0,07389	0,08663	0,10358	0,12818	0,16999
0,96	0,02	0,01742	0,02000	0,02289	0,02617	0,02997	0,03444	0,03986	0,04666	0,05566	0,06859	0,09013
0,98	0,01	0,00613	0,00703	0,00805	0,00920	0,01052	0,01208	0,01397	0,01633	0,01943	0,02386	0,03110
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 20. Funktion $X_{13}(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\eta$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R/τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	5,53595	5,43965	5,30303	5,12427	4,89992	4,62425	4,28812	3,87622	3,36030	2,67608	1,49220
0,82	0,09	5,29349	5,20482	5,07824	4,91218	4,70354	4,44723	4,13512	3,75382	3,27917	2,65904	1,70645
0,84	0,08	5,02968	4,94856	4,83201	4,67867	4,48579	4,24886	3,96069	3,60958	3,17485	2,61382	1,79638
0,86	0,07	4,74095	4,66735	4,56088	4,42038	4,24343	4,02605	3,76192	3,44086	3,04523	2,53987	1,82889
0,88	0,06	4,42245	4,35637	4,26011	4,13267	3,97196	3,77450	3,53478	3,24399	2,88714	2,43531	1,81572
0,90	0,05	4,06718	4,00870	3,92289	3,80891	3,66497	3,48804	3,27341	3,01354	2,69581	2,29652	1,75975
0,92	0,04	3,66448	3,61379	3,53884	3,43895	3,31259	3,15723	2,96886	2,74117	2,46370	2,11726	1,65890
0,94	0,03	3,19646	3,15394	3,09056	3,00579	2,89838	2,76625	2,60611	2,41283	2,17798	1,88643	1,50572
0,96	0,02	2,62848	2,59487	2,54435	2,47651	2,39041	2,28443	2,15604	2,00127	1,81370	1,58202	1,28279
0,98	0,01	1,87166	1,84866	1,81378	1,76677	1,70699	1,63336	1,54418	1,43679	1,30695	1,14729	0,94301
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 21. Funktion $X_{14}(\varphi, \psi) = X_{14}(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\eta$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R/τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,44532	0,43011	0,41321	0,39445	0,37356	0,35019	0,32382	0,29366	0,25836	0,21523	0,15633
0,82	0,09	0,38187	0,36894	0,35460	0,33867	0,32095	0,30115	0,27884	0,25337	0,22365	0,18758	0,13962
0,84	0,08	0,32140	0,31062	0,29866	0,28539	0,27064	0,25417	0,23564	0,21451	0,18994	0,16029	0,12156
0,86	0,07	0,26417	0,25540	0,24566	0,23486	0,22287	0,20949	0,19445	0,17733	0,15747	0,13364	0,10294
0,88	0,06	0,21052	0,20359	0,19590	0,18738	0,17793	0,16738	0,15554	0,14210	0,12653	0,10793	0,08425
0,90	0,05	0,16081	0,15557	0,14975	0,14330	0,13616	0,12819	0,11926	0,10913	0,09743	0,08350	0,06594
0,92	0,04	0,11554	0,11181	0,10766	0,10308	0,09800	0,09234	0,08599	0,07881	0,07054	0,06072	0,04845
0,94	0,03	0,07535	0,07294	0,07026	0,06730	0,06402	0,06037	0,05628	0,05166	0,04634	0,04006	0,03225
0,96	0,02	0,04118	0,03987	0,03842	0,03682	0,03505	0,03307	0,03086	0,02837	0,02551	0,02213	0,01797
0,98	0,01	0,01462	0,01416	0,01365	0,01308	0,01246	0,01177	0,01099	0,01012	0,00912	0,00794	0,00649
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 22. Funktion $X_{16}(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	$-\cos\eta$	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	τ_R/τ_H	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	−0,01070	−0,01241	−0,01447	−0,01703	−0,02033	−0,02481	−0,03122	−0,04121	−0,05882	−0,09758	−0,28170
0,82	0,09	−0,00817	−0,00947	−0,01103	−0,01297	−0,01547	−0,01884	−0,02364	−0,03107	−0,04398	−0,07148	−0,16963
0,84	0,08	−0,00605	−0,00701	−0,00816	−0,00958	−0,01142	−0,01387	−0,01737	−0,02272	−0,03192	−0,05101	−0,11151
0,86	0,07	−0,00431	−0,00499	−0,00580	−0,00681	−0,00810	−0,00983	−0,01227	−0,01599	−0,02231	−0,03513	−0,07272
0,88	0,06	−0,00291	−0,00337	−0,00392	−0,00459	−0,00546	−0,00661	−0,00824	−0,01069	−0,01483	−0,02305	−0,04582
0,90	0,05	−0,00184	−0,00212	−0,00247	−0,00289	−0,00343	−0,00415	−0,00515	−0,00667	−0,00919	−0,01413	−0,02721
0,92	0,04	−0,00104	−0,00121	−0,00140	−0,00164	−0,00195	−0,00235	−0,00291	−0,00376	−0,00515	−0,00784	−0,01471
0,94	0,03	−0,00051	−0,00058	−0,00068	−0,00079	−0,00094	−0,00113	−0,00140	−0,00180	−0,00246	−0,00371	−0,00681
0,96	0,02	−0,00018	−0,00021	−0,00024	−0,00029	−0,00034	−0,00041	−0,00050	−0,00065	−0,00088	−0,00131	−0,00236
0,98	0,01	−0,00003	−0,00004	−0,00004	−0,00005	−0,00006	−0,00007	−0,00009	−0,00011	−0,00015	−0,00023	−0,00040
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Digitized by Google

Zahlentafel 23. Funktion $X_{16}(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	2,66095	2,18598	1,71840	1,26587	0,83669	0,44034	0,08830	−0,20426	−0,41464	−0,50030	−0,28170
0,82	0,09	3,15794	2,64040	2,12899	1,63159	1,15664	0,71367	0,31403	−0,02762	−0,29014	−0,43640	−0,35822
0,84	0,08	3,72944	3,16288	2,60112	2,05232	1,52515	1,02927	0,57602	0,17971	−0,13964	−0,34891	−0,36733
0,86	0,07	4,39888	3,77464	3,15377	2,54481	1,95674	1,39945	0,88442	0,42579	0,04280	−0,23432	−0,34069
0,88	0,06	5,20244	4,50844	3,81622	3,13484	2,47371	1,84312	1,25480	0,72297	0,26641	−0,08663	−0,28137
0,90	0,05	6,19984	5,41826	4,63669	3,86483	3,11275	2,39129	1,71266	1,09143	0,54632	0,10437	−0,18615
0,92	0,04	7,49897	6,60164	5,70217	4,81125	3,93985	3,09966	2,30372	1,56729	0,90955	0,35717	−0,04551
0,94	0,03	9,32261	8,25968	7,19190	6,13141	5,09056	4,08245	3,12145	2,22418	1,41101	0,70934	0,16201
0,96	0,02	12,24069	10,90653	9,56358	8,22648	6.91005	5,62983	4,40272	3,24793	2,18857	1,25473	0,49093
0,98	0,01	18,48897	16,55703	14,60875	12,66454	10,74494	8,87130	7,06660	5,35661	3,77172	2,35036	1,14665
1,00	0,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Zahlentafel 24. Funktion $X_{17}(\varphi, \psi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0.45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	0,01600	0,01841	0,02113	0,02423	0,02785	0,03216	0,03746	0,04428	0,05364	0,06808	0,09810
0,82	0,09	0,01225	0,01409	0,01616	0,01853	0,02128	0,02456	0,02858	0,03372	0,04074	0,05143	0,07223
0,84	0,08	0,00909	0,01045	0,01199	0,01373	0,01577	0,01818	0,02113	0,02490	0,03002	0,03770	0,05206
0,86	0,07	0,00649	0,00746	0,00855	0,00979	0,01123	0,01294	0,01503	0,01769	0,02127	0,02660	0,03624
0,88	0,06	0,00439	0,00505	0,00579	0,00663	0,00760	0,00875	0,01015	0,01193	0,01432	0,01783	0,02404
0,90	0,05	0,00278	0,00319	0,00365	0,00418	0,00479	0,00551	0,00639	0,00750	0,00899	0,01115	0,01490
0,92	0,04	0,00158	0,00182	0,00208	0,00238	0,00273	0,00314	0,00364	0,00426	0,00509	0,00630	0,00835
0,94	0,03	0,00077	0,00088	0,00101	0,00115	0,00132	0,00152	0,00176	0,00206	0,00246	0,00303	0,00399
0,96	0,02	0,00028	0,00032	0,00037	0,00042	0,00048	0,00055	0,00063	0,00074	0,00088	0,00109	0,00142
0,98	0,01	0,00005	0,00006	0,00006	0,00007	0,00008	0,00010	0,00011	0,00013	0,00015	0,00019	0,00025
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Zahlentafel 25. Funktion $X_{17}(\psi, \varphi)$.

$-\cos\psi$	τ_R/τ_H	$-\cos\varphi$ = −0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	0.3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
		0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
0,80	0,10	4,42426	3,87515	3,33767	2,81594	2,31433	1,83767	1,39149	0,98255	0,61968	0,31598	0,09810
0,82	0,09	4,28874	3,76352	3,24904	2,74918	2,26802	1,81006	1,38043	0,98533	0,63275	0,33426	0,11114
0,84	0,08	4,13042	3,63122	3,14189	2,66604	2,20747	1,77035	1,35940	0,98030	0,64025	0,34947	0,12559
0,86	0,07	3,94562	3,47493	3,01324	2,56389	2,13038	1,71655	1,32672	0,96605	0,64102	0,36062	0,13963
0,88	0,06	3,72938	3,29019	2,85911	2,43921	2,03369	1,64604	1,28019	0,94078	0,63358	0,36648	0,15194
0,90	0,05	3,47475	3,07073	2,67392	2,28709	1,91313	1,55519	1,21678	0,90201	0,61599	0,36554	0,16115
0,92	0,04	3,17125	2,80714	2,44930	2,10020	1,76239	1,43864	1,13204	0,84618	0,58546	0,35572	0,16566
0,94	0,03	2,80163	2,48394	2,17154	1,86654	1,57113	1,28768	1,01882	0,76756	0,53763	0,33384	0,16326
0,96	0,02	2,33295	2,07164	1,81454	1,56335	1,31985	1,08593	0,86370	0,65560	0,46454	0,29432	0,15035
0,98	0,01	1,68199	1,49588	1,31265	1,13352	0,95972	0,79259	0,63357	0,48436	0,34696	0,22395	0,11897
1,00	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

VIII. Schrifttum.

[1] H. G. Küssner, Luftfahrtforschung 13 (1936), S. 410 bis 424.

[2] F. Dietze, Luftfahrtforschung 16 (1939), S. 84 bis 96.

[3] F. Dietze, Luftfahrtforschung 14 (1937), S. 361 bis 362.

[4] Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Berlin 1929, S. 321 bis 324 und 330 bis 335.

[5] J. Kleinwächter, Beitrag zur ebenen Leitwerktheorie. Luftfahrtforschung 15 (1938), S. 127 bis 129.

[6] H. Söhngen, Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt. Luftfahrt-Forschg. 17 (1940), S. 17 bis 22.

Anhang.

Die bei Dietze [2] tabulierten Funktionen g, $\bar{g}$ hängen mit unseren in der folgenden Weise zusammen:

$$g_1 = \frac{1}{2\pi}\Phi_4 \qquad g_{10} = \frac{1}{\pi^2}\Phi_{35}$$

$$g_2 = \frac{1}{2\pi}\Phi_2 \qquad g_{11} = \frac{1}{4\pi}(\Phi_4 + \Phi_7)$$

$$g_3 = \frac{1}{\pi}\Phi_3 \qquad g_{12} = \frac{1}{\pi}(\Phi_3 + \Phi_6)$$

$$g_4 = \frac{1}{\pi}\Phi_1 \qquad g_{13} = \frac{2}{\pi}\Phi_5$$

$$g_5 = \frac{1}{\pi}\Phi_{31} \qquad g_{14} = \frac{1}{2\pi}\Phi_8$$

$$g_6 = \frac{1}{4\pi}\left(\Phi_3 + \frac{1}{2}\Phi_6\right) \qquad g_{15} = \frac{1}{2\pi}\Phi_9$$

$$g_7 = \frac{1}{\pi}\Phi_{32} \qquad g_{16} = \frac{1}{4\pi^2}\Phi_{12}$$

$$g_8 = \frac{1}{2\pi^2}\Phi_{37} \qquad g_{17} = \frac{1}{2\pi^2}\Phi_{11}$$

$$g_9 = \frac{1}{\pi^2}\Phi_{36} \qquad g_{18} = \frac{1}{\pi^2}\Phi_{10}.$$

Dabei sind die g_i für das Argument $\frac{t_u}{t_{Fl}}$ zu nehmen, das unserem τ_R entspricht, die Φ_i für das Argument φ. Weiter ist

Digitized by Google

$$\bar{g}_8 = \frac{1}{\pi^2} X_5 \qquad \bar{g}_{16} = \frac{1}{\pi^2} X_{10}$$
$$\bar{g}_9 = \frac{1}{\pi^2} X_4 \qquad \bar{g}_{17} = \frac{1}{\pi^2} X_9$$
$$\bar{g}_{10} = \frac{1}{\pi^2} X_2 \qquad \bar{g}_{18} = \frac{1}{\pi^2} X_8,$$

wobei die $\bar{g}_i$ für $\frac{t_H}{t_{FT}}$, $\frac{t_V}{t_{FT}}$ d. h. für τ_H, τ_H zu nehmen sind, die X_i dagegen nicht für φ, ψ, sondern für ψ, φ.

Der Zusammenhang mit der Dietzeschen Arbeit soll noch etwas weiter verfolgt werden. Dietze zerlegt die Verformung der Platte in die 4 Bewegungsanteile 0, 1, 2, 3. Bezeichnen wir diese Verformungen mit z_0, z_1, z_2, z_3 mit den Amplituden $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, so ist

$$z_0 = 2\, z_a\,(\mathfrak{B}_0, \Theta) = 2\, \mathfrak{B}_0\, e^{i\nu t}$$
$$z_2 = z_c\,(\mathfrak{B}_2, \Theta)$$
$$z_3 = z_e\,(\mathfrak{B}_3, \Theta).$$

z_1 ist Flügeldrehung um die Flügelvorderkante mit der Amplitude $\mathfrak{B}_1$, somit

$$z_1 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}_1\, e^{i\nu t} + z_b\,(\mathfrak{B}_1, \Theta) = \frac{1}{2}\, z_a\,(\mathfrak{B}_1, \Theta) + z_b\,(\mathfrak{B}_1, \Theta).$$

Bei einer gegebenen Verformung der Platte muß $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = z_a + z_b + z_c + z_e$ sein, woraus sich der Zusammenhang der Amplituden ergibt:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{1}{2} A - \frac{1}{4} B$$
$$\mathfrak{B}_1 = B$$
$$\mathfrak{B}_2 = C$$
$$\mathfrak{B}_3 = E.$$

Zwischen den Kräften und Momenten beider Arbeiten bestehen folgende Beziehungen:

$$P\,(x_v, x_h;\, t) = -K$$
$$P\,(x_2, x_h;\, t) = -R$$
$$P\,(x_3, x_h;\, t) = -P$$
$$M\,(x_v, x_h;\, x_v, t) = -\left(M_0 + \frac{1}{2} K\right)$$
$$M\,(x_2, x_h;\, x_2, t) = -N$$
$$M\,(x_3, x_h;\, x_3, t) = -Q.$$

Dabei ist zu beachten, daß das Moment M_0 auf den vorderen Neutralpunkt bezogen ist, dagegen $M\,(x_v, x_h;\, x_v, t)$ auf die Flügelvorderkante.

Abgeschlossen Juni 1940.

Digitized by Google

Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegungen der Flüssigkeit.

Von H. G. Küssner.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Institut für instationäre Vorgänge.

Die allgemeine Lösung des zweidimensionalen linearisierten Problems der Tragflächentheorie wird mit Hilfe der Laplace-Transformation auf die spezielle Lösung für die harmonisch schwingende Tragfläche zurückgeführt. Für den Drucksprung an der Tragfläche läßt sich eine Integraldarstellung gewinnen, welche für beliebige Bewegungen und Verformungen der Tragfläche sowohl in ruhender als auch in partial bewegter Flüssigkeit gilt. Die in dieser Integraldarstellung auftretenden Funktionen werden durch Reihen und reelle Integrale dargestellt und tabuliert.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Die schwingende Tragfläche.
III. Die beliebig bewegte Tragfläche.
IV. Partialbewegungen der Flüssigkeit.
V. Berechnung der Kraftkomponenten.
VI. Berechnung der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$.
VII. Schrifttum.
VIII. Berichtigungen zu Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 410—424.

I. Einleitung.

Die klassische Tragflächentheorie, eine Störungstheorie erster Ordnung, ging von der Untersuchung einer Tragfläche aus, die sich gleichförmig durch ruhende Flüssigkeit bewegt. Dieser Fall ist von primärer Bedeutung für das Kräftegleichgewicht des stationären Fluges. Später wurde der Fall der ungleichförmig bewegten, insbesondere der schwingenden Tragfläche behandelt, der für die Beherrschung des Flatterproblems bedeutungsvoll ist und als zweidimensionales Problem geschlossen gelöst worden ist. Auch diese Untersuchungen beschränkten sich auf ruhende Flüssigkeit.

In der Atmosphäre und besonders in ihren unteren Schichten, in denen sich der Flugbetrieb meistens abspielt, herrscht jedoch eine mehr oder weniger turbulente Luftbewegung. Was man eigentlich braucht, ist also die Theorie der durch »böige Luft« bewegten Tragfläche, wobei eine durch lineare Koordinatentransformation nicht auf Ruhe transformierbare Flüssigkeit als »böig« bezeichnet wird. Die atmosphärische Turbulenz stört zwar die Leistungsbilanz des Fluges und auch die Stabilität meistens nicht nennenswert, ist jedoch besonders bei schnellen und bei großen Flugzeugen für die Beanspruchung des Tragwerks und damit für den Gewichtsaufwand der statischen Konstruktion maßgebend. Je mehr man sich den Grenzen der Flugtechnik nähert, um so nötiger wird eine Erforschung dieser recht verwickelten Vorgänge. Der Beitrag der Aerodynamik besteht in der Theorie der durch nicht ruhende Flüssigkeit beliebig bewegten Tragfläche.

Betrachten wir den Flügel als dünne Tragfläche und beschränken uns auf kleine Anstellwinkel, so können wir eine lineare Abhängigkeit des Druckes vom Abwind annehmen und das Superpositionsprinzip anwenden. Es zeigt sich dann, daß die allgemeinste Lösung des Problems der Tragflächentheorie durch die Laplace-Transformation in die Lösung für die harmonisch schwingende Tragfläche übergeht. Diese spezielle Lösung ist jedoch im zweidimensionalen Falle durch bekannte Funktionen darstellbar und auch im dreidimensionalen Falle leichter näherungsweise berechenbar als die allgemeinste Lösung. Durch Umkehrung der Laplace-Transformation erhält man daher die Lösung für beliebige Tragflächenbewegungen aus der harmonischen Lösung.

Diese Methode ist vom Verfasser in einer früheren Arbeit [1] zum erstenmal angewandt worden, und es sind damit auch Tragflächenbewegungen in nicht ruhender Flüssigkeit untersucht worden, insbesondere das Eindringen in eine Strahlgrenze.

v. Kármán und Sears [2] haben einen Vorzeichenfehler im Ansatz des Eindringvorganges entdeckt, welcher die Bewegungsrichtung des über die Tragfläche hinwegeilenden Abwindfeldes betrifft. Diese Verfasser haben auch wenig genaue Näherungswerte für die charakteristische Funktion $k_2(s)$ nach einer anderen Methode berechnet; Zahlenwerte s. [6]. Zur weiteren Klärung wurde daher die Berechnung nach der oben erwähnten Methode wiederholt. Innerhalb der Rechengenauigkeit konnte Übereinstimmung erzielt werden.

Ausgehend von der Integraldarstellung von Küssner und Schwarz [3] für den Drucksprung an einer schwingenden Tragfläche wird die entsprechende Integraldarstellung für die durch nichtruhende Flüssigkeit beliebig bewegte Tragfläche abgeleitet. Die darin auftretenden Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ werden neu berechnet und tabuliert.

II. Die schwingende Tragfläche.

Wir gehen bei der Lösung des zweidimensionalen Problems aus von der Kenntnis des Druckes an einer schwingenden Tragfläche mit gegebener Abwindverteilung $w(\vartheta, t)$. Es sei $x\,l = -l\cos\vartheta$ bzw. $-l\cos\Theta$ die Tragflächenkoordinate; an der Flächenvorderkante sei $\vartheta = 0$, an der Hinterkante $\vartheta = \pi$. Der Abwind sei eine harmonische Funktion der Zeit. Dann ist

$$w(\vartheta, t) = W(\vartheta) \cdot e^{i\nu t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es sei ν die Kreisfrequenz, l die halbe Tragflächentiefe, v die konstante Bahngeschwindigkeit der Tragfläche bei ihrer Bewegung durch ruhende Flüssigkeit. Dann ist die imaginäre reduzierte Frequenz

$$\omega = \frac{i\nu l}{v}.$$

Der Druckunterschied zwischen Unter- und Oberseite der Tragflächen, kurz der Drucksprung der schwingenden Tragfläche, ist nach Küssner und Schwarz [3] allgemein durch das bestimmte Integral gegeben

Digitized by Google

$$\Pi(\Theta,t) =$$

$$\varrho v \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2\sin\Theta}{\cos\Theta-\cos\vartheta}+\omega\sin\vartheta\cdot ln\,\frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)}+\left\{1+\cos\vartheta+(1-\cos\vartheta)\;T(-i\omega)\right\}\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\right] w(\vartheta,t)\,d\vartheta \quad . . . \quad (2)$$

Darin ist

$$T(-i\omega)=\frac{H_0^{(2)}(-i\omega)+i\,H_1^{(2)}(-i\omega)}{-H_0^{(2)}(-i\omega)+i\,H_1^{(2)}(-i\omega)} \quad . . \quad (3)$$

H_0 und H_1 sind Hankelsche Zylinderfunktionen. Die Lösung (2) ist identisch mit der seit längerem bekannten allgemeinen Lösung des zweidimensionalen Problems, vermeidet jedoch den Umweg über die harmonische Analyse.

Die Glieder in Gl. (2), welche den Faktor T nicht enthalten, hängen nur von den Momentanwerten der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Tragfläche ab. Sie gelten nicht nur für schwingende, sondern für beliebige Tragflächenbewegungen, wenn wir in (2) die Substitution

$$\omega\cdot w=\frac{l}{v}\cdot\frac{\partial w}{\partial t} \quad . . . . . \quad (4)$$

vornehmen. Wir nennen diesen Druckanteil den »instantanen« Drucksprung $\Pi^{(1)}(\Theta,t)$.

Das Glied in Gl. (2) mit dem Faktor T entsteht durch Induktion der abgehenden Wirbel- oder Unstetigkeitsfläche, hängt also von allen früheren Bewegungszuständen der Tragfläche ab, und nur von diesen. Im Falle harmonischer Schwingungen führt diese Abhängigkeit auf die T-Funktion. Bei anderen Bewegungsarten treten jedoch andere Funktionen an ihre Stelle, deren Bestimmung unser vorliegendes Problem darstellt. Wir nennen diesen Druckanteil den »transeunten« Drucksprung $\Pi^{(2)}(\Theta,t)$.

Es erscheint physikalisch richtiger, den transeunten Drucksprung getrennt zu behandeln, da er bei Beginn der Bewegung stets von Null an wächst, anstatt den Ausdruck $1/2 + T/2$ zu einer Funktion zusammenzufassen, wie es im ausländischen Schrifttum getan wird. Diese Zusammenfassung beruht auf der Einführung des Zirkulationsbegriffes. Hier wird dieser Begriff vermieden; er bietet in der instationären Tragflächentheorie keine besonderen Vorteile.

Setzen wir (4) in (2) ein, so erhalten wir daraus den instantanen Drucksprung bei beliebiger Abwindfunktion

$$\Pi^{(1)}(\Theta,t) =$$

$$\varrho v\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[(1+\cos\vartheta)\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}+\frac{2\sin\Theta}{\cos\Theta-\cos\vartheta}\right] w(\vartheta,t)\,d\vartheta$$

$$+\varrho l\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} ln\,\frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)}\cdot\frac{\partial w(\vartheta,t)}{\partial t}\sin\vartheta\,d\vartheta \quad . . . \quad (5)$$

und den transeunten Drucksprung bei harmonischen Schwingungen

$$\Pi^{(2)}(\Theta,t) =$$

$$\varrho v\cdot T(-i\omega)\;\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos\vartheta)\,w(\vartheta,t)\,d\vartheta \quad . . \quad (6)$$

Der transeunte Drucksprung hat stets eine Cotangens-Verteilung, liefert also einen im vorderen Neutralpunkt angreifenden Auftrieb.

III. Die beliebig bewegte Tragfläche.

Ist uns eine beliebige Abwindfunktion $w(\vartheta,t)$ gegeben, so können wir den entsprechenden instantanen Drucksprung aus Gl. (5) durch einfache Integration gewinnen. Wir betrachten zunächst eine beliebige Translationsbewegung der starren Tragfläche. Dann ist w unabhängig von ϑ, und wir erhalten

$$\Pi^{(1)}(\Theta,t)=\varrho v w\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}+2\varrho l\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\sin\Theta \quad . . \quad (7)$$

Das zweite Glied der Gl. (7) entspricht einer reinen Massenkraft. Die »hydrodynamische Masse« $m=\varrho\pi l^2$ ist dabei elliptisch über die Tragflächentiefe verteilt.

Als zweites Beispiel betrachten wir die in einen Strahl eindringende Tragfläche. Es sei für

$$\left.\begin{aligned} &0<\vartheta<\varphi: \quad w=w_0;\ \frac{\partial w}{\partial t}=0\\ &\varphi<\vartheta<\psi: \quad w=w_0\frac{\cos\vartheta-\cos\psi}{\cos\varphi-\cos\psi};\ l\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{v w_0}{\cos\varphi-\cos\psi}\\ &\psi<\vartheta<\pi: \quad w=0;\ \frac{\partial w}{\partial t}=0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Gehen wir zur scharfen Strahlgrenze über, so wird nach Gl. (5)

$$\lim_{\varphi\to\psi}\Pi^{(1)}(\Theta,t)=\varrho v w_0\frac{1}{\pi}[\varphi+\sin\varphi]\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} \quad . . \quad (9)$$

$s\,l=-l\cos\varphi$ sei die Koordinate der Strahlgrenze in einem mit der Tragfläche mitbewegten Bezugssystem. Wir führen die Funktion ein

$$\Phi=\frac{\varphi+\sin\varphi}{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin s+\frac{1}{\pi}\sqrt{1-s^2} \quad \text{für } s^2<1$$
$$=1 \quad \text{für } s>1 \quad . . . . . \quad (10)$$

Es ist bemerkenswert, daß der instantane Drucksprung einer in eine Strahlgrenze eindringenden Tragfläche eine reine Cotangens-Verteilung aufweist. Da der transeunte Drucksprung nach (6) stets Cotangens-Verteilung hat, muß der Auftrieb der in eine beliebige Strahlgrenze eindringenden, geradlinig bewegten Tragfläche stets im vorderen Neutralpunkt angreifen, was zunächst recht merkwürdig erscheint, aber durch Versuche des Verfassers bestätigt worden ist.

Wir kommen nun zu der Berechnung des transeunten Drucksprunges.

Wir untersuchen zunächst die Bewegung der Tragfläche in ruhender Flüssigkeit. Der Abwind an der Tragfläche infolge Eigenbewegung läßt sich allgemein darstellen als Funktion der Ortskoordinate ϑ des mitbewegten Bezugssystems und der Zeit t. Wir setzen fest, daß $w=0$ sei für $t<0$. Wir führen den Weg $s(t)$ der Tragfläche längs ihrer Bahn ein, wobei wieder $s=0$ sei für $t<0$. Da die Induktion nur von der räumlichen Verteilung der Wirbel in der Unstetigkeitsfläche abhängt, ist es zweckmäßig, den Abwind als Funktion des Parameters s darzustellen,

$$w=w_1(\vartheta,s(t)).$$

Gemäß dem Superpositionsprinzip machen wir nun den allgemeinen Ansatz für den transeunten Drucksprung:

$$\Pi^{(2)}(\Theta,s) =$$

$$\varrho v\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos\vartheta)\int_0^{s}U_1(s-\sigma)\,\frac{\partial w_1(\vartheta,\sigma)}{\partial\sigma}\,d\sigma\,d\vartheta \quad (11)$$

Dieser Ansatz gilt für beliebige Bahngeschwindigkeit v. Insbesondere muß er auch für harmonische Schwingungen bei konstanter Bahngeschwindigkeit gelten. Setzen wir daher

$$w_1=f(\vartheta)\cdot e^{i\omega s};\qquad s=\frac{v t}{l};\qquad i\,v\,t=\omega s,$$

so folgt durch Vergleich von (6) und (11) für große Werte von s

$$T(-i\omega)\,e^{i\omega s}=\omega\int_0^{s}e^{i\omega\sigma}U_1(s-\sigma)\,d\sigma \quad . . . \quad (12)$$

Gehen wir zur Grenze $s\to\infty$ über, so wird

$$\frac{T(-i\omega)}{\omega}=\int_0^{\infty}U_1(s)\,e^{-i\omega s}\,ds \quad . . . . . \quad (13)$$

Digitized by Google

Diese fundamentale Gleichung sagt aus, daß die bekannte Funktion T/ω die Laplace-Transformierte der neu eingeführten Funktion $U_1(s)$ ist. Die untere Grenze des Integrals könnte man nach $-\infty$ verlegen, da $U = 0$ ist für $s < 0$. Die Umkehrung dieses Fourier-Integrals ist gemäß der Theorie der Laplace-Transformation [4] gegeben durch das komplexe Integral

$$U_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} T(-i\omega)\, e^{\omega s} \frac{d\omega}{\omega} \quad \ldots \quad (14)$$

Die U_1-Funktion gibt den zeitlichen Verlauf des transeunten Drucksprunges nach einer plötzlichen Abwindveränderung der Tragfläche wieder. Sie ist zum erstenmal von H. Wagner [5] durch Lösen einer Integralgleichung berechnet, und zwar in der Verbindung $1/2 + U_1/2$. Dann ist die vom Verfasser [1] als $k_1(s) = 1 + U_1(s)$ aus Gl. (14) bestimmt worden. In Abschnitt VI werden Berechnungsverfahren und Zahlenwerte der U_1-Funktion mitgeteilt, die neben der T-Funktion die wichtigste Funktion der instationären Tragflächentheorie ist.

IV. Partialbewegungen der Flüssigkeit.

Wir untersuchen nun die Tragflächenbewegung in Flüssigkeit mit Partialbewegungen. Wir sehen dabei von der Wirkung der Wirbel ab, welche an sich in einer Flüssigkeit mit Partialbewegungen stets vorhanden sind, ehe die Tragfläche hinzukommt. Diese Wirbel erfordern eine gesonderte Untersuchung, welche bei stationärem Zustrom von Kyewski und Vandrey [10] kürzlich gegeben ist. Ihr Einfluß ist wahrscheinlich nicht groß, da die experimentelle Prüfung nur auf geringe Unterschiede gegenüber der weiter unten unter Vernachlässigung dieser Wirkungen entwickelten Theorie deutet.

Als Vorstudie betrachten wir die schlängelnde Tragflächenbewegung. Die Tragfläche möge dabei wellenförmige Verbiegungen erfahren, welche von der Vorderkante nach der Hinterkante fortschreiten und die Größe

$$z = (a_0 + a_1 x) \exp(i\nu t - \omega x)$$

haben. Der Abwind ist dann

$$w(\vartheta, t) = w_0 \exp(i\nu t + \omega \cos\vartheta) \quad \ldots \quad (15)$$

Aus (5), (6) und (15) folgen die Anteile des Drucksprunges

$$\Pi^{(1)}(\Theta, t) = \varrho v w_0 e^{i\nu t} [J_0(-i\omega) + i J_1(-i\omega)] \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2}, \quad (16)$$

$$\Pi^{(2)}(\Theta, t) = \varrho v w_0 e^{i\nu t} [J_0(-i\omega) - i J_1(-i\omega)]\, T(-i\omega) \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2}. \quad (17)$$

J_0 und J_1 sind Besselsche Zylinderfunktionen. Wir erhalten also auch für die schlängelnde Tragfläche eine reine Cotangens-Verteilung des resultierenden Druckes. Aus Gl. (16) können wir den instantanen Drucksprung der in eine scharfe Strahlgrenze eindringenden Tragfläche bestimmen, indem wir auf sie die Umkehrung der Laplace-Transformation anwenden. Wir erhalten dabei das bereits durch Gl. (9) und (10) bekannte Ergebnis auf anderem Wege, denn es ist

$$\Phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int [J_0(-i\omega) + i J_1(-i\omega)]\, e^{\omega s} \frac{d\omega}{\omega} \quad (18)$$

gemäß der Theorie der Zylinderfunktionen.

Wir betrachten nun eine zeitlich konstante Partialbewegung der Flüssigkeit $w_2(s)$. Gemäß dem Superpositionsprinzip können wir für den transeunten Drucksprung den Ansatz machen:

$$\Pi^{(2)}(\Theta, s) = \varrho v \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} \cdot \int_0^{s+1} U_2(s-\sigma) \frac{\partial w_2(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (19)$$

Die Tragflächenvorderkante berührt schon den Strahlrand, wenn die Tragflächenmitte noch die Entfernung $s = -1$ von ihm hat. Daher ist in (19) als obere Grenze $s + 1$ einzusetzen. Dieser Ansatz muß auch für die schlängelnde Tragfläche bei konstanter Bahngeschwindigkeit gelten, wenn wir uns auf sehr kleine Störungen beschränken. Im Bereich jeweils einer Tragflächentiefe ist der Abwind der schlängelnden Fläche im ruhenden Koordinatensystem eine reine Ortsfunktion. Daher ist in diesem Falle

$$w_2(\vartheta, s) = w_0 e^{\omega s}; \quad s = \frac{vt}{l}; \quad i\nu t = \omega s.$$

Aus dem Vergleich von (17) und (19) folgt dann für große Werte von s

$$[J_0(-i\omega) - i J_1(-i\omega)]\, T(-i\omega)\, e^{\omega s} = \omega \int_0^{s+1} e^{\omega\sigma} U_2(s-\sigma)\, d\sigma \quad \ldots \quad (20)$$

Gehen wir zur Grenze $s \to \infty$ über, so folgt aus (20)

$$[J_0(-i\omega) - i J_1(-i\omega)]\, T(-i\omega) \cdot \frac{1}{\omega} = \int_{-1}^{\infty} U_2(s)\, e^{-\omega s} ds \quad \ldots \quad (21)$$

Da $U_2 = 0$ ist für $s < -1$, die untere Grenze also ebenso richtig $-\infty$ sein kann, lautet die Umkehrung dieser Laplace-Transformation

$$U_2(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [J_0(-i\omega) - i J_1(-i\omega)]\, T(-i\omega)\, e^{\omega s} \frac{d\omega}{\omega} \quad \ldots \quad (22)$$

Die Gleichungen (21) und (22) entsprechen in ihrer Bedeutung den Gleichungen (13) und (14). Die Ausübung der Laplace-Transformation auf $U_2(s)$ führt also auf eine bekannte Funktion. Die durch (22) definierte Funktion $U_2(s)$ steht mit der Funktion $U_1(s)$ in einem einfachen Zusammenhang.

Wir haben oben eine zeitlich konstante Partialbewegung vorausgesetzt. Dann ist jedoch in einem mitbewegten Bezugssystem der Abwind an der Tragfläche

$$w_1(\vartheta, \sigma) = w_1\left(\frac{\pi}{2},\ \sigma + \cos\vartheta\right) \quad \ldots \quad (23)$$

Setzen wir (23) in die allgemeingültige Gl. (11) ein, so können wir die Integration über ϑ zuerst ausführen und erhalten durch Vergleich mit (19), wenn wir noch $x = -\cos\vartheta$ substituieren,

$$U_2(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} U_1(s-x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx \quad \ldots \quad (24)$$

Für $s - x < 0$ wird $U_1(s-x) = 0$. Daher kann für $s < 1$ als obere Grenze des Integrals statt $+1$ auch s gesetzt werden. Da U_1 beliebig oft differenzierbar ist, folgt aus (24) durch Potenzreihenentwicklung für $s > 1$

$$U_2(s) = U_1(s) - \frac{1}{2} U_1'(s) + \frac{1}{4} U_1''(s) - \frac{1}{16} U_1'''(s) + \frac{1}{64} U_1''''(s) - + \ldots$$

Diese Formel ist bei asymptotischer Entwicklung für große Werte von s nützlich.

Gl. (24) ist zuerst von J. E. Garrick [6] auf anderem Wege abgeleitet worden; die obenstehende einfachere Ableitung stammt von H. Söhngen.

Fassen wir das Ergebnis der Gl. (5), (11) und (19) zusammen, so wird der gesamte Drucksprung an einer beliebig bewegten Tragfläche bei gegebenen Abwindfunktionen

Digitized by Google

$$\Pi(\Theta,s)=\varrho v\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\left[(1+\cos\vartheta)\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}+\frac{2\sin\Theta}{\cos\Theta-\cos\vartheta}+\sin\vartheta\cdot ln\frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right][w_1(\vartheta,s)+w_2(s)]+\right.$$

$$\left.+(1-\cos\vartheta)\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\int_0^{s+1}\left[U_1(s-\sigma)\frac{\partial w_1(\vartheta,\sigma)}{\partial\sigma}+U_2(s-\sigma)\frac{\partial w_2(\sigma)}{\partial\sigma}\right]d\sigma\right\}d\vartheta \quad\ldots\ldots\ldots (25)$$

Diese abgekürzte Schreibweise beruht darauf, daß $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos\vartheta)\,d\vartheta=1$ und $U_1(x)=0$ für $x<0$ ist. Um unstetige Abwindänderungen zu berücksichtigen, kann man das Integral über σ als Stieltjes-Integral mit der Belegungsfunktion $w(\sigma)$ auffassen.

V. Berechnung der Kraftkomponenten.

Die Berechnung der an der bewegten Tragfläche angreifenden Kräfte und Momente erfordert die Integration der Druckverteilung über die ganze Tragfläche. Bezeichnen wir den Winkel zwischen der Tragflächentangente und der x-Achse an der Stelle Θ mit $\alpha(\Theta)$, so ist allgemein der Auftrieb in z-Richtung

$$K_z=l\int_0^{\pi}\Pi(\Theta,t)\cos\alpha(\Theta)\sin\Theta\cdot d\Theta \quad\ldots (26)$$

und der Widerstand in der x-Richtung

$$K_x'=l\int_0^{\pi}\Pi(\Theta,t)\sin\alpha(\Theta)\sin\Theta\cdot d\Theta \quad\ldots (27)$$

Da voraussetzungsgemäß α sehr klein ist, kann man hierin $\cos\alpha\sim 1$, $\sin\alpha\sim\alpha\sim\partial z/\partial x$ setzen. Der Ausdruck für den Widerstand ist allerdings noch nicht vollständig. Infolge der Umströmung der Tragflächenvorderkante entsteht eine in Richtung der Tragflächentangente wirkende Saugkraft. Die der Kuttaschen Abflußbedingung genügende resultierende Druckverteilung der Tragfläche läßt sich stets in der Form

$$\Pi(\Theta,t)=\varrho v\left[a_0\cdot\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}+\sum_1^{\infty}a_n\sin n\Theta\right] \quad\ldots (28)$$

darstellen, worin die Koeffizienten a_n Funktionen von t sind. Dann ist die Saugkraft an der Tragflächenvorderkante

$$S=\pi\varrho l\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \quad\ldots\ldots\ldots (29)$$

und der vollständige Ausdruck für den Widerstand lautet dann

$$K_x=l\int_0^{\pi}\Pi(\Theta,t)\sin\alpha(\Theta)\cdot\sin\Theta\,d\Theta-\pi\varrho l\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\cos\alpha(\Theta) \quad\ldots (30)$$

Für eine mit konstanter Geschwindigkeit v bewegte ebene Tragfläche, deren Abwind bei $s=0$ plötzlich den Wert $w_0=$ const. annimmt, ist beispielsweise

$$\left.\begin{aligned}K_x&=\pi\varrho w_0^2 l\left[1-\left(\frac{1+U_1(s)}{2}\right)^2\right]\\K_z&=\pi\varrho v w_0 l[1+U_1(s)]\end{aligned}\right\}\quad\ldots (31)$$

Im Grenzfall stationärer Strömung wird $K_x=0$, was seit Kutta bekannt ist.

VI. Berechnung der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$.

Die in Abschnitt III und IV gegebene allgemeine Lösung des zweidimensionalen Problems der Tragflächentheorie setzt die Kenntnis der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ voraus. Diese Funktionen haben recht verwickelte Eigenschaften, da ihre Laplace-Transformierten nichtlinearen Differentialgleichungen genügen. Die erste Auswertung von $U_1(s)$ ist, wie bereits oben erwähnt wurde, von H. Wagner vorgenommen worden, und seine nur für wenige Argumente berechneten Zahlenwerte sind seither meistens angenommen worden. Für $s<2$ benutzte Wagner eine Potenzreihe, welche recht genaue Ergebnisse lieferte. Für $s>2$ konnte er jedoch nur verhältnismäßig rohe Näherungslösungen finden, so daß diese Werte zweifelhaft sind. Auch die in [1] aus der Differentialgleichung der T-Funktion gewonnene asymptotische Entwicklung ergab infolge der rechnerischen Schwierigkeit, viele höhere Glieder zu berechnen, große Restglieder und daher ungenaue Resultate. Es erschien deshalb nötig, für die Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ genügend genaue Zahlenwerte neu zu berechnen und zu tabulieren, da hiervon die weitere Anwendung der allgemeinen Lösung abhängt.

a) Reihendarstellungen.

Die einfachste Methode zur Auswertung von komplexen Integralen der Form

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}F(\omega)\,e^{\omega s}\frac{d\omega}{\omega} \quad\ldots (32)$$

ist die Potenzreihenentwicklung. Wir wollen annehmen, daß sich die Funktion $F(\omega)$ im Äußeren eines genügend großen Kreises vom Radius Ω nach Potenzen von $1/\omega$ entwickeln läßt. Es sei also

$$F(\omega)=\sum_0^{\infty}C_n\omega^{-n} \quad\ldots\ldots (33)$$

Dann ist bei geeigneter Wahl des Hakenweges für $s>0$ nach dem Residuensatz

$$f(s)=\sum_0^{\infty}\frac{C_n s^n}{n!} \quad\ldots\ldots (34)$$

Für $s<0$ verschwindet $f(s)$. Da sich in unserem Falle die Funktion $F(\omega)$ aus Zylinderfunktionen aufbaut, können wir ihre Entwicklung nach Potenzen von $1/\omega$ mit Hilfe der bekannten asymptotischen Reihen der Zylinderfunktionen vornehmen, welche sich in die Form bringen lassen:

$$\left.\begin{aligned}&J_0\left(\frac{1}{4ix}\right)-iJ_1\left(\frac{1}{4ix}\right)=2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\exp\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot A(x)\\&J_0\left(\frac{1}{4ix}\right)+iJ_1\left(\frac{1}{4ix}\right)=2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\exp\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot B(x)\\&H_0^{(2)}\left(\frac{i}{4x}\right)+iH_1^{(2)}\left(\frac{i}{4x}\right)=4\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\exp\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot A(x)\\&H_0^{(2)}\left(\frac{i}{4x}\right)-iH_1^{(2)}\left(\frac{i}{4x}\right)=4\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\exp\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot B(x)\\&A(x)\sim x+\frac{3}{2}x^2+\frac{3^2\cdot5}{2\cdot4}x^3+\frac{3^2\cdot5^2\cdot7}{2\cdot4\cdot6}x^4+\frac{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^5+\ldots.\\&B(x)\sim1-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2\cdot4}x^2-\frac{3^2\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{3^2\cdot5^2\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\ldots.\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

Das Zeichen $\sim$ steht bei asymptotischen Reihen an Stelle des Gleichheitszeichens.

Wir behandeln zunächst die Funktion $F(\omega)=T(-i\omega)$. Nach Gl. (3) und (35) ist

$$T\left(\frac{1}{4ix}\right)\sim-\frac{A(-x)}{B(-x)}=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}c_n x^n \quad\ldots (36)$$

Digitized by Google

Die Reihenbeiwerte c_n erhält man durch Ausdividieren der Reihen für A und B, s. Zahlentafel 1.

Setzen wir $x = 1/4\,\omega$, so erhalten wir aus (34) und (36) für die U_1-Funktion die Potenzreihe

$$U_1(s) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{c_n}{n!} \left(\frac{s}{4}\right)^n = -\sum_1^\infty j_n \left(-\frac{s}{2}\right)^n \quad . \; . \; (37)$$

Diese Reihe konvergiert für $s \leqq 2$. Für $s > 1$ wird die Konvergenz jedoch schlecht. Man kann sie sehr verbessern durch Addition der summierbaren Reihe

$$\varphi_1(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_1^\infty (-\sigma)^n \left[\frac{2}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{6 + \frac{21}{4\sigma} + \frac{3}{2\sigma^2} - \left[6 + \frac{17}{2\sigma} + \frac{6}{\sigma^2} + \frac{3}{2\sigma^3}\right] ln\,(1+\sigma)\right\},$$

worin $\sigma = s/2$ ist. Dann wird

$$U_1(2\sigma) = -\varphi_1(\sigma) - \sum_1^\infty \gamma_n \cdot (-\sigma)^n \quad . \; . \; . \; (38)$$

Die Reihenbeiwerte j_n und γ_n sind in Zahlentafel 1 enthalten. Man kann die Reihe (38) als halbkonvergente Reihe sogar noch zur Berechnung von Werten für $\sigma > 1$ benutzen. Für $n > 20$ werden ihre Beiwerte $\gamma_n < 0$, überschreiten jedoch nicht einige Einheiten der 7. Dezimalen.

Wir wenden uns nun der Berechnung der Funktion $U_2(s)$ zu. Wenn die Funktion $U_1(s)$ bekannt ist, könnten wir uns grundsätzlich der Gl. (24) zur Berechnung der Funktion $U_2(s)$ bedienen. Nun führt jedoch das Einsetzen der Potenzreihe (37) in (24) zu ziemlich langwierigen Integralen. Aus diesem Grunde ist der direkte Weg der Auswertung des komplexen Integrals (22) vorteilhafter. Man kann jedoch die numerische Integration (24) als Rechenkontrolle anwenden.

Wir beginnen mit der Entwicklung der Funktion

$$F(-i\omega) = T(-i\omega)\,[J_0(-i\omega) - i\,J_1(-i\omega)] + J_0(-i\omega) + i\,J_1(-i\omega) \quad . \; . \; . \; . \; (39)$$

nach Potenzen von $1/\omega$. Dieser Ausdruck ergibt, in das Hakenintegral (32) eingesetzt, die Summe

$$k_2(s) = U_2(s) + \Phi(s).$$

Da $\Phi(s)$ nach Gl. (10) bekannt und leicht berechenbar ist, folgt dann sofort

$$U_2(s) = k_2(s) - \Phi(s).$$

Die Glieder $J_0 + i\,J_1$ sind deshalb zu (39) hinzugefügt, um eine besser konvergierende alternierende Reihe für $k_2(s)$ zu erhalten. Diese Funktion mißt den gesamten Drucksprung einer geradlinig bewegten Tragfläche, die in einen scharfen Strahl eintritt, hat also auch physikalische Bedeutung. Aus Gl. (35) und (39) folgt

$$\left.\begin{aligned} F\left(\frac{1}{4x}\right) &= 2\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \exp\left(\frac{1}{4x}\right) \cdot Z(x) \\ Z(x) &= -\frac{A(-x)}{B(-x)} \cdot A(x) + B(x) = \sum_0^\infty (-1)^n g_n x^n \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Setzen wir $x = 1/4\,\omega$ und führen (40) in (34) ein, so wird

$$k_2(s) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n g_n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{s+1}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}} \quad . \; . \; (41)$$

Nach Einführung der neuen Variablen $\frac{s+1}{2} = \sigma$ und Ausrechnung der Fakultät wird

$$\left.\begin{aligned} k_2(2\sigma - 1) &= \sqrt{\sigma} \cdot \sum_0^\infty h_n (-\sigma)^n \\ h_n &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{g_n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (42)$$

Die Reihenbeiwerte g_n und h_n sind in Zahlentafel 2 enthalten. Die Reihe (42) konvergiert für $\sigma \leqq 1$, und zwar überall genügend rasch. Wir haben hiermit Potenzreihen für die Funktionen $U_1(2\sigma)$ und $U_2(2\sigma - 1)$ gewonnen, welche für $\sigma \leqq 1$ die genaue und rasche Berechnung dieser Funktionen ermöglichen. Wir können nun auf zwei verschiedenen Wegen zu Reihendarstellungen dieser Funktionen gelangen, welche auch für $\sigma > 1$ konvergieren.

Der erste Weg besteht in der Summierung der für $\sigma > 1$ divergenten Potenzreihen (38) und (42). Wir haben zu diesem Zwecke die Funktionen

$$\psi(y) = \sum_1^\infty \gamma_n y^{-n}$$

nach Taylor zu entwickeln. Nach Ausführung der Differentiationen nach y und Substitution von $y = -1/\sigma$ erhalten wir dann einen Reihenausdruck der Form

$$\sum_1^\infty \gamma_n (-\sigma)^n = \sum_0^\infty G_r(\sigma_0) \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma}\right)^r, \quad . \; . \; . \; . \; (43)$$

der für endliche Werte von σ und $\sigma_0 < 1$ konvergiert.

Der zweite Weg besteht in einer neuen asymptotischen Entwicklung des Integranden der komplexen Integrale

Zahlentafel 1. Reihenbeiwerte der Funktion U_1

n	c_n	j_n	γ_n
1	1	0,500 0000	−0,037 1479
2	2	0,250 0000	+0,032 4882
3	7	0,145 8333	0,014 5305
4	38	0,098 9583	0,005 7390
5	286	0,074 4792	0,002 3858
6	2 756	0,059 8090	0,001 0733
7	32 299	0,050 0667	0,000 5202
8	444 998	0,043 1119	0,000 2687
9	7 038 898	0,037 8854	0,000 1464
10	125 620 652	0,033 8063	0,000 0833
11	2 495 811 814	0,030 5300	0,000 0491
12	54 618 201 884	0,027 8382	0,000 0298
13	$1{,}305\,184 \cdot 10^{12}$	0,025 5860	0,000 0184
14	$3{,}381\,285 \cdot 10^{13}$	0,023 6730	0,000 0115
15	$9{,}438\,788 \cdot 10^{14}$	0,022 0276	0,000 0072
16	$2{,}824\,242 \cdot 10^{16}$	0,020 5969	0,000 0045
17	$9{,}017\,094 \cdot 10^{17}$	0,019 3414	0,000 0027
18	$3{,}059\,723 \cdot 10^{19}$	0,018 2306	0,000 0016
19	$1{,}099\,567 \cdot 10^{21}$	0,017 2408	0,000 0008
20	$4{,}171\,823 \cdot 10^{22}$	0,016 3531	0,000 0003

Zahlentafel 2. Reihenbeiwerte der Funktion k_2.

n	g_n	h_n
0	1,0	1,273 2395
1	0,5	0,212 2066
2	0,625	0,053 0516
3	1,437 5	0,017 4313
4	5,523 438	0,007 4420
5	$3{,}177\,734 \cdot 10$	0,003 8923
6	$2{,}479\,697 \cdot 10^2$	0,002 3364
7	$2{,}447\,183 \cdot 10^3$	0,001 5372
8	$2{,}916\,604 \cdot 10^4$	0,001 0777
9	$4{,}068\,961 \cdot 10^5$	0,000 7913
10	$6{,}499\,037 \cdot 10^6$	0,000 6018
11	$1{,}168\,913 \cdot 10^8$	0,000 4706
12	$2{,}337\,227 \cdot 10^9$	0,000 3764
13	$5{,}142\,084 \cdot 10^{10}$	0,000 3067
14	$1{,}234\,344 \cdot 10^{12}$	0,000 2539
15	$3{,}210\,207 \cdot 10^{13}$	0,000 2130
16	$8{,}991\,531 \cdot 10^{14}$	0,000 1808
17	$2{,}698\,396 \cdot 10^{16}$	0,000 1550
18	$8{,}637\,896 \cdot 10^{17}$	0,000 1341
19	$2{,}937\,901 \cdot 10^{19}$	0,000 1170
20	$1{,}057\,999 \cdot 10^{21}$	0,000 1027

Digitized by Google

nach Potenzen von $1/\omega$ auf Grund der Tatsache, daß die T-Funktion einer Riccatischen Differentialgleichung

$$\frac{d\,T(x)}{d\,x} = 2\,i\,T(x) - \frac{1 - T^2(x)}{2\,x}$$

genügt. Man kann dann zum Schluß wieder die Formeln (33) und (34) anwenden. Dieser Weg ist vom Verfasser in [1] eingeschlagen worden und führt auf Reihen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} U_1(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{r=0}^{p(n)} a_r^{(n)}\, s^{r+n}}{(s+2)^n\,(s+4)^{n-2}\cdot(s+6)^{n-4}\ldots} \quad \text{für } s>0 \\ U_2(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{r=0}^{q(n)} b_r^{(n)}\, s^{r}}{(s+1)^n\,(s+3)^{n-1}\cdot(s+5)^{n-3}\ldots} \quad \text{für } s>1 \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Die Berechnung höherer Glieder macht in beiden Fällen Schwierigkeiten. Die Reihen (43) wurden bis zum 12. Gliede, die Reihen (44) bis zum 7. Gliede berechnet. In beiden Fällen erhält man Restglieder, welche mit s zunächst ansteigen und für die beiden Funktionen der Gl. (44) bei $s = 10$ etwa $+\,0{,}014$ und $-\,0{,}021$ betragen. Eine genaue Berechnung der beiden Funktionen ist also auf dem Wege der Entwicklung des Integranden nach Potenzen von $1/\omega$ bei großen Werten von s mit erträglichem Rechenaufwand nicht möglich. Von der Mitteilung der berechneten Reihenbeiwerte wird daher an dieser Stelle abgesehen.

b) Reelle Integraldarstellungen.

Unter Ausnutzung der Tatsache, daß $\Re\mathrm{e}\,T(\overline{\omega})$ eine gerade, $\Im\mathrm{m}\,T(\overline{\omega})$ eine ungerade Funktion von $\overline{\omega}$ ist, können wir das komplexe Integral (14) leicht in das reelle Integral

$$U_1(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\sin\overline{\omega}\,s\cdot\Re\mathrm{e}\,T(\overline{\omega}) + \cos\overline{\omega}\,s\,\Im\mathrm{m}\,T(\overline{\omega})]\,\frac{d\,\overline{\omega}}{\overline{\omega}}$$

umwandeln. Da $U_1(s) = 0$ ist für $s < 0$, folgt weiter für $s > 0$

$$U_1(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\overline{\omega}\,s\,\Re\mathrm{e}\,T(\overline{\omega})\,\frac{d\,\overline{\omega}}{\overline{\omega}}$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\overline{\omega}\,s\,\Im\mathrm{m}\,T(\overline{\omega})\,\frac{d\,\overline{\omega}}{\overline{\omega}} \quad \ldots \quad (45)$$

Auf ähnlichem Wege erhalten wir aus (32) und (39) für $s > 0$

$$k_2(s-1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\overline{\omega}\,s\,[\cos\overline{\omega}\,\Re\mathrm{e}\,F(\overline{\omega}) + \sin\omega\,\Im\mathrm{m}\,F(\overline{\omega})]\,\frac{d\,\overline{\omega}}{\overline{\omega}}$$

$$= 2 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\overline{\omega}\,s\,[\cos\overline{\omega}\,\Im\mathrm{m}\,F(\overline{\omega}) - \sin\overline{\omega}\,\Re\mathrm{e}\,F(\overline{\omega})]\,\frac{d\,\overline{\omega}}{\overline{\omega}}. \quad (46)$$

Diese Integraldarstellungen sind jedoch infolge der langsamen Konvergenz des Integranden und des häufigen Vorzeichenwechsels zur numerischen Auswertung wenig geeignet. Eine weit bessere Integraldarstellung ergibt sich nach L. Schwarz [8] durch Verlegung des ursprünglichen Integrationsweges der Hakenintegrale (14) und (22) auf den Verzweigungsschnitt der ω-Ebene, und zwar auf die reelle negative ω-Achse, um gute Konvergenz zu erzielen. Man erhält als Ergebnis die Integraldarstellungen

$$U_1(s) = 1 - 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega s}}{\pi^2\,[I_0(\omega)+I_1(\omega)]^2 + [K_0(\omega)-K_1(\omega)]^2}\cdot\frac{d\,\omega}{\omega^2}$$

$$U_2(s) = 1 - 2\int_0^{\infty} \frac{[I_0(\omega)+I_1(\omega)]\,e^{-\omega s}}{\pi^2\,[I_0(\omega)+I_1(\omega)]^2 + [K_0(\omega)-K_1(\omega)]^2}\cdot\frac{d\,\omega}{\omega^2} \quad \ldots \quad (47)$$

Darin sind I und K reelle Zylinderfunktionen auf der imaginären Achse, welche den J und N auf der reellen Achse entsprechen und vorhandenen Tafeln [9] zu entnehmen sind. ω ist hier die reelle Integrationsvariable.

Die Integranden von (47) konvergieren um so rascher, je größer s ist. Diese Integrale sind also besonders geeignet zur Berechnung der Funktionen bei großen Werten von s, liefern jedoch auch bei $s = 1$ noch brauchbare Ergebnisse.

Mittels der Integraldarstellungen (47) lassen sich auch asymptotische Reihen für $U_1(s)$ und $U_2(s)$ bei sehr großen Werten von s gewinnen, s. [8].

c) Näherungsformeln.

Bei überschläglichen Berechnungen, bei denen es auf Fehler von einigen vH nicht ankommt, kann man die von Garrick [6] vorgeschlagene, durch Probieren gefundene Näherungsformel

$$U_1(s) \sim \frac{s}{s+4} \quad \ldots \quad (48)$$

verwenden. Die Abweichungen gegenüber dem wahren Wert sind überall $< 0{,}04$. Gl. (48) liefert durchweg etwas zu kleine Werte. Setzt man (48) in (24) ein, so folgt

$$k_2(s) \sim \frac{2}{\pi}\left[3\arccos(-s) - 4\sqrt{\frac{s+5}{s+3}}\,\arcsin\sqrt{\frac{(s+1)(s+3)}{8}}\right] \quad \text{für } s^2 < 1 \quad \ldots \quad (49)$$

$$k_2(s) \sim 6 - 4\sqrt{\frac{s+5}{s+3}} \quad \text{für } s > 0 \quad \ldots \quad (50)$$

Es sei bemerkt, daß (50) zunächst für $s > 1$ gilt. Die Zahlenrechnung zeigt jedoch, daß (50) noch für $s = 0$ brauchbare Näherungswerte liefert.

R. T. Jones [7] gibt als Näherungsformel die Anfangsglieder einer Dirichletschen Reihe

$$U_1(s) \sim 1 - 0{,}33\,e^{-0{,}0455\,s} - 0{,}67\,e^{-0{,}3\,s} \quad \ldots \quad (51)$$

Die Abweichung dieser Formel vom wahren Wert ist $< 0{,}015$. Durch Hinzunahme weiterer Glieder lassen sich alle diese Näherungsformeln an Hand der Funktionentafeln 3 und 4 unschwer verbessern.

d) Funktionentafeln.

Die Zahlenwerte der beiden folgenden Funktionentafeln Tafel 3 und 4 wurden im Konvergenzbereich der Potenzreihen (38) und (42) auf 6 Stellen berechnet und auf 5 Stellen aufgerundet. Für größere Argumente s sind die Zahlenwerte obenerwähnter Arbeit [8] entnommen. Der Fehler in der 4. Dezimalen dürfte in allen Fällen weniger als eine Einheit betragen. Herrn Dr. Dingel danke ich für seine Hilfe bei der Berechnung der Reihenbeiwerte.

VII. Schrifttum.

[1] H. G. Küssner, Luftf.-Forschg. 13 (1936), S. 410—424.
[2] Th. v. Kármán u. W. R. Sears, J. Aeronaut. Sci. Bd. 5 (1938), S. 379—390.
[3] H. G. Küssner u. L. Schwarz, Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 337—354.
[4] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.
[5] H. Wagner, Z. Angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 17.
[6] I. E. Garrick, Proceedings of the V. Internat. Congr. Applied Mechanics (1938), S. 590—593.
[7] R. T. Jones, NACA Techn. Note 682 (1939).
[8] L. Schwarz, Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 362.
[9] British Ass. Mathematical Tables Vol. VI, Bessel Functions, Cambridge 1937.
[10] B. Kyewski u. F. Vandrey, Ing.-Archiv Bd. 10 (1939), S. 81.

Digitized by Google

Zahlentafel 3. Funktion $U_1 = k_1 - 1$

s	$U_1(s)$	s	$U_1(s)$
0,0	0,00000	3,0	0,4391
0,1	0,02439	3,5	0,4799
0,2	0,04764	4,0	0,5159
0,3	0,06982	4,5	0,5479
0,4	0,09103	5,0	0,5764
0,5	0,11133	5,5	0,6020
0,6	0,13078	6,0	0,6251
0,7	0,14945	6,5	0,6460
0,8	0,16738	7,0	0,6650
0,9	0,18462	7,5	0,6824
1,0	0,20121	8,0	0,6983
1,1	0,21719	8,5	0,7128
1,2	0,23260	9,0	0,7263
1,3	0,24747	9,5	0,7386
1,4	0,26182	10	0,7501
1,5	0,27569	11	0,7706
1,6	0,28910	12	0,7883
1,7	0,30207	15	0,8296
1,8	0,31463	20	0,8733
1,9	0,32679	25	0,9003
2,0	0,33858	30	0,9183
2,1	0,35001	40	0,9405
2,2	0,36109	50	0,9535
2,3	0,37185	100	0,97812
2,4	0,38230	500	0,995903
2,5	0,39245	1 000	0,997973
		∞	1,000000

Zahlentafel 4. Funktionen U_2 und k_2.

s	$U_2(s)$	$k_2(s)$	s	$U_2 = k_2 - 1$
— 1,0	0,00000	0,00000	1,0	0,1016
— 0,9	0,00005	0,28236	1,5	0,1942
— 0,8	0,00027	0,39609	2,0	0,2703
— 0,7	0,00073	0,48124	2,5	0,3344
— 0,6	0,00151	0,55132	3,0	0,3891
— 0,5	0,00263	0,61163	3,5	0,4364
— 0,4	0,00415	0,66490	4,0	0,4777
— 0,3	0,00612	0,71278	4,5	0,5140
— 0,2	0,00856	0,75635	5,0	0,5463
— 0,1	0,01153	0,79636	5,5	0,5750
0,0	0,01508	0,83339	6,0	0,6008
+ 0,1	0,01925	0,86785	6,5	0,6241
0,2	0,02410	0,90007	7,0	0,6451
0,3	0,02970	0,93033	7,5	0,6642
0,4	0,03611	0,95884	8,0	0,6817
0,5	0,04345	0,98578	8,5	0,6976
0,6	0,05183	1,01131	9,0	0,7123
0,7	0,06142	1,03555	9,5	0,7258
0,8	0,07247	1,05862	10	0,7382
0,9	0,08544	1,08062	11	0,7603
1,0	0,10162	1,10162	12	0,7795
			15	0,8235
			20	0,8698
			25	0,8980
			30	0,9167
			40	0,9397
			50	0,9530
			100	0,97800
			500	0,995898
			1 000	0,997972
			∞	1,000000

VIII. Berichtigungen zu Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1936) S. 410—424.

Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln.

Seite 412, 1. Sp., 6. Zl. v. u. statt $iv\,t/v$ lies $iv\,l/v$.

» 414, 1. Sp., 29. Zl. v. u. statt (11) lies (13).

» 415, Gl. (27) statt $v\,e^{ivt}\left(\omega z + \frac{\partial z}{\partial x}\right)$ lies $v\left(\omega z + \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

» 415, Gl. (30) statt $-\frac{1}{2\omega}\cdot T^2\,(-i\omega)$

lies $+\frac{1}{2\omega}\,T^2\,(-i\omega)$.

» 415, 2. Sp., 7. Zl. v. u. statt »Tiefe l« lies »Tiefe $2\,l$«.

» 416, Gl. (36), Zl. b_1: statt $= \frac{\pi-\varphi}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\varphi$

lies $= -\frac{\pi-\varphi}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\varphi$

» 416, Gl.(40), Zl. Q_1: statt $-\frac{3}{2}\sin\varphi$ lies $+\frac{3}{2}\sin\varphi$.

» 416, 2. Sp., 11. Zl. v. o. statt (18) lies (28).

» 417, Zahlentafel 2, Zl. Φ_2 statt 3,1281 lies 2,1281.
» Φ_5 » 0,8283 » 0,8282.
» Φ_7 » 0,0506 » 0,0505.
» Φ_8 » 0,0399 » 0,0400.
Zl. $\Phi_2\,\Phi_8$ » 0,9956 » 0,9959.

» 417, Gl. (45): statt $\pi l b$ lies πl.

» 418, 1. Sp., 20. Zl. v. o. statt ω lies $\overline{\omega}$.

» 419, Gl. (58) » $\overline{C^2}$ » $\overline{C^2}/\pi^2$.
» C' » C'/π.
» C'' » C''/π.

Seite 420, 1. Sp., 15. Zl. v. u. statt (63) lies (62).

» 421, 1. Sp., 8. Zl. v. u. statt »den Auftrieb« lies »die Zirkulation«.

» 421, 1. Sp., 5. Zl. v. u. statt »Der Auftrieb« lies »Die Zirkulation«.

» 2. Sp., 28. u. 32. Zl. v. o. statt (62) lies (63).

» 421, Gl. (72) statt $\pi\,w_0\,k_2(s)$ lies $\pi\cdot\Delta w_0\cdot k_2(s)$.

» 422, Gl. (75) statt q^n lies q_n.

» 423, Gl. (79) statt $\Gamma(s_1) = \pi l b \int_0^{s_1}$ lies $\Gamma(s_1) = \pi l \int_0^{s_1+1}$

» 423, 1. Spalte Mitte:

statt	lies
$w_0 = \Omega t = \Omega v s$	$w_0 = \Omega v t = \Omega s l$
» $\frac{dw_0}{ds} = \Omega v$	» $\frac{dw_0}{ds} = \Omega l$
» $\pi\Omega v l b \int_0^s k_1(x)\,dx$	» $\pi\Omega l^2 \int_0^s k_1(x)\,dx$
» $= \pi\Omega v l b s\, g_1(s)$	» $= \pi\Omega s l^2 g_1(s)$

» 423, 1. Sp. unten statt $\pi l b\,\zeta w_0 \int_0^s$ lies $\pi\zeta w_0 l \int_0^{s+1}$

statt $\pi l b w_0 \cdot g_2(\zeta, s)$ lies $\pi w_0 l \cdot g_2(\zeta, s)$.

» 423, Zahlentafel 4, 1. u. 2. Spalte: ζs und $G(\zeta, s)$ sind zu vertauschen.

Der Abschnitt V, 2, S. 421—422 ist durch die Abschnitte IV bis VI der vorstehenden Arbeit zu ersetzen.

Abgeschlossen Januar 1940.

Digitized by Google

Berechnung der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ für größere Werte von s.

Von L. Schwarz.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Institut für instationäre Vorgänge.

Für die in der vorhergehenden Arbeit [1] definierten Funktionen $U_1(s)$, $U_2(s)$ werden Integraldarstellungen gegeben, die zur Berechnung für nicht zu kleine s gut geeignet sind. Die mit ihrer Hilfe gewonnenen Zahlenwerte finden sich in den Zahlentafeln 3 und 4. Das Verhalten für große s wird durch asymptotische Entwicklungen beschrieben.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Eine neue Integraldarstellung für $U_1(s)$.
III. Eine neue Integraldarstellung für $U_2(s)$.
IV. Abzählung der Pole des Integranden.
V. Entwicklung von $T(\omega)$ für den Verzweigungspunkt $\omega = 0$.
VI. Asymptotische Entwicklung von $U_1(s)$.
VII. Asymptotische Entwicklung von $U_2(s)$.
VIII. Numerische Berechnung.
IX. Schrifttum.

I. Einleitung.

In der vorhergehenden Arbeit [1] hat Küssner gezeigt, daß die Druckverteilung einer beliebig bewegten Tragfläche in Flüssigkeit, welche auch Partialbewegungen haben kann, durch bestimmte Integrale gegeben ist, in deren Kernen die Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ vorkommen. Diese Funktionen sind durch die »Hakenintegrale« gegeben:

$$U_1(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\uparrow} T(-i\omega)\, e^{\omega s}\frac{d\omega}{\omega},\quad s>0 \qquad (1)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\uparrow} T(-i\omega)\cdot[J_0(-i\omega) - i J_1(-i\omega)]\, e^{\omega s}\frac{d\omega}{\omega},\quad s>-1 \qquad (2)$$

Dabei läuft der Integrationsweg längs der imaginären Achse, weicht jedoch dem Punkt $\omega = 0$ nach der Seite positiven Realteils aus.

Die Funktion $U_1(s)$ hängt mit der früher von Küssner eingeführten Funktion $k_1(s)$ durch die Gleichung

$$k_1(s) = 1 + U_1(s)$$

zusammen.

J. E. Garrick bezeichnet die Hälfte dieses Ausdrucks, also $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}U_1(s)$, mit $k_1(s)$. Ferner benutzt er die Funktion

$$k_2(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(s-1) - \frac{1}{2\pi}\sqrt{s(2-s)} + \frac{1}{2}U_2(s-1) \quad \text{für } 0<s<2,$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}U_2(s-1) \quad \text{für } s>2.$$

Über weitere Einzelheiten der Bezeichnungsweise und Zusammenhänge zwischen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ gibt der Bericht [1] Auskunft.

$T(\omega)$ ist eine aus der Theorie des schwingenden Flügels wohlbekannte Funktion,

$$T(\omega) = \frac{-iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)}{iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)} \qquad (3)$$

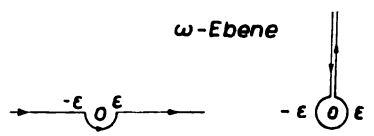


Bild 1a und 1b. Integrationsweg.

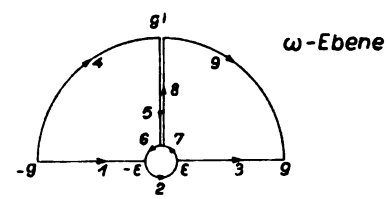


Bild 2. Zur Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes.

wo $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$ die Hankelschen Funktionen zweiter Art von der Ordnung 0 bzw. 1 bedeuten.

Die Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ sollen für reelle positive s berechnet werden. Da die bisher veröffentlichten Entwicklungen für große s schlecht konvergieren, wird hier eine Methode angegeben, die um so schneller zum Ziel führt, je größer s ist. Außerdem werden asymptotische Entwicklungen für beide Funktionen bestimmt.

II. Eine neue Integraldarstellung für $U_1(s)$.

Wenn in (1) statt ω $i\omega$ eingeführt wird, folgt

$$U_1(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rightsquigarrow} T(\omega)\, e^{i\omega s}\frac{d\omega}{\omega} \qquad (4)$$

Der Integrationsweg läuft dann von $-\infty$ bis $+\infty$ auf der reellen Achse; der Nullpunkt wird durch einen Halbkreis mit dem Radius $\varepsilon > 0$ nach der Seite negativen Imaginärteils umgangen, Bild 1a. Der Wert des Integrals hängt nicht von ε ab, wenn ε nicht zu groß gewählt wird, weil $T(\omega)$ für $\omega \to 0$ nach 0 strebt, also sicherlich in der Nähe der Null keinen Pol besitzt.

Da $T(\omega)$ mehrdeutig mit $\omega = 0$ als Verzweigungspunkt ist, werde die ω-Ebene längs der positivimaginären Halbachse aufgeschnitten, so daß $T(\omega)$ in der aufgeschnittenen Ebene eindeutig ist. Wir verlegen den Integrationsweg, Bild 1a, so daß er längs der beiden Ufer des Schlitzes verläuft, Bild 1b, da dort der e-Faktor klein wird und zur Konvergenz des Integrals beiträgt. Obwohl sich der Integrationsweg in (4) beidseitig ins Unendliche erstreckt, betrachten wir, um den Cauchyschen Integralsatz anzuwenden, zunächst dasselbe Integral, nur von $-g$ bis $+g$ genommen ($g > \varepsilon$), also über die Kurvenstücke 1, 2, 3, Bild 2. Wird mit j_i das Integral über das Kurvenstück i bezeichnet, $i = 1, \ldots 9$, so ist

$$j_1 = j_4 + j_5 + j_6, \qquad j_3 = j_7 + j_8 + j_9,$$

wenn die beiden Kreisringquadranten keine Pole des Integranden einschließen. Daß dies zutrifft, wird später bewiesen.

Digitized by Google

Unterstellen wir es schon hier als richtig, so ist

$$j_1 + j_2 + j_3 = (j_4 + j_9) + (j_6 + j_2 + j_7) + (j_5 + j_8).$$

Macht man den Grenzübergang $g \to \infty$, so strebt die linke Seite nach $\int_{-\infty}^{\infty} = 2\pi i\, U_1(s)$. Auf der rechten Seite streben j_4 und j_9 nach 0. Dazu müssen wir auf das Verhalten von $T(\omega)$ für große ω eingehen bei $-\frac{3\pi}{2} < \arc \omega < -\pi$, $0 < \arc \omega < \frac{\pi}{2}$. Wir ziehen den Anfang der Hankelschen asymptotischen Reihen für $H_0^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ heran, die sogar für den Sektor $-2\pi < \arc \omega < \pi$ gelten, also gleichmäßig für die beiden kleineren, hier in Betracht kommenden Sektoren.

$$H_0^{(2)}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\, e^{-i\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^{1})$$

$$H_1^{(2)}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\, e^{-i\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot i\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

$$T(\omega) = \frac{-\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right] + \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]}{\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right] + \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]}$$

$$= \frac{O\left(\frac{1}{\omega}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)} = O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

d. h. $T(\omega) \leq \text{const}\, \frac{1}{|\omega|}$ für alle ω mit $|\omega| > g_0$.

Damit und wegen

$$|e^{i\omega s}| = e^{s \cdot \Re(i\omega)} \leq 1$$

wird

$$|j_4| = \left|\int_{(4)} T(\omega)\, e^{i\omega s}\, \frac{d\omega}{\omega}\right| \leq \frac{\pi}{2}\, \frac{\text{const}}{g}$$

für hinreichend großes g, also $j_4 \to 0$, ebenso $j_9 \to 0$ für $g \to \infty$. Somit wird

$$2\pi i\, U_1(s) = \int_{\bigcirc} T(\omega)\, e^{i\omega s}\, \frac{d\omega}{\omega} \quad \ldots\ldots (6)$$

wobei über den Integrationsweg, Bild 1b, integriert wird, der aus den beiden Schlitzufern und dem Kreis K_ε um den Nullpunkt mit dem Radius ε besteht. Nun gehen wir mit ε nach 0. Die linke Seite von (6) ist von ε unabhängig. Auf der rechten Seite läßt sich der Limes des Integralteils über den Kreis K_ε bestimmen, wenn das Verhalten von $T(\omega)$ für $\omega \to 0$ bekannt ist. Es gilt nämlich für $\omega \to 0$

$$H_0^{(2)}(\omega) = O(\log \omega)$$

$$H_1^{(2)}(\omega) = +\frac{2i}{\pi\omega} + O(\log \omega),$$

also

$$T(\omega) = \frac{\frac{2i}{\pi\omega} + O(\log\omega)}{\frac{2i}{\pi\omega} + O(\log\omega)} = \frac{1 + O(\omega \log \omega)}{1 + O(\omega \log \omega)} = 1 + O(\omega \log \omega).$$

Auf K_ε ist

$$|e^{i\omega s}| = e^{s\,\Re(i\omega)} \leq e^{s\varepsilon}.$$

Dann folgt

$$\left|\int_{K_\varepsilon} [T(\omega) - 1]\, e^{\omega s}\, \frac{d\omega}{\omega}\right| \leq e^{s\varepsilon} \cdot 2\pi \cdot O(\varepsilon \cdot \log \varepsilon) \to 0,$$

also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varepsilon} T(\omega)\, e^{\omega s}\, \frac{d\omega}{\omega} = \oint e^{\omega s}\, \frac{d\omega}{\omega} = 2\pi i$$

[1]) Das Landau-Bachmannsche Symbol $O\left(\frac{1}{\omega}\right)$ bedeutet, unexakt ausgedrückt: von gleicher Größenordnung wie $\frac{1}{\omega}$. Näheres s. [4], S. 41.

und nach (6)

$$2\pi i\,[U_1(s) - 1] = \int_{\infty i}^{0 \cdot i} + \int_{0 \cdot i}^{\infty i} T(\omega)\, e^{i\omega s}\, \frac{d\omega}{\omega},$$

wobei das erste Integral über das linke, das zweite über das rechte Ufer der geschlitzten Ebene zu erstrecken ist. Führen wir statt ω eine neue Integrationsvariable $\omega \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ ein, so wird

$$1 - U_1(s) = 2\int_0^\infty U(\omega)\, e^{-\omega s}\, d\omega \quad \ldots\ldots (7)$$

wobei

$$U(\omega) = \frac{1}{4\pi i}\left[T\left(\omega e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right) - T\left(\omega e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right] \cdot \frac{1}{\omega} \quad \ldots (8)$$

gesetzt ist.

Nach den Umlaufrelationen für Hankelsche Funktionen [4], S. 34, ist

$$H_0^{(2)}(\omega \cdot e^{-2\pi i}) = -2H_0^{(1)}(\omega) - H_0^{(2)}(\omega)$$

$$H_1^{(2)}(\omega \cdot e^{-2\pi i}) = -2H_1^{(1)}(\omega) - H_1^{(2)}(\omega),$$

also

$$T(\omega e^{-2\pi i}) = \frac{2 \cdot [-iH_0^{(1)}(\omega) + H_1^{(1)}(\omega)] + [-iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)]}{2 \cdot [+iH_0^{(1)}(\omega) + H_1^{(1)}(\omega)] + [+iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)]}; \quad (9)$$

nach (3) und (9) sind $T(\omega)$ und $T(\omega e^{-2\pi i})$ von der Form

$$T(\omega) = \frac{B}{D},\ T(\omega e^{-2\pi i}) = \frac{2A + B}{2C + D}$$

und

$$-T(\omega) + T(\omega e^{-2\pi i}) = 2\,\frac{AD - BC}{(2C + D) \cdot D}.$$

Dabei ist die Determinante im Zähler — das Argument ω ist weggelassen —

$$\begin{vmatrix} -iH_0^{(1)} + H_1^{(1)}, & -iH_0^{(2)} + H_1^{(2)} \\ iH_0^{(1)} + H_1^{(1)}, & iH_0^{(2)} + H_1^{(2)} \end{vmatrix} = +2i \begin{vmatrix} H_1^{(1)} & H_1^{(2)} \\ H_0^{(1)} & H_0^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{8}{\pi\omega},$$

s. [4], S. 76, Formel (9). Man erhält dann

$$T(\omega e^{-2\pi i}) - T(\omega) = \frac{16}{\pi\omega} \cdot \frac{1}{iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)} \times \frac{1}{2[iH_0^{(1)}(\omega) + H_1^{(1)}(\omega)] + [iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)]}$$

oder, falls ω durch $e^{i\frac{\pi}{2}}\omega$ ersetzt wird,

$$U(\omega) = -\frac{4}{\pi^2\omega^2} \cdot \frac{1}{iH_0^{(2)}(\omega i) + H_1^{(2)}(\omega i)} \times \frac{1}{2[iH_0^{(1)}(\omega i) + H_1^{(1)}(\omega i)] + [iH_0^{(2)}(\omega i) + H_1^{(2)}(\omega i)]} \quad (10)$$

Führen wir die für reelles ω reellen Funktionen I_0, I_1, K_0, K_1 ein:

$$\left.\begin{aligned} I_0(\omega) &= J_0(i\omega) & K_0(\omega) &= \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}\left(\omega e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \\ I_1(\omega) &= -iJ_1(i\omega) & K_1(\omega) &= -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}\left(\omega e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

wobei J_0 und J_1 Besselsche Funktionen bedeuten, so wird

$$U(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{[K_0(\omega) - K_1(\omega)]^2 + \pi^2[I_0(\omega) + I_1(\omega)]^2} \quad (12)$$

Diese Funktionen K_0, K_1, I_0, I_1 sind tabuliert, s. z. B. [3], so daß sich $U(\omega)$ unschwer berechnen läßt. Den Verlauf von $U(\omega)$ zeigt Bild 3.

III. Eine neue Integraldarstellung für $U_2(s)$.

Analoge Überlegungen werden für $U_2(s)$ durchgeführt. Es ist

Digitized by Google

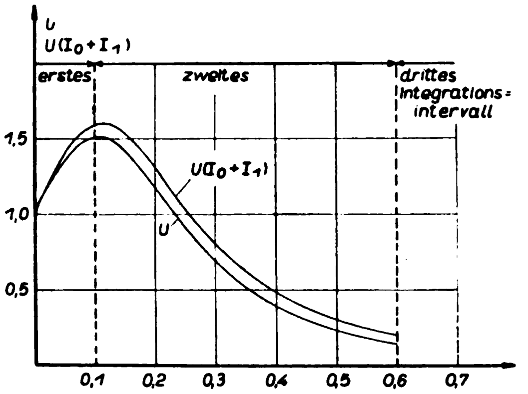


Bild 3. Funktionen $U(\omega)$ und $U(\omega)\,[I_0(\omega) + I_1(\omega)]$, die in den Integraldarstellungen von $U_1(s)$ und $U_2(s)$ auftreten.

$$U_2(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\uparrow} T(-i\omega)\,[J_0(-i\omega) - i\,J_1(-i\omega)]\,e^{\omega s}\,\frac{d\omega}{\omega}.$$

Ersetzt man ω durch ωi, so wird

$$U_2(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rightarrow} T(\omega)\,[J_0(\omega) - i\,J_1(\omega)]\,e^{i\omega s}\,\frac{d\omega}{\omega} \quad . \; . \; (13)$$

Dies Integral wird ebenso behandelt wie das entsprechende Integral (4) für $U_1(s)$. Bei Benutzung von

$$|J_0(\omega)\,e^{i\omega}| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{|\omega|}} \text{ für } \Re(i\omega) \leq 0,$$

folgt für die Teilintegrale j, Bild 2: $j_4 \to 0$, $j_9 \to 0$ für $g \to \infty$

Somit wird

$$2\pi i\,U_2(s) = \int_{\bigcirc} T(\omega)\,[J_0(\omega) - i\,J_1(\omega)]\,e^{i\omega s}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Nun ist, wie oben $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\int\limits_{K_\varepsilon} = 2\pi i$, also $2\pi i\,(U_2(s) - 1) = \int\limits_{\infty i}^{o i} + \int\limits_{o i}^{\infty i}$, wobei das erste Integral über das linke, das zweite über das rechte Schlitzufer zu erstrecken ist. Führen wir $\omega e^{i\frac{\pi}{2}}$ statt ω ein, so ergibt sich

$$1 - U_2(s) = 2\int\limits_0^\infty U(\omega)\,[I_0(\omega) + I_1(\omega)]\,e^{-\omega s}\,d\omega \quad . \; (14)$$

Den Verlauf von $U(\omega)\,[I_0(\omega) + I_1(\omega)]$ zeigt Bild 3.

IV. Abzählung der Pole des Integranden.

Diese Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes erfordert noch den Nachweis, daß der Nenner

$$\mathfrak{N}(\omega) = i\,H_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)$$

in den Winkelbereichen $-\frac{3\pi}{2} < \text{arc}\,\omega < -\pi, 0 < \text{arc} < \frac{\pi}{2}$ keine Nullstellen besitzt. Wir zeigen dies sogar für

$$-\frac{3\pi}{2} < \text{arc}\,\omega < \frac{\pi}{2},$$

also für die ganze aufgeschlitzte Ebene.

Da $\mathfrak{N}(\omega)$ keine Pole besitzt, ist die Anzahl $A(\mathfrak{C})$ der Nullstellen im Innern von $\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ die Randkurve des Bereichs $\varepsilon < |\omega| < g$ der aufgeschlitzten Ebene bedeutet:

$$A(\mathfrak{C}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\mathfrak{N}'(\omega)}{\mathfrak{N}(\omega)}\,d\omega.$$

Nun sieht man leicht, daß

$$\frac{\mathfrak{N}'(\omega)}{\mathfrak{N}(\omega)} = -i - \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1 + T(\omega)}{2}$$

ist, folglich

$$A(\mathfrak{C}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}}\left[i + \frac{1 + T(\omega)}{2}\cdot\frac{1}{\omega}\right]d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} T(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Die Anzahl A der Nullstellen in der aufgeschlitzten Ebene erhält man durch den Grenzübergang $g \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Das Integral über den Kreis K_g ergibt sich wegen (5) zu $O\left(\frac{1}{g}\right)$, im Limes $= 0$. Damit wird

$$-4\pi i\,A = \int_{\bigcirc} T(\omega)\,\frac{d\omega}{\omega},$$

d. i. die rechte Seite von (6) für $s = 0$. Die an (6) anschließenden Umformungen ergeben

$$-4\pi i\,A = 2\pi i - 4\pi i\int\limits_0^\infty U(\omega)\,d\omega$$

oder

$$A = -\frac{1}{2} + \int\limits_0^\infty U(\omega)\,d\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Da A als Anzahl eine ganze Zahl ist, genügt es für den Nachweis von

$$A = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

zu zeigen, daß $-1 < A < 1$ ist, was sich durch numerische Integration leicht ergibt. Damit sind auch die Formeln für $U_1(s)$ und $U_2(s)$ gerechtfertigt. Außerdem notieren wir noch als Folge von (7) und (15), (16)

$$1 - U_1(0) = 2\left(A + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

also

$$U_1(0) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

V. Die Entwicklung von $T(\omega)$ in der Umgebung von $\omega = 0$.

Die Berechnung von $U_1(s)$ für große positive s nach (7) zeigt, daß wegen des Faktors $e^{-\omega s}$, der mit wachsendem ω stark abfällt, nur eine sehr kleine Umgebung von $\omega = 0$ für den Integralwert einen Beitrag liefert. Zur Gewinnung einer asymptotischen Entwicklung von $U_1(s)$ für große s wird es deshalb notwendig sein, das Verhalten von $T(\omega)$ bzw. $U(\omega)$ in der nächsten Umgebung von $\omega = 0$ zu studieren. Wir zeigen zunächst, daß $T(\omega)$ eine Entwicklung der Form

$$T(\omega) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(i\omega)^n t_n(\ln\omega),\ [t_n(z) = \text{Polynom in } z \text{ von Grad } n] \quad . \; . \; . \; (18)$$

gestattet, und werden danach durch Heranziehung der Differentialgleichung für $T(\omega)$ näheren Aufschluß über die Polynome t_n gewinnen.

Setzt man die Entwicklungen der Hankelschen Funktionen

$$H_0^{(2)}(\omega) = \mathfrak{P}_1(\omega) + \ln\omega\cdot\mathfrak{P}_2(\omega)$$
$$H_1^{(2)}(\omega) = \frac{2i}{\pi\omega} + \mathfrak{P}_3(\omega) + \ln\omega\cdot\mathfrak{P}_4(\omega),$$

wo $\mathfrak{P}_1(\omega), \ldots, \mathfrak{P}_4(\omega)$ Potenzreihen sind, in die Definitionsgleichung (3) von $T(\omega)$ ein, so erhält man eine Darstellung der Gestalt

$$T(\omega) = \frac{A(\omega) + \omega\ln\omega\,B(\omega)}{C(\omega) + \omega\ln\omega\,D(\omega)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

wobei A, B, C, D konvergente Potenzreihen sind, mit $A(0) = C(0) = 1$.

Setzen wir

$$\omega = x, \quad \omega\ln\omega = y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

so ergibt sich die Funktion zweier Veränderlicher x, y

$$T(x, y) = \frac{A(x) + y\,B(x)}{C(x) + y\,D(x)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

wo Zähler und Nenner Potenzreihen von x, y sind, die in einer Umgebung des Nullpunktes $x = 0$, $y = 0$ konvergieren. Der Nenner ist für $x = 0$, $y = 0$ gleich 1. Somit

Digitized by Google

ergibt sich durch formale Potenzreihendivision ebenfalls eine in einer passenden Umgebung des Nullpunktes $|x| < a$, $|y| < b$ konvergente Potenzreihe, die nach Potenzen von y angeordnet

$$T(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} y^\nu \mathfrak{Q}_\nu(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

lauten möge. Sie darf als konvergente Potenzreihe formal quadriert, sowie formal nach x und y differenziert werden.

Unter einer »Umgebung des Verzweigungspunktes $\omega = 0$« verstehen wir im folgenden alle ω mit $|\omega| < p(\arc \omega)$, wo $p(r)$ eine positive Funktion der reellen Variablen r bedeutet.

Wir behaupten nun, daß

$$T(\omega) = T(\omega, \omega \ln \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\ln \omega)^\nu \omega^\nu \mathfrak{Q}_\nu(\omega) \quad \ldots \quad (23)$$

in einer Umgebung des Verzweigungspunktes konvergiert. Dazu genügt es nachzuweisen, daß für jedes beliebige $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$ existiert, so daß für

$$|\omega| < \alpha, \quad |\arc \omega| < \beta$$

die zugehörigen $|x| < a$, $|y| < b$ sind. In der Tat ist

$$|y| = |\omega \ln \omega| = |\omega| \cdot (|\ln|\omega|| + |\arc \omega|)$$
$$< |\omega| |\ln|\omega|| + \beta|\omega| \to 0 \text{ für } |\omega| \to 0,$$

also $< b$, für $|\omega| < \alpha$, wo α außerdem $< a$ gewählt wurde, so daß auch $|x| < a$ ist. Ordnet man, was wegen der absoluten Konvergenz erlaubt ist, (23) nach Potenzen von ω um, so wird

$$T(\omega) = 2 \sum (i\omega)^n \cdot t_n(\ln \omega) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Dabei ist $t_n(z)$ ein Polynom $n$ten Grades von z, da nur Terme $(\ln \omega)^\nu \omega^{\nu+\mu}$ $(\mu \geqq 0)$ vorkommen; $2 i^n$ ist jeweils abgespalten, um den höchsten Koeffizienten der Polynome zu 1 zu machen.

Ihre Bestimmung erfolgt mit Hilfe der bekannten Differentialgleichung der T-Funktion, die vom Riccatischen Typ ist, vgl. [1]:

$$T'(\omega) = -\frac{1}{2\omega} + 2i\,T(\omega) + \frac{1}{2\omega} T^2(\omega) \quad \ldots \quad (25)$$

Die Reihen für T' und T^2 erhält man aus (24) durch formales Differenzieren bzw. Quadrieren; wenn man beachtet, daß t_0 eine Konstante ist, ist

$$T'(\omega) = 2i \sum_{0}^{\infty} (i\omega)^{n-1} [n\, t_n(\ln \omega) + t_n'(\ln \omega)] \quad \ldots \quad (26)$$

$$T^2(\omega) = 4 \sum_{0}^{\infty} (i\omega)^n T_n(\ln \omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

mit

$$T_n(z) = t_0(z)\, t_n(z) + t_1(z)\, t_{n-1}(z) + \ldots + t_n(z)\, t_0(z);$$
$$n = 0, 1, 2 \ldots \quad \ldots \quad (28)$$

Daß die beiden Reihen (26) und (27) in demselben Bereich wie (23) absolut konvergieren, wenn man sie als Doppelreihen nach $\omega^n (\ln \omega)^m$ auffaßt, ergibt sich durch eine an (22) anschließende Begründung. Mit der Reihe (22) für $T(x, y)$ sind in demselben Bereich auch die partiellen Ableitungen $T_x(x, y)$ und $T_y(x, y)$ absolut konvergent, folglich auch

$$T'(\omega) = T_x(\omega, \omega \ln \omega) + T_y(\omega, \omega \ln \omega) \cdot [\ln \omega + 1],$$

woraus sich nach der jetzt erlaubten Umordnung (26) ergibt. Analog verfährt man bei T^2.

Diese Reihen setzen wir in die Differentialgleichung ein:

$$i \sum_{n=1}^{\infty} (i\omega)^{n-1} \cdot [n\, t_n(\ln \omega) + t_n'(\ln \omega)$$
$$- 2\, t_{n-1}(\ln \omega) - T_n(\ln \omega) = \frac{1}{\omega}\left(T_0 - \frac{1}{4}\right).$$

Es folgt

$$T_0 = t_0^2 = \frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

und

$$n\, t_n(z) + t_n'(z) = 2\, t_{n-1}(z) + T_n(z) \quad \text{für } n \geqq 1 \quad (30)$$

Entscheidet man sich gemäß (29) für eines der möglichen Vorzeichen von t_0, in unserem Fall das positive,

$$t_0 = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

wofür später die Begründung folgt, so wird

$$t_n'(z) + (n-1)\, t_n(z) = 2\, t_{n-1}(z) + [t_1(z)\, t_{n-1}(z) + \ldots$$
$$+ t_{n-1}(z)\, t_1(z)]; \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

für $n = 1$ also $t_1'(z) = 1$,

$$t_1(z) = z + c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Über die Konstante c verfügen wir später passend.

Sind t_0 und t_1 festgelegt, so sind die folgenden Polynome durch die Rekursionsformel (32) eindeutig bestimmt. Es seien nämlich für $n > 1$ $t_1(z), \ldots t_{n-1}(z)$ bereits berechnet, dann stellt (32) eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $t_n(z)$ dar. Die zugehörige homogene Differentialgleichung $t_n' + (n-1)\, t_n = 0$ besitzt für $n > 1$ die transzendente Lösung $e^{-(n-1)z}$, somit ist $t_n(z)$ als Polynomlösung der inhomogenen Differentialgleichung eindeutig bestimmt.

Bezeichnen wir die spezielle Lösung $t_n(z)$, für die $c = t_1(0) = 0$ ist, mit $f_n(z)$, so wird

$$\left.\begin{aligned} f_0(z) &= \frac{1}{2} \\ f_1(z) &= z \\ f_2(z) &= z^2 \\ f_3(z) &= z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{4} \\ f_4(z) &= z^4 - z^3 + z^2 - \frac{1}{2} z \\ f_5(z) &= z^5 - \frac{3}{2} z^4 + \frac{7}{4} z^3 - \frac{19}{16} z^2 + \frac{11}{32} z - \frac{11}{128} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Da mit $f_n(z)$ auch $f_n(z + c)$ Lösung der Rekursionsformel ist, ist die allgemeinste Lösung mit $t_0 = +\frac{1}{2}$

$$t_n(z) = f_n(z + c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Das Vorzeichen von t_0 und die Konstante $t_1(0)$ lassen sich nicht aus der Differentialgleichung bestimmen; dazu muß der Anfang der Entwicklung von $T(\omega)$ nach der früher angegebenen Methode direkt bestimmt werden.

Bricht man in den Reihen für Zähler und Nenner der T-Funktion vor den mit ω behafteten Gliedern ab, so wird, wenn

$$\frac{\pi i}{2} + \ln \frac{\gamma}{2} = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

gesetzt wird:

$$T(\omega) = \frac{-i\left[1 - i\frac{2}{\pi} \ln \frac{\omega\gamma}{2} + \ldots\right] + \left[i\frac{2}{\pi\omega} + \ldots\right]}{i\left[1 - i\frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma\omega}{2} + \ldots\right] + \left[i\frac{2}{\pi\omega} + \ldots\right]}$$
$$= \frac{[1 + ic\omega + \ldots] + i\omega \ln \omega\,[1 + \ldots]}{[1 - ic\omega + \ldots] + i\omega \ln \omega\,[-1 + \ldots]}$$
$$= \{[1 + 2ic\omega + \ldots] + i\omega \ln \omega\,[1 + \ldots]\}$$
$$\times \frac{1}{1 + i\omega \ln \omega \cdot [-1 + \ldots]}$$
$$= \{[1 + 2ic\omega + \ldots] + i\omega \ln \omega\,[1 + \ldots]\}$$
$$\times \{1 + i\omega \ln \omega\,[1 + \ldots] + \ldots\}$$
$$= [1 + 2ic\omega + \ldots] + i\omega \ln \omega \cdot [2 + \ldots] + \ldots$$
$$= 1 + 2i\omega \cdot (c + \ln \omega) + \ldots,$$

somit

$$t_0 = +\frac{1}{2} > 0$$

$$t_1 = z + c = f_1(z + c).$$

Damit ist (35) bewiesen mit der Konstanten c nach (36). Für $T(\omega)$ ergibt sich also die in einer Umgebung von $\omega = 0$ konvergente Entwicklung

Digitized by Google

$$T(\omega) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^n f_n\left(\ln\left(\frac{\gamma\omega}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right) \quad \ldots \quad (37)$$

wobei $f_n(z)$ die Polynome (34) bedeuten.

Hieraus erhalten wir nach (8)

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\omega)^{n-1} \cdot \frac{f_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2} + \pi i\right) - f_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2} - \pi i\right)}{2\pi i},$$

also

$$U(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega)^n \cdot g_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2}\right) \quad \ldots \quad (38)$$

wo

$$g_n(z) = \frac{f_{n+1}(z+\pi i) - f_{n+1}(z-\pi i)}{2\pi i} \quad \ldots \quad (39)$$

offenbar ein Polynom in z vom Grad $\leqq n$ ist. (38) gilt in einer vollen Umgebung des Verzweigungspunktes $\omega = 0$.

VI. Die asymptotische Entwicklung von $U_1(s)$.

Wir erinnern an die Integralformel für die Γ-Funktion und ihre Ableitungen:

$$\Gamma^{(\nu)}(z) = \int_0^{\infty} (\ln\omega)^{\nu} e^{-\omega} \omega^{z-1} d\omega \text{ für } \Re z > 0;\ \nu > 0 \quad (40)$$

Für ein Polynom $P(l) = \Sigma p_\nu l^\nu$ ist also

$$\int_0^{\infty} P(\ln\omega) e^{-\omega} \omega^n d\omega = \sum_\nu p_\nu \int_0^{\infty} (\ln\omega)^\nu e^{-\omega} \omega^n d\omega$$
$$= \sum_\nu p_\nu \Gamma^{(\nu)}(n+1) = \left\{P(D)\cdot\Gamma\right\}(n+1) \quad \ldots \quad (41)$$

in symbolischer Schreibweise. D bedeutet dabei das Differentiationszeichen.

Nach (38) ist

$$U(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \omega^n g_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2}\right) + R_N(\omega), \quad (38')$$

wegen (7)

$$1 - U_1(s) = 2\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \int_0^{\infty} \omega^n g_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2}\right) e^{-\omega s} d\omega$$
$$+ 2\int_0^{\infty} R_N(\omega) e^{-\omega s} d\omega.$$

Benutzt man

$$g_n(z+l) = \sum_{\mu=0}^{n} g_n^{(\mu)}(l) \frac{z^\mu}{\mu!}$$

mit

$$l = \ln\omega,\ z = \ln\frac{\gamma}{2s},$$

so wird

$$\int_0^{\infty} \omega^n g_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2}\right) e^{-\omega s} d\omega = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} g_n\left(\ln\frac{\gamma\omega}{2s}\right) \omega^n e^{-\omega} d\omega =$$
$$= \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{\mu=0}^{n} \left(\ln\frac{\gamma}{2s}\right)^\mu \frac{1}{\mu!} \int_0^{\infty} g_n^{(\mu)}(\ln\omega)\cdot\omega^n e^{-\omega} d\omega$$
$$= \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{1}{\mu!} \left(\ln\frac{\gamma}{2s}\right)^\mu \cdot \left[g_n^{(\mu)}(D)\cdot\Gamma\right](n+1);$$

Damit ist das vorläufige Endergebnis:

$$\left.\begin{aligned} U_1(s) &= 1 + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n+1}} K_n\left(\ln\frac{\gamma}{2s}\right) + \text{Restglied} \\ \text{wobei} \\ K_n(z) &= \sum_{\mu=0}^{n} \frac{z^\mu}{\mu!} K_n^{(\mu)}, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

$$K_n^{(\mu)} = \left[g_n^{(\mu)}(D)\cdot\Gamma\right](n+1) \quad \ldots \quad (42')$$

Nun ist

$$f_{n+1}(z+h) = \sum_{r=0}^{n+1} \frac{z^r}{r!} f_{n+1}^{(r)}(h),$$

also

$$g_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \frac{z^r}{r!} \varphi_{nr}$$

mit

$$\varphi_{nr} = \frac{f_{n+1}^{(r)}(\pi i) - f_{n+1}^{(r)}(-\pi i)}{2\pi i} \quad \ldots \quad (43)$$

Dann ergibt sich

$$g_n^{(\mu)}(z) = \sum_{r=\mu}^{n} \frac{z^{r-\mu}}{(r-\mu)!} \varphi_{nr} = \sum_{r=0}^{n-\mu} \frac{z^r}{r!} \varphi_{n,r+\mu} \quad (44)$$

und folglich

$$K_n^{(\mu)} = \sum_{r=0}^{n-\mu} \frac{1}{r!} \varphi_{n,r+\mu} \cdot \Gamma^{(r)}(n+1) \quad \ldots \quad (45)$$

Nunmehr kommen wir zur Abschätzung des Restgliedes; allerdings werden wir nur die Größenordnung des Fehlers, nicht eine exakte Schranke angeben. Da mit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$

$$R_n(\omega) = O(\omega^{n+\varepsilon}) \text{ für } \omega \to \infty$$
$$= O(\omega^{n-\varepsilon}) \text{ für } \omega \to 0$$

ist, ergibt sich für $s > 1$

$$\left|\int_1^{\infty} R_N(\omega) e^{-\omega s} d\omega\right| < \text{const} \int_0^{\infty} \omega^{N+1} e^{-\omega s} d\omega = \text{const}\,\frac{1}{s^{N+2}},$$

$$\left|\int_0^{1} R_N(\omega) e^{-\omega s} d\omega\right| < \text{const} \int_0^{\infty} \omega^{N-\varepsilon} e^{-\omega s} d\omega = \text{const}\,\frac{1}{s^{N+1-\varepsilon}},$$

$$\left|\int_0^{\infty} R_N(\omega) e^{-\omega s} d\omega\right| < \text{const}\,\frac{1}{s^{N+1-\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{s^{N+1-\varepsilon}}\right).$$

Diese Fehlerabschätzung kann leicht verbessert werden, wenn man sie für $N+1$ statt N anwendet. Es ist nach (42)

$$U_1(s) = 1 + 2\sum_{0}^{N-1} \ldots + 2\frac{(-1)^{N+1}}{s^{N+1}} K_N\left(\ln\frac{\gamma}{2s}\right) + O\left(\frac{1}{s^{N+2-\varepsilon}}\right)$$
$$= 1 + 2\sum_{0}^{N-1} \ldots + O\left(\frac{(\ln s)^N}{s^{N+1}}\right),$$

somit ist das

$$\text{Restglied von (42)} = O\left(\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\ln s}{s}\right)^N\right) \quad \ldots \quad (46)$$

Durch (42), (45), (46) ist das Verhalten von $U_1(s)$ für große s völlig beschrieben. Die Zahlenwerte der Koeffizienten $\frac{1}{\mu!} K_n^{(\mu)}$ sind in Zahlentafel 1 angegeben.

Für die Benutzung der asymptotischen Formel zur numerischen Rechnung vgl. Abschnitt VIII.

VII. Die asymptotische Entwicklung von $U_2(s)$.

Aus (11) und der bekannten Potenzreihenentwicklung der Besselschen Funktionen erhält man

$$I_0(\omega) + I_1(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \omega^m, \quad \ldots \quad (47)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \\ a_{2n+1} &= a_{2n}\cdot\frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (47')$$

ist. Hieraus und wegen (38) ergibt sich

Digitized by Google

Zahlentafel 1. Beiwerte $\frac{1}{\mu!} K_n^{(\mu)}$ der asymptotischen Entwicklung von $U_1(s)$.

0	1	2	3	4	n / μ
1	0,84556 87	− 13,10598 7	− 188,44123	− 1262,5359	0
	2	9,07341 2	− 136,05161	− 4370,3981	1
		6	72,44047	− 1100,7543	2
			24	578,9365	3
				120	4

Zahlentafel 2. Beiwerte $\frac{1}{\mu!}\left[K_n^{(\mu)} - L_n^{(\mu)}\right]$ der asymptotischen Entwicklung von $U_1(s) - U_2(s)$.

0	1	2	3	4	n / μ
0	0,50000 000	1,34556 87	− 18,51562 8	− 420,32542	0
	0	2,00000 00	16,61011 8	− 244,88299	1
		0	9,00000 0	162,88094	2
			0	48,00000	3
				0	4

$$U[I_0 + I_1] = \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega)^n h_n\left(\ln \frac{\gamma\omega}{2}\right) \quad \ldots \quad (48)$$

mit

$$h_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu g_{n-\nu}(z) \quad \ldots \quad (49)$$

Ebenso, wie aus (38) die asymptotische Entwicklung (42) folgt, schließt man aus (48)

$$\left.\begin{aligned} U_2(s) &\sim 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n+1}} L_n\left(\ln \frac{\gamma}{2s}\right) \\ \text{mit} \quad L_n(z) &= \sum_{\mu=0}^{n} \frac{z^\mu}{\mu!} L_n^{(\mu)}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (50)$$

$$L_n^{(\mu)} = \left[h_n^{(\mu)}(D)\cdot\Gamma\right](n+1) \quad \ldots \quad (50')$$

Aus (49) und dem Wert von $g_n(z)$ ergibt sich

$$h_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \frac{z^r}{r!} \psi_{nr}$$

mit

$$\psi_{nr} = \sum_{\nu=0}^{n-r} \varphi_{n-\nu,r} (-1)^\nu a_\nu \quad \ldots \quad (51)$$

Nunmehr verläuft die Berechnung der $L_n^{(\mu)}$ und der $K_n^{(\mu)}$ völlig parallel, wenn φ_{nr} durch ψ_{nr} ersetzt wird.

Entsprechend (45) haben wir dann

$$L_n^{(\mu)} = \sum_{r=0}^{n-\mu} \frac{1}{r!} \psi_{n,r+\mu} \Gamma^{(r)}(n+1) \quad \ldots \quad (52)$$

Wird die asymptotische Reihe mit $\frac{1}{s^N}$ als letztem Glied abgebrochen, so ist das

$$\text{Restglied von (50)} = O\left(\frac{1}{s}\left(\frac{\ln s}{s}\right)^N\right) \quad \ldots \quad (53)$$

Durch (50), (52), (53) ist die Funktion $U_2(s)$ in ihrem asymptotischen Verhalten beschrieben. Die Zahlwerte der Koeffizienten $\frac{1}{\mu!} L_n^{(\mu)}$ ergeben sich aus Zahlentafel 2 nach Kenntnis der Koeffizienten $\frac{1}{\mu!} K_n^{(\mu)}$ (Zahlentafel 1). Die darin angegebenen Differenzen $\frac{1}{\mu!}\left[K_n^{(\mu)} - L_n^{(\mu)}\right]$ sind nämlich kleinere Zahlen als die $\frac{1}{\mu!} L_n^{(\mu)}$, so daß nach Kenntnis von $U_1(s)$ die Berechnung von $U_1(s) - U_2(s)$ bequemer ist als jene von $U_2(s)$.

Während der Drucklegung dieser Arbeit erschien eine Abhandlung von Sears, Airfoils in non-uniform motion, Journ. Franklin Inst. Bd. 230 (1940) Nr. 1, in der derselbe Gegenstand wie hier mit Hilfe des Operatorkalküls behandelt wird. Die dort mit Φ und Ψ bezeichneten Funktionen hängen mit U_1 und U_2 in folgender Weise zusammen:

$$\Phi(s) = \frac{1}{2}[1 - U_1(s)]$$

$$\Psi(s) = \frac{1}{2}[1 + U_2(s-1)].$$

Unsere beiden Integraldarstellungen (7) und (14) in Verbindung mit der Erklärung der Funktion $U(\omega)$ in Formel (12) sind identisch mit den Formeln (27) und (28) bei Sears.

Bei der Gewinnung der asymptotischen Entwicklungen ist Sears allerdings ein kleiner Rechenfehler in seinen Formeln (29) und (30) unterlaufen, der sich so auswirkt, daß

in (36) $(7/2 + \gamma - \pi^2)/\sigma^3$ durch $(4 - \pi^2)/\sigma^3$

und

in (38) $\dfrac{1/2 + 2\gamma - \pi^2}{(\sigma-1)^3}$ durch $\dfrac{3/2 - \pi^2}{(\sigma-1)^3}$

zu ersetzen ist. (Man beachte, daß γ im angelsächsischen Schrifttum die Eulersche Konstante C bedeutet, während wir darunter e^C verstehen.) Nach dieser notwendigen Verbesserung ist sachliche Übereinstimmung mit unseren Entwicklungen (42) und (50) vorhanden. Die Zahlwerte von Tabelle I bei Sears werden davon nicht berührt, da die erwähnten Änderungen numerisch nur geringfügig sind. Die Werte von Sears erweisen sich innerhalb der von ihm angestrebten Genauigkeit als korrekt. Da unser Zahlenmaterial mit höherer Genauigkeit berechnet ist, läßt sich für die Werte von Φ, die nach verschiedenen Methoden berechnet bei Sears leichte Unterschiede aufweisen, eine Entscheidung treffen. Eine Nachprüfung von $\Psi(s)$ für höhere Werte von s ist ohne Interpolation nicht möglich und auch nicht durchgeführt, da die Auswahl der Argumente in beiden Arbeiten nicht dieselbe ist.

VIII. Numerische Berechnung.

Zur Auswertung der Integrale (7) und (14) wurde die Simpsonsche Regel verwandt. Bei unmittelbarem Gebrauch zeigen sich jedoch Mängel, die zu einer Abänderung des Verfahrens Anlaß geben.

Digitized by Google

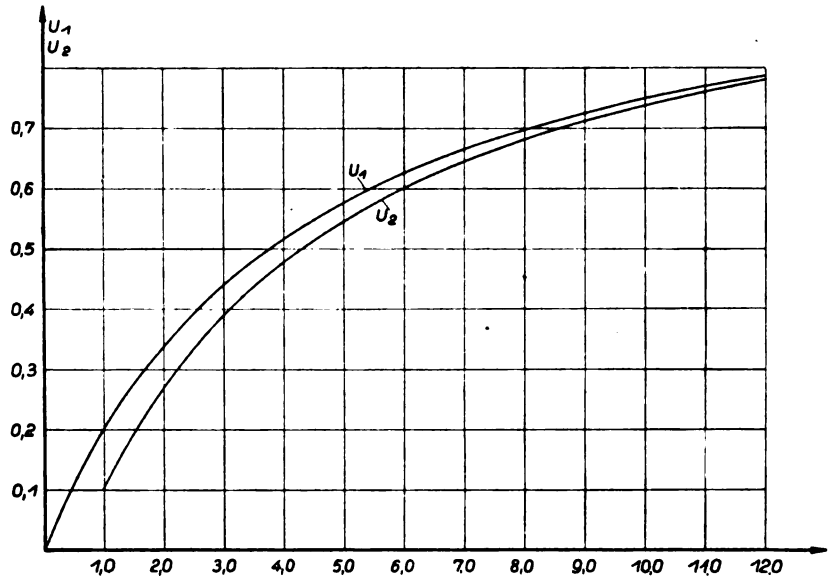


Bild 4. Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$.

Trotz guter Konvergenz der Integrale ist die Integration für nicht zu große s immer noch bis $\omega = 4$ zu erstrecken. Andererseits muß die Schrittlänge der numerischen Integration, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, klein sein. Aus diesem Grund approximieren wir für $\omega > 0{,}6$ $U(\omega)$ durch die Funktion

$$\varphi(\omega) = \frac{e^{-2\omega}}{2\pi\left(\omega - \frac{1}{4}\right)},$$

die man leicht mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung von $U(\omega)$ findet. Das Integral über φ führt auf die tabulierte Funktion Ei, vgl. [2], so daß

$$\int_{0{,}6}^{\infty} U(\omega)\, e^{-\omega s}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s+2}{4}} Ei(-0{,}35\cdot(s+2)) + \int_{0{,}6}^{\infty} [U(\omega) - \varphi(\omega)]\, e^{-\omega s}\, d\omega \quad \ldots \quad (54)$$

ist. Nur das letzte Integral ist noch nach Simpson zu integrieren, der Integrand ist wesentlich kleiner geworden.

In die übliche Fehlerabschätzung für die Simpsonsche Regel geht das Maximum der dritten Ableitung des Integranden ein. Da für $\omega = 0$ bereits die erste Ableitung von U und dann um so mehr die folgenden ∞ werden, versagt diese Abschätzung. Deshalb ist anzunehmen, daß die Simpsonsche Regel für die Umgebung von $\omega = 0$ nur bei einer sehr kleinen Schrittlänge einen hinreichend kleinen Fehler liefert. Aus diesem Grunde wurde U im Intervall $\omega = 0 \div 0{,}1$ durch den Anfang der Entwicklung (38) approximiert:

$$\psi(\omega) = 1 - 2\omega \ln\frac{\gamma\omega}{2}.$$

Dann ist

$$\int_0^{0{,}1} U\, e^{-\omega s}\, d\omega = \frac{1}{s} - \frac{e^{-0{,}1s}}{s^2}[1{,}48370332\, s + 2{,}83703322] + \frac{2}{s^2}\cdot[1{,}99573227 - Ei(-0{,}1\cdot s) + \ln(0{,}1\cdot s)] + \int_0^{0{,}1} (U - \psi)\, e^{-\omega s}\, d\omega \quad \ldots \quad (55)$$

so daß nur das letzte Integral numerisch auszuintegrieren ist. Zwar ist jetzt auch noch die übliche Fehlerabschätzung nicht zu verwenden, aber immerhin wird erst die zweite Ableitung von $U - \psi$ unendlich für $\omega = 0$, und außerdem ist $U - \psi$ in dem betrachteten Intervall wesentlich kleiner als U.

Zwischen $\omega = 0{,}1$ und $\omega = 0{,}6$ wird das Integral $\int U e^{-\omega s}\, d\omega$ nach der Simpsonschen Regel ausintegriert.

Auf eine Fehlerabschätzung wird auch für $\omega > 0{,}1$ verzichtet, da die Berechnung der Ableitungen von U mühsam ist. Immerhin wäre sie möglich, wenn man bedenkt, daß für T und folglich auch für U Riccatische Differentialgleichungen gelten. Einen Hinweis für die Größenordnung des Fehlers finden wir in dem exakt bekannten Wert $U_1(0)$

Zahlentafel 3. Funktion $U_1(s)$.

s	$U_1(s)$	s	$U_1(s)$
0,0	0,00000	8,5	0,7128
0,5	0,11133	9,0	0.7263
1,0	0,20121	9,5	0,7386
1,5	0,27569	10	0,7501
2,0	0,33858	11	0,7706
2,5	0,39245	12	0,7883
3,0	0,4391	15	0,8296
3,5	0,4799	20	0,8733
4,0	0,5159	25	0,9003
4,5	0,5479	30	0,9183
5,0	0,5764	40	0,9405
5,5	0,6020	50	0,9535
6,0	0,6251	100	0,97812
6,5	0,6460	500	0,995903
7,0	0,6650	1000	0,997973
7,5	0,6824	∞	1,000000
8,0	0,6983		

Zahlentafel 4. Funktion $U_2(s)$.

s	$U_2 = k_2 - 1$	s	$U_2 = k_2 - 1$
1,0	0,1016	8,5	0,6976
1,5	0,1942	9,0	0,7123
2,0	0,2703	9,5	0,7258
2,5	0,3344	10	0,7382
3,0	0,3891	11	0,7603
3,5	0,4364	12	0,7795
4,0	0,4777	15	0,8235
4,5	0,5140	20	0,8698
5,0	0,5463	25	0,8980
5,5	0,5750	30	0,9167
6,0	0,6008	40	0,9397
6,5	0,6241	50	0,9530
7,0	0,6451	100	0,97800
7,5	0,6642	500	0,995898
8,0	0,6817	1000	0,997972
		∞	1,000000

Digitized by Google

$= 0$, vgl. (17), und den mit Hilfe der Potenzreihe von Küssner [1] berechneten Werten von $U_1(s)$ für $s = 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0$. Der Vergleich dieser Werte mit unseren ergibt den Fehler kleiner als 10^{-5}. Es wird unterstellt, daß mit wachsendem s der Fehler nicht größer wird.

Zur Berechnung von U_2 unterteilen wir wieder das Integrationsintervall in drei Teile $0 \div 0{,}1 \div 0{,}6 \div \infty$. Im ersten Intervall ist wegen

$$U(I_0 + I_1) = \psi + (U - \psi) + U(I_0 + I_1 - 1)$$

nur $\int_0^{0{,}1} U(I_0 + I_1 - 1)\, e^{\omega s}\, d\omega$ numerisch zu integrieren. $U(I_0 + I_1 - 1)$ erweist sich ungefähr von derselben Größenordnung wie $U - \psi$, auch ist die Singularität für $\omega = 0$ ebenso vom Typ $\omega^2 (\ln \omega)^r$. Für $\omega = 0{,}1 \div 0{,}6$ wird nach Simpson ausintegriert. Jenseits $\omega = 0{,}6$ benützen wir wieder eine Näherungsfunktion. Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen von U bzw. $I_0 + I_1$ findet man als solche

$$\frac{e^{-\omega}}{\pi \sqrt{2\pi\omega}} \cdot \frac{1}{\omega - \frac{1}{8}},$$

die leider nicht brauchbar ist, da sie in das Integral eingesetzt nicht geschlossen auswertbar ist. Wir entscheiden uns deshalb für die nur wenig schlechtere Annäherung

$$\chi = \frac{e^{-\omega}(1 + 8\omega + 64\omega^2)}{64\pi\omega^3 \sqrt{2\pi\omega}},$$

die sich (mit $e^{\omega s}$ multipliziert) ausintegrieren läßt. Man findet

$$\int_{0{,}6}^{\infty} U(I_0 + I_1)\, e^{-\omega s}\, d\omega = 0{,}45538853$$
$$\times \left\{ e^{-0{,}6r} \cdot [0{,}77625 - 0{,}0625\, r + 0{,}003\, r^2] + [-0{,}72 + 0{,}06\, r - 0{,}003\, r^2] \cdot \sqrt{1{,}2\, r} \cdot Hh_0(\sqrt{1{,}2 \cdot r}) \right\}$$
$$+ \int_{0{,}6}^{\infty} [U(I_0 + I_1) - \chi]\, e^{-\omega s}\, d\omega.$$

wo $r = s + 1$ zu setzen ist. Das letzte Integral wird nach Simpson ausintegriert. Hh_0 ist im wesentlichen das Gaußsche Fehlerintegral

$$Hh_0(x) = \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt,$$

und findet sich in [2] tabuliert.

Für $s > 25$ wurden die asymptotischen Entwicklungen von $U_1(s)$ und $U_2(s)$ benutzt, bzw. statt der letzteren die Entwicklung $U_2(s) - U_1(s)$. Die Reihen wurden mit dem Glied $\frac{1}{s^5}$ abgebrochen. Da eine exakte Fehlerabschätzung aussteht, wurde die Übereinstimmung der so gewonnenen Werte, mit solchen die nach der vorstehenden Methode berechnet sind, durch Stichproben festgestellt. Die Ableitungen der Γ-Funktion für ganzzahliges Argument, die für die Koeffizienten $K_n^{(\omega)}$ notwendig sind, errechnen sich aus der Formel

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = -C + \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z-\nu} \right),$$

s. [5], S. 18, sowie den weiteren Formeln, die hieraus durch Differentiation entstehen.

IX. Schrifttum.

[1] H. G. Küssner, Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegung der Flüssigkeit. LuftfForschg. Bd. 17 (1940), Lfg. 11/12, S. 355.

[2] British Association Mathematical Tables, Bd. I, Cambridge Press 1931.

[3] British Association Mathematical Tables, Bd. VI, Cambridge Press 1937.

[4] R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig-Berlin 1937.

[5] Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig-Berlin 1938.

Abgeschlossen März 1940.

Digitized by Google

Allgemeine Tragflächentheorie.

Von H. G. Küssner.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Institut für instationäre Vorgänge.

Unter der Annahme unendlich kleiner Störungen wird eine sehr allgemeine Integralgleichung der Tragflächentheorie aufgestellt, welche für beliebige Bewegungen und kompressible Flüssigkeit gilt. Durch schrittweise Spezialisierung werden daraus einige einfachere Integralgleichungen gewonnen, so die Possiosche, Birnbaumsche und Prandtlsche Integralgleichung, ferner neue Integralgleichungen für die unendlich lange Tragfläche mit periodischer Abwindverteilung und für die schwingende Tragfläche mit großer Streckung. Schließlich werden einige Lösungen und Lösungsverfahren dieser Integralgleichungen angegeben.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Das Geschwindigkeitspotential des Elementarstrahlers.
3. Die Lorentz-Transformation.
4. Das Beschleunigungspotential.
5. Die allgemeine Integralgleichung der Tragflächentheorie.
6. Übersicht über die speziellen Formen der Integralgleichung (19).
7. Die ebene Tragfläche unendlicher Spannweite.
8. Die ebene Tragfläche mit großer Streckung.
9. Systeme mehrerer Tragflächen.
10. Verzeichnis des Schrifttums.

1. Einleitung.

Bisher sind eine Anzahl von Tragflächentheorien bekannt geworden, welche in zwei oder drei räumlichen Dimensionen gelten, stationär oder instationär sind und die Kompressibilität der Luft berücksichtigen oder nicht berücksichtigen. Allen diesen Theorien ist der Zug gemeinsam, daß sie exakt nur für unendlich kleine Störungen gelten und daß infolgedessen die Tragfläche als unendlich dünn und mit unendlich kleinen Auslenkungen aus einer Regelfläche angenommen werden muß, deren Erzeugende parallel zur Flugrichtung ist. Man kann dann die Regelfläche selbst näherungsweise als den Ort der Tragfläche und der von ihrer Hinterkante abgehenden Unstetigkeitsfläche betrachten. Bisher wurde meistens eine Ebene als Regelfläche gewählt; diese Einschränkung ist jedoch nicht notwendig.

Das Verfahren, die Integralgleichungen der Tragflächentheorie jedesmal unter besonderen, einschränkenden Voraussetzungen auf verschiedenen Wegen und in mehr oder weniger komplizierter Form neu abzuleiten und ihre Lösung zu erörtern, mag am Anfange der Entwicklung der Tragflächentheorie seine Berechtigung gehabt haben. Nachdem diese Theorie bereits zahlreiche Einzelergebnisse erzielt hat, erscheint es jedoch weit einfacher, zunächst mit möglichst wenigen einschränkenden Voraussetzungen eine allgemeine Integralgleichung aufzustellen und diese dann durch Spezialisierungen schrittweise auf einfachere, gegebenenfalls geschlossen lösbare Integralgleichungen zurückzuführen. Man gewinnt auf diesem Wege auch neue Gesichtspunkte für die zweckmäßige Lösung der schwieriger lösbaren, allgemeineren Gleichungsformen mittels schrittweiser Näherung.

Nachdem die Wirbelmethode zeitweise im Vordergrund des Interesses gestanden hatte, ist durch die Einführung des Prandtlschen Beschleunigungspotentials die alte potentialtheoretische Methode auf die Tragflächentheorie anwendbar geworden. Der besondere Vorteil dieser Methode im Gegensatz zur Wirbelmethode besteht darin, daß auch die Kompressibilität der Luft berücksichtigt werden kann, was sich bei der immer engeren Annäherung der Fluggeschwindigkeiten an die Schallgeschwindigkeit als notwendig erweist. Man hat sich nach dieser Methode die Tragfläche durch eine Anordnung akustischer Strahler ersetzt zu denken. Die einzige wesentliche Einschränkung in dieser Theorie besteht nur in der Annahme schwacher Schallfelder, d. h. kleiner Störungen. Dann wird die klassische Wellengleichung der Physik

$$\square \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = 0 \quad . \quad (1)$$

für das Geschwindigkeitspotential und den Schalldruck einer ruhenden Quellverteilung anwendbar. Deren Lösungen sind bereits nach allen Richtungen durchforscht worden. Ihre Übertragung auf die bewegte Tragfläche gelingt mit Hilfe der wohlbekannten Lorentz-Transformation, welche für alle der klassischen Wellengleichung genügenden Ausbreitungsvorgänge gilt, also sowohl für elektromagnetische wie akustische Vorgänge. Invariant ist dabei nur die Ausbreitungsgeschwindigkeit c, welche in unserem Falle gleich der Schallgeschwindigkeit ist.

Die Aufstellung der Integralgleichungen der Tragflächentheorie ist eine Vorarbeit, welche durch die nachfolgenden Ausführungen endgültig geleistet wird. Mit dieser Vorarbeit allein ist jedoch noch wenig getan. Man muß sich nunmehr dem rein mathematischen Hauptproblem zuwenden, nämlich der Lösung dieser Integralgleichungen, ohne jedesmal in neue Diskussionen über den Weg ihrer Herleitung und ihre physikalische Bedeutung einzutreten.

2. Das Geschwindigkeitspotential des Elementarstrahlers.

Die Wellengleichung $\square \Phi = 0$ besitzt bekanntlich eine sehr einfache Lösung für eine Kugelwelle, die sich vom Ursprung aus radial mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Diese Lösung lautet

$$\Phi_0 = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

worin r den Radius, t die Zeit und f eine willkürliche Funktion ist. Eine derartige Kugelwelle wird von einem Elementarstrahler nullter Ordnung erzeugt, der eine einfache Punktquelle darstellt. Das Geschwindigkeitspotential der Strahler höherer Ordnung geht aus (2) durch partielle Ableitung nach beliebigen Koordinatenrichtungen hervor.

Die Tragfläche, welche ja tragen, d. h. einen Druckunterschied zwischen ihren beiden Seiten aufweisen soll, ersetzen wir am einfachsten durch eine Belegung von Strahlern 1. Ordnung, sog. Dipolen, deren Achsen normal zur Tragfläche stehen. Bezeichnet n die Normalenrichtung, so ist das Potential eines Dipols der Belegung

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der Schalldruck des Schallfeldes ist allgemein

$$p = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Digitized by Google

genügt also ebenfalls der Wellengleichung $\Box p = 0$, da für sehr kleine Störungen $\varrho \sim$ const. ist.

3. Die Lorentz-Transformation.

Die bisherigen Überlegungen gelten für den im Unendlichen ruhenden Strahler. Um zum Druckfeld des mit konstanter Geschwindigkeit $v < c$ entlang der X-Achse bewegten Strahlers zu gelangen, haben wir die Lorentz-Transformation vorzunehmen, die, wie schon oben erwähnt wurde, für alle der klassischen Wellengleichung genügenden Ausbreitungsvorgänge gilt. Bezeichnet der Strich $'$ das transformierte System, so lauten die Transformationsformeln für eine Bewegung in Richtung der negativen x-Achse des ruhenden Bezugssystems bekanntlich [1]

$$x = \frac{X' + v\,t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + v\,X'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5)$$

Gehen wir zur Koordinate $x' = X' + vt'$ im mitbewegten Bezugssystem über und führen die Machsche Zahl $\beta = v/c$ ein, so erhalten wir aus (5)

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'\sqrt{1-\beta^2} + \frac{x'\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots\ (6)$$

Gemäß (6) haben wir beim Übergang auf das bewegte Bezugssystem folgende Substitutionen vorzunehmen:

$$r^2 = \frac{x'^2}{1-\beta^2} + y'^2 + z'^2 \quad \ldots\ (7)$$

$$-\frac{t'}{c} = \sqrt{1-\beta^2}\left[t' + \frac{x'\beta}{c(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{x'^2 + (1-\beta^2)(y'^2+z'^2)}}{c(1-\beta^2)}\right]$$

Da gemäß unserer Festsetzung die Tragfläche auf einer Regelfläche liegen soll, deren Erzeugende parallel zur Anströmrichtung, d. h. zur x-Richtung sein soll, bleibt die Normalenrichtung n durch die Lorentz-Transformation unverändert.

Wir benötigen späterhin die Kenntnis des Schalldruckes eines bewegten Dipols. Nach Gl. (2), (3), (4) ist für den ruhenden Dipol, wenn wir die Reihenfolge der Differentiationen vertauschen, der Schalldruck

$$p = -\varrho \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t} f\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad \ldots\ (8)$$

Da f eine willkürliche Funktion ist, können wir für $\partial f/\partial t$ ohne weiteres eine andere willkürliche Funktion γ substituieren und außerdem konstante Faktoren des Arguments wie $\sqrt{1-\beta^2}$ weglassen oder zufügen. Nach Ausführung der Lorentz-Transformation erhalten wir für den bewegten Dipol aus (7) und (8) den Druck

$$p(x,y,z,t) = -\frac{\varrho\, v}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\gamma\left(t + \frac{x\beta}{c(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}{c(1-\beta^2)}\right)}{\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}, \quad \ldots\ (9)$$

worin von nun an der Transformationsstrich fortgelassen wird. Das Geschwindigkeitspotential des bewegten Dipols können wir nicht auf so einfache Weise aus dem des ruhenden Dipols durch Transformation gewinnen, weil sich alle Bewegungszustände der Flüssigkeit, die durch frühere Druckwellen des Dipols erzeugt worden waren, überlagern. Das Geschwindigkeitsfeld des bewegten Dipols enthält sozusagen die ganze Lebensgeschichte des Dipols, während das Druckfeld instantan ist.

4. Das Beschleunigungspotential.

Nach L. Prandtl [2] kann ein neuer Zugang zur Tragflächentheorie dadurch gewonnen werden, daß man vom Feld des Beschleunigungsvektors

$$\mathfrak{b} = \frac{D\,\mathfrak{w}}{dt} = \frac{\partial\,\mathfrak{w}}{\partial t} + \mathfrak{w} \circ \nabla\,\mathfrak{w}$$

ausgeht, wobei $\mathfrak{w}$ den Geschwindigkeitsvektor bedeutet. Unter Annahme reibungsfreier, homogener Flüssigkeit lautet die Eulersche Gleichung:

$$\mathfrak{b} + \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p = \mathfrak{b} + \operatorname{grad}\int\frac{dp}{\varrho} = 0 \quad \ldots\ (10)$$

Somit ist auch $\mathfrak{b}$ ein Gradient, und wir können ein »Beschleunigungspotential« φ einführen, so daß $\mathfrak{b} = \operatorname{grad}\varphi$ ist. Durch Integration folgt dann aus (10)

$$\varphi + \int\frac{dp}{\varrho} = f(t) \quad \ldots\ (11)$$

Herrscht im Unendlichen ungestörte Strömung, so ist $f(t) =$ const. Beschränken wir uns außerdem auf kleine Störungen, so wird $\varrho \sim$ const. und es folgt aus (11) das Beschleunigungspotential

$$\varphi = -\frac{p}{\varrho} + \text{const.} \quad \ldots\ (12)$$

An der Tragfläche weist der Druck p und damit auch φ einen Sprung auf. Überall außerhalb der tragenden Fläche ist für $v < c$ der Wert p und damit auch φ stetig.

Das Beschleunigungspotential φ können wir näherungsweise auch im Falle der kompressiblen Flüssigkeit aus einer Dipolbelegung herleiten. Bei inkompressibler Flüssigkeit wäre dieser Schritt noch streng ausführbar, bei kompressibler Flüssigkeit ist er aber nur bei kleinen Druckamplituden zulässig. Ferner können wir die Dipolbelegung auf unserer Regelfläche annehmen statt auf der Tragfläche, wenn die Störungen sehr klein sind.

Durch die Dipolbelegung, deren Intensität überall der Größe des Drucksprunges an der Tragfläche entspricht, ist das Beschleunigungspotential φ im ganzen Raume definiert und folgt aus (9) und (12). Wir haben nun aus φ das Geschwindigkeitsfeld zu bestimmen. Unter der bereits oben eingeführten Annahme, daß die Fluggeschwindigkeit v konstant sei und daß sich die Tragfläche in Richtung der negativen x-Achse bewege, erhalten wir den Beschleunigungsvektor

$$\mathfrak{b} = \frac{\partial\,\mathfrak{w}}{\partial t} + v\frac{\partial\,\mathfrak{w}}{\partial x}, \quad \ldots\ (13)$$

wobei die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt sind. Setzen wir $\mathfrak{b} = \operatorname{grad}\varphi$, $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\Phi$ und integrieren (13), so erhalten wir

$$\varphi = \frac{\partial\,\Phi}{\partial t} + v\frac{\partial\,\Phi}{\partial x} \quad \ldots\ (14)$$

Wenn $\varphi(x, y, z, t)$ gegeben ist, folgt aus (14) schließlich das gesuchte Geschwindigkeitspotential

$$\Phi(x,y,z,t) = \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{x}\varphi\left(x', y, z, t - \frac{x-x'}{v}\right)dx' \quad \ldots\ (15)$$

Ein besonderer Vorteil dieser Darstellungsweise besteht darin, daß in ihr die sog. Unstetigkeitsfläche hinter der Tragfläche keine Rolle spielt, weil diese zwar einen Geschwindigkeitssprung, aber keinen Drucksprung und daher auch keine Unstetigkeit in φ aufweist.

Ein mit Dipolen belegtes Tragflächenelement $d\sigma$ liefert nach (9), (12), (15) den Potentialanteil

$$d\Phi = \frac{d\sigma}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\gamma\left(t - \frac{x-x'}{v} + \frac{x'\beta}{c(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{x'^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}{c(1-\beta^2)}\right)}{\sqrt{x'^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}dx' \quad \ldots\ (16)$$

Das betrachtete Tragflächenelement $d\sigma$ liegt im Nullpunkt unseres Koordinatensystems, also bei $x, y, z = 0$.

5. Die allgemeine Integralgleichung der Tragflächentheorie.

Wir verlegen nun den Ort unseres Elementarstrahlers auf einen beliebigen Punkt der Tragfläche mit den Koordinaten ξ, $y(\eta)$, $z(\eta)$. Die Koordinate ξ ist parallel der Er-

Digitized by Google

zeugenden der Regelfläche, also entlang der x-Achse zu messen. Die Koordinate η ist so gewählt, daß nach Abwicklung der Regelfläche auf eine Ebene ξ und η ein kartesisches Koordinatensystem bilden. Wir haben dann in (16) zu substituieren für

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x-\xi & y-y(\eta) & z-z(\eta) \end{array} \quad \ldots \quad (17)$$

Das Flächenelement der Tragfläche ist $d\sigma = d\xi\, d\eta$. Allgemein wird γ noch eine Funktion von ξ und η sein, da die Dipolintensität auf der Tragfläche veränderlich ist. Die Differentiation nach der Normalenrichtung kann zerlegt werden in

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dn} = \sin\varkappa(\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \cos\varkappa(\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial z} \quad \ldots \quad (18)$$

Darin ist der Winkel $\varkappa(\eta)$ zwischen der Normalenrichtung und der z-Achse eine Funktion der krummlinigen Koordinate η. Setzen wir (17) und (18) in (16) ein und integrieren über die Tragfläche, so erhalten wir den vollständigen Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential der Tragfläche:

$$\Phi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_{Fl}\int_{-\infty}^{x'=x-\xi} dx'\,d\xi\,d\eta\left(\sin\varkappa(\eta)\frac{\partial}{\partial y} + \cos\varkappa(\eta)\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\gamma\left(\xi,\eta,t + \frac{x'-x+\xi}{v} + \frac{x'\beta}{c(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{x'^2+(1-\beta^2)[(y-y(\eta))^2+(z-z(\eta))^2]}}{c(1-\beta^2)}\right)$$
$$\Big/\sqrt{x'^2+(1-\beta^2)[(y-y(\eta))^2+(z-z(\eta))^2]} \quad \ldots \quad (19)$$

Anderseits ist der Drucksprung Π an der Tragfläche proportional der Intensität der Dipolbelegung. Die konstanten Faktoren in (9) sind gerade so gewählt, daß

$$\Pi(\xi,\eta,t) = \varrho\, v\, \gamma(\xi,\eta,t) \quad \ldots \quad (20)$$

ist. Diese Festsetzung entspricht dem in der Aerodynamik üblichen Koordinatensystem: Auftrieb nach oben positiv, Abwind nach unten positiv. Man findet in der Literatur gelegentlich auch die mehr abstrakte Festsetzung: Abwind nach oben positiv. Dann ist in (20) das Vorzeichen der rechten Seite umzukehren.

(19) und (20) stellt die allgemeinste Integralgleichung der Tragflächentheorie für kleine Störungen gar, welche zur Berechnung des Druckspunges Π bei gegebenem Abwind dienen kann. Die Integralgleichung (19) stellt ein Randwertproblem dar. Ihre Lösung beruht darauf, daß der Abwind an der Tragfläche selbst durch die Art der Bewegung und Verformung der Tragfläche in 1. Näherung gegeben ist. Es sei $n = n(x,\eta,t)$ eine kleine Auslenkung der Tragfläche aus der Regelfläche in Richtung der Normalen. Dann ist der Abwind an der Tragfläche unter Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung:

$$w(x,y(\eta),z(\eta),t) = \frac{\partial n}{\partial t} + v\cdot\frac{\partial n}{\partial x} \quad \ldots \quad (21)$$

Bei der Lösung von (19) ist noch die Kuttasche Abflußbedingung zu beachten. Sie ist dann erfüllt, wenn an der Hinterkante der Tragfläche $\gamma = 0$ ist. Ein häufig benutzter Ansatz, der dieser Bedingung entspricht, ist

$$\gamma(\xi,\eta,t) = g(\eta,t)\cdot\left[a_0\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + \sum_1^\infty a_n\sin n\Theta\right],$$

worin

$$\cos\Theta = -\frac{\xi}{l}$$

ist und $l = l(\eta)$ die halbe Tragflächentiefe bedeutet. Für spezielle Zwecke, z. B. Tragflächen mit kreisförmigem Umriß, werden auch Kombinationen von Kugelfunktionen 1. und 2. Art verwendet, welche der Kuttaschen Bedingung genügen.

Es sei noch erwähnt, daß man bei Anwendung der Wirbelmethode ebenfalls auf die durch Gl. (20) definierte Größe γ kommt. Sie bedeutet dann die Dichte der gebundenen Wirbel. Diese Größe γ hat jedoch eine viel allgemeinere Bedeutung als Intensitätsmaß der Dipolbelegung, da man die Wirbelvorstellungen nur für inkompressible Flüssigkeit heranziehen kann, während (19) und (20) auch für kompressible Flüssigkeit gelten.

6. Übersicht über die speziellen Formen der Integralgleichung (19).

Wir können die vorliegende allgemeine Integralgleichung (19) nach mehreren Richtungen hin spezialisieren.

a) Zur Lösung des Randwertproblems brauchen wir den Abwind auf der Tragfläche selbst, also für Aufpunkte mit den Koordinaten $y = y(\eta_1)$; $z = z(\eta_1)$. Da die Lösung (2) der Wellengleichung, auf der unser Integral beruht, in Anbetracht der Linearisierung nur außerhalb des singulären Punktes $r = 0$ gilt, darf man nicht durch die Dipole hindurch integrieren, weil dann das Integral über x' divergent wird. Daher können wir den Abwind auf der Tragfläche selbst nur durch einen Grenzübergang aus (19) erhalten. Das nächstliegende Verfahren besteht darin, die Integration auf zwei Flächen auszuführen, welche von der Tragfläche den Abstand $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ haben, den Mittelwert zu bilden und zur Grenze $\varepsilon \to 0$ überzugehen. Dieses Verfahren führt, auf (19) angewandt, zu verwickelten Formeln. Es zeigt sich jedoch, daß wir zum gleichen Ziele kommen, wenn wir in (19) nach Durchführung der Differentiationen zunächst formal $y = y(\eta_1)$ und $z = z(\eta_1)$ einsetzen und dann das divergente Integral durch partielle Integration so umformen, daß sich der Cauchysche Hauptwert bilden läßt. Durch diese Umformung wird der formelmäßige Ausdruck länger und im allgemeinen weniger übersichtlich. Wir beschränken uns daher im folgenden in den meisten Fällen auf die Angabe des einfacheren divergenten Integrals und setzen die weitere Umformung in den Cauchyschen Hauptwert stillschweigend voraus. Wird die Integration über x' numerisch ausgeführt, so können wir die Divergenz in einfacher Weise dadurch vermeiden, daß wir entweder von $x-\xi$ bis $-\infty$ oder von $+\infty$ bis $x-\xi$ integrieren, je nachdem, ob $x-\xi < 0$ oder > 0 ist. Denn im Unendlichen muß der Abwind jedenfalls verschwinden. In divergenter Schreibweise nimmt der Abwind auf der Tragfläche schließlich die Form an:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = w(x,y(\eta_1),z(\eta_1),t) = \frac{1}{4\pi}\iint_{Fl}\int_{-\infty}^{x'=x-\xi} dx'\,d\xi\,d\eta\left[\left(\sin\varkappa(\eta)\frac{\partial}{\partial y} + \cos\varkappa(\eta)\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.\gamma\left(\xi,\eta,t + \frac{\xi-x}{v} + \frac{x'}{v(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{x'^2+(1-\beta^2)[(y-y(\eta))^2+(z-z(\eta))^2]}}{c(1-\beta^2)}\right)\right]_{\substack{y=y(\eta_1)\\ z=z(\eta_1)}}$$
$$\Big/\sqrt{x'^2+(1-\beta^2)[(y-y(\eta))^2+(z-z(\eta))^2]} \quad \ldots \quad (22)$$

Digitized by Google

b) Wir können annehmen, daß die Regelfläche eine Ebene sei, beispielsweise die xy-Ebene. Flugzeugflügel sind ja meistens flache Gebilde. Dann wird $\alpha = 0$, $y(\eta) = \eta$ und $z(\eta) = 0$. Mit der Spezialisierung a) wird außerdem $z = 0$. Diese Annahme bringt schon eine erhebliche Vereinfachung der Gleichungsform und ist bisher fast stets in die Tragflächentheorie eingeführt worden.

c) Wir können über die Art der zeitlichen Änderung spezielle Annahmen machen. Infolge der Linearität der Integralgleichung ergeben sich besonders einfache Formen bei der Annahme zeitlich harmonischer Vorgänge, also harmonischer Schwingungen der Tragfläche. Es ist bekannt, daß die harmonischen Lösungen der Wellengleichung in der Physik eine überragende Bedeutung haben. Sind harmonische Lösungen der Integralgleichung bekannt, so lassen sich daraus Lösungen für beliebige zeitliche Änderung des Abwindes durch Superposition finden, wobei die Umkehrung der Laplace-Transformation eine wichtige Rolle spielt. Gehen wir zum Grenzfall sehr langsamer Schwingungen über und setzen $\gamma = \gamma(\xi, \eta)$, so erhalten wir die stationäre Form der Integralgleichung. Dieser Sonderfall ist mit weiteren Einschränkungen versehen bisher am häufigsten behandelt worden.

d) Wir können über b) hinaus vereinfachende Annahmen bezüglich der Gestalt der Tragfläche machen. Lassen wir die Spannweite der Tragfläche unbegrenzt wachsen und nehmen an, daß der Abwind unabhängig von η sei, so vollzieht sich der Strömungsvorgang in allen Ebenen $\eta =$ const. in derselben Weise. Die Integration über η ist dann durchführbar. Die so erhaltene Form der Integralgleichung stellt einen zweidimensionalen Strömungsvorgang dar. Man spricht dann von ebener Strömung. Diese Form der Integralgleichung ist von besonderem Interesse, weil sie für beliebige Abwindfunktionen unter der Einschränkung $\beta = 0$ sowie für stationäre Strömung auch mit $\beta \neq 0$ geschlossen gelöst ist. Welche Rolle diese Lösung in der sog. Wirbelfadentheorie spielt, wird weiter unten erläutert.

Wir können bei einer Tragfläche konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite außer der von η unabhängigen auch die in η periodische Abwindverteilung

$$w(\xi, \eta, t) = w_0(\xi, t) \cdot \exp i \mu \eta$$

in Betracht ziehen. Dieser entspricht eine in η periodische γ-Verteilung. Die Integration über η läßt sich in einigen Fällen durchführen. Aus diesen harmonischen Lösungen lassen sich durch Superposition Lösungen für beliebig bewegte endliche Tragflächen konstanter Tiefe finden.

e) Man erkennt sofort aus (19), daß die Annahme inkompressibler Flüssigkeit die Form der Integralgleichung bedeutend vereinfacht, da dann $\beta = 0$ und $c = \infty$ wird. Eine Ausnahme stellt die stationäre Strömung dar, weil dann das komplizierte Argument von γ, welches mit t beginnt, ohnehin verschwindet. Die Berücksichtigung der Kompressibilität besteht dann nur in der Verminderung der x-Koordinate im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\beta^2}$, der sog. Prandtl-Kontraktion, die das genaue Gegenstück der Lorentz-Kontraktion in der speziellen Relativitätstheorie darstellt. Man hat also den Abwind für eine Tragfläche mit geringerer Tiefe zu bestimmen, erhält somit bei gegebenem Drucksprung einen kleineren Abwind und umgekehrt bei gegebenem Abwind einen größeren Drucksprung als für $\beta = 0$.

Im Falle stationärer Strömung erhält man also sofort Lösungen für $\beta \neq 0$, sobald Lösungen für $\beta = 0$ bekannt sind.

Die schwingende Tragfläche für $0 < \beta < 1$ ist bisher nur in einer einzigen Abhandlung [7] untersucht worden, und zwar als zweidimensionales Problem. Alle anderen Untersuchungen instationärer Flügelbewegungen beschränken sich auf die Annahme inkompressibler Flüssigkeit. Der Grund hierfür ist in dem Umstande zu erblicken, daß der allgemeine Fall $\beta \neq 0$ der bisher allein angewandten Wirbelmethode unzugänglich ist und erst kürzlich durch Einführung des Prandtlschen Beschleunigungspotentials der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht worden ist.

7. Die Tragfläche unendlicher Spannweite.

Um bei einer Tragfläche konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite in (19) die Integration über η ausführen zu können, müssen wir eine spezielle Annahme über die Abhängigkeit der Funktion γ von der Zeit τ machen. Wir setzen

$$\gamma(\xi, \tau) = g(\xi) \cdot \exp i \nu \tau,$$

untersuchen also die harmonischen Schwingungen der Tragfläche. Diese Annahme bedeutet keinen Verlust an Allgemeingültigkeit, da aus den harmonischen Lösungen beliebige andere durch Superposition aufgebaut werden können. Als Endergebnis läßt sich sogar eine geschlossene Lösung angeben, die ohne Zuhilfenahme von harmonischer Analyse auf beliebige Abwindfunktionen anwendbar ist. Mit den Spezialisierungen a), b) und c) erhalten wir aus (22) durch Ableiten nach z den Abwind in Richtung der z-Achse:

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=-l}^{+l} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x'=x-\xi} d x' \, d\eta \, d\xi \cdot \gamma(\xi, t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\exp i \nu \left[\frac{\xi - x}{v} + \frac{x'}{v(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{x'^2 + (1-\beta^2)((y-\eta)^2 + z^2)}}{c(1-\beta^2)} \right]}{\sqrt{x'^2 + (1-\beta^2)((y-\eta)^2 + z^2)}} \quad \ldots \quad (23)$$

Das Verfahren ist also nur auf Tragflächen anwendbar, welche ein Parallelogramm (speziell ein Rechteck) als Umriß haben und setzt voraus, daß die Seitenkanten des Parallelogramms nicht umströmt werden.

Das Ziel der hier betrachteten Vereinfachungen ist die Verwandlung des Flächenintegrals in (19) in ein Linienintegral, da dann naturgemäß mehr Aussichten auf eine Lösung der Integralgleichung bestehen. Man kann dies Ziel nun auch durch Annahme solcher Tragflächenumrisse erreichen, welche Koordinatenlinien in einfachen Systemen krummliniger orthogonaler Koordinaten darstellen. Bei Tragflächen von elliptischem Umriß hat man die konfokalen elliptischen Koordinaten und kann dann eine Integration mittels der Lamé'schen Funktionen ausführen. Bei kreisförmigem Umriß kommt man auf die Kugelfunktionen 1. und 2. Art. Beispiele hierfür sind in den Arbeiten von W. Kinner [3], K. Krienes [4] und Th. Schade [5] enthalten.

Führen wir in (23) die neue Veränderliche

$$u^2 = \frac{(1-\beta^2)(y-\eta)^2}{x'^2 + (1-\beta^2) z^2} + 1$$

ein und beachten, daß die Teilintegrale über η zwischen den Grenzen $+\infty$ bis y und y bis $-\infty$ von gleicher Größe sein müssen, so können wir die Integration über η unter Benutzung der bekannten Integraldarstellung der Zylinderfunktionen [6]

$$\int_1^\infty \exp(-i x u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(x) \qquad (24)$$

ausführen und erhalten aus (23) und (24) die Possiosche Integralgleichung

Digitized by Google

$$w(x,z,t) = \frac{-i}{4\sqrt{1-\beta^2}} \int_{\xi=-l}^{+l} \int_{-\infty}^{x'=x-\xi} d x'\, d\xi\, \gamma(\xi,t) \exp \frac{i\nu}{v} \left[\xi - x + \frac{x'}{1-\beta^2}\right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_0^{(2)} \left(\frac{\nu \sqrt{x'^2 + (1-\beta^2) z^2}}{c(1-\beta^2)} \right) \quad . . \quad (25)$$

Possio [7] gibt diese Gleichung nicht explizit an, sondern schreibt nur ihren Kern in der komplizierteren reellen Form an, um daraus numerische Näherungslösungen zu berechnen. $H_0^{(2)}$ bedeutet die Hankelsche Zylinderfunktion 2. Art, l die halbe Tragflächentiefe. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt in Flächenmitte.

Nach Durchführung der Differentiation und Einsetzen von $z = 0$ erhalten wir aus (25) den Abwind auf der Tragfläche

$$w(x,0,t) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \gamma(\xi,t) \exp \frac{i\nu}{v} (\xi - x) \cdot R\left(\beta, \frac{\nu}{v} \frac{x-\xi}{1-\beta^2}\right) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad . . \quad (26)$$

Man kann übrigens die Gleichungen (30) und (31) auch direkt aus (23) ableiten, wenn man $\nu = 0$ bzw. $c = \infty$ setzt und integriert.

Die Birnbaumsche Integralgleichung ist von Küssner und Schwarz [10] geschlossen gelöst worden unter Berücksichtigung der Kuttaschen Abflußbedingung. Zur bequemeren Darstellung der Lösung ist es zweckmäßig, die neuen Veränderlichen

$$x = -l \cos\Theta; \quad \xi = -l \cos\vartheta$$

und den Parameter

$$\omega = i\,\overline{\omega} = \frac{i\nu l}{v}$$

einzuführen. Die Lösung lautet dann unter Voraussetzung harmonischer Zeitfunktionen:

$$\gamma(\Theta,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ [1 + \cos\vartheta + T(-i\omega)(1-\cos\vartheta)] \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} + \frac{2\sin\Theta}{\cos\Theta - \cos\vartheta} + \omega \sin\vartheta \cdot ln \frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)} \right\} w(\vartheta,t)\, d\vartheta \quad (32)$$

Darin bedeutet

$$R(\beta,y) = \frac{i\pi}{2} \beta y \int_{-\infty}^{y} \exp iu \cdot H_1^{(2)}(\beta u) \frac{du}{|u|}$$

$$= -\frac{i\pi}{2} \beta y \int_{y}^{\infty} \exp iu \cdot H_1^{(2)}(\beta u) \frac{du}{u} \quad \text{für } y > 0$$

$$= \frac{i\pi}{2} \beta y \int_{-y}^{\infty} \exp(-iu) H_1^{(2)}(\beta u) \frac{du}{u} \quad \text{für } y < 0 \quad (27)$$

Der absolute Wert $|u|$ tritt in (27) und weiter unten deshalb auf, weil das Argument die Bedeutung eines Radius hat. Mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{x \to 0} x H_1^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi}$$

erhalten wir für die Funktion R die speziellen Werte

$$R(\beta,0) = 1 \quad . . . . . \quad (28)$$

$$R(0,y) = -y \cdot \int_{-\infty}^{y} \exp iu \frac{du}{u^2} \quad . . . . \quad (29)$$

Im Falle stationärer Strömung ist $\nu = 0$ und wir erhalten aus (26) und (28)

$$w(x,0,t) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \gamma(\xi) \cdot \frac{d\xi}{x-\xi} \quad . . . . \quad (30)$$

Der Wurzelfaktor gibt die Prandtlsche Regel wieder, nach welcher die Kompressibilität den Drucksprung im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\beta^2}$ erhöht. Die Integralgleichung (30) ist zuerst von M. Munk [8] geschlossen gelöst worden für $\beta = 0$.

Im Falle inkompressibler Flüssigkeit ist $\beta = 0$, und wir erhalten aus (26) und (29) nach Einführung einer anderen Integrationsvariablen $x'' = x - \frac{v}{\nu} \cdot u$ die Birnbaumsche Integralgleichung

$$w(x,0,t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-l}^{+l} \int_{x''=\xi}^{\infty} \gamma(\xi,t) \exp \frac{i\nu}{v} (\xi - x'') \frac{dx''\, d\xi}{(x-x'')^2} \quad . . \quad (31)$$

Birnbaum [9] schreibt seine Gleichung in der konvergenten Form, welche sich aus (31) durch partielle Integration und Bildung des Cauchyschen Hauptwertes ergibt, wobei man noch die Reihenfolge der Integrationen vertauschen kann.

$$T(\overline{\omega}) = \frac{H_0^{(2)}(\overline{\omega}) + i H_1^{(2)}(\overline{\omega})}{-H_0^{(2)}(\overline{\omega}) + i H_1^{(2)}(\overline{\omega})} \quad . . . . \quad (33)$$

Die komplexe Funktion T kann mit Hilfe tabulierter Funktionen berechnet werden und ist in Zahlentafel 1 gegeben.

Dieses Ergebnis ist vom Verfasser [11] mit Hilfe des Superpositionsprinzips auf ganz beliebige Abwindfunktionen

Zahlentafel 1. Funktion $T(\omega)$.

$\overline{\omega}$	Re T	Im T	$\overline{\omega}$	Re T	Im T
0,000	1,00000	0,00000	0,72	0,12481	— 0,24865
0,002	0,99342	— 0,02516	0,74	0,12034	— 0,24458
0,010	0,96525	— 0,09135	0,76	0,11611	— 0,24061
0,02	0,92745	— 0,15042	0,78	0,11210	— 0,23676
0,04	0,85340	— 0,23200	0,80	0,10829	— 0,23300
0,06	0,78408	— 0,28519	0,82	0,10467	— 0,22935
0,08	0,72086	— 0,32080	0,84	0,10123	— 0,22580
0,10	0,66385	— 0,34460	0,86	0,09795	— 0,22234
0,12	0,61265	— 0,36015	0,88	0,09483	— 0,21898
0,14	0,56674	— 0,36978	0,90	0,09186	— 0,21570
0,16	0,52554	— 0,37513	0,92	0,08902	— 0,21251
0,18	0,48851	— 0,37735	0,94	0,08631	— 0,20940
0,20	0,45516	— 0,37725	0,96	0,08372	— 0,20637
0,22	0,42504	— 0,37545	0,98	0,08124	— 0,20342
0,24	0,39778	— 0,37239	1,00	0,07887	— 0,20055
0,26	0,37303	— 0,36841	1,1	0,06843	— 0,18721
0,28	0,35050	— 0,36376	1,2	0,05991	— 0,17542
0,30	0,32994	— 0,35864	1,3	0,05287	— 0,16493
0,32	0,31114	— 0,35319	1,4	0,04699	— 0,15555
0,34	0,29389	— 0,34752	1,5	0,04203	— 0,14713
0,36	0,27804	— 0,34172	1,6	0,03780	— 0,13953
0,38	0,26344	— 0,33585	1,7	0,03417	— 0,13264
0,40	0,24995	— 0,32997	1,8	0,03103	— 0,12636
0,42	0,23748	— 0,32411	1,9	0,02830	— 0,12063
0,44	0,22592	— 0,31831	2,0	0,02591	— 0,11538
0,46	0,21518	— 0,31258	2,5	0,01749	— 0,09459
0,48	0,20518	— 0,30695	3,0	0,01256	— 0,08001
0,50	0,19587	— 0,30142	3,5	0,00944	— 0,06924
0,52	0,18718	— 0,29600	4,0	0,00734	— 0,06099
0,54	0,17905	— 0,29071	4,5	0,00587	— 0,05447
0,56	0,17144	— 0,28554	5,0	0,00479	— 0,04920
0,58	0,16430	— 0,28049	10,0	0,00124	— 0,02489
0,60	0,15760	— 0,27557	20	0,00031	— 0,01249
0,62	0,15130	— 0,27078	30	0,00014	— 0,00833
0,64	0,14537	— 0,26611	40	0,00008	— 0,00625
0,66	0,13978	— 0,26156	50	0,00005	— 0,00500
0,68	0,13450	— 0,25714	100	0,00001	— 0,00250
0,70	0,12952	— 0,25284	∞	0	0

Digitized by Google

$w(\vartheta, s)$ übertragen worden. s sei der Weg der Tragfläche. Für $s < 0$ sei $w(\vartheta, s) = 0$. Dann lautet die Lösung:

$$\gamma(\Theta, s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\left[(1+\cos\vartheta)\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + \frac{2\sin\Theta}{\cos\Theta - \cos\vartheta}\right] w(\vartheta, s) + \sin\vartheta \cdot ln\,\frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)}\cdot\frac{\partial w(\vartheta, s)}{\partial s}\right.$$
$$\left. + (1-\cos\vartheta)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\int_0^{s} U_1(s-\sigma)\cdot\frac{\partial w(\vartheta,\sigma)}{\partial\sigma}\cdot d\sigma\right\} d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$U_1(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{T(-i\omega)}{\omega}\exp\omega s\cdot d\omega \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Die reelle Funktion $U_1(s)$ läßt sich durch Reihen sowie rein reelle Integrale über tabulierte Funktionen darstellen, siehe [11], [12]. Zahlenwerte sind in Zahlentafel 2 enthalten. Es sei bemerkt, daß (34) auch für veränderliche Fluggeschwindigkeit gilt, während (32) nur für konstante Fluggeschwindigkeit gilt.

Wir betrachten nun die schiebende Tragfläche unendlicher Spannweite und konstanter Tiefe. Der Winkel zwischen Vorderkante und y-Achse, der sog. Schiebewinkel, sei δ. Die halbe Tragflächentiefe l ist stets parallel der x-Achse zu messen. Setzen wir $c = \infty$ und substituieren

$$x - y\operatorname{tg}\delta = s; \quad \xi - \eta\operatorname{tg}\delta = \sigma,$$

so erhalten wir aus (23) den Abwind

$$w(s, 0, t) = -\frac{1}{2\pi\cos^2\delta}\int_{\sigma=-l}^{+l}\int_{x''=\sigma}^{\infty}\gamma(\sigma, t)\exp\frac{i\nu}{v}(\sigma - x'')\,\frac{dx''\,d\sigma}{(s-x'')^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Das Ergebnis unterscheidet sich nur um den konstanten Faktor $\cos^2\delta$ von (31). Bei gegebenem Abwind ist also der Drucksprung der schiebenden Tragfläche unendlicher Spannweite um den Faktor $\cos^2\delta$ kleiner als der der normal angeströmten Tragfläche gleicher, in Flugrichtung gemessener Tiefe. Dieses Ergebnis ist gleichbedeutend damit, daß nur die Normalkomponente der Fluggeschwindigkeit, d. h. die in der Normalebene zur Tragfläche liegende, aerodynamisch wirksam ist. Es ist ohne weiteres klar, daß in reibungsfreier Flüssigkeit die Tangentialkomponente, die einer Verschiebung der unendlich langen Tragfläche in Richtung ihrer Erzeugenden entspricht, ohne aerodynamische Wirkung sein muß und daher durch Druckmessungen außerhalb der Tragfläche nicht feststellbar ist.

Zahlentafel 2. Funktion $U_1(s)$.

s	$U_1(s)$	s	$U_1(s)$
0,0	0,0000	3,0	0,4391
0,1	0,0244	3,5	0,4799
0,2	0,0476	4,0	0,5159
0,3	0,0698	4,5	0,5479
0,4	0,0910	5,0	0,5764
0,5	0,1113	5,5	0,6020
0,6	0,1308	6,0	0,6251
0,7	0,1494	6,5	0,6460
0,8	0,1674	7,0	0,6650
0,9	0,1846	7,5	0,6824
1,0	0,2012	8,0	0,6983
1,1	0,2172	8,5	0,7128
1,2	0,2326	9,0	0,7263
1,3	0,2475	9,5	0,7386
1,4	0,2618	10	0,7501
1,5	0,2757	11	0,7706
1,6	0,2891	12	0,7883
1,7	0,3021	15	0,8296
1,8	0,3146	20	0,8733
1,9	0,3268	25	0,9003
2,0	9,3386	30	0,9183
2,1	0,3500	40	0,9405
2,2	0,3611	50	0,9535
2,3	0,3719	100	0,9781
2,4	0,3823	500	0,9959
2,5	0,3924	1000	0,9980
		∞	1,0000

Messen wir dagegen den Druck in einem Bezugssystem, welches mit der quer bewegten Tragfläche fest verbunden ist, so haben wir im Falle kompressibler Flüssigkeit die Lorentz-Transformation vorzunehmen. Bezeichnet v_2 die entgegen der y-Richtung gemessene Quergeschwindigkeit, so ist gemäß (5) im Intergral (26)

$$t = \frac{t' + v_2 y'/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}$$

zu substituieren.

Wir wenden uns schließlich der Tragfläche mit periodischer γ-Verteilung längs der Spannweite zu. Es sei

$$\gamma(\xi, \eta, t) = \gamma(\xi, t)\cdot\exp i\mu\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Wir beschränken uns auf den Spezialfall $c = \infty$, also inkompressible Flüssigkeit. Setzen wir

$$u = \frac{\eta - y}{\sqrt{x'^2 + z^2}}$$

und beachten, daß die Teilintegrale von $+\infty$ bis y und von y bis $-\infty$ von gleicher Größe sein müssen, so kommen wir auf das bestimmte Integral [13]

$$\int_0^{\infty}\exp(-xu)\cdot\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{\pi}{2}[Z_0(x) - N_0(x)] \quad . \quad . \quad (38)$$

Darin ist N die Neumannsche Zylinderfunktion und Z die Struvesche Funktion. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} G_0(x) &= Z_0(ix) - N_0(ix) \\ G_1(x) &= Z_1(ix) - N_1(ix) - \frac{2}{\pi}\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

so wird zunächst aus (23)

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{4}\exp i\mu y\int_{\xi=-l}^{+l}\int_{-\infty}^{x'=x-\xi} dx'\,d\xi \cdot\gamma\left(\xi, t + \frac{x'-x+\xi}{v}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}G_0\left(-\mu\sqrt{x'^2+z^2}\right) \quad . \quad . \quad (40)$$

Da

$$\frac{dG_0(x)}{dx} = -iG_1(x),$$

folgt nach Ausführung der Differentiation und Einsetzen von $z = 0$, $x'' = x - x'$ der Abwind an der Tragfläche

$$w(x, y, 0, t) = \frac{i\mu}{4}\exp i\mu y\int_{\xi=-l}^{+l}\int_{x''=\xi}^{+\infty}\gamma\left(\xi, t + \frac{\xi - x''}{v}\right)\cdot G_1(-\mu|x-x''|)\,\frac{dx''\,d\xi}{|x-x''|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Die Integralgleichung (41) ist von ähnlichem Aufbau wie (26). Zu ihrer weiteren Integration ist noch eine spezielle Annahme über die Zeitfunktion nötig. Wollen wir harmonische Schwingungen betrachten, so müssen wir in diesem Falle natürlich einen reellen Ansatz verwenden oder aber (41) zunächst reell umschreiben. Da

$$\lim_{x\to 0} xG_1(x) = -\frac{2i}{\pi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Digitized by Google

folgt aus (41) und (42) für $\mu \to 0$ der Abwind

$$w(x,0,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-l}^{+l}\int_{x''=\xi}^{+\infty}\gamma\left(\xi, t+\frac{\xi-x''}{v}\right)\frac{dx''\,d\xi}{(x-x'')^2} \quad (43)$$

Führen wir in (43) noch den harmonischen Ansatz für die Zeitfunktion ein, so geht (43) unmittelbar in die Birnbaumsche Integralgleichung (31) über.

8. Die Tragfläche mit großer Streckung.

Nach (23) ist der Abwind einer ebenen schwingenden Tragfläche für inkompressible Flüssigkeit

$$w(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{Fl}\int\int_{-\infty}^{x'=x-\xi} dx'\,d\xi\,d\eta\,\gamma(\xi,\eta,t)\exp\frac{iv}{v}(x'-x+\xi)\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x'^2+(y-\eta)^2+z^2}} \quad (44)$$

Führen wir die neue Integrationsveränderliche

$$x' = -u\sqrt{(y-\eta)^2+z^2} \quad (45)$$

in (44) ein, so folgt

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{Fl}\int d\xi\,d\eta\,\gamma(\xi,\eta,t)\exp\frac{iv}{v}(-x+\xi)\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_{u=\frac{-x+\xi}{\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{iv}{v}\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}\cdot u\right)\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \quad (46)$$

Bei einer Tragfläche mit großer Streckung ist für die meisten Punkte der Fläche

$$x-\xi \ll y-\eta \quad (47)$$

Nur in der engeren Umgebung des Aufpunktes, der selbst auf der Tragfläche liegen möge, gilt die Ungleichung (47) nicht unbedingt. Je schlanker der Umriß der Tragfläche ist, um so geringer wird daher der Fehler, den wir begehen, wenn wir in (46) die untere Grenze des Integrals näherungsweise $u = 0$ setzen. Dann läßt sich die Integration nach (38) mit bekannten Funktionen ausführen, und wir erhalten schließlich nach Ausführung der Differentiationen den Abwind an der Tragfläche

$$w(x,y,0,t) \approx -\frac{iv}{8v}\int_{Fl}\int d\xi\,d\eta\cdot\gamma(\xi,\eta,t)\exp\frac{iv}{v}(-x+\xi)\cdot\frac{G_1\left(\frac{v}{v}(y-\eta)\right)}{y-\eta} \quad (48)$$

Die Integralgleichung (48) ist bereits erheblich einfacher als unsere Ausgangsgleichung (44). Allerdings gilt sie nur noch für ganz spezielle Abwindverteilungen in der x-Richtung, nämlich

$$w(x,y,0,t) = \bar{w}(y)\cdot\exp iv\left(t-\frac{x}{v}\right) \quad (49)$$

was man leicht durch Vergleich von (48) und (49) erkennt. Es ergibt sich daraus die Abwindfunktion

$$\bar{w}(y) \approx -\frac{iv}{8v}\int_{Fl}\int\gamma(\xi,\eta)\exp\frac{iv\xi}{v}\cdot G_1\left(\frac{v}{v}(y-\eta)\right)\frac{d\xi\,d\eta}{y-\eta} \quad (50)$$

Diese Integralgleichung läßt sich infolge unserer ersten Näherungsannahme nur dann eindeutig lösen, wenn wir eine zusätzliche Annahme über die Funktion $\gamma(\xi,\eta)$ einführen. Als nächstliegende Annahme setzen wir fest, daß die γ-Verteilung als Funktion von ξ, bis auf einen von η abhängigen Faktor $C(\eta)$, so sein soll, als ob in jedem Querschnitt zweidimensionale Strömung herrschte. Dies ist die zweite wesentliche Näherungsannahme. Da der Abwind durch (49) gegeben ist, können wir die gesuchte γ-Verteilung aus (32) berechnen und schließlich das Integral

$$K(\eta) = \int_{l_2(\eta)}^{l_1(\eta)}\gamma(\xi,\eta)\exp\frac{iv\xi}{v}\,d\xi \quad (51)$$

bilden. Führen wir (49) in (32) ein, so erhalten wir mit

$$\xi = \xi_0(\eta) - l(\eta)\cos\vartheta;\quad \bar{\omega}(\eta) = v\,l(\eta)/v$$

$$\gamma(\vartheta,\eta) = C(\eta)\,\bar{w}(\eta)\exp\left(-\frac{iv}{v}\xi_0(\eta)\right)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}\cdot[J_0(\bar{\omega})+iJ_1(\bar{\omega})+(J_0(\bar{\omega})-iJ_1(\bar{\omega}))\,T(\bar{\omega})] \quad (52)$$

$\xi_0(\eta)$ ist die Koordinate der Tragflächen-Mittellinie. Für Tragflächenumrisse, die symmetrisch zur η-Achse sind, ist $\xi_0 = 0$.

J_0 und J_1 sind Besselsche Funktionen; T ist durch (33) gegeben als Quotient Hankelscher Funktionen. Führen wir (52) in (51) ein und integrieren über ξ, so wird

$$\left.\begin{aligned} K(\eta) &= C(\eta)\,\pi\,\bar{w}(\eta)\,l(\eta)\,f(\bar{\omega}(\eta)) \\ f(\bar{\omega}) &= J_0^2(\bar{\omega})+J_1^2(\bar{\omega})+(J_0(\bar{\omega})-iJ_1(\bar{\omega}))^2\,T(\bar{\omega}) \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Würde tatsächlich ebene Strömung herrschen, so wäre in (52) und (53) $C(\eta) = 1$.

Wir setzen nun (51) in (50) ein. Da (50) an sich aus den obenerwähnten Gründen divergent ist, müssen wir partiell integrieren, um den Cauchyschen Hauptwert bilden zu können. Dann wird mit

$$S(x) = \frac{i\pi}{2}\cdot x\int_{x}^{\infty}G_1(u)\frac{du}{u} \quad (54)$$

$$\bar{w}(y) \approx F(S,K) + \frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{+b}S\left(\frac{v}{v}(y-\eta)\right)\cdot\frac{dK(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{y-\eta} \quad (55)$$

Lassen wir die Flügelstreckung unbegrenzt wachsen, so strebt $dK/d\eta$ nach Null. Dann herrscht exakt ebene Strömung und es ist gemäß (53) und (55)

$$\bar{w}(y) = F(S,K) = \frac{K(y)}{\pi\,l(y)\cdot f(\bar{\omega}(y))} \quad (56)$$

Aus (55) und (56) ergibt sich die endgültige Form der Integralgleichung der schwingenden Tragfläche mit großer Streckung:

$$\bar{w}(y) \approx \frac{K(y)}{\pi\,l(y)\,f(\bar{\omega}(y))} + \frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{+b}S\left(\frac{v}{v}(y-\eta)\right)\frac{dK(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{y-\eta} \quad (57)$$

Setzen wir $v = 0$, so ist

$$S(0) = 1;\quad f(0) = 2$$

und wir erhalten aus (57) die stationäre Form

$$\bar{w}(y) \approx \frac{K(y)}{2\pi\,l(y)} + \frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{+b}\frac{dK(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{y-\eta} \quad (58)$$

Dies ist die wohlbekannte Prandtlsche Integralgleichung der »Wirbelfadentheorie«. Man substituiert meistens im 1. Gliede von (58) an Stelle π die gemessene stationäre Zirkulationskonstante eines wirklichen Flügelprofils $c_1 < \pi$, obwohl die ganze hier behandelte Theorie nur für Tragflächen gilt. Die Größe K hat in (58) eine sehr einfache Bedeutung, nämlich

$$K(\eta) = \int\gamma(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Das ist die sog. Zirkulation des Flügels. Weniger einfach ist die Bedeutung von K in (57). Cicala [14] und andere haben versucht, die »Wirbelfadentheorie« mittels der Wirbelvorstellungen auf den Fall der schwingenden Tragfläche auszudehnen und sind dabei auch auf eine mit (57) formal übereinstimmende Gleichung gekommen, was man nach einiger Umformung feststellen kann. Cicala identifiziert jedoch willkürlich K mit der Gesamtzirkulation (Summe der gebundenen und freien Wirbel längs der Flügeltiefe) und erhält dementsprechend

$$\frac{1}{f(\bar{\omega})} = \frac{\pi}{4}\,\bar{\omega}\exp i\bar{\omega}\,[H_0^{(2)}(\bar{\omega}) - iH_1^{(2)}(\bar{\omega})].$$

Digitized by Google

Über die zulässige Abwindverteilung in der x-Richtung werden überhaupt keine Angaben gemacht. Man muß feststellen, daß in diesem Falle die Wirbelmethode zu ungenauen Ergebnissen führt und daß die hier gegebene potentialtheoretische Behandlung weiter reicht. Gl. (58) läßt sich wirbeltheoretisch nicht auf (57) verallgemeinern, wohl aber (57) in (58) spezialisieren.

Aus (57) ergibt sich zunächst die Größe $K(y)$. Um den Auftrieb berechnen zu können, braucht man jedoch die gebundene Zirkulation

$$\Gamma(\eta) = \int \gamma(\xi, \eta)\, d\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Setzen wir (52) in (59) ein und integrieren über ξ, so wird

$$\Gamma(\eta) = C(\eta) \cdot \pi\, \overline{w}(\eta)\, l(\eta) \exp\left(-\frac{i\nu}{v}\xi_0(\eta)\right) \times \left[J_0(\overline{\omega}) + i\, J_1(\overline{\omega}) + (J_0(\overline{\omega}) - i\, J_1(\overline{\omega}))\, T(\overline{\omega})\right] \quad \ldots \quad (60)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos\vartheta)\, w(\vartheta, y)\, d\vartheta = \frac{\Gamma(y)}{\pi\, l(y)\left[\dfrac{J_0 + i\, J_1}{J_0 - i\, J_1} - \dfrac{H_0^{(2)} + i\, H_1^{(2)}}{H_0^{(2)} - i\, H_1^{(2)}}\right]} + \exp\left(-\frac{i\nu}{v}\xi_0(y)\right) \cdot \frac{J_0 - i\, J_1}{4\pi} \int_{-b}^{+b} S\left(\frac{\nu}{v}\, y - \eta\right) \frac{d}{d\eta}\left[\Gamma(\eta) \cdot (J_0 - i\, J_1) \exp\frac{i\nu}{v}\xi_0(\eta)\right] \frac{d\eta}{y - \eta} \quad \ldots \quad (65)$$

Durch Vergleich von (53) und (60) ergibt sich die gebundene Zirkulation

$$\Gamma(y) = \frac{K(y) \cdot \exp\left(-\dfrac{i\nu}{v}\xi_0(y)\right)}{J_0(\overline{\omega}(y)) - i\, J_1(\overline{\omega}(y))} \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die durch zwei sich gegenseitig bedingende Näherungsannahmen aus der allgemeineren Form (44) gewonnene vereinfachte Integralgleichung (57) nur für Abwindfunktionen der Form (49) gilt, worin $\overline{w}(y)$ ein komplexe Funktion sein darf. Andere Abwindfunktionen können durch (57) nicht behandelt werden, es sei denn, daß man sich damit begnügt, von der gegebenen Abwindfunktion w_g eine Abwindfunktion w in der Form (49) zu subtrahieren und die möglichst kleine Differenz $w_g - w$ unter der Annahme zweidimensionaler Strömung mittels (32) zu integrieren. Dieses Verfahren ist bisher bei der praktischen Anwendung der stationären Form (58) geübt worden, ohne daß überall Klarheit darüber bestand, daß es eine zusätzliche, über die Wirbelfadentheorie hinausgehende Annahme einschließt.

Will man die Integralgleichung (57) unter der erwähnten Einschränkung näherungsweise auf beliebige andere Abwindverteilungen $w(\vartheta, y)$ anwenden, so entsteht die Frage, welcher Mittelwert für $\overline{w}(y)$ in (57) eingesetzt werden soll. Unter der Annahme ebener Strömung kann für beliebige Funktionen $w(\vartheta, y)$ die Größe γ nach (32) berechnet werden. Wir wählen nun unseren Ansatz (49) so, daß er unter der Annahme ebener Strömung dieselbe charakteristische Größe K liefert wie der gegebene Abwind $w(\vartheta, y)$ in ebener Strömung. Dann ist

$$\overline{w}(y) = \frac{\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos\vartheta)\, w(\vartheta, y)\, d\vartheta}{J_0(\overline{\omega}) - i\, J_1(\overline{\omega})} \cdot \exp\frac{i\nu}{v}\xi_0(y) \quad (64)$$

Der Zähler dieses Bruches stellt den bekannten Integralausdruck w_0 dar, der für die Zirkulation in ebener Strömung maßgebend ist. Bei Translations- und Drehschwingungen einer ebenen Tragfläche ist w_0 gleich dem Abwind in $^3/_4$ Flügeltiefe (hinterer Neutralpunkt). Für stationäre Strömung ist der Nenner des Bruches (64) gleich Eins; dann wird $\overline{w} = w_0$. Dies gilt jedoch nicht für instationäre Strömung. Setzen wir zur Probe (49) in (64) ein, so wird (64) identisch befriedigt.

Unter Berücksichtigung von (53), (61), (64) können wir die Integralgleichung (57) in folgender Form schreiben:

J und H sind darin außerhalb des Integrals Funktionen von $\overline{\omega}(y)$, innerhalb von $\overline{\omega}(\eta)$, und Γ ist die übliche gebundene Zirkulation. Infolge unserer Näherungsannahme über den Mittelwert von $\overline{w}$ liefert Gl. (65) für unendlich große Streckung nicht mehr exakt die Zirkulation der ebenen Strömung. Um dies zu erreichen, müssten wir den ersten Quotienten der ersten eckigen Klammer gleich Eins setzen. Eine solche Normierung erscheint ebenso berechtigt wie die in Gl. (56) erfolgte.

Denken wir uns ein ortsfestes periodisches Abwindfeld und sehen wir von dem Einfluß der in diesem Geschwindigkeitsfeld an sich bereits enthaltenen Wirbel auf die Tragfläche zunächst ab, so erfährt eine ebene Tragfläche, welche geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit durch dieses Abwindfeld bewegt wird, stets einen Abwind der Form (49). Auf diesen Fall kann also (57) unmittelbar angewandt werden. Durch lineare Superposition mehrerer Abwindfelder verschiedener Periode lassen sich beliebige ortsfeste Abwindfelder darstellen. Die Integralgleichung (57) ist daher besonders geeignet zur Behandlung des Problems der Böenbeanspruchung von Tragflächen mit großer Streckung.

Die im Kern des Integrals (57) vorkommende komplexe Funktion $S(x)$ ist durch (39) und (54) gegeben. Zahlenwerte sind in Zahlentafel 3 enthalten[1]). Da

$$\lim_{x \to \infty} x^2\, G_1(x) = -2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

ist, folgt aus (54) und (66)

$$\lim_{x \to \infty} x\, S(x) = -\frac{i}{2}.$$

$$K_1(y) = l(y) \exp\frac{i\nu}{v}\xi_0(y) \int_0^\pi \gamma(\Theta, y) \exp(-i\,\overline{\omega}\cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta = \exp\frac{i\nu}{v}\xi_0(y) \cdot \frac{l(y)}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \Big\{[1 + \cos\vartheta + (1-\cos\vartheta)\, T(\overline{\omega})] \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2} + \frac{2\sin\Theta}{\cos\Theta - \cos\vartheta} + i\,\overline{\omega}\sin\vartheta \cdot \ln\frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)}\Big\} w(\vartheta, y) \times \exp(-i\,\overline{\omega}\cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta\, d\vartheta$$

$$= l(y) \exp\left(\frac{i\nu}{v}\xi_0(y)\right) \cdot \int_0^\pi (1-\cos\vartheta)\, w(\vartheta, y)\, d\vartheta \cdot [J_0(\overline{\omega}) + i\, J_1(\overline{\omega}) + (J_0(\overline{\omega}) - i\, J_1(\overline{\omega})) \cdot T(\overline{\omega})] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Anderseits folgt aus dem Ansatz (49) nach (53)

$$K_2(y) = \pi\, l(y)\, \overline{w}(y) \cdot [J_0(\overline{\omega}) - i\, J_1(\overline{\omega})] \cdot [J_0(\overline{\omega}) + i\, J_1(\overline{\omega}) + (J_0(\overline{\omega}) - i\, J_1(\overline{\omega})) \cdot T(\overline{\omega})] \quad (63)$$

Setzen wir $K_1(y) = K_2(y)$, so ergibt sich aus (62) und (63)

Bei raschen Schwingungen, d. h. großen Werten des Arguments $\frac{\nu}{v}|y-\eta|$, wird der durch das zweite Glied von (57) gegebene Induktionseffekt daher sehr klein, und im

[1]) Die Berechnung dieser Zahlentafel verdanke ich Herrn Dr. Dingel.

Digitized by Google

Zahlentafel 8. Funktion $S(x)$.

x	$\Re e\, S(x)$	$\Im m\, S(x)$	x	$\Re e\, S(x)$	$\Im m\, S(x)$
0,00	1,00000	0,00000	1,0	0,27362	— 0,37626
0,02	0,96969	— 0,07315	1,2	0,21564	— 0,35590
0,04	0,94104	— 0,11919	1,4	0,17050	— 0,33352
0,06	0,91373	— 0,15537	1,6	0,13516	— 0,31091
0,08	0,88759	— 0,18537	1,8	0,10739	— 0,28905
0,10	0,86252	— 0,21091	2,0	0,08549	— 0,26845
0,12	0,83842	— 0,23302	2,2	0,06817	— 0,24933
0,14	0,81522	— 0,25235	2,4	0,05444	— 0,23177
0,16	0,79286	— 0,26940	2,6	0,04353	— 0,21574
0,18	0,77129	— 0,28451	2,8	0,03485	— 0,20118
0,20	0,75046	— 0,29795	3,0	0,02792	— 0,18798
0,22	0,73033	— 0,30994	3,2	0,02240	— 0,17603
0,24	0,71087	— 0,32066	3,4	0,01798	— 0,16521
0,26	0,69203	— 0,33025	3,6	0,01445	— 0,15542
0,28	0,67380	— 0,33884	3,8	0,01162	— 0,14655
0,30	0,65615	— 0,34652	4,0	0,00935	— 0,13851
0,32	0,63904	— 0,35339	4,2	0,00753	— 0,13120
0,34	0,62246	— 0,35953	4,4	0,00606	— 0,12455
0,36	0,60638	— 0,36499	4.6	0,00489	— 0,11849
0,38	0,59079	— 0,36985	4,8	0,00394	— 0,11295
0,40	0,57566	— 0,37415	5,0	0,00318	— 0,10787
0,42	0,56098	— 0,37794	5,2	0,00257	— 0,10322
0,44	0,54672	— 0,38127	5,4	0,00207	— 0,09894
0,46	0,53288	— 0,38416	5,6	0,00167	— 0,09499
0,48	0,51943	— 0,38666	5,8	0,00135	— 0,09134
0,50	0,50637	— 0,38879	6,0	0,00109	— 0,08796
0,52	0,49368	— 0,39059	7,0	0,00038	— 0,07425
0,54	0,48135	— 0,39207	8,0	0,00013	— 0,06431
0,56	0,46936	— 0,39326	9,0	0,00005	— 0,05677
0,58	0,45770	— 0,39419	10,0	0,00002	— 0,05084
0,60	0,44637	— 0,39487	12,0	0,00000	— 0,04214
0,70	0,39416	— 0,39511	14,0	0,00000	— 0,03602
0,80	0,34858	— 0,39132	20,0	0,00000	— 0,02510
0,90	0,30866	— 0,38475	∞	0	0

Grenzfalle hoher Frequenz hat man auch bei der Tragfläche endlicher Spannweite mit nahezu ebener Strömung zu rechnen, sofern die Streckung groß ist. Dies ist ein wichtiges Ergebnis.

Die Auflösung der Integralgleichung (57) kann prinzipiell in derselben Weise erfolgen wie die der viel diskutierten Gl. (58). Sie ist jedoch infolge des Dazutretens der komplexen Funktion S langwieriger. Das Ergebnis, das außerdem noch in praktischen Fällen meistens durch die Näherungsannahme (64) belastet ist, besteht bei Tragflächen mit großer Streckung und praktisch vorkommenden Werten von $\overline{\omega}$ in der Größenordnung 1,0 nur in einer kleinen Korrekturgröße gegenüber der ebenen Strömung.

Falls man nicht überhaupt auf derartige Feinheiten der Lösung verzichten will, erscheint es in diesem Falle zweckmäßiger, von einem Iterationsverfahren Gebrauch zu machen, welches an die exakte Integralgleichung (44) anknüpft. Bei gegebenem Abwind w können wir uns zunächst eine einigermaßen zutreffende Näherungslösung $\gamma_1(\xi, \eta, t)$ verschaffen, indem wir ebene Strömung annehmen und die Formel (32) anwenden. Setzen wir γ_1 in (44) ein, so erhalten wir im allgemeinen einen Abwind $w_1 \neq w$. Die Differenz $w - w_1$ können wir nun von neuem in (32) einsetzen, daraus $\Delta\gamma$ berechnen und dies als Korrekturgröße zu γ hinzufügen und so fort. Die Konvergenz dieses Verfahrens muß natürlich von Fall zu Fall untersucht werden, dürfte jedoch bei schlanken Tragflächen im allgemeinen ausreichend sein.

Der Übertragung des hier besprochenen Verfahrens auf kompressible Flüssigkeit ($\beta \neq 0$) steht nichts entgegen, sobald die allgemeine Lösung des ebenen Problems, d. h. der Integralgleichung (26) in Form einer Integraldarstellung nach Art der für $\beta = 0$ gefundenen Lösung (32) bekannt ist.

9. Systeme mehrerer Tragflächen.

Die allgemeine Form (19) der Integralgleichung der Tragflächentheorie schließt die Möglichkeit ein, daß das Flächenintegral $d\xi\, d\eta$ über mehrere, räumlich getrennte Gebiete der Tragfläche erstreckt werden kann. Als Beispiel sei der Doppeldecker oder die Tragfläche mit Spaltklappe genannt. Die Kuttasche Abflußbedingung muß natürlich für die Hinterkanten jedes Tragflächenteiles befriedigt werden.

Besitzt man für eine einzelne Tragfläche eine allgemeine Lösung $\gamma = \mathfrak{L}(w)$ der Integralgleichung, so kann man das Problem zweier Tragflächen gemäß dem Superpositionsprinzip durch schrittweise Näherung lösen. Der gegebene Abwind der Tragfläche (1) sei $w_g^{(1)}$, der Tragfläche (2) $w_g^{(2)} = 0$. Wie berechnen zunächst als Lösung in 1. Näherung

$$\gamma^{(1)} = \mathfrak{L}^{(1)}(w_g^{(1)}).$$

Infolge dieser Druckverteilung entsteht gemäß der allgemeinen Integralgleichung ein stets berechenbares Abwindfeld

$$w^{(2)} = \mathfrak{I}(\gamma^{(1)}).$$

Dieses ruft an der Tragfläche (2) die Druckverteilung

$$\Delta\gamma^{(2)} = \mathfrak{L}^{(2)}(w^{(2)})$$

hervor. Dadurch wird wiederum das Abwindfeld

$$\Delta w^{(1)} = \mathfrak{I}(\Delta\gamma^{(2)})$$

erzeugt, welches an der Tragfläche (1) die Druckverteilung

$$\Delta\gamma^{(1)} = \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta w^{(1)})$$

hervorruft. In der 2. Näherung ist die Druckverteilung der Tragfläche (1) daher durch $\gamma^{(1)} + \Delta\gamma^{(1)}$ gegeben, die der Tragfläche (2) durch $\Delta\gamma^{(2)}$. Dieses Iterationsverfahren kann man nun weiterführen. Falls der Abstand der beiden Tragflächen nicht sehr klein ist im Verhältnis zur Flächentiefe, konvergiert es recht gut, was Kleinwächter [15] für stationäre Strömung nachgewiesen hat.

Die Anwendung dieses Iterationsverfahrens ist hauptsächlich dann am Platze, wenn die Lösung $\mathfrak{L}$ in geschlossener Form bekannt ist. Es ist also vorläufig auf die zweidimensionale Strömung mit $c = \infty$ beschränkt, für welche die Lösungen (32) bzw. (34) vorliegen.

10. Verzeichnis des Schrifttums.

[1] G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig 1934, S. 210.

[2] L. Prandtl, Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 129—142 und 360—361; s. a. Luftf.-Forsch. Bd. 13 (1936), S. 313.

[3] W. Kinner, Ing.-Archiv Bd. 8 (1937), S. 47.

[4] K. Kriens, Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 65.

[5] Th. Schade, Luftf.-Forsch. Bd. 17 (1940). S. 387.

[6] Frank-Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig 1930, Bd. I, S. 418.

[7] C. Possio, L'Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 441—458.

[8] M. M. Munk, NACA Rep. Nr. 142 (1922).

[9] W. Birnbaum, Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 290.

[10] H. G. Küssner und L. Schwarz, Luftf.-Forsch. Bd. 17 (1940), S. 337—354.

[11] H. G. Küssner, Luftf.-Forsch. Bd. 17 (1940), S. 355.

[12] L. Schwarz, Berechnung der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$ für größere Werte von s, Luftf.-Forsch. Bd. 17 1940, S. 362—369.

[13] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904, S. 224.

[14] P. Cicala, L'Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 412—433.

[15] J. Kleinwächter, Luftf.-Forsch. Bd. 15 (1938), S. 127—130).

Abgeschlossen Januar 1940.

Digitized by Google

Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung.

Von L. Schwarz.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Institut für instationäre Vorgänge.

Die an sich bekannte Druckverteilung einer schwingenden Tragfläche in ebener Strömung wird auf einem neuen Wege abgeleitet und bewiesen. Die Lösung der Birnbaumschen Integralgleichung wird auf die bekannte Munksche Lösung der stationären Prandtlschen Integralgleichung der Wirbelschicht zurückgeführt und läßt sich wie diese in Integralform darstellen. Damit ist die Berechnung von Druck, Auftrieb und Moment bei gegebenem Abwind auf die Ausführung einfacher Integrationen zurückgeführt, ohne daß harmonische Analyse erforderlich ist.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Aerodynamischer Teil.
1. Das sich verformende dünne Profil.
2. Das sich harmonisch verformende dünne Profil.
3. Über die Integralgleichung der Wirbelschicht: Lösungen nach Betz und Munk.
4. Berechnung der Druckverteilung sowie der Kräfte und Momente.
III. Mathematischer Teil.
1. bis 3. Berechnung von Doppelintegralen.
4. Hilfssätze.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Das ebene Problem des schwingenden, allgemeiner: des sich harmonisch verformenden Tragflügels in idealer Flüssigkeit wurde von Küssner [9] und unabhängig von Cicala [4] gelöst. Das Ergebnis stellt sich als ein Gleichungssystem dar, in dem die Fourierkoeffizienten der Druckverteilung durch die Fourierkoeffizienten des Abwindes ausgedrückt werden. Die Herleitung dieses Ergebnisses machte umfangreiche Rechnungen notwendig, die Küssner und Cicala beide ihren Lesern erspart haben, und die somit bis vor kurzem nicht allgemein zugänglich waren. Erst Jaeckel [8] hat eine neue durchsichtige Herleitung angegeben.

Andererseits wird in einer Arbeit [10] von Küssner und dem Verfasser gezeigt, daß das erwähnte Gleichungssystem zwischen den Reihenbeiwerten von Druckverteilung und Abwind gleichwertig mit einer Integralbeziehung zwischen Druckverteilung und Abwind ist. Die Lösung des Problems kann also frei von Fourieranalyse formuliert werden. Es erscheint danach wünschenswert, auch die Herleitung dieser Lösung frei von jeder Reihenentwicklung zu geben.

Zu diesem Zweck führen wir die Integralgleichung des instationären Problems auf die bekannte »Integralgleichung der Wirbelschicht«, Formel (28), zurück, die sich in geschlossener Form lösen läßt. (Wegen einiger geschichtlicher Angaben vgl. II, 3.)

Benützt man diese Lösung, so ergeben sich nach einigen Integrationsvertauschungen die gesuchte Integralformel für die Druckverteilung und durch weitere Integrationen Formeln für Kraft und Moment. Bei verschwindender Schwingungsfrequenz erhält man daraus die bekannten Ergebnisse von Munk aus der stationären Theorie der dünnen Profile.

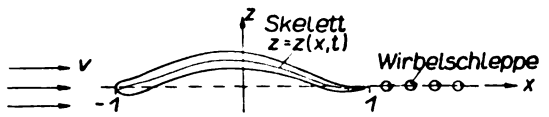


Bild 1. Dünnes Tragflügelprofil in der xz-Ebene, von der Seite $x < 0$ mit der Geschwindigkeit v angeströmt. Skelett $z = z(x, t)$. Wirbelschleppe an der Hinterkante $x = 1$ beginnend.

Um den aerodynamischen Gedankengang nicht zu unterbrechen, sind einige mathematische Überlegungen in den Teil III verwiesen.

II. Aerodynamischer Teil.

1. Das sich verformende dünne Profil.

Ein dünnes, verformungsfähiges Flügelprofil liege in der xz-Ebene, und zwar in der x-Achse, und erstrecke sich von $x = -1$ bis $+1$. Es werde von einer idealen Flüssigkeit von der Seite $x < 0$ mit der zeitlich konstanten Geschwindigkeit v angeströmt. Wir ersetzen es näherungsweise durch seine Skelettlinie, deren Verformung durch

$$z = z(x, t) \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{1}$$

gegeben sei, s. Bild 1. Es werde angenommen, daß sowohl z als auch $\frac{\partial z}{\partial x}$ klein sind, so daß sich die Skelettlinie bezüglich der Größe der Auslenkung und der Neigung nur wenig von der Strecke $z = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ unterscheidet. Die Strömung kann dann als »Störung« der Parallelströmung v in der x-Richtung aufgefaßt werden. Die Komponenten der durch die Verformung bedingten Zusatzströmung seien u, w (x- bzw. z-Komponente), die als klein gegenüber v zu betrachten sind.

Die Undurchdringlichkeit des Profils, bzw. der es ersetzenden Skelettlinie, ergibt die Randbedingung des Problems. Ein Vektor mit den Komponenten a, b in der x- bzw. z-Richtung werde mit (a, b) bezeichnet. Wir können annehmen, daß die Profilverformung durch Bewegung der Punkte der Profiloberfläche in z-Richtung erfolgt. Der Geschwindigkeitsvektor der Profilverformung ist dann $\mathfrak{b} = \left(0, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$. Der Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit an der Profiloberfläche sei $\mathfrak{v} = (u_P + v, w_P)$, wobei der Index P andeutet, daß die betreffende Größe an der Profiloberfläche zu nehmen ist. Zerlegt man diese Vektoren in Komponenten nach Richtung der Tangente bzw. Normale der Profiloberfläche, so besagt die Forderung der Undurchdringlichkeit, daß die Normalkomponenten von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{v}$ einander gleich sein müssen oder, da $\mathfrak{n} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, 1\right)$ ein Vektor in Richtung der Normalen ist: $\mathfrak{b}\,\mathfrak{n} = \mathfrak{v}\,\mathfrak{n}$, d. h. unter Benutzung der Komponenten dieser Vektoren

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(u_P + v)\,\frac{\partial z}{\partial x} + w_P.$$

Digitized by Google

Vernachlässigt man u_p gegenüber v, so erhält man die Randbedingung

$$w_p = \frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x},$$

falls

$$\frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x} = w(x,t) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt wird, also

$$w_p = w(x,t) \quad \ldots\ldots\ldots (2')$$

Zum Aufbau des Strömungsfeldes, das die Randbedingung (2') erfüllt, denken wir uns in bekannter Weise das Profil durch eine (zeitlich veränderliche) Wirbelschicht ersetzt, die eigentlich längs der Skelettlinie zu erstrecken ist, die wir aber unter der Annahme kleiner Auslenkung in die Strecke $-1 \leq x \leq 1$, $z = 0$ legen. Ihre Intensität sei $\gamma_{ges}(x,t)$, $-1 \leq x \leq 1$. Die gesamte Zirkulation um das Profil

$$\Gamma(t) = \int_{-1}^{1} \gamma_{ges}(x,t)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ist dann i. a. nicht konstant. Es lösen sich somit an der Hinterkante $x = 1$ Wirbel ab, die von der Flüssigkeit längs einer Stromlinie fortgetragen werden (»freie Wirbel«). Als Stromlinie wählen wir in erster Näherung die Stromlinie der ungestörten Parallelströmung v, so daß die Wirbelschleppe $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$, $x > 1$ sich von der Hinterkante $x = 1$ aus längs der x-Achse erstreckt. Die Tatsache, daß diese freien Wirbel von der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v fortgetragen werden, drückt sich aus in der Gleichung

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x - v\tau, t - \tau) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

speziell mit $\tau = \frac{x-1}{v}$:

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon\left(1, t - \frac{x-1}{v}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (4')$$

Die Änderung der Zirkulation um das Profil $\frac{dI'}{dt}\,dt$ während der Zeitspanne dt ist entgegengesetzt gleich dem sich an der Hinterkante ablösenden Wirbel $\varepsilon(1,t)\,dx$, wo $dx = v\,dt$ ist; denn dieser Wirbel ist auf die Strecke zu verteilen, um die er während der Zeit dt weiterrückt, da wir uns die abgehenden Wirbel lückenlos kontinuierlich auf der x-Achse verteilt denken. Somit ist wegen (3)

$$v\,\varepsilon(1,t)\,dt = -\frac{dI'}{dt}\,dt = -\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial t}\,\gamma_{ges}(\xi,t)\,d\xi \cdot dt$$

oder mit (4')

$$\varepsilon(x,t) = -\frac{1}{v}\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial t}\,\gamma_{ges}\left(\xi, t - \frac{x-1}{v}\right) d\xi, \quad x > 1 \quad \ldots (5)$$

Aus der Wirbelverteilung γ_{ges} längs des Profils und ε im Nachstrom ergibt sich nach dem Biot-Savartschen Gesetz

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{\gamma_{ges}(\xi,t)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\varepsilon(\eta,t)}{x-\eta}\,d\eta = w_p \quad \ldots (6)$$

wo w_p den Abwind am Orte des Profils bedeutet, der nach (2) und (2') als gegeben zu betrachten ist. Das erste Integral ist als Cauchyscher Hauptwert zu nehmen, was wir im Anschluß an Soehngen [16] durch $\oint$ andeuten. Da sich ε nach (5) durch γ_{ges} ausdrückt, ist aus der Integralgleichung (6) γ_{ges} zu bestimmen. Dies ist allerdings eindeutig nur dann möglich, wenn wir die Forderung des glatten Abflusses an der Hinterkante stellen: Die Geschwindigkeit an der Hinterkante soll endlich sein. Bezeichnen wir mit den Zeigern o und u Ober- bzw. Unterseite des Profils, so wird, da für eine Wirbelschicht die Intensität gleich der Differenz der Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit von Ober- und Unterseite ist,

$$\gamma_{ges} = u_o - u_u \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Somit muß

$$\gamma_{ges}(1,t) \text{ endlich} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

sein. Die Bestimmung von γ_{ges} aus (6), (2) und (2'), (5), (8) ist die zu lösende mathematische Aufgabe.

Druckverteilung. Zur Berechnung der Druckverteilung Π längs des Profils verfahren wir nach Prandtl [14]. Bezeichnen wir mit p_o, p_u den Druck auf Ober- bzw. Unterseite des Profils, so ist

$$\Pi = p_u - p_o \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Wir beschränken uns in der Eulerschen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v+u)\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

auf die Glieder 1. Ordnung und erhalten so

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung wenden wir auf die Ober- und die Unterseite des Profils an und bilden die Differenz. Es ergibt sich dann unter Einführung von Π und γ_{ges} nach (9) und (7)

$$\frac{\partial \gamma_{ges}}{\partial t} + v\frac{\partial \gamma_{ges}}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots (10)$$

Wir zerlegen nun die gesamte Wirbelschicht $\gamma_{ges}(x,t)$ am Ort der Platte in eine Schicht »gebundener Wirbel« $\gamma(x,t)$ und eine solche von »freien Wirbeln« $\varepsilon(x,t)$:

$$\gamma_{ges} = \gamma + \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

durch die Forderung, daß die Druckverteilung sich aus den gebundenen Wirbeln γ nach der Kutta-Joukowskischen Gleichung

$$\Pi = \varrho\, v\, \gamma \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

bestimmt. Dann wird aus (10)

$$\frac{\partial \gamma_{ges}}{\partial t} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Diese Gleichung soll nun interpretiert werden, um die Bezeichnung »freie Wirbelstärke« für den Bestandteil ε zu rechtfertigen. Wir schreiben sie in der Form

$$\varepsilon(x + v\,dt, t + dt) = \varepsilon(x,t) - \frac{\partial \gamma}{\partial t}\,dt \quad \ldots (13')$$

Das bedeutet aber: Nach der Zeit dt ist die freie Wirbelbelegung $\varepsilon(x,t)$ um die Strecke $v\,dt$ weitergeschritten, ist jedoch um den Zuwachs der gebundenen Wirbelbelegung γ vermindert worden; anders ausgedrückt: eine Änderung in der Intensität der gebundenen Wirbel wird kompensiert durch Entstehung von freien Wirbeln entgegengesetzten Vorzeichens, die von der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v fortgetragen werden [»freie« Wirbel].

Aus (13) ergibt sich durch Integration

$$\varepsilon(x,t) = -\frac{1}{v}\int_{-1}^{x} \frac{\partial}{\partial t}\,\gamma_{ges}(\xi,t)\,d\xi, \qquad -1 < x < 1.$$

Diese Formel schließt sich stetig an die Formel (5) für ε im Nachstrom an. Ferner ist

$$\gamma(x,t) = \gamma_{ges}(x,t) + \frac{1}{v}\int_{-1}^{x} \frac{\partial}{\partial t}\,\gamma_{ges}(\xi,t)\,d\xi \quad \ldots (14)$$

Nach Bestimmung von γ_{ges} erhält man aus (12) und (14) die Druckverteilung Π.

Die Kräfte und Momente für einen Profilabschnitt $a \leq x \leq 1$ ergeben sich durch Integration aus der Druckverteilung. Bezeichnet K die Kraft, M das Moment, bezogen auf $x = 0$, für den angegebenen Abschnitt, so ist

$$K = \int_{a}^{1} \Pi(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$M = \int_{a}^{1} x\,\Pi(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Für das ganze Profil ist $a = -1$ zu setzen.

Digitized by Google

2. Das sich harmonisch verformende dünne Profil.

Es werde nun angenommen, daß das Skelett sich nach einem harmonischen Gesetz

$$z = z(x,t) = e^{i\nu t}\,\bar{z}(x) \quad \ldots\ldots (17)$$

verformt. Daraus ergeben sich für unser Problem eine Reihe von Vereinfachungen. Zunächst ist nach (2)

$$w(x,t) = \frac{\partial z}{\partial t} + v\frac{\partial z}{\partial x} = v\,e^{i\nu t}\,\bar{w}(x) \quad \ldots (18)$$

wobei

$$\bar{w}(x) = \omega\,\bar{z}(x) + \bar{z}'(x) \quad \ldots\ldots (19)$$

ist mit

$$\omega = \frac{i\nu}{v} \quad \ldots\ldots (20)$$

ω heißt die reduzierte Frequenz. Für γ_{ges} wird dann ebenfalls ein harmonischer Ansatz gemacht:

$$\gamma_{ges}(x,t) = v\,e^{i\nu t}\,\bar{\gamma}_{ges}(x) \quad \ldots\ldots (21)$$

Daraus folgt nach (5)

$$\varepsilon(x,t) = -v\,e^{i\nu t}\,e^{-\omega x}\,2\pi\lambda \text{ für } x > 1 \quad \ldots (22)$$

wobei λ die Konstante

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi}\,\omega\,e^{\omega}\int_{-1}^{1}\bar{\gamma}_{ges}(\xi)\,d\xi \quad \ldots\ldots (23)$$

bedeutet. Die Verteilung der Wirbelstärke im Nachstrom ist somit als Folge des harmonischen Ansatzes bis auf einen konstanten Faktor bekannt. Die Integralgleichung (6) lautet dann

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\bar{\gamma}_{ges}(\xi)}{x-\xi}\,d\xi = \bar{w}(x) + \lambda\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\omega\eta}}{x-\eta}\,d\eta \quad \ldots (24)$$

In (24) erkennt man die bekannte Integralgleichung der Wirbelschicht, vgl. (28), über die im nächsten Abschnitt einiges zu sagen ist; sie ist nach $\bar{\gamma}_{ges}$ aufzulösen. Daß der zweite Summand der rechten Seite mit dem konstanten, zunächst noch unbekannten Faktor λ behaftet ist, bedeutet bei der Linearität des Problems kaum eine Erschwerung. Man erhält eine von dem Parameter λ abhängige Lösung, die in (23) eingesetzt eine Bestimmungsgleichung für λ liefert. Die Eindeutigkeit der Lösung wird durch die aus (8) folgende Bedingung

$$\bar{\gamma}_{ges}(1) \text{ endlich} \quad \ldots\ldots (25)$$

gewährleistet. Setzt man

$$\bar{\gamma}(x) = \bar{\gamma}_{ges}(x) + \omega\int_{-1}^{x}\bar{\gamma}_{ges}(x)\,dx \quad \ldots\ldots (26)$$

so wird nach (14)

$$\gamma(x,t) = v\,e^{i\nu t}\,\bar{\gamma}(x) \quad \ldots\ldots (27)$$

Daraus folgt H nach (12). Somit ist grundsätzlich die Lösung der Birnbaumschen Integralgleichung auf die Lösung der Integralgleichung der Wirbelschicht zurückgeführt.

3. Über die Integralgleichung der Wirbelschicht: Lösungen nach Betz und Munk.

Die Integralgleichung der Wirbelschicht

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)}{x-\xi}\,d\xi \quad \ldots\ldots (28)$$

spielt in der Tragflächentheorie an zwei verschiedenen Stellen eine wichtige Rolle, einmal in der Prandtlschen Theorie der tragenden Linie und zweitens in der Theorie dünner Tragflügelprofile.

Sie tritt in der Literatur anscheinend zuerst bei Prandtl auf, vgl. Formel (14) in [13]. Betz hat sie dann in seiner Dissertation auf Grund von Vorstellungen physikalischer Natur aufgelöst, vgl. [1], Formeln (2) und (15). Er findet: Bei gegebenem $g(x)$ ist

$$f(x) = -\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{g(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi}\,d\xi = f_0(x) \quad \ldots (29)$$

eine Lösung von (28). Übrigens ist

$$\int_{-1}^{1} f_0(x)\,dx = 0 \quad \ldots\ldots (30)$$

wie man durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhält. Dabei ist bemerkenswert, daß Betz nicht etwa nur eine Lösung in Form einer Reihe angibt, sondern daß es ihm gelingt, einen lösenden Kern zu finden, also die Lösung wieder in Integralform zu setzen.

Die Integralgleichung der Wirbelschicht tritt außerdem in der Theorie der dünnen Tragflügelprofile auf. Ackermann ging 1918 bei seinen Untersuchungen von ihr aus, vgl. [2], Anmerkung 1 und Formel (1). Damals lag die Betzsche Lösung noch nicht vor. Die späteren Bearbeiter des Problems dünner Tragflügelprofile, Munk [11, 12] und Glauert [7], knüpfen jedoch nicht an die Integralgleichung der Wirbelschicht an und machen sich die Betzsche Lösung infolgedessen auch nicht nutzbar. Aus ihr erhält man leicht eine für die Theorie dünner Profile brauchbare Lösung. Es ergibt sich nämlich die allgemeinste Lösung der Integralgleichung (28) in der Gestalt

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) \quad \ldots\ldots (31)$$

wo $f_1(x)$ eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Integralgleichung

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_1(\xi)}{x-\xi}\,d\xi \quad \ldots\ldots (32)$$

darstellt. Als solche ist bekannt

$$f_1(x) = \frac{\text{const.}}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots (33)$$

und dies ist auch die einzige (wie man mittlerweile unter weiten Voraussetzungen zeigen kann; aber das ist nicht von Belang). Jedenfalls ist, wenn const $= \frac{\Gamma}{\pi}$ gesetzt wird,

$$f(x) = \frac{\Gamma}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{g(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi}\,d\xi \quad \ldots (34)$$

eine Lösung der Integralgleichung, die noch einen willkürlichen Parameter enthält. Übrigens ist

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \Gamma \quad \ldots\ldots (35)$$

Wegen

$$\pi\left[\sqrt{1-x^2}\,f(x)\right]_{x=1} = \Gamma - 2\int_{-1}^{1} g(\xi)\cdot\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,d\xi \quad \ldots (36)$$

wird $f(x)$ für $x \to 1$ nur dann nicht unendlich, wenn über Γ so verfügt wird, daß

$$\Gamma = 2\int_{-1}^{1} g(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,d\xi \quad \ldots\ldots (37)$$

ist. Setzt man dies in (34) ein, so wird

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\int_{-1}^{1} g(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{x-\xi} \quad (38)$$

und diese Lösung ist für die Theorie der dünnen Profile brauchbar, weil

$$f(1) \text{ endlich} \quad \ldots\ldots (39)$$

ist. Bei Munk [12] finden sich Formeln, die mit (38) völlig gleichwertig sind, vgl. die dortigen Formeln (17) bis (20). Neuerdings haben Schröder [15] und Soehngen [16] die Integralgleichung der Wirbelschicht behandelt und die Gültigkeit und Eindeutigkeit der Lösung (34) unter weiten Voraussetzungen in völlig strenger Weise sichergestellt.

Digitized by Google

4. Druckverteilung, Kräfte und Momente für das sich harmonisch verformende Profil.

Als Lösung von (24) unter der Nebenbedingung (25) kommt (38) in Frage, wobei wir für $f(x)$ $\bar{\gamma}_{ges}(x)$ und für $g(x)$ die rechte Seite von (24) setzen müssen. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\bar{\gamma}_{ges}(x) = \oint_{-1}^{1}\bar{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x} + \lambda\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x}\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\omega\eta}}{\xi-\eta}\,d\eta \quad \ldots \quad (40)$$

Die im folgenden notwendigen Integralumformungen sind in den mathematischen Teil III. verwiesen, um den einfachen Gedankengang nicht dauernd durch umfangreiche Rechnungen unterbrechen zu müssen. Das letzte Integral in (40) kann in ein einfaches Integral umgeformt werden, vgl. (69), (70), so daß wir nunmehr erhalten

$$\bar{\gamma}_{ges}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\oint_{-1}^{1}\bar{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x} + 2\lambda\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\int_{1}^{\infty}e^{-\omega\eta}\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}}\,\frac{d\eta}{x-\eta} \quad \ldots \quad (41)$$

Bestimmung von λ. Integriert man diese Formel von -1 bis $+1$, so erhält man nach (75) und (78) mit den Abkürzungen

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\bar{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,d\xi \quad \ldots \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= H_0^{(2)}(-i\omega)\\ H_1 &= H_1^{(2)}(-i\omega)\end{aligned}\right\}\ \text{Hankelsche Funktionen 2. Art 0ter, bzw. 1ter Ordnung} \quad \ldots \quad (43)$$

$$\omega\int_{-1}^{1}\bar{\gamma}_{ges}(x)\,dx = 2\pi P\omega + \lambda\pi^2\omega(iH_0+H_1) + 2\lambda\pi e^{-\omega},$$

andererseits nach Definition (23) von λ:

$$= 2\lambda\pi e^{-\omega},$$

somit

$$\lambda\pi = -\frac{2P}{iH_0+H_1} \quad \ldots \quad (44)$$

Bestimmung von $\bar{\gamma}(x)$ und $\Pi(x,t)$. Nach (26) und (41) wird wegen (76) und (77)

$$\bar{\gamma}(x) = \bar{\gamma}_{ges}(x) + \omega\int_{-1}^{x}\bar{\gamma}_{ges}(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\oint_{-1}^{1}\bar{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{x-\xi}{\xi p} + 2\omega P\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\bar{w}(\xi)\,\omega\Lambda(x,\xi)\,d\xi + \lambda\pi(iH_0+H_1)\,\omega\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right)$$

$$+\lambda\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,iH_0,$$

wobei zur Abkürzung

$$\Lambda(x,\xi) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\xi x+\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-x^2}}{1-\xi x-\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots \quad (45)$$

gesetzt ist. Führt man für λ den berechneten Wert (44) ein, so fällt das Glied mit $\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right)$ fort und unter Beachtung von (42) ergibt sich

$$\bar{\gamma}(x) = \frac{2}{\pi}\oint_{-1}^{1}\bar{w}(\xi)\cdot\left[\omega\Lambda(x,\xi) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\cdot\left\{\frac{1}{\xi-x} - \frac{iH_0}{iH_0+H_1}\right\}\right]d\xi \quad (46)$$

Wie üblich, setzen wir nun

$$T(-i\omega) = \frac{-iH_0^{(2)}(-i\omega)+H_1^{(2)}(-i\omega)}{iH_0^{(2)}(-i\omega)+H_1^{(2)}(-i\omega)} \quad \ldots \quad (47)$$

Damit wird wegen (12), (27) und (18) endgültig die Druckverteilung

$$\Pi(x,t) = \frac{2}{\pi}\varrho v\oint_{-1}^{1}w(\xi,t)\cdot\left[\omega\Lambda(x,\xi) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\left\{\frac{1}{\xi-x} - \frac{1-T(-i\omega)}{2}\right\}\right]d\xi \quad (48)$$

mit Λ nach (45) und T nach (47). Für $\omega = 0$ entsteht daraus wegen $T(0) = 1$ die bekannte Formel für den stationären Spezialfall

$$\Pi(x) = \frac{2}{\pi}\varrho v^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\oint_{-1}^{1}\frac{dz(\xi)}{d\xi}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x} \quad \ldots \quad (48')$$

Wir setzen nun, um den Anschluß an Birnbaum [3], Küssner [9] sowie Küssner-Schwarz [10] zu gewinnen,

$$\left.\begin{aligned} x &= -\cos\Theta\\ \xi &= -\cos\vartheta\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (49)$$

so daß $0 \leq \vartheta, \Theta \leq \pi$ für $-1 \leq x, \xi \leq 1$. Dann wird

$$\Pi(-\cos\Theta,t) = \frac{2}{\pi}\varrho v\int_{0}^{\pi}w(-\cos\vartheta,t)\cdot\left[\omega L(\Theta,\vartheta)\sin\vartheta - \frac{\sin\Theta}{\cos\vartheta-\cos\Theta} + \operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\left\{(1-\cos\vartheta)\frac{1+T(-i\omega)}{2}+\cos\vartheta\right\}\right]d\vartheta \quad (50)$$

Das ist die in [10] bereits hergeleitete von Fourieranalyse freie Darstellung der Druckverteilung. Dabei ist

$$L(\Theta,\vartheta) = \Lambda(-\cos\Theta,-\cos\vartheta) = \Lambda(\cos\Theta,\cos\vartheta)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(\Theta+\vartheta)}{1-\cos(\Theta-\vartheta)} = \ln\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta+\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\vartheta)}\right|. \quad (51)$$

Zur Berechnung von Kraft und Moment für den ganzen Flügel haben wir nach (15) und (16) Π und $x\,\Pi$ von $x = -1$ bis $+1$ zu integrieren. Benützen wir dazu Formel (48) und vertauschen die Integrationen über ξ und x, so ergibt sich

$$K = \int_{-1}^{1}\Pi(x,t)\,dx =$$

$$2\varrho v\int_{-1}^{1}w(\xi,t)\left[\omega\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{1+T(-i\omega)}{2}\right]d\xi \quad (52)$$

$$M = \int_{-1}^{1}x\,\Pi(x,t)\,dx = \varrho v\int_{-1}^{1}w(\xi,t)\cdot\left[\omega\xi\sqrt{1-\xi^2} - 2\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{1-T(-i\omega)}{2}\right]d\xi \quad (53)$$

Beziehen wir das Moment nicht auf die Plattenmitte, sondern auf den sog. vorderen Neutralpunkt $x = -\frac{1}{2}$, so wird das Moment

Digitized by Google

$$M_0 = M + \frac{1}{2} K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Für $\omega = 0$ erhalten wir die bekannten Munkschen Integrale für Kraft und Moment aus der Theorie der dünnen Profile

$$K = 2\varrho v^2 \int_{-1}^{1} \frac{dz(\xi)}{d\xi} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (52')$$

$$M = -2\varrho v^2 \int_{-1}^{1} \frac{dz(\xi)}{d\xi} \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (53')$$

vgl. [6], Formel (4, 68). In [5], E II 9 Formel (9, 26) ist durch eine partielle Integration demgegenüber die Ableitung von z durch z selbst ersetzt.

Wir führen wieder Θ und ϑ statt x und ξ ein. Außerdem werde für $n \geq 0$

$$v e^{ivt} P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} w(-\cos\vartheta, t) \cdot \cos n\vartheta \, d\vartheta \quad \ldots \quad (55)$$

gesetzt. Dann ist

$$K = \pi\varrho v^2 e^{ivt} [\omega (P_0 - P_2) + (1 + T(-i\omega))(P_0 - P_1)] \quad (56)$$

$$M = \pi\varrho v^2 e^{ivt} \left[P_2 - P_0 - \frac{\omega}{4}(P_1 - P_3) + \frac{1}{2}(1 - T(-i\omega))(P_0 - P_1) \right] \quad \ldots \quad (57)$$

$$M_0 = \pi\varrho v^2 e^{ivt} \left[P_2 - P_1 + \frac{\omega}{4}(2P_0 - P_1 - 2P_2 + P_3) \right] \quad (58)$$

(56) und (58) stimmen mit dem Ergebnis von Küssner überein, siehe in [9] die Formeln (33) und (34) in Verbindung mit (28).

Will man Auftrieb K und Moment M (bezüglich $x = 0$) nicht für den ganzen Flügel, sondern für den Abschnitt von $x = a$ bis zur Hinterkante $x = +1$ kennen, so ist nach (15) und (16) mit

$$a = -\cos\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

$$K = \varrho v^2 e^{ivt} \left[(\pi - \psi) \left\{ \omega (P_0 - P_2) + (1 + T(-i\omega))(P_0 - P_1) \right\} + (1 - T(i\omega)) \sin\psi (P_0 - P_1) \right] + \frac{2}{\pi} \varrho v \int_{-1}^{1} w(-\cos\vartheta, t)\, L(\vartheta, \psi) \cdot \left[\omega (\cos\psi - \cos\vartheta) - 1 \right] \sin\vartheta \, d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

$$M = \varrho v^2 e^{ivt} \left[(\pi - \psi) \left\{ \frac{\omega}{4}(P_3 - P_1) + (P_2 - P_0) + \frac{1 - T(-i\omega)}{2}(P_0 - P_1) \right\} + \sin\psi \left\{ \frac{\omega}{2}(P_0 - P_2) + (1 + T(-i\omega))(P_0 - P_1) \right\} - \sin\psi\cos\psi \frac{1 - T(-i\omega)}{2}(P_0 - P_1) \right] + \frac{2}{\pi} \varrho v \int_0^{\pi} w(-\cos\vartheta, t)\, L(\vartheta, \psi) \cdot \left[\frac{\omega}{2}(\cos^2\vartheta - \cos^2\psi) + \cos\vartheta \right] \sin\vartheta \, d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Damit ist zur Berechnung von Druckverteilung, Auftrieb und Moment für das ganze Profil bzw. einen Profilabschnitt nur noch die Ausführung einiger einfacher Integrationen erforderlich.

III. Mathematischer Teil.

Im Vorhergehenden war die Umformung einiger Doppelintegrale in einfache Integrale notwendig. Wir haben dort auf diesen mathematischen Teil verwiesen, um den aerodynamischen Gedankengang nicht durch Rechnungen nebensächlicher Art unterbrechen zu müssen. Zudem birgt die gemeinsame Behandlung der mathematischen Probleme einerseits die Möglichkeit zu einigen Kürzungen in sich und gestattet uns andererseits, auf die subtile Frage nach der Zulässigkeit der Vertauschung der Integrationsreihenfolge etwas näher einzugehen. Denn alle vorkommenden Doppelintegrale werden diesem Prozeß unterworfen, da dann das innere Integral ausführbar wird. Und zwar treten folgende Integrale auf:

$$\oint_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{\xi - x} = \frac{\pi}{2} + \arcsin x + \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\, \Lambda(x, \xi) \quad (62)$$

$$\int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{\eta - x} = \frac{\pi}{2} + \arcsin x + 2\sqrt{\frac{\eta - 1}{\eta + 1}} \left[\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{\eta + 1}{\eta - 1}} - \frac{\pi}{2} \right] \quad \ldots \quad (63)$$

$$\oint_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{x - \xi} = \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{x - \eta} = \pi - \pi \sqrt{\frac{\eta + 1}{\eta - 1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Die Veränderlichen x, ξ, η variieren dabei (und auch später) in den Bereichen $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq \xi \leq 1$, $\pm\eta > 1$. $\Lambda(x, \xi)$ ist in (45) definiert.

1. bis 3. Berechnung von Doppelintegralen.

1. Wir behandeln zunächst das Doppelintegral in Formel (40) ausführlich. Bei den späteren Umformungen können wir uns dann kürzer fassen[1]).

Das Integral $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\omega\eta}}{\xi - \eta} d\eta$ konvergiert für $\xi < 1$ in der Halbebene $\Re\omega > 0$ ausschließlich $\omega = 0$ und ist stetig in beiden Veränderlichen. Für $\xi \to 1$ wird es logarithmisch unendlich. Jedenfalls existiert dann der Cauchysche Hauptwert

$$\oint_{\xi=-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{\xi - x} \int_{\eta=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega\eta}}{\xi - \eta} d\eta.$$

Es sei N eine reelle Größe > 1. Indem wir in dem ebengenannten Doppelintegral ∞ durch N ersetzen, behaupten wir, daß die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden darf, unbeschadet dessen, daß wir es mit einem Causchyschen Hauptwert zu tun haben:

$$\oint_{\xi=-1}^{1} \int_{\eta=1}^{N} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\, e^{-\omega\eta} \frac{1}{(\xi - x)(\xi - \eta)} \cdot d\eta\, d\xi = \int_{\eta=1}^{N} \oint_{\xi=-1}^{1} \ldots d\xi\, d\eta \quad \ldots \quad (66)$$

Das ist eine Folge des Hilfssatzes 1, dessen Beweis in Abschnitt III, 4 gegeben wird.

Hilfssatz 1. Es sei in dem Rechteck $a \leq \xi \leq b$, $c \leq \eta \leq d$ die Funktion $f(\xi, \eta)$ stetig und es existiere dort

[1]) Ein nicht mathematisch geschulter Leser erspare sich die folgenden Ausführungen, in denen gezeigt wird, daß die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen erlaubt ist, und knüpfe an Formelzeile (68) an.

Digitized by Google

die ebenfalls stetige partielle Ableitung nach ξ, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$. Außerdem sei $a < x < b$. Dann ist

$$\int_{\eta=c}^{d} \oint_{\xi=a}^{b} \frac{f(\xi,\eta)}{\xi - x}\, d\xi\, d\eta = \oint_{\xi=a}^{b} \int_{\eta=c}^{d} \frac{f(\xi,\eta)}{\xi - x}\, d\eta\, d\xi.$$

Wir wenden den Hilfssatz an mit $-1 < a < x < \frac{1+x}{2} < b < 1$, $c = 1 < d = N$. Dann ist

$$\int_{1}^{N} \oint_{-1}^{b} = \oint_{-1}^{b} \int_{1}^{N}.$$

Gehen wir nun mit b nach 1, so werden wir zeigen, daß die linke Seite nach $\int_1^N \oint_{-1}^{1}$ strebt oder, was dasselbe ist, daß

$$\int_1^N \int_b^1 \to 0 \quad \text{für } b \to 1.$$

Dies ist aber richtig, weil mit einer nur von N und x, aber nicht von b abhängigen Schranke M

$$\left| \int_1^N \int_b^1 \right| < M \int_1^N \int_b^1 \frac{d\xi\, d\eta}{|1-\xi|\,(\eta-\xi)} \to 0 \text{ für } b \to 1.$$

Die rechte Seite besitzt dann auch einen Limes, der nach Definition eines uneigentlichen Integrals $\oint_{-1}^{1} \int_1^N$ ist. Damit ist der Nachweis von (66) beendet.

Gehen wir jetzt in (66) mit N nach ∞, so strebt die rechte Seite nach $\int_1^\infty \oint_{-1}^{1}$, sofern sie einen Limes besitzt. Wir können den Nachweis für seine Existenz sparen, da wir zeigen wollen, daß die linke Seite nach einem Grenzwert strebt und darüber hinaus, daß dieser Grenzwert $= \oint_{-1}^{1} \int_1^\infty$ ist. Das bedeutet

$$\oint_{-1}^{1} \frac{F(\xi,N)}{\xi - x}\, d\xi \to 0 \text{ für } N \to \infty \quad \ldots \quad (67)$$

wenn wir setzen

$$F(\xi,N) = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \int_N^\infty \frac{e^{-\omega\eta}}{\xi - \eta}\, d\eta.$$

Diese Tatsache entnimmt man

Hilfssatz 2. Es sei $\sqrt{1-\xi^2}\, F(\xi,N)$ im abgeschlossenen Intervall $-1 \leqq \xi \leqq 1$ bezüglich ξ stetig und im offenen Intervall $-1 < \xi < 1$ differenzierbar; weiter sei gleichmäßig in ξ $\lim_{N\to\infty} \sqrt{1-\xi^2}\, F(\xi,N) = 0$, und es gebe zu jedem ξ des offenen Intervalls $-1 < \xi < 1$ eine volle Umgebung, so daß dort $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ für alle N gleichmäßig beschränkt ist. Dann gilt die Limesrelation (67).

Wegen des Beweises siehe Abschnitt III, 4. Die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes werden durch das oben definierte $F(\xi,N)$ erfüllt. Dies folgt bezüglich der Ableitung von F aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \left[\frac{1}{1-\xi^2} - \omega\right] F - \frac{e^{-\omega N}}{N-\xi} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}},$$

die man aus Konvergenzgründen erst für $\Re\,\omega > 0$ herleitet, dann aber wegen der Regularität der vorkommenden Funktionen auf rein imaginäre ω ausdehnen kann. Damit ist die Vertauschbarkeit der Reihenfolge in dem Doppelintegral, von dem wir ausgingen, bewiesen.

Es ist also

$$\oint_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{\xi - x} \int_1^\infty \frac{e^{-\omega\eta}}{\xi - \eta}\, d\eta$$

$$= \int_1^\infty e^{-\omega\eta}\, d\eta \oint_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{(\xi - x)(\xi - \eta)}\, d\xi$$

$$= \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \frac{d\eta}{x - \eta} \oint_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - \eta}\right] d\xi \quad (68)$$

nach (64) und (65) also

$$= \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \frac{1}{x - \eta}\, \pi \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}}\, d\eta;$$

setzen wir

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \frac{d\eta}{x - \eta} \quad (69)$$

so ist schließlich

$$\oint_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{\xi - x} \int_1^\infty \frac{e^{-\omega\eta}}{\xi - \eta}\, d\eta = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, F(x) \quad (70)$$

2. Zur Gewinnung von $\overline{\gamma}(x)$ benötigten wir $\omega \int_{-1}^{x} F(x)\, dx$.

Um dies Integral zu berechnen, setzen wir aus Konvergenzgründen zunächst $\Re\omega > 0$ voraus. Durch Grenzübergang können die Ergebnisse dann auf rein imaginäre ω ausgedehnt werden.

$$\omega \int_{-1}^{x} F(x)\, dx = \frac{2\omega}{\pi} \int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \frac{d\eta}{x - \eta},$$

nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$= \frac{2\omega}{\pi} \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}}\, d\eta \int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{\eta - x};$$

für das innere Integral verwenden wir Formel (63) und erhalten so

$$\omega \int_{-1}^{x} F(x)\, dx = \omega\, (i H_0 + H_1) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x\right) + 2 e^{-\omega}$$

$$- \frac{4\omega}{\pi} \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{\eta+1}{\eta-1}}\, d\eta \quad \ldots \quad (71)$$

Dabei ist von der Formel

$$i H_0 + H_1 = i H_0^{(2)}(-i\omega) + H_1^{(2)}(-i\omega)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}}\, d\eta \quad \ldots \quad (72)$$

Gebrauch gemacht, die sich aus

$$i H_0 = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} \quad \ldots \quad (73)$$

$$H_1 = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty e^{-\omega\eta} \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} \quad \ldots \quad (74)$$

ergibt. Bezüglich (73) vgl. [17], S. 170 § 6.14, Formel (2), während (74) sich aus (73) durch Differentiation ergibt wegen der bekannten Relation aus der Theorie der Zylinder-

Digitized by Google

funktionen $H_0' = -H_1$. Für $x = 1$ erhalten wir aus (71) die Formel

$$\omega \int_{-1}^{1} F(x)\,dx = \pi\omega\,(iH_0 + H_1) + 2e^{-\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

die zur Bestimmung von λ gebraucht wurde.

Wir befreien in (71) das Integral der rechten Seite durch partielle Integration von dem arc tg; dann ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{\eta+1}{\eta-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}}\cdot\frac{1}{x-\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta^2-1}}\right],$$

wenn (73) beachtet wird,

$$\omega\int_{-1}^{x} F(x)\,dx = \omega\,(iH_0+H_1)\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right) - F(x) + iH_0\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

3. Wir schicken einen Hilfssatz voraus, dessen Beweis in III, 4 erbracht wird.

Hilfssatz 3. Für $a \leqq \xi \leqq b$, $c \leqq x \leqq d$ sei $f(\xi, x)$ stetig und es mögen die ebenfalls stetigen partiellen Ableitungen nach ξ und x, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial f}{\partial x}$, existieren. Dann ist

$$\int_{\xi=a}^{b}\ \Xint-_{x=c}^{d}\frac{f(\xi,x)}{\xi-x}\,dx\,d\xi = \int_{x=c}^{d}\ \Xint-_{\xi=a}^{b}\frac{f(\xi,x)}{\xi-x}\,d\xi\,dx.$$

Mit seiner Hilfe vertauschen wir sogleich die Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral. Obgleich darin der Integrand nicht im ganzen Intervall stetig ist, sondern z. B. an den Intervallenden zu uneigentlicher Integration Veranlassung gibt, so gestattet der Hilfssatz doch die Integrationsvertauschung wenigstens für einen Teilbereich, der die kritische Stelle des als Cauchyschen Hauptwert zu nehmenden Integrals einschließt. Die Ausdehnung auf den Vollbereich folgt dann durch ähnliche Betrachtungen wie in III, 4.

Es sei $\overline{w}(\xi)$ stückweise stetig und stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\ \Xint-_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x} = -\Xint-_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,d\xi\cdot\int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{\xi-x},$$

nach (62)

$$= \int_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,d\xi\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right)+\int_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\,\Lambda(x,\xi)\,d\xi,$$

also mit der Abkürzung (42)

$$\int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\ \Xint-_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x} = \pi P\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right)+\int_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\,\Lambda(x,\xi)\,d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Im Sonderfall $x = 1$ haben wir

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\ \Xint-_{-1}^{1}\overline{w}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi-x} = \pi^2 P \quad (78)$$

4. Hilfssätze.

ε bedeutet im folgenden eine positive (meist kleine) Größe.

Beweis von Hilfssatz 1 (vgl. III, 1).

Es genügt offenbar zum Beweis, die Integration bezüglich ξ über ein zur kritischen Stelle $\xi = x$ symmetrisch gelegenes Intervall zu erstrecken. Wir setzen demgemäß $a = x - \varepsilon$, $b = x + \varepsilon$. Man beachte

$$\Xint-_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{d\xi}{\xi-x} = 0.$$

Dann ist

$$\Xint-_{\xi=x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\int_{\eta=c}^{d}\frac{f(\xi,\eta)}{\xi-x}\,d\eta\,d\xi = \int_{\xi=x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\int_{\eta=c}^{d}\frac{f(\xi,\eta)-f(x,\eta)}{\xi-x}\,d\eta\,d\xi;$$

dabei braucht nicht mehr der Hauptwert genommen zu werden, da wegen der Existenz und Stetigkeit von $\partial f/\partial\xi$ der Integrand stetig ist. Nun kann die Aufeinanderfolge der Integrationen vertauscht werden, also

$$= \int_{\eta=c}^{d}\ \Xint-_{\xi=x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{f(\xi,\eta)-f(x,\eta)}{\xi-x}\,d\xi\,d\eta = \int_{\eta=c}^{d}\ \Xint-_{\xi=x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{f(\xi,\eta)}{\xi-x}\,d\xi\,d\eta.$$

Beweis von Hilfssatz 2 (vgl. III, 1).

x sei fest. Außerdem sei ε so klein gewählt, daß $x-\varepsilon$ und $x+\varepsilon$ zu jener im Hilfssatz genannten Umgebung von x gehören, in der $\frac{\partial f}{\partial\xi}$ für alle N gleichmäßig beschränkt ist. Zunächst ist

$$\Xint-_{-1}^{1}\frac{f(\xi,N)}{\xi-x}\,d\xi = \int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{f(\xi,N)}{\xi-x}\,d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{f(\xi,N)-f(x,N)}{\xi-x}\,d\xi.$$

Wegen

$$\left|\frac{f(\xi,N)-f(x,N)}{\xi-x}\right| < M \text{ für } x-\varepsilon \leqq \xi \leqq x+\varepsilon,$$

wo M unabhängig von N ist, hat man

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\right| < 2M\varepsilon.$$

Andererseits ist bei vorgegebenem $\delta > 0$, $|f(\xi,N)| < \delta/\sqrt{1-\xi^2}$ für alle ξ und für alle $N > N_0(\delta)$. Dabei kann die Schranke N_0 unabhängig von ξ gewählt werden. Somit folgt

$$\left|\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{f(\xi,N)}{\xi-x}\,d\xi\right| < \delta\left\{\left|\int_{1}^{x-\varepsilon}\right|+\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x)}\right\}.$$

Bei vorgegebenem $\delta_1 > 0$ wählt man 1. ε in Abhängigkeit von δ_1 so, daß $2M\varepsilon < \frac{\delta_1}{2}$ und 2. δ dann in Abhängigkeit von ε so, daß $\delta\left\{\ldots\right\} < \frac{\delta_1}{2}$. Dann ist

$$\left|\Xint-_{-1}^{1}\frac{f(\xi,N)}{\xi-x}\,d\xi\right| < \delta_1 \text{ für alle } N > N_0(\delta) = N_1(\delta_1), \text{ w. z. b. w.}$$

Beweis von Hilfssatz 3 (vgl. III, 3).

Es genügt offenbar den Spezialfall zu behandeln, daß $c = a$ und $d = b$ ist. In diesem Fall lautet die Behauptung

$$\int_{x=a}^{b}\ \Xint-_{\xi=a}^{b}\frac{f(\xi,x)}{\xi-x}\,d\xi\,dx = \int_{\xi=a}^{b}\ \Xint-_{x=a}^{b}\frac{f(\xi,x)}{\xi-x}\,dx\,d\xi \quad (79)$$

Digitized by Google

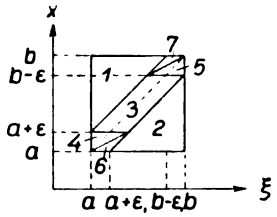


Bild 2. Zum Beweis von Hilfssatz 3. Einteilung des Integrationsbereichs.

Der Integrationsbereich ist also ein achsenparalleles Quadrat in der ξx-Ebene durch die Punkte (a, a) und (b, b). Die diese beiden Punkte verbindende Diagonale ist der geometrische Ort der zur Bildung des Cauchyschen Hauptwertes Anlaß gebenden singulären Stellen $\xi = x$; vgl. Bild 2. Nun sei ε eine positive Größe $< \frac{b-a}{2}$. Dann behaupten wir, daß die linke Seite von (79)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{x=a+\varepsilon}^{b} \int_{\xi=a}^{x-\varepsilon} + \int_{x=a}^{b-\varepsilon} \int_{\xi=x+\varepsilon}^{b} \frac{f(\xi, x)}{\xi - x} \, d\xi \, dx \right] \quad (80)$$

ebenso daß die rechte Seite von (79)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\xi=a}^{b-\varepsilon} \int_{x=\xi+\varepsilon}^{b} + \int_{\xi=a+\varepsilon}^{b} \int_{x=a}^{\xi-\varepsilon} \frac{f(\xi, x)}{\xi - x} \, dx \, d\xi \right] \quad (81)$$

Will man dies anschaulich deuten, so ziehe man, s. Bild 2, durch die Punkte $(a + \varepsilon, a)$ und $(a, a + \varepsilon)$ die Parallele zu der (a, a) und (b, b) verbindenden Diagonale; das Quadrat wird dadurch in die beiden Dreiecke 1 und 2 sowie einen diagonalen Streifen aufgeteilt. (80) und (81) besagen nun, daß sowohl die linke, wie die rechte Seite von (79) im Limes $\varepsilon \to 0$ gleich der Summe der Integrale über die Dreiecke 1 und 2 ist, wobei einmal zuerst über ξ und dann über x und das andere Mal in umgekehrter Reihenfolge integriert wird. Da jedoch wegen der Stetigkeit des Integranden in den beiden Dreiecken die Integrationsreihenfolge gleichgültig ist, ist mit den Formeln (80) und (81) auch (79) als richtig erwiesen.

Da der Nachweis von (81) nichts Neues bietet, beschränken wir uns auf den Beweis von (80). Bild 2 werde vervollständigt, indem wir in dem Diagonalstreifen durch Parallelen zur ξ-Achse durch die Punkte $(a, a + \varepsilon)$ und $(b, b - \varepsilon)$ das Parallelogramm 3 abgrenzen. Die beiden restlichen Trapeze werden dann noch durch ihre von (a, a) bzw. (b, b) aus gezogenen Diagonalen in die Dreiecke 4,5, 6, 7 zerlegt. Es erleichtert die Ausdrucksweise, wenn wir verabreden, daß ein Integral über einen Bereich der ξx-Ebene stets als Doppelintegral aufzufassen ist, bei dem zuerst über ξ und dann über x integriert wird. Offenbar ist es hinreichend zu zeigen, daß die Integrale über die Bereiche 3, 4, 5, 6, 7 einzeln nach 0 streben für $\varepsilon \to 0$.

Es sei M eine gemeinsame Schranke für $f(\xi, x)$, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial f}{\partial x}$. Es ist

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{f(\xi, x)}{\xi - x} \, d\xi = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{f(\xi, x) - f(x, x)}{\xi - x} \, d\xi$$

und da der letzte Integrand stetig und $\leq M$ ist, folgt, daß der Integrand über den Bereich 3, absolut genommen, $\leq 2M\varepsilon\,(b-a)$ ist, also nach 0 strebt für $\varepsilon \to 0$. Dieselbe Überlegung führt für die Bereiche 4 und 5 zum Ziel.

Bezüglich des Bereiches 6 bemerken wir zunächst

$$\left| \int_{2x-a}^{x+\varepsilon} \frac{f(\xi, x)}{\xi - x} \, d\xi \right| < M \int_{2x-a}^{x+\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi - x} = M \ln \frac{\varepsilon}{x - a},$$

also

$$\left| \int_{a}^{a+\varepsilon} \int_{2x-a}^{x+\varepsilon} \frac{f(\xi, x)}{\xi - x} \, d\xi \, dx \right| < M \int_{a}^{a+\varepsilon} \ln \frac{\varepsilon}{x - a} \, dx = M\varepsilon,$$

d. h. das Integral über den Bereich 6 strebt nach 0 für $\varepsilon \to 0$; genau so schließt man für Bereich 7. Damit ist der gewünschte Nachweis von (80) beendet.

IV. Zusammenfassung.

Die von Birnbaum [3] begründete und von Küssner [9] und Cicala [4] weiterentwickelte Methode zur Behandlung einer sich harmonisch verformenden Tragfläche in ebener Flüssigkeitsströmung unter Vernachlässigung der Kompressibilität und Zähigkeit erfährt eine in mathematischer Hinsicht abschließende Darstellung. Druckverteilung sowie Kräfte und Momente lassen sich bei Vorgabe der Verformung durch einfache Integrationen nach den hier gegebenen Formeln berechnen. Diese Theorie instationärer Bewegung befindet sich damit in demselben Grad der Vollkommenheit, den ihr stationäres Analogon, die sog. Theorie der dünnen Tragflächenprofile, schon längst erreicht hat.

V. Schrifttum.

[1] Betz, A., Tragflügeltheorie. Berichte und Abhandlungen der WGL, 1. Jahrg. II. 2 (1920), Auszug aus der Dissertation von Betz, Göttingen (1919).

[2] Birnbaum, W. — Ackermann, W., Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923).

[3] Birnbaum, W., Das ebene Problem des schlagenden Flügels. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924).

[4] Cicala, P., Le azioni aerodinamiche sul profilo oscillante. L'Aerotecnica Bd. 16 (1936).

[5] Durand, Aerodynamic Theory Bd. II (1935).

[6] Fuchs, Hopf, Seewald, Aerodynamik, Bd. II, Berlin (1935).

[7] Glauert, H., A theory of thin aerfoils. Reports and Memoranda Nr. 910 (1924).

[8] Jaeckel, K., Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung für den zweidimensionalen Tragflügel bei beliebigen periodischen Bewegungen. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939).

[9] Küssner, H. G., Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. . Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936).

[10] Küssner, H. G. — Schwarz, L., Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 337.

[11] Munk, Max, M., General theory of thin wing sections. NACA Report Nr. 142 (1922).

[12] Munk, Max M., Elements of the wing sections theory and of the wing theory. NACA Report Nr. 191 (1924).

[13] Prandtl, L., Tragflügeltheorie, I. Mitteilung (1918) in: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik von L. Prandtl und A. Betz, Göttingen (1927).

[14] Prandtl, L., Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. Vorträge a. d. Gebiet d. Hydro- u. Aerodynamik (Innsbruck 1922), Berlin 1924.

[15] Schröder; K., Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften (1938), Phys.-math. Klasse, S. 345.

[16] Sochngen, H., Die Lösungen der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x - \xi} \, d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Mathem. Z. Bd. 45 (1939).

[17] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel funktions, Cambridge (1922).

Abgeschlossen Juni 1940.

Digitized by Google

Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage.

I. Analytischer Teil.

Von Th. Schade*).

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Institut für instationäre Vorgänge.

Ausgehend von der Dissertation von W. Kinner wird das Problem der Kreisscheibe behandelt, welche im gleichförmigen Luftstrom kleine Schwingungen ausführt, deren Amplituden ganzen Funktionen zweiten Grades in x und y entsprechen. Die Druckverteilung der schwingenden Kreisscheibe wird mit Hilfe des Prandtlschen Beschleunigungspotentials bestimmt. Diese Aufgabe führt zu Systemen von linearen Gleichungen, deren Koeffizienten sich mit Hilfe von Exponentialfunktionen und Hankelschen Funktionen exakt berechnen lassen.

Im vorliegenden analytischen Teil werden alle hierzu erforderlichen Gleichungen abgeleitet. Die numerische Rechnung wird später veröffentlicht werden.

Gliederung.

1. Das Beschleunigungspotential.
2. Die Potentialfunktionen erster Art.
3. Abwindberechnung.
4. Darstellung der Schlagbewegung.
5. Darstellung der Drehschwingung um die y-Achse.
6. Darstellung der Biegeschwingungen (parabolisch).
7. Darstellung der Drehschwingung um die x-Achse.
8. Darstellung der Biegeschwingung (hyperbolisch).
9. Die Potentialfunktionen zweiter Art.
10. Die Abflußbedingung.
11. Kompensationsrechnung.
12. Druckverteilung, Auftrieb und Momente.
13. Schlußbemerkung.
14. Verzeichnis des Schrifttums.

Diese Arbeit ist im Anschluß an die Dissertation von W. Kinner, »Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage«, Göttingen 1936 [2][1]), entstanden. Sie behandelt das entsprechende Problem für die schwingende Kreisscheibe.

Die für die Bestimmung der Kräfte und Momente einer schwingenden und sich verformenden Tragfläche notwendig gegebene Größe ist die z-Koordinate der tragenden Fläche, $z = z\,(x, y, t)$. Die Abwindfunktion $W\,(x, y, t)$ steht mit ihr in der Beziehung

$$\frac{\partial z}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = W.$$

Es sollen nun in dieser Arbeit alle Plattenschwingungen und Verformungen 2. Grades in x und y berechnet werden. Somit wird die Gesamtheit der dazu benötigten Abwindfunktionen dargestellt durch

$$W = [A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2]\, e^{i\nu t},$$

wobei die Konstanten $A \ldots F$ beliebige komplexe Werte haben können.

Zur Abkürzung der späteren Formelausdrücke sei hier noch folgende symbolische Schreibweise eingeführt.

$$\frac{e^{+\omega y}}{2} \underbrace{\int_0^{\omega} dz \int_0^{z} dz \int_0^{z} dz \ldots \int_0^{z}}_{n} f(z\,x_0)\, e^{-z y}\, dz \pm$$

$$\pm \frac{e^{-\omega y}}{2} \underbrace{\int_0^{\omega} dz \int_0^{z} dz \int_0^{z} dz \ldots \int_0^{z}}_{n} f(z\,x_0)\, e^{+z y}\, dz =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\omega} \int \int \ldots \int_*}_{n} f(z\,x_0) \frac{\mathfrak{Cof}}{\mathfrak{Sin}} \left[(\omega - z)\, y\right] dz$$

$$\frac{e^{+\omega i z \cos\alpha}}{(z\cos\alpha + i \sin\alpha)^n} + \frac{e^{+\omega i z \cos\alpha}}{(z\cos\alpha - i\sin\alpha)^n} = 2\,R\left(\frac{e^{\omega i z \cos\alpha}}{(z\cos\alpha + i\sin\alpha)^n}\right)$$

$$\frac{e^{+\omega i z \cos\alpha}}{(z\cos\alpha + i \sin\alpha)^n} - \frac{e^{+\omega i z \cos\alpha}}{(z\cos\alpha - i\sin\alpha)^n} = 2\,I\left(\frac{e^{\omega i z \cos\alpha}}{(z\cos\alpha - i\sin\alpha)^n}\right).$$

1. Das Beschleunigungspotential [1].

Die Anströmgeschwindigkeit der kreisförmigen Tragfläche sei konstant (V). Die x-Achse zeige in Richtung von V nach hinten, die y-Achse in Richtung des Holmes nach rechts und die z-Achse dazu senkrecht nach oben, s. Bild 1.

Wird mit $\mathfrak{w}$ der Geschwindigkeitsvektor, mit $\mathfrak{b}$ der Beschleunigungsvektor und mit t die Zeit bezeichnet, so gilt die Beziehung:

$$\mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}.$$

Führt man nun $\mathfrak{b} = \operatorname{grad} \varphi$ und $\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \Phi$ ein, so gilt nach erfolgter Integration:

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

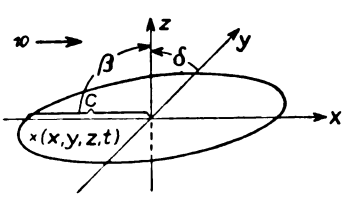


Bild 1. β und δ zeigen die positive Richtung der Momente an.

*) Dissertation Göttingen (D 7). Berichterstatter: Prof. Dr. L. Prandtl. (Vgl. Schlußbemerkung.)

[1]) Die Zahlen in eckiger Klammer bedeuten die Nummern im Literaturverzeichnis.

Digitized by Google

Wie man aus Abschnitt 12 später ersieht, gibt φ bis auf einen Faktor direkt den Druck auf Ober- und Unterseite der Scheibe an, so daß man φ auch als Druckpotential bezeichnen kann.

Ist nun das Druckpotential $\varphi(x, y, z, t)$ gegeben, so kann man aus obiger Gleichung das Geschwindigkeitspotential Φ berechnen:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{V}\int_{-\infty}^{x} \varphi\left(x', y, z, t - \frac{x - x'}{V}\right) dx'.$$

Zur Durchführung der Integration setzt man

$$x' = x - V(t - t'),$$

wobei dann x, y, 0, t die Koordinaten des Aufpunktes bedeuten.

Das Druckpotential φ genügt der gewöhnlichen Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = 0.$$

Setzt man

$$\varphi = C \cdot \psi(x, y, z) \cdot f(t),$$

so muß mithin $\psi(x, y, z)$ der Bedingung $\Delta\psi = 0$ genügen. $f(t)$ ist zunächst irgendeine beliebige Zeitfunktion und C eine Konstante. Die Zeitfunktion bestimmt sich aus der geforderten Abwindform. Da diese aber harmonisch in t sein soll, so muß auch $f(t)$ eine harmonische Funktion sein. Die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit ist dann:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Die Form der tragenden Fläche ergibt sich aus

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

zu

$$z = \frac{1}{V}\int_{0}^{x} w\left(x', y, 0, t - \frac{x - x'}{V}\right) dx' + F\left(y, t - \frac{x}{V}\right),$$

wobei die Funktion F dazu dient, eine willkürliche Lage der Flügelvorderkante vorauszusetzen.

Das nun zu bestimmende Druckpotential φ muß auf der Kreisfläche eine unstetige, in den übrigen Raumpunkten aber eine stetige Funktion sein.

2. Die Potentialfunktionen 1. Art.

Der Kürze halber sei hier nur verwiesen auf die Arbeit von W. Kinner [2], in der diese Fragen ausführlich behandelt werden.

Die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

wird durch die orthogonale Transformation

$$x = \sqrt{1 - \mu^2}\,\sqrt{1 + \eta^2} \cdot \cos\vartheta,$$
$$y = \sqrt{1 - \mu^2}\,\sqrt{1 + \eta^2} \cdot \sin\vartheta,$$
$$z = \mu \cdot \eta,$$

auf elliptische Koordinaten umgeformt. Die Koordinaten x, y, z sind in den folgenden Rechnungen mit dem Grundkreisradius c dimensionslos gemacht.

Mittels eines Separationsansatzes erhält man dann für die reellen Potentialfunktionen erster Art mit Sprung an der Scheibe nach Kinner [2]

$$\psi_n^m(\mu, \eta, \vartheta) = \frac{1}{i^{n-m+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_n^m P_n^m(\mu) Q_n^m(i\eta) \cdot \begin{Bmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{Bmatrix},$$

wobei $n + m$ ungerade zu setzen ist, C_n^m einen konstanten Faktor bedeutet, und der Faktor $\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$ nur zur Vereinfachung der Rechnung dient.

3. Abwindberechnung.

Wir berechnen nun den Abwind für die unter 2. aufgeführten Potentialfunktionen. Es werden dabei für den jeweiligen Abwind folgende Ausdrücke entstehen:

$$W = f(x, y) \cdot e^{ivt} + e^{i(vt - \omega x)} \cdot g(y), \quad \ldots \quad (3,1)$$

wobei $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion ist, $e^{-i\omega x} g(y)$ im zweiten Term aber transzendent.

Die Abwindfunktionen werden so ausgesucht und linear überlagert, daß $f(x, y)$ genau den geforderten Abwind darstellt.

Der dann noch mit dem Faktor $e^{i(vt - \omega x)}$ auftretende Term ist zur Darstellung der Plattenbewegung nicht brauchbar. Er wird später mit den unter Abschnitt 9 berechneten Abwindfunktionen zweiter Art so linear überlagert, daß dieser Gesamtterm verschwindet. Die Lösung dieser Aufgabe wird im folgenden Kompensationsrechnung genannt und in ihrer analytischen Durchführung noch näher im Abschnitt 11 erläutert. Die Kompensationsrechnung liefert dann die linearen Gleichungssysteme, deren Auflösung die Koeffizienten für die Bestimmung der Druckverteilung ergibt.

Zur Berechnung des Abwindes an der Scheibe hat man zu bilden:

$$W_n^m = \frac{1}{V}\int_{-\infty}^{x} \left(\frac{\varphi_n^m}{z}\right)_{z \to 0} dx, \quad \ldots \quad (3,2)$$

wobei die Integration auf einer Stromlinie erfolgt.

Wird mit $x_0 = \pm\sqrt{1 - y^2}$ die x-Koordinate des Scheibenrandes bezeichnet und mit $\frac{r}{c} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Radius einer beliebigen Kugel um den Scheibenmittelpunkt, so kann man den gesamten Integrationsraum in den Außenraum mit $r > c$ und den Innenraum mit $r < c$ teilen.

Es hat sich als günstig erwiesen, die Integration über x nach Gleichung (3,2) für den Außen- und Innenraum getrennt durchzuführen.

Man schreibt für (3,2)

$$W_n^m = \frac{1}{V}\left[\int_{-\infty}^{-x_0} \left(\frac{\varphi_n^m}{z}\right)_{z \to 0} dx + \int_{-x_0}^{x} \left(\frac{\varphi_n^m}{z}\right)_{z \to 0} dx\right] = W_{n,a}^m + W_{n,i}^m.$$

Für die Integration über x in der Scheibenebene ($z = 0$) sind folgende Formeln zu berücksichtigen:

1. Für den Außenraum:

$$x \lesseqgtr 0 \qquad \mu = 0 \qquad x_0^2 = 1 - y^2$$
$$dx = \mp \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}} \qquad \cos\vartheta = \mp \sqrt{\frac{x_0^2 + \eta^2}{1 + \eta^2}}$$
$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{1}{\eta} \cdot \qquad \frac{d\eta}{dz} = 0 \qquad \frac{d\vartheta}{dz} = 0.$$

2. Für den Innenraum:

$$x \lesseqgtr 0 \qquad \eta = 0$$
$$dx = \mp \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{x_0^2 - \mu^2}} \qquad \cos\vartheta = \mp \sqrt{\frac{x_0^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = 0.$$

4. Darstellung der Schlagbewegung.

Die für die Schlagbewegung geforderte Abwindformel lautet:

$$W = A \cdot e^{ivt} \quad \ldots \quad (4,1)$$

Zur Darstellung benutzt man das Druckpotential

$$\varphi_1^0 = C_1^0 \mu (1 - \eta \operatorname{arc\,ctg} \eta)\, e^{ivt} \quad \ldots \quad (4,2)$$

Daraus folgt für den Abwind

$$W_1^0 = \frac{C_1^0}{V}\int_{-\infty}^{x} \lim_{z \to 0} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial z}\, dx'.$$

Das ergibt für den Innenraum

$$W_{1,i}^0 = \frac{C_1^0}{V}\int_{-x_0}^{x} -\frac{\pi}{2} e^{ivt'}\, dx'$$

Digitized by Google

und mit $\nu(t-t') = \omega(x-x')$; $\omega = \frac{\nu c}{V}$ folgt[2])

$$W^0_{1,i} = -\frac{\pi}{2}\frac{C^0_1}{V} e^{i(\nu t-\omega x)} \int_{-x_0}^{x} e^{i\omega x'} dx'$$

$$W^0_{1,i} = -\frac{\pi}{2}\frac{C^0_1}{V}\cdot\frac{1}{\omega i} e^{i\nu t} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{C^0_1}{V}\cdot\frac{e^{i(\nu t-\omega x)}}{\omega i} e^{-\omega i x_0}.$$

Für den Abwindterm des Außenraumes folgt

$$W^0_{1,a} = \frac{C^0_1}{V} e^{i(\nu t-\omega x)} \int_0^{\infty} (1-\eta \operatorname{arc ctg}\eta)\ \frac{e^{-\omega i\sqrt{x_0^2+\eta^2}}}{\sqrt{x_0^2+\eta^2}}\, d\eta.$$

Zur Lösung des Integrals wird nun hier folgende Substitution gemacht, die auch bei allen weiteren Außengebietintegralen Anwendung finden soll:

$$\eta = x_0\sqrt{s^2-1} \qquad \sqrt{x_0^2+\eta^2} = x_0 s$$
$$\frac{d\eta}{\sqrt{x_0^2+\eta^2}} = \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}.$$

In den nun folgenden Rechnungen soll der Faktor $\frac{C^0_1}{V} e^{i(\nu t-\omega x)}$ fortgelassen und dieses durch einen Querstrich über dem W angedeutet werden.

Damit wird

$$\overline{W}^0_{1,a} = \int_1^{\infty} (1 - x_0\sqrt{s^2-1}\operatorname{arc ctg} x_0\sqrt{s^2-1})\ \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\, ds \quad \ldots (4,3)$$

und durch partielle Integration:

$$\overline{W}^0_{1,a} = \frac{1}{\omega i x_0}\left[x_0\cdot\operatorname{arc ctg} x_0\sqrt{s^2-1}\cdot e^{-\omega i x_0 s}\right]_1^{\infty} +$$
$$+\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\, ds + \frac{1}{\omega i}\int_1^{\infty}\frac{x_0 s}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\, ds.$$

Es folgt also für den Abwindterm des Außenraumes

$$\overline{W}^0_{1,a} = -\frac{\pi}{2\omega i} e^{-\omega i x_0} - \frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) +$$
$$+\frac{1}{\omega i}\int_1^{\infty}\frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}, \quad \ldots\ldots (4,4)$$

wobei $-\frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) = \int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds$ die Hankelsche Zylinderfunktion bedeutet. Die Lösung des bestimmten Integrals über s geschieht durch Umformung in ein unbestimmtes Integral über ω. Man setzt $y = \sin\alpha$, $x_0 = \cos\alpha$; dann ist

$$\int_1^{\infty}\frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i\cos\alpha\cdot s}}{\sqrt{s^2-1}}\left(\frac{1}{s\cdot\cos\alpha+i\sin\alpha}+\frac{1}{s\cdot\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)ds =$$
$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\omega\sin\alpha}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i(s\cos\alpha+i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha+i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}}\, ds + e^{\omega\sin\alpha}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i(s\cdot\cos\alpha-i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha-i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}}\, ds\right].$$

Nun gelten aber weiter die Beziehungen:

$$\frac{d}{d\omega}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i(s\cos\alpha+i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha+i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}}\, ds = -i\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i(s\cos\alpha+i\sin\alpha)}}{\sqrt{s^2-1}}\, ds = -\frac{\pi}{2}\cdot e^{\omega\sin\alpha} H_0^{(2)}(\omega x_0),$$

$$\frac{d}{d\omega}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i(s\cos\alpha-i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha-i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}}\, ds = -i\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i(s\cdot\cos\alpha-i\sin\alpha)}}{\sqrt{s^2-1}}\, ds = -\frac{\pi}{2} e^{-\omega\sin\alpha} H_0^{(2)}(\omega x_0),$$

und damit ist obiges Integral

$$\int_1^{\infty}\frac{x_0\cdot s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{2} e^{-\omega\sin\alpha}\left[C_1^{(1)} - \int_0^{\omega}\frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(\overline{\omega}\cdot\cos\alpha)\cdot e^{+\overline{\omega}\sin\alpha}\, d\overline{\omega}\right] + \frac{1}{2} e^{+\omega\sin\alpha}\left[C_2^{(1)} - \int_0^{\omega}\frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(\overline{\omega}\cos\alpha)\cdot e^{-\overline{\omega}\sin\alpha}\, d\overline{\omega}\right] =$$
$$= \frac{1}{2} C_1^{(1)}\cdot e^{-\omega\sin\alpha} + \frac{1}{2} C_2^{(1)}\cdot e^{+\omega\sin\alpha} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\omega} H_0^{(2)}(\overline{\omega}\cdot\cos\alpha)\cdot\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\sin\alpha]\, d\overline{\omega} =$$
$$= iQ_0(y)\,\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha) + \frac{\pi}{2} P_0(y)\cdot\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha) - \frac{\pi}{2}\int_0^{\omega} H_0^{(2)}(\overline{\omega}\cos\alpha)\cdot\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\sin\alpha]\, d\overline{\omega}, \quad \ldots\ldots (4,5)$$

wobei die Integrationskonstanten $C_1^{(1)}$ und $C_2^{(1)}$ nach folgender allgemeiner Formel (vgl. [4]) berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} C_{1\,2}^{(2K+1)} &= \int_1^{\infty}\frac{1}{(s\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^{2K+1}}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = (-1)^K\left(\frac{\pi}{2} P_{2K}\mp i Q_{2K}\right)\\ C_{1\,2}^{(2K)} &= \int_1^{\infty}\frac{1}{(s\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^{2K}}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = (-1)^K\left(Q_{2K-1}\pm i\frac{\pi}{2} P_{2K-1}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4,6)$$

[2]) Mit ω ist in dieser Arbeit die reelle reduzierte Frequenz bezeichnet, während $\overline{\omega}$ in den späteren Rechnungen Integrationsvariable sind.

Digitized by Google

Der Gesamtabwind ist

$$W_1^0 = W_{1,i}^0 + W_{1,a}^0$$

und somit

$$W_1^0 = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{C_1^0}{V}\cdot\frac{e^{i\nu t}}{\omega i} + \frac{C_1^0}{V}\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\left[-\frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega\cdot\cos\alpha) + \right.$$
$$+\frac{\pi i}{2\omega}\int_0^{\omega} H_0^{(2)}(\overline{\omega}\cos\alpha)\cdot \mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\sin\alpha]\,d\overline{\omega} +$$
$$+\frac{1}{2\omega}\,\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha)\cdot\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} +$$
$$\left.+\frac{\pi}{2\omega i}\cdot\mathfrak{Cof}(\omega\cdot\sin\alpha)\right] \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (4,7)$$

Das unbestimmte Integral über ω ist eindeutig bestimmbar und wird später bei der Kompensationsrechnung als Reihe in ω angegeben.

5. Darstellung der Drehschwingung um die y-Achse (Kippschwingung).

Die geforderte Abwindformel soll lauten:

$$W = B\cdot x\cdot e^{i\nu t} \quad\ldots\ldots\ldots (5,1)$$

Dieses leistet die Potentialfunktion

$$\varphi_2^1 = \frac{C_2^1}{V}\cdot\frac{\mu}{2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+\eta^2}\times$$
$$\times\left(3-\frac{1}{1+\eta^2}-3\eta\,\mathrm{arc\,ctg}\,\eta\right)\cos\vartheta\cdot e^{i\nu t} \quad\ldots (5,2)$$

Mit den gegebenen Umformungen lautet der Abwindterm für das Innenraumproblem

$$W_{2,i}^1 = -\frac{C_2^1}{V}\cdot\frac{3}{4}\,\pi\int_{-x_0}^{x} x'\cdot e^{i\omega x'}\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\,dx' =$$
$$= -\frac{3}{4}\,\pi\, e^{i\nu t}\cdot\frac{C_2^1}{V}\left(\frac{1}{\omega i}x+\frac{1}{\omega^2}\right)+$$
$$+\frac{C_2^1}{V}\cdot\frac{3}{4}\,\pi\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\left(-\frac{x_0}{i\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)e^{-\omega i x_0}.$$

Der Abwindterm für das Außenraumproblem ist

$$W_{2,a}^1 = -\frac{C_2^1}{V}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}\left(3-\frac{1}{1+\eta^2}-3\eta\,\mathrm{arc\,ctg}\,\eta\right)e^{i\nu t'}\,d\eta$$

und mit den unter 4. angegebenen Substitutionen wird

$$\overline{W}_{2,a}^1 = -\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(3-3x_0\sqrt{s^2-1}+\mathrm{arc\,ctg}\,x_0\sqrt{s^2-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\right)\frac{e^{-\omega i x_0 s}\cdot x_0\cdot s}{\sqrt{s^2-1}}\,ds =$$
$$= \frac{3}{2i}\frac{d}{d\omega}\int_1^{\infty}(1-x_0\sqrt{s^2-1}\,\mathrm{arc\,ctg}\,x_0\sqrt{s^2-1})\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem Außenraumintegral der Schlagschwingung, so kann man hierfür schreiben

$$\overline{W}_{2,a}^1 = \frac{3}{2i}\frac{d}{d\omega}\overline{W}_{1,a}^0 + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}.$$

Das heißt

$$W_2^1 = -\frac{C_2^1}{V}\cdot\frac{3\pi}{4}e^{i\nu t}\left(\frac{x}{\omega i}+\frac{1}{\omega^2}\right)+$$
$$+\frac{C_2^1}{V}e^{i(\nu t-\omega x)}\left[-\frac{3i}{2}\frac{d}{d\omega}\left(-\frac{\pi}{2}iH_0^{(2)}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2\omega^2}-\frac{3}{2\omega}\frac{d}{d\omega}\right)\int_1^{\infty}\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\right] (5,3)$$

Der erste Term gibt zunächst den geforderten Abwind und außerdem noch eine Schlagschwingung, die man mittels linearer Überlagerung mit W_1^0 wieder kompensieren kann.

Dazu setzt man $C_2^1 = \omega i K_2^1$

und bildet $W_2^1 + \frac{3}{2}W_1^0\frac{K_2^1}{C_1^0} = W_K$.

Damit folgt für den Abwind

$$W_K = -\frac{K_2^1}{V}\frac{3\pi}{4}e^{i\nu t}\cdot x + \frac{K_2^1}{V}e^{i(\nu t-\omega x)}\left[-\frac{3}{4}\pi i H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0)-\right.$$
$$-\frac{3}{4}\pi i\omega\frac{d}{d\omega}H_0^{(2)}(\omega x_0)-\frac{\omega}{2i}\int_1^{\infty}\frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}\,ds}{(x_0^2 s^2+1-x_0^2)\sqrt{s^2-1}}+$$
$$\left.+\frac{3}{2i}\frac{d}{d\omega}\int_1^{\infty}\frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2+1-x_0^2)\sqrt{s^2-1}}\,ds\right] \quad\ldots\ldots (5,4)$$

In dieser Formel sind die Integrale schon aus der Berechnung von W_1^0 (siehe (4, 5)) bekannt. Außerdem ist diese Darstellung auch für die spätere Kompensationsrechnung günstig.

6. Darstellung der Biegeschwingungen.

Im Verlauf der symmetrischen Plattenschwingungen sollen nun die Schwingungen mit parabolischer Verformung $W = D\cdot x^2 e^{i\nu t}$ bzw. $W = F\cdot y^2 e^{i\nu t}$ behandelt werden. Um für die Berechnung der Abwinde einfachere Ausdrücke zu erhalten, werde ich statt dessen folgende Linearkombinationen zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned} W_{B,1} &= D_1\cdot(x^2+y^2)\cdot e^{i\nu t}\\ W_{B,2} &= F_1\cdot(x^2-y^2)\cdot e^{i\nu t}\end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots (6,1)$$

Die einzelnen Verformungen erhält man durch additive Überlagerung.

Zur Darstellung des ersten unter (6,1) geforderten Abwindes geht man von folgendem Druckpotential aus:

$$\varphi_3^0 = C_3^0\frac{5\mu^3-3\mu}{2}\left(\frac{5}{2}\eta^2+\frac{2}{3}-\frac{5\eta^3+3\eta}{2}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\eta\right)\cdot e^{i\nu t}.$$

Das Innenraumproblem liefert den Abwindterm

$$W_{3,i}^0 = -\frac{3}{8}\pi\frac{C_3^0}{V}\int_{-x_0}^{x}[2-5(x'^2+y^2)]\,e^{i\nu t'}\,dx' =$$
$$= \frac{C_3^0}{V}\left\{e^{i\nu t}\left(-\frac{3\pi}{4i\omega}+\frac{15\pi}{8i\omega}y^2-\frac{15\pi}{8i\omega^3}(-\omega^2x^2-2i\omega x+2)\right)-\right.$$
$$\left.-e^{i(\nu t-\omega x)}\cdot e^{-i\omega x_0}\left[-\frac{3\pi}{4\omega i}+\frac{15\pi}{8i\omega}y^2-\frac{15\pi}{8i\omega^3}(-\omega^2x_0^2+2i\omega x_0+2)\right]\right\}.$$

Digitized by Google

Für das Außenproblem erhält man

$$\overline{W}^0_{3,a} = -\int_0^\infty \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\eta^2 + \frac{2}{3} - \frac{5\eta^3+3\eta}{2}\operatorname{arc\,ctg}\eta\right)\cdot\frac{e^{-\omega i\sqrt{x_0^2+\eta^2}}}{\sqrt{x_0^2+\eta^2}}\,d\eta =$$

$$= -\int_1^\infty \frac{3}{2}\left[\frac{5}{2}x_0^2(s^2-1) + \frac{2}{3} - \frac{x_0\sqrt{s^2-1}}{2}(5x_0^2(s^2-1)+3)\operatorname{arc\,ctg}x_0\sqrt{s^2-1}\right]\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds.$$

Nun ist

$$x_0^2\int_1^\infty (s^2-1)\,(1 - x_0\sqrt{s^2-1}\operatorname{arc\,ctg}x_0\sqrt{s^2-1})\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds = -\left(\frac{d^2\overline{W}^0_{1,a}}{d\omega^2} + x_0^2\cdot\overline{W}^0_{1,a}\right) \quad \ldots\ldots (6{,}2)$$

Das heißt

$$\overline{W}^0_{3,a} = \frac{15}{4}\left(\frac{d^2\overline{W}^0_{1,a}}{d\omega^2} + x_0^2\,\overline{W}^0_{1,a}\right) - \frac{9}{4}\overline{W}^0_{1,a} + \frac{5}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(2)}(\omega x)\right).$$

Setzt man für $\overline{W}^0_{1,a}$ den Wert nach Formel (4,4) ein, so erhält man für

$$W^0_3 = W^0_{3,i} + W^0_{3,a} = \frac{C_3^0}{V}e^{ivt}\cdot\frac{\pi}{4}\left[-\frac{3}{\omega i} + \frac{15}{2i\omega}y^2 + \frac{15}{2i\omega}\left(x^2 + \frac{2ix}{\omega} - \frac{2}{\omega^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{C_3^0}{V}e^{i(vt-\omega x)}\left\{\left(-1 + \frac{15x_0^2}{4} + \frac{15}{4}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\left[-\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(2)}(\omega x_0)\right] +\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{9}{4\omega i} + \frac{15x_0^2}{4\omega i} + \frac{15}{2i\omega^3} - \frac{15}{2i\omega^2}\frac{d}{d\omega} + \frac{15}{4i\omega}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\int_1^\infty \frac{x_0 s\,e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\,\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\right\} \quad \ldots\ldots (6{,}3)$$

Der erste Teil der Formel (6,3) ergibt den geforderten Ausdruck für den Abwind der Biegeschwingung, kombiniert mit einer Dreh- und Schlagschwingung, die nun kompensiert werden sollen.

Wir setzen

$$C_3^0 = \omega i K_3^0$$

und bilden

$$W^0_3 - 5W^1_2\cdot\frac{K_3^0}{C_2^1} - \frac{3}{2}W^0_1\cdot\frac{K_3^0}{C_1^0}\cdot\omega i = W^1_h.$$

Damit wird aus (6,3) unter Benutzung der Beziehung

$$\frac{x_0^3}{\omega i}\int_1^\infty \frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{1}{\omega}\frac{\pi}{2}i\frac{d}{d\omega}H_0^{(2)} +$$

$$+\left(\frac{1}{\omega i} - \frac{1}{\omega i}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\int_1^\infty \frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} \quad \ldots (6{,}4)$$

und der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{d\omega^2}H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) + x_0^2\cdot H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\omega}H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) \quad \ldots (6{,}5)$$

$$W^1_h = \frac{K_3^0}{V}\cdot\frac{15}{8}\pi(x^2+y^2)\cdot e^{ivt} +$$

$$+\frac{K_3^0}{V}\cdot e^{i(vt-\omega x)}\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{5}{2}\omega H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) -\right.$$

$$\left. - \frac{5}{2}\int_1^\infty \frac{x_0 s\cdot e^{-i\omega x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\right) \quad \ldots\ldots (6{,}6)$$

Formel (6,6) gibt den geforderten Abwind und ein noch später zu kompensierendes Zusatzglied.

Die zweite unter (6,1) gegebene Plattenschwingung erhält man mittels des Druckpotentials

$$q_3^2 = C_3^2 - \frac{\mu^3+\mu}{8}(1+\eta^2)\left(15 - \frac{5}{1+\eta^2} - \frac{2}{(1+\eta^2)^2} -\right.$$

$$\left. - 15\eta\operatorname{arc\,ctg}\eta\right)\cos 2\vartheta\cdot e^{ivt} \quad \ldots\ldots (6{,}7)$$

Der Abwindterm des Innenraumes lautet dann

$$W^2_{3,i} = \frac{C_3^2}{V}\int_{-x_0}^{x} -\frac{15}{16}\pi(x'^2 - y^2)\,e^{ivt'}\,dx'$$

$$W^2_{3,i} = \frac{C_3^2}{V}\left[\frac{15}{16}\pi\cdot\frac{1}{i\omega^3}(-\omega^2x^2 - 2i\omega x + 2) + \frac{15}{16i\omega}\pi y^2\right]e^{ivt} +$$

$$+\frac{C_3^2}{V}e^{i(vt-\omega x)}\left[\frac{15}{16}\pi\cdot\frac{1}{i\omega^3}(+\omega^2x_0^2 - 2i\omega x_0 - 2) -\right.$$

$$\left. - \frac{15}{16i\omega}\pi y^2\right]e^{-i\omega x_0} \quad \ldots\ldots (6{,}8)$$

Für den Außenraum wird dann

$$W^2_{3,a} = \frac{C_3^2}{V}\int_0^\infty \frac{1}{8}(1+\eta^2)\left(15 - \frac{5}{1+\eta^2} - \frac{2}{(1+\eta^2)^2} -\right.$$

$$\left. - 15\eta\operatorname{arc\,ctg}\eta\right)\frac{\cos 2\vartheta}{\sqrt{x_0^2+\eta^2}}\,e^{ivt'}\,d\eta,$$

mit

$$\cos\vartheta = -\frac{\sqrt{x_0^2+\eta^2}}{\sqrt{1+\eta^2}} \qquad \cos 2\vartheta = \frac{2(x_0^2+\eta^2)}{1+\eta^2} - 1.$$

Mittels der Substitution in s kann man schreiben:

$$\overline{W}^2_{3,a} = \int_1^\infty \frac{1}{8}(15 - 15x_0\sqrt{s^2-1}\operatorname{arc\,ctg}x_0\sqrt{s^2-1})\frac{x_0^2 s^2\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds - \frac{1}{8}(1-x_0^2)\int_1^\infty (15 - 15x_0\sqrt{s^2-1}\operatorname{arc\,ctg}x_0\sqrt{s^2-1})\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds -$$

$$- \frac{1}{8}\int_1^\infty \left(s^2x_0^2 + 1 - x_0^2 + \frac{2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\right)(x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2)\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds.$$

Digitized by Google

Unter Benutzung von $W^0_{1,a}$ und seinen Ableitungen erhält man dann für den Gesamtabwind (vgl. (6,2)):

$$W_3^2 = W_{3,i}^2 + W_{3,a}^2$$

$$W_3^2 = \frac{C_3^2}{V} e^{i\nu t} \cdot \frac{15\pi}{16}\left(-\frac{1}{i\omega}x^2 - \frac{2}{\omega^2}x + \frac{2}{i\omega^3} + \frac{1}{i\omega}y^2\right) + \frac{C_3^2}{V} e^{i(\nu t-\omega x)}\left[\left(-\frac{15}{8}(1-x_0^2) - \frac{15}{8}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\left(-\frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega x_0)\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{-15}{4i\omega^3} - \frac{15}{8}\frac{(1-x_0^2)}{\omega i} + \frac{15}{4i\omega^2}\frac{d}{d\omega} - \frac{15}{8i\omega}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\int_1^\infty \frac{x_0 s e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} -$$

$$\left. - \frac{1}{8}\int_1^\infty \left(\frac{5}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} + \frac{2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\right)(x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2)\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds\right].$$

Mit der Benutzung von Formel (6,4) und (6,5) sowie der Beziehung

$$\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds = -\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds - \frac{2}{i}\frac{d}{d\omega}\int_1^\infty \frac{x_0 s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)\sqrt{s^2-1}} ds,$$

wird dann

$$W_3^2 = \frac{C_3^2}{V}\frac{15\pi}{16} e^{i\nu t}\left(-\frac{1}{i\omega}x^2 + \frac{1}{2\omega}y^2 - \frac{2}{\omega^2}x + \frac{2}{i\omega^3}\right) + \frac{C_3^2}{V} e^{i(\nu t-\omega x)}\left[\left(-\frac{5}{4} - \frac{15}{4\omega}\frac{d}{d\omega} - \frac{15}{4}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\left(-\frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega x_0)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{15}{8\omega i} - \frac{15}{4i\omega^3} + \frac{5}{4i}\frac{d}{d\omega} + \frac{15}{4i\omega^2}\frac{d}{d\omega} - \frac{15}{8i\omega}\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds.\right.$$

. . . (6,9)

Analog dem früheren ist

$$\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\cdot\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\omega\sqrt{1-x_0^2}}\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i (x_0 s + i\sqrt{1-x_0^2})}}{(x_0 s + i\sqrt{1-x_0^2})^2\sqrt{s^2-1}} ds + e^{+\omega\sqrt{1-x_0^2}}\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i (x_0 s - i\sqrt{1-x_0^2})}}{(x_0 s - i\sqrt{1-x_0^2})^2\sqrt{s^2-1}} ds\right].$$

Setzt man $y = \sin\alpha$; $x_0 = \cos\alpha$ und berücksichtigt die Beziehungen

$$\frac{d}{d\omega}\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i (s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)^2\sqrt{s^2-1}} ds = -i\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i (s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}} ds,$$

$$\frac{d}{d\omega}\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i (s\cdot\cos\alpha - i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha - i\sin\alpha)^2\sqrt{s^2-1}} ds = -i\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i (s\cdot\cos\alpha - i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha - i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}} ds,$$

so folgt:

$$\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\cdot\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\omega\sin\alpha}\left(C_1^{(2)} - i\int_1^\infty\int_0^\omega \frac{e^{-\bar\omega i (s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}} ds\, d\bar\omega\right) + e^{+\omega\sin\alpha}\left(C_2^{(2)} - i\int_1^\infty\int_0^\omega \frac{e^{-\bar\omega i (s\cdot\cos\alpha - i\sin\alpha)}}{(s\cdot\cos\alpha - i\sin\alpha)\sqrt{s^2-1}} ds\, d\bar\omega\right)\right]$$

und durch analoge Überlegungen

$$\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\cdot\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds = \frac{1}{2}\left[e^{-\omega\sin\alpha}\left\{C_1^{(2)} - i C_1^{(1)}\cdot\omega - \int_1^\infty\int_0^\omega\int_* \frac{e^{-\bar\omega i (s\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)}}{\sqrt{s^2-1}} d\bar\omega\, ds^{3)}\right\} + \right.$$

$$\left. + e^{\omega\sin\alpha}\left\{C_2^{(2)} - i C_2^{(1)}\cdot\omega - \int_1^\infty\int_0^\omega\int_* \frac{e^{-\bar\omega i (\cos\alpha\cdot s - i\sin\alpha)}}{\sqrt{s^2-1}} ds\, d\bar\omega\right\}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,10)$$

Die Konstanten $C_{\frac{1}{2}}^{(2)}$ und $C_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ berechnen sich wieder durch Übergang zum stationären Wert $\omega \to 0$, nach Formel (4,6).

Setzt man diese Größen in (6,10) ein und führt in den dreifachen Integralen die Integration über s aus, die die Hankelsche Funktion ergibt, so folgt:

$$\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds = -Q_1(y)\cdot\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha) + i\frac{\pi}{2} P_1(y)\cdot\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha) -$$

$$- i\frac{\pi}{2}\cdot\omega P_0(y)\cdot\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha) + \omega\cdot Q_0(y)\cdot\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha) + \frac{\pi}{2} i\int_0^\omega\int_* H_0^{(2)}(\bar\omega\cdot\cos\alpha)\cdot\mathfrak{Cof}[(\omega-\bar\omega)\sin\alpha]\, d\bar\omega.$$

[3]) Siehe unter Einleitung (symbolische Schreibweise).

Digitized by Google

Man setzt jetzt

$$C_3^2 = i\,\omega\, K_3^2$$

und kompensiert die in (6, 9) noch auftretende Drehschwingung, indem man bildet:

$$W_B^2 = W_3^2 + \frac{5}{2}\,\frac{K_3^2}{C_2^1}\,W_-^1 .$$

Dann wird aus der Abwindformel (6,9)

$$W_B^2 = \frac{K_3^2}{V}\cdot\frac{15}{16}\,\pi\,(y^2 - x^2)\,e^{i\nu t} + \frac{K_3^2}{V}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\left[\left(-\frac{5}{4}\,i\omega - \frac{15}{2}\,i\,\frac{d}{d\omega} - \frac{15}{4}\,i\,\omega\,\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\,i H_0^{(2)}(\omega x_0)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\,\omega\,\frac{d}{d\omega} - \frac{15}{4}\,\frac{d^2}{d\omega^2}\right)\int\limits_1^\infty \frac{x_0\, s\, e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\,\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} - \frac{1}{4}\,\omega\, i\int\limits_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2}\,\frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds\right] \quad . \; . \; . \; (6,\,11)$$

Der neben der geforderten Biegeverformung noch auftretende Term muß späterhin wieder kompensiert werden. Die Abwindformeln sind alle so umgeformt, daß sie für die spätere Kompensationsrechnung einen möglichst kleinen Rechenaufwand erfordern.

Man könnte nun auch die reine Biegeschwingung in x- oder y-Richtung bilden. Da die Abwindformel W_B^1 aber sehr einfach ist, während die Formel für W_B^2 wesentlich komplizierter aufgebaut ist, so ist es ratsam, die lineare Überlagerung erst nach der Kompensationsrechnung durchzuführen.

7. Darstellung der Drehschwingung um die x-Achse (Rollschwingung).

Im Anschluß an die in bezug auf die x-z-Ebene symmetrischen Schwingungen sollen nun die in bezug auf diese Ebene unsymmetrischen Schwingungen mit Verformung der Platte betrachtet werden.

Der geforderte Abwind soll lauten:

$$W = C\cdot y\cdot e^{i\nu t} \quad . \; (7,\,1)$$

Die Berechnung gelingt mit dem Druckpotential

$$\bar{\varphi}_2^1 = \bar{C}_2^1\,\frac{\mu}{2}\,\sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1+\eta^2}\left(3 - \frac{1}{1+\eta^2} - 3\,\eta\,\operatorname{arc\,ctg}\eta\right)\sin\vartheta\cdot e^{i\nu t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7,\,2)$$

Der Abwindterm des Innenraumes ist dann

$$W_{2,i}^{(1)} = -\frac{\bar{C}_2^1}{V}\,\frac{3}{4}\,\pi\int\limits_{-x_0}^{x} y\cdot e^{i\nu t'}\,dx' = -\frac{\bar{C}_2^1}{V}\cdot\frac{3}{4}\,\pi\cdot\frac{y}{\omega i}\,e^{i\nu t} + \frac{\bar{C}_2^1}{V}\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\cdot\frac{3}{4}\,\pi\cdot\frac{y}{\omega i}\,e^{-\omega i x_0}$$

und der Abwindterm des Außenraumes

$$W_{2,a}^{(1)} = \frac{\bar{C}_2^1}{V}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left(3 - \frac{1}{1+\eta^2} - 3\,\eta\,\operatorname{arc\,ctg}\eta\right)\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{x_0^2+\eta^2}}\,e^{i\omega x'}\,d\eta =$$

$$= \frac{\bar{C}_2^1}{V}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\,\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\left(3 - 3\,x_0\sqrt{s^2-1}\,\operatorname{arc\,ctg}x_0\sqrt{s^2-1} - \frac{1}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\right)\cdot\frac{y\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds;$$

mit den früher definierten Abkürzungen also

$$\overline{W}_{2,a}^{(1)} = \frac{3}{2}\,y\,\overline{W}_{1,a}^{0} - \frac{1}{2}\,y\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = -i\int\limits_1^\infty ds\int\limits_0^\omega \frac{x_0\, s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{s^2-1}} + C$$

ist, mit der Konstanten

$$C = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{1}{y}\cdot Q_0(y),$$

so folgt für den Gesamtabwind:

$$W_R = W_{2,i}^{(1)} + W_{2,a}^{(1)}$$

$$W_R = -\frac{\bar{C}_2^1}{V}\,\frac{3}{4}\,\pi\,\frac{y}{\omega i}\cdot e^{i\nu t} + \frac{\bar{C}_2^1}{V}\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\left[-\frac{3}{4}\,\pi\, i\, y\cdot H_0^{(2)}(\omega\cdot x_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{3\,y}{2\,\omega i}\int\limits_1^\infty \frac{x_0\, s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} + \frac{i}{2}\,y\int\limits_0^\omega d\omega\int\limits_1^\infty \frac{x_0\, s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} - \frac{1}{2}\,Q_0(y)\right] \quad . \; . \; . \; (7,\,3)$$

Man erhält also den geforderten Abwind (7,1) und ein noch zu kompensierendes Glied.

Digitized by Google

8. Biegeschwingung.

Die letzte Schwingung mit einer Plattenverformung 2. Grades in x und y soll dargestellt werden durch den Abwind

$$W = E \cdot x \cdot y \cdot e^{i\nu t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8,1)$$

Diese Aufgabe wird gelöst mit dem Druckpotential

$$\bar{q}_3^2 = \bar{C}_3^2 \left(-\frac{\mu^3 + \mu}{8} (1+\eta^2) \left(15 - \frac{5}{1+\eta^2} - \frac{2}{(1+\eta^2)^2} - 15\,\eta \operatorname{arc\,ctg} \eta \right) \sin 2\vartheta \cdot e^{i\nu t} \right. \quad \ldots \ldots \quad (8,2)$$

Dann ist der Abwindterm des Innenraumes

$$W_{3,i}^{(2)} = \frac{\bar{C}_3^2}{V} \int_{-x_0}^{x} -\frac{15}{8}\,\pi\, x'\, y \cdot e^{i\nu t'}\, dx'$$

$$W_{3,i}^{(2)} = -\frac{\bar{C}_3^2}{V}\,\frac{15}{8}\,\pi\, y \left(\frac{1}{i\omega}\, x + \frac{1}{\omega^2} \right) e^{i\nu t} + \frac{\bar{C}_3^2}{V}\, e^{i(\nu t - \omega x)}\,\frac{15}{8}\,\pi\, y \left(-\frac{1}{i\omega}\, x_0 + \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot e^{-\omega i x_0}$$

und mit

$$\sin 2\vartheta = -\frac{2\sqrt{x_0^2 + \eta^2}\,\sqrt{1 - x_0^2}}{1+\eta^2}$$

lautet der Abwindterm des Außenraumes

$$\overline{W}_{3,a}^{(2)} = -\frac{1}{4} \int_1^{\infty} \left(15 - \frac{5}{1 + x_0^2 (s^2 - 1)} - \frac{2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} - 15\, x_0 \sqrt{s^2 - 1} \operatorname{arc\,ctg} x_0 \sqrt{s^2 - 1} \right) y\, \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2 - 1}}\, ds$$

$$= \frac{5}{2}\, y \cdot \overline{W}_{2,a}^{1} + \frac{1}{2}\, y \int_1^{\infty} \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8,3)$$

Es gilt ferner

$$\int_1^{\infty} \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{4 i \sqrt{1 - x_0^2}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2 - 1}} \left(\frac{1}{(x_0 s - i\sqrt{1 - x_0^2})^2} - \frac{1}{(x_0 s + i\sqrt{1 - x_0^2})^2} \right) ds =$$

$$= \frac{1}{4 i \sin\alpha} \left[\int_1^{\infty} \frac{e^{\omega \sin\alpha}}{\sqrt{s^2 - 1}}\, \frac{e^{-\omega i (s\cos\alpha - i \sin\alpha)}}{(s \cdot \cos\alpha - i \sin\alpha)^2}\, ds - \int_1^{\infty} \frac{e^{-\omega \sin\alpha}}{\sqrt{s^2 - 1}}\, \frac{e^{-\omega i (s\cos\alpha + i \sin\alpha)}}{(s\cos\alpha + i \sin\alpha)^2}\, ds \right].$$

Nach den üblichen Differentiationen und Umformungen erhält man

$$\int_1^{\infty} \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} =$$

$$= \frac{e^{+\omega \sin\alpha}}{4 i \sin\alpha} \left(C_2^{(2)} - i\, C_2^{(1)}\, \omega - \int_0^{\omega} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\bar{\omega} i x_0 s}}{\sqrt{s^2 - 1}}\, ds \cdot e^{\bar{\omega} \sin\alpha}\, d\bar{\omega} \right) - \frac{e^{-\omega \sin\alpha}}{4 i \sin\alpha} \left(C_1^{(2)} - i\, C_1^{(1)}\, \omega - \int_0^{\omega} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\bar{\omega} i x_0 s}}{\sqrt{s^2 - 1}}\, ds \cdot e^{\bar{\omega} \sin\alpha}\, d\bar{\omega} \right).$$

wobei $C_2^{(1)}$ und $C_2^{(2)}$ die schon unter (4,6) errechneten Werte bedeuten. Somit folgt:

$$\int_1^{\infty} \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{2 i \sin\alpha} \left(-Q_1 \cdot \mathfrak{Sin}(\omega \sin\alpha) + i\,\frac{\pi}{2}\, P_1 \cdot \mathfrak{Cof}(\omega \sin\alpha) + \right.$$

$$\left. + Q_0 \cdot \omega\, \mathfrak{Cof}(\omega \sin\alpha) - i\,\frac{\pi}{2}\, P_0\, \mathfrak{Sin}(\omega \sin\alpha) + \frac{\pi}{2}\, i \int_0^{\omega} \int_0^{\bar{\omega}} H_0^{(2)}(\bar{\omega} \cos\alpha)\, \mathfrak{Sin}[(\omega - \bar{\omega}) \sin\alpha]\, d\bar{\omega} \right) \quad \ldots \quad (8,4)$$

Um den geforderten Abwind zu erhalten, setzt man

$$\bar{C}_3^2 = \omega i\, \bar{K}_3^2$$

und bildet

$$W_B^3 = W_3^2 + \frac{5}{2}\, W_B \frac{\bar{K}_3^2}{C_2^1}.$$

Dann ist

$$W_B^3 = -\frac{\bar{K}_3^2}{V}\,\frac{15\pi}{8}\, x\, y \cdot e^{i\nu t} + \frac{\bar{K}_3^2}{V}\, e^{i(\nu t - \omega x)}\, y \left[\left(\frac{15}{4} + \frac{15}{4}\,\omega\,\frac{d}{d\omega} \right) \left(-\frac{\pi}{2}\, i H_0^{(2)}(\omega x_0) \right) - \frac{5}{4} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\, \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{4}\, i\omega + \frac{15}{4 i}\,\frac{d}{d\omega} \right) \int_1^{\infty} \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2}\, \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} + \frac{\omega i}{2} \int_1^{\infty} \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \right] \quad \ldots \ldots \quad (8,5)$$

Digitized by Google

Man hat wieder neben dem geforderten Abwind den zu kompensierenden Term.

Damit sind alle in der Einleitung geforderten Abwindformen berechnet; wir werden nun zu den Potentialfunktionen zweiter Art übergehen, um mit diesen dann die Kompensation der überflüssigen Terme der Abwindfunktionen erster Art vorzunehmen.

Es ist natürlich klar, daß man mit weiteren höheren Potentialfunktionen erster Art auch weitere Plattenverformungen berechnen kann, wobei die Abwindfunktionen immer komplizierter werden.

9. Die Potentialfunktionen zweiter Art.

Die Potentialfunktionen zweiter Art erhält man aus den Potentialfunktionen erster Art durch einen Grenzprozeß. Man bildet dazu die Linearkombination

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_{n+1}^n}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{dc} + \frac{\partial \psi_{n+1}^n}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dc} + (n+1)\,\frac{\psi_{n+1}^n}{c} \qquad (9,1)$$

wobei c der Radius der Kreisfläche ist. Die ψ_n genügen ebenfalls der Potentialgleichung.

Diese Differentiation könnte man natürlich auch auf den Abwind der Potentialfunktionen erster Art anwenden, um die Abwindfunktionen zweiter Art zu erhalten. Es zeigt sich aber, daß es hier einfacher ist, die Potentialfunktionen nach (9,1) zu berechnen und den jeweiligen Abwind zu bestimmen, da die Endformeln einer Gesetzmäßigkeit unterliegen. Genau wie bei den Potentialfunktionen erster Art gilt auch hier für das Druckpotential

$$\varphi_n = \psi_n \cdot e^{i\nu t} \cdot \text{const} \quad \ldots\ldots \quad (9,2)$$

wobei ψ_n wie im stationären Fall

$$\psi_n = C_n \cdot \frac{\mu\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}}{(\mu^2+\eta^2)\,(1+\eta^2)^{\frac{n}{2}}} \begin{matrix}\cos n\vartheta \\ \sin n\vartheta\end{matrix} \quad \text{ist.} \quad (9,3)$$

Diese Potentialfunktionen gehen am gesamten Scheibenrand wie $1/\mu$ nach Unendlich.

Der Abwind bestimmt sich dann zu

$$W_n = \frac{1}{V}\,\frac{d}{dz}_{z\to 0} \int_0^{\mu_0} \psi_n(\mu, y, z, t')\,d\mu \quad \ldots \quad (9,4)$$

Man kann nun (9,3) wieder in den Koordinaten μ, y, z schreiben, wobei man $\begin{matrix}\cos n\vartheta \\ \sin n\vartheta\end{matrix}$ in eine Reihe von $\begin{matrix}\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\end{matrix}$ entwickeln muß. (9,3) gibt mit $\cos n\vartheta$ die symmetrischen und mit $\sin n\vartheta$ die unsymmetrischen Potentialfunktionen. Die Entwicklung würde dann bei symmetrischen Potentialfunktionen folgendes ergeben:

$$\psi_n(\mu, y, z) = C_n \frac{\mu^{n+1}}{(\mu^2+z^2)^n}\Big\{[(1-\mu^2)(\mu^2+z^2)-\mu^2 y^2]^{\frac{n}{2}} - \binom{n}{2}\mu^2 y^2\,[(1-\mu^2)(\mu^2+z^2)-\mu^2 y^2]^{\frac{n-1}{2}-1} + \binom{n}{4}\mu^4 y^4\,[(1-\mu^2)(\mu^2+z^2)-\mu^2 y^2]^{\frac{n-1}{2}-2} + \ldots\Big\}$$

Wie dieser Ausdruck zeigt, müßte für die Abwindberechnung die Integration über der Fläche ausgeführt werden, weil sonst der gesamte Ausdruck für den Operator $\frac{d}{dz}_{z\to 0}$ unbestimmt wird. Dieses würde im Instationären zu großen Integrationsschwierigkeiten führen.

Man kann aber mit Einführung der dritten kartesischen Koordinate x diesen Ausdruck sehr einfach und übersichtlich als Realteil einer komplexen Funktion wie folgt schreiben:

$$W_n = \frac{C_n}{V}\,\frac{d}{dz}_{z\to 0} \int_0^{\mu_0} \frac{(1-\mu^2)^n}{2x'}\left(\frac{1}{(x'+iy)^n} + \frac{1}{(x'-iy)^n}\right) e^{i\nu t'} d\mu, \quad \ldots \quad (9,5)$$

wobei zwischen x, y und μ die Beziehung

$$\frac{x'^2+y^2}{1-\mu^2} = \frac{z^2+\mu^2}{\mu^2}$$

besteht.

Das Abwindintegral gibt im Stationären nur Funktionen in y allein, d. h. die Größenordnung der oberen Grenze spielt hier keine Rolle. Aus diesem Grunde kann man auch hier μ gegen 1 vernachlässigen. Man überzeugt sich leicht in den späteren Rechnungen, daß hierbei dieselben stationären Werte herauskommen.

Nach dieser Vereinfachung der Abwindformel (9,5) nehmen wir folgende Substitution vor:

$$u = \sqrt{1+\frac{z^2}{\mu^2\cos^2\alpha}}, \qquad u_0 = \sqrt{1+\frac{z^2}{\mu_0^2\cos^2\alpha}},$$

wobei $y = \sin\alpha$ gesetzt ist.

Setzt man noch

$$\bar{g}_n(u) = \frac{e^{i\nu t}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^n} + \frac{e^{i\nu t}}{(u\cos\alpha - i\sin\alpha)^n},$$

so geht das Abwindintegral über in:

$$W_n = \frac{C_n}{V} \cdot \frac{(-1)^n}{2\cos^2\alpha}\,\frac{d}{dz}\,z \cdot \int_{u_0}^{\infty} \frac{\bar{g}_n(u)}{\sqrt{u^2-1}^3}\,du.$$

Man kann nun die Differentiation nach z und den Grenzübergang $z \to 0$ leicht durchführen. Es folgt:

$$W_n = \frac{C_n}{V} \cdot \frac{(-1)^n}{2\cos^2\alpha}\left[\int_1^{\infty} \frac{\bar{g}_n(u)-\bar{g}_n(1)}{\sqrt{u^2-1}^3}\,du - \bar{g}_n(1) + \bar{g}_n(\infty)\right] \quad \ldots \quad (9,6)$$

Hierbei ist $\bar{g}_n(\infty) = 0$, für $n > 0$.

Zur Integration setzt man wieder $\nu(t-t') = \omega(x-x')$ und mit

$$\bar{g}_n(u) = e^{i(\nu t-\omega x)}\,g_n(u)$$

schreibt sich die Abwindformel (9,6):

$$W_n = \frac{C_n}{V}\,\frac{(-1)^n}{2\cos^2\alpha}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\left[\int_1^{\infty} \frac{g_n(u)-g_n(1)}{\sqrt{u^2-1}^3}\,du - g_n(1) + g_n(\infty)\right] \quad \ldots \quad (9,7)$$

Mittels partieller Integration folgt:

$$\int_1^{\infty} \frac{g_n(u)}{\sqrt{u^2-1}^3}\,du = \left[-g_n(u)\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dg_n(u)}{du}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du.$$

Damit wird aus (9,7)

$$W_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{\cos^2\alpha}\left(\int_1^{\infty} \frac{dg_n(u)}{du}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du - \left[\left(g_n(u)-g_n(1)\right)\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right]_1^{\infty} - g_n(1) + g_n(\infty)\right),$$

also für beliebiges $n \geqq 0$:

$$W_n = \frac{C_0}{V}\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\cdot\frac{(-1)^n}{2\cos^2\alpha}\int_1^{\infty} \frac{dg_n}{du}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du \qquad (9,8)$$

1. $n = 0$.

Mit

$$\frac{dg_0}{du} = 2i\omega\cos\alpha\,e^{+i\omega u\cos\alpha}$$

$$y = \sin\alpha \qquad x' = u\cdot\cos\alpha$$

lautet der Abwind

Digitized by Google

$$W_0 = \frac{C_0}{V} \cdot \frac{e^{i(\nu t - \omega x)}}{\cos^2 \alpha} \int_1^\infty \frac{i\omega \cos\alpha \cdot e^{-i\omega u \cos\alpha} \cdot u}{\sqrt{u^2-1}}\, du \quad (9,9)$$

und mit Einführung der Hankelschen Funktion

$$\int_1^\infty \frac{e^{i\omega u \cos\alpha}}{\sqrt{u^2-1}}\, du = +\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(\omega \cdot \cos\alpha)$$

wird aus (9,9)

$$W_0 = \frac{C_0}{V} \cdot \frac{e^{i(\nu t - \omega x)}}{\cos^2 \alpha} \cdot \omega \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(\omega \cdot \cos\alpha)\right). \quad (9,10)$$

Wegen

$$\frac{d}{dx} H_0^{(1)}(x) = -H_1^{(1)}(x)$$

lautet endlich die Abwindformel

$$W_0 = -\frac{C_0}{V} \frac{e^{i(\nu t - \omega x)}}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\pi}{2} i\omega \cos\alpha \cdot H_1^{(1)}(\omega \cdot \cos\alpha). \quad (9,11)$$

2. $n = 1$.

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$g_n(u) = \frac{e^{i\omega u \cos\alpha}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^n} + \frac{e^{i\omega u \cos\alpha}}{(u\cos\alpha - i\sin\alpha)^n} = 2 \cdot R\left(\frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^n}\right)$$

lautet der Abwind nach (9,8)

$$\overline{W}_1 = \frac{1}{\cos\alpha} \int_1^\infty R\left(\frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}\right) \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\, du - \frac{i\omega}{\cos\alpha} \int_1^\infty R\left(\frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{u\cos\alpha + i\sin\alpha}\right) \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\, du \quad (9,12)$$

und mit

$$G_1^{(n)} = \int_1^\infty \frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^n} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$G_2^{(n)} = \int_1^\infty \frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha - i\sin\alpha)^n} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

kann man für die Integrale schreiben:

$$\int_1^\infty \frac{u \cdot e^{\omega i u\cos\alpha}}{u\cos\alpha + i\sin\alpha} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}\right) - \frac{i\sin\alpha}{\cos\alpha} \int_1^\infty \frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{u\cos\alpha + i\sin\alpha} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\int_1^\infty \frac{u \cdot e^{\omega i u\cos\alpha}}{u\cos\alpha - i\sin\alpha} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}\right) + \frac{i\sin\alpha}{\cos\alpha} \int_1^\infty \frac{e^{\omega i u\cos\alpha}}{u\cos\alpha - i\sin\alpha} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\int_1^\infty R\left(\frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}\right) \cdot \frac{u\cdot du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{G_1^{(1)} + G_2^{(1)}}{2} - i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{G_1^{(2)} - G_2^{(2)}}{2}.$$

Ich will nun im weiteren Verlauf der Rechnung zunächst die Funktionen $G_1^{(n)}$ und $G_2^{(n)}$ allgemein berechnen. Dies geschieht mit der schon in früheren Abschnitten benutzten Methode, die daher hier nicht näher erläutert werden soll.

Es folgt allgemein:

$$\left.\begin{aligned} G_1^{(n)} &= e^{\omega \sin\alpha}\left(C_1^{(n)} + i\int_0^\omega G_1^{(n-1)} e^{-\bar{\omega}\sin\alpha}\, d\bar{\omega}\right) \\ G_2^{(n)} &= e^{-\omega\sin\alpha}\left(C_2^{(n)} + i\int_0^\omega G_2^{(n-1)} e^{+\bar{\omega}\sin\alpha}\, d\bar{\omega}\right) \end{aligned}\right\} \quad (9,13)$$

wobei $G_1^{(0)}$ die Hankelsche Funktion $\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}$ bedeutet. Man kann somit die einzelnen G-Funktionen mit Hilfe dieser bekannten Hankelschen Funktion sukzessive aufbauen und berechnen.

Die Konstanten $C_1^{(n)}$ bestimmen sich nach Formel (4,6).

Das heißt:

$$\begin{aligned} G_{1,2}^{(2k+1)} = e^{\pm\omega\sin\alpha}(-1)^k \Big[&\frac{\pi}{2} P_{2k} \mp i Q_{2k} + \\ &+ i\omega\left(Q_{2k-1} \pm i\frac{\pi}{2} P_{2k-1}\right) - \\ &- \frac{i^2}{2!}\omega^2\left(\frac{\pi}{2} P_{2k-2} \mp i Q_{2k-2}\right) - \\ &- \frac{i^3}{3!}\omega^3\left(Q_{2k-3} \pm i\frac{\pi}{2} P_{2k-3}\right) \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots + (-1)^k \cdot i^{2k+1} \underbrace{\int_0^\omega\int\cdots\int_*^\pi}_{2k+1} \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)} e^{\pm\bar{\omega}\sin\alpha}\, d\bar{\omega} \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{1,2}^{(2k)} = e^{\pm\omega\sin\alpha}(-1)^k \Big[&Q_{2k-1} \pm i\frac{\pi}{2} P_{2k-1} - \\ &- i\omega\left(\frac{\pi}{2} P_{2k-2} \mp i Q_{2k-2}\right) - \\ &- \frac{i^2}{2!}\omega^2\left(Q_{2k-3} \pm i\frac{\pi}{2} P_{2k-3}\right) + \cdots\cdots + \\ &+ (-1)^k \cdot i^{2k} \underbrace{\int_0^\omega\int\cdots\int_*^\pi}_{2k} \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)} e^{\pm\bar{\omega}\sin\alpha}\, d\bar{\omega} \Big] \end{aligned} \quad (9,14)$$

Zum Aufbau der übrigen Abwindformeln gilt zunächst:

$$\int_1^\infty R\left(\frac{e^{\omega i u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha + i\sin\alpha)^n}\right) \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{G_1^{(n-1)} + G_2^{(n-1)}}{2} - i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{G_1^{(n)} - G_2^{(n)}}{2} \quad \cdots\cdots \quad (9,15)$$

Mit diesem Formelsystem läßt sich dann der Abwind (9,12) schreiben:

$$\begin{aligned} \overline{W}_1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Big[&\frac{\pi}{2} P_0 \cdot \mathfrak{Cof}(\omega \cdot y) - i Q_0 \cdot \mathfrak{Sin}(\omega y) + i\int_0^\omega \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)} \mathfrak{Cof}[(\omega - \bar{\omega})\, y]\, d\bar{\omega} + \\ &+ i\sin\alpha \left\{ + i\frac{\pi}{2} P_1 \mathfrak{Cof}(\omega y) + Q_1 \cdot \mathfrak{Sin}(\omega y) - i\omega\left(\frac{\pi}{2} P_0 \mathfrak{Sin}(\omega y) - i Q_0 \cdot \mathfrak{Cof}(\omega y)\right) - i^2 \int_0^\omega\int_*^\pi \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)} \mathfrak{Sin}[(\omega - \bar{\omega})\, y]\, d\bar{\omega} \right\} \Big] - \\ &- \frac{i\omega}{\cos^2\alpha} \left[\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)} - i\sin\alpha \left\{ \frac{\pi}{2} P_0 \cdot \mathfrak{Sin}(\omega y) - i Q_0 \mathfrak{Cof}(\omega y) + i\int_0^\omega \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)} \mathfrak{Sin}[(\omega - \bar{\omega}) \cdot y]\, d\bar{\omega} \right\} \right] \cdot \end{aligned}$$

Digitized by Google

Es besteht nun zwischen den Kugelfunktionen P_n die Beziehung [4]

$$(y^2-1)\frac{dP_n}{dy} = n\,(y\,P_n - P_{n-1}), \quad \ldots \quad (9,16)$$

welche ebenso für die Q_n besteht.

Damit wird obige Abwindformel:

$$\overline{W}_1 = \frac{\pi}{2}\frac{dP_1}{dy}\,\mathfrak{Cof}(\omega y) - i\frac{dQ_1}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}(\omega y) + \frac{1}{\cos^2\alpha}\left\{i\int_0^\omega \frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} - \right.$$

$$\left. - i^3 y\int_0^\omega\int_*^{} \frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} - i\,\omega\,\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)} + i^3\,\omega\,y\int_0^\omega \frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega}\right\}.$$

Formt man nun noch weiter um, indem man schreibt

$$\int_0^\omega\int_*^{} H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} = \omega\int_0^\omega H_0^{(1)}\cdot\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} - \int_0^\omega \overline{\omega}\,H_0^{(1)}\cdot\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} =$$

$$= +\omega\int_0^\omega H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} + \frac{\omega}{y}\cdot H_0^{(1)} - \frac{1}{y}\int_0^\omega\left(H_0^{(1)} + \omega\frac{d}{d\omega}H_0^{(1)}\right)\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega},$$

so folgt, wenn man noch die schon vor (9, 11) gegebene Beziehung $\frac{d}{d\omega}H_0^{(1)} = -\cos\alpha\,H_1^{(1)}$ benutzt, als Endformel:

$$W_1 = \frac{C_1}{V}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\left(\frac{\pi}{2}\frac{dP_1}{dy}\,\mathfrak{Cof}(\omega y) - i\frac{dQ_1}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}(\omega y) + \frac{i}{\cos\alpha}\int_0^\omega \frac{\pi}{2}\,i\,\overline{\omega}\,H_1^{(1)}(\overline{\omega}\cdot\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega}\right) \quad \ldots \quad (9,17)$$

3. $n = 2$.

Der Abwind lautet

$$W_2 = \frac{C_2}{V}\cdot\frac{e^{i(\nu t-\omega x)}}{\cos^2\alpha}\int_1^\infty \frac{dg_2(u)}{du}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du \quad \ldots \quad (9,18)$$

mit

$$\frac{dg_2(u)}{du} = -R\left(\frac{2\cos\alpha\cdot e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}\right) + R\left(\frac{i\,\omega\cos\alpha\,e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cos\alpha+i\sin\alpha)^2}\right).$$

Nach (9,14) und (9,15) lautet dann der Abwind (9,18):

$$\overline{W}_2 = -\frac{2}{\cos^2\alpha}\left[-Q_1\,\mathfrak{Cof}(\omega y) - i\frac{\pi}{2}P_1\cdot\mathfrak{Sin}(\omega y) + i\,\omega\left\{\frac{\pi}{2}P_0\,\mathfrak{Cof}(\omega y) - iQ_0\,\mathfrak{Sin}(\omega y)\right\} + \right.$$

$$+ i^2\int_0^\omega\int_*^{}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} + i\sin\alpha\left\{\frac{\pi}{2}P_2\,\mathfrak{Sin}(\omega y) - iQ_2\,\mathfrak{Cof}(\omega y) + \right.$$

$$+ i\,\omega\left(Q_1\cdot\mathfrak{Sin}(\omega y) + i\frac{\pi}{2}P_1\,\mathfrak{Cof}(\omega y)\right) - \frac{i^2}{2!}\,\omega^2\left(\frac{\pi}{2}P_0\,\mathfrak{Sin}(\omega y) - iQ_0\,\mathfrak{Cof}(\omega y)\right) -$$

$$\left.\left. - i^3\int_0^\omega\int_*^{}\int_*^{}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega}\right\}\right] + \frac{i\,\omega}{\cos^2\alpha}\left[\frac{\pi}{2}P_0\,\mathfrak{Cof}(\omega y) - iQ_0\,\mathfrak{Sin}(\omega y) + \right.$$

$$+ i\int_0^\omega \frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} + i\sin\alpha\left\{Q_1\,\mathfrak{Sin}(\omega y) + i\frac{\pi}{2}P_1\,\mathfrak{Cof}\,\omega y - \right.$$

$$\left.\left. - i\,\omega\left(\frac{\pi}{2}P_0\,\mathfrak{Sin}(\omega y) - iQ_0\,\mathfrak{Cof}(\omega y)\right) - i^2\int_0^\omega\int_*^{}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\cdot\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega}\right\}\right].$$

Die auftretenden Mehrfachintegrale formt man durch wiederholte partielle Integration in folgender Weise um:

$$\underbrace{\int_0^\omega\int\ldots\int_*^{}}_{n}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\frac{\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]}{\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]}\,d\overline{\omega} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\omega(\omega-\overline{\omega})^{n-1}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\frac{\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]}{\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]}\,d\overline{\omega}.$$

Gemäß Formel (9,15) lassen sich diese dann in der Abwindfunktion W_n folgendermaßen zusammenfassen

$$\frac{n}{(n-1)!}\int_0^\omega(\omega-\overline{\omega})^{n-1}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} - \frac{\omega}{(n-2)!}\int_0^\omega(\omega-\overline{\omega})^{n-2}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} +$$

$$+ \frac{n\,y}{n!}\int_0^\omega(\omega-\overline{\omega})^n\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} - \frac{\omega\,y}{(n-1)!}\int_0^\omega(\omega-\overline{\omega})^{n-1}\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\omega(\omega-\overline{\omega})^{n-1}\left(\overline{\omega}\,\frac{\pi}{2}\,i\frac{d}{d\overline{\omega}}H_0^{(1)}\right)\mathfrak{Cof}[(\omega-\overline{\omega})\,y]\,d\overline{\omega}, \quad \ldots \quad (9,19)$$

Digitized by Google

wenn man die letzten beiden Integrale auf der linken Seite zusammenfaßt und durch partielle Integration umformt, indem man

$$\mathfrak{Sin}\,[(\omega-\bar\omega)\,y]\,d\bar\omega = \frac{-1}{y}\,d\,\mathfrak{Cof}\,[(\omega-\bar\omega)\,y]$$

setzt. Berücksichtigt man noch Beziehung (9,16) und daß

$$\frac{d}{d\omega}\,H_0^{(1)} = -\cos\alpha\,H_1^{(1)}$$

ist, so erhält man zusammenfassend:

$$W_2 = \frac{C_2}{V}\cdot e^{i(\nu t-\omega x)}\left[\frac{dQ_2}{dy}\cdot\mathfrak{Cof}\,(\omega y) + i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_2}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\omega y) - \omega\left(\frac{dQ_1}{dy}\,\mathfrak{Sin}\,(\omega y) + i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_1}{dy}\cdot\mathfrak{Cof}\,(\omega y)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\cos\alpha}\int_0^{\omega}(\omega-\bar\omega)\,\bar\omega\,\frac{\pi}{2}\,i\,H_1^{(1)}(\bar\omega\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}\,[(\omega-\bar\omega)\,y]\,d\bar\omega\right] \quad (9,20)$$

Aus dem Vorangegangenen erkennt man schon den allgemeinen Aufbau der $n$ten Abwindformel.
Es gilt:

$$W_n = \frac{C_n}{V}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\cdot(-1)^{n+1}\left[\frac{i^n}{\cos\alpha}\int_0^{\omega}\frac{(\omega-\bar\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\,\bar\omega\,\frac{\pi}{2}\,i\,H_1^{(1)}\cdot\mathfrak{Cof}\,[(\omega-\bar\omega)\,y]\,d\bar\omega + \right.$$
$$+\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_1}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y) - i\,\frac{dQ_1}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\omega y)\right)\cdot\omega^{n-1} - \frac{i^{n-2}}{(n-2)!}\left(\frac{dQ_2}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y) + i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_2}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\omega y)\right)\cdot\omega^{n-2}$$
$$\left. -\frac{i^{n-3}}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_3}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y) - i\,\frac{dQ_3}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\omega y)\right)\cdot\omega^{n-3} + \frac{i^{n-4}}{(n-4)!}\left(\frac{dQ_4}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y) + i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_4}{dy}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\omega y)\right)\cdot\omega^{n-4} + \ldots\right] \quad (9,21)$$

Diese symmetrischen Abwindfunktionen zweiter Art, die gerade in y sind, eignen sich zur Kompensation der Terme in den symmetrischen Abwindfunktionen erster Art (4,7), (5,4), (6,6), (6,11), die den Faktor $e^{i(\nu t-\omega x)}$ tragen und deshalb zur Darstellung der Bewegung der Platte nicht brauchbar sind.

Für die Kompensation der entsprechenden Terme der unsymmetrischen Abwindfunktionen erster Art (7,3), (8,5) leiten wir uns analog die unsymmetrischen Abwindfunktionen zweiter Art ab, die ungerade in y sind.

Das zur x-z-Ebene unsymmetrische Potential lautet

$$\varphi_n = \bar C_n\,\frac{\mu\,(1-\mu^2)^{n/2}}{(\mu^2+\eta^2)\,(1+\eta^2)^{n/2}}\,\sin n\vartheta\,e^{i\nu t} \quad (9,22)$$

Zur Abwindberechnung benutzt man hier die analoge komplexe Schreibweise:

$$W_n = \frac{\bar C_n}{V}\,(-i)\,(-1)^n\,\frac{d}{dz}\,\frac{1}{2}\int_0^{\mu_0}\left(\frac{(1-\mu^2)^n}{(x'+iy)^n} - \frac{(1-\mu^2)^n}{(x'-iy)^n}\right)\frac{e^{i\nu t'}}{x'}\,d\mu.$$

Wendet man nun dieselben Transformationen an, wie es schon in der Berechnung der symmetrischen Abwindfunktionen geschehen ist, und setzt

$$g_n(u) = e^{i\omega u\cos\alpha}\left(\frac{1}{(u\cdot\cos\alpha+i\sin\alpha)^n} - \frac{1}{(u\cdot\cos\alpha-i\sin\alpha)^n}\right) = 2\,I\left(\frac{e^{i\omega u\cos\alpha}}{(u\cdot\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}\right),$$

so lautet das entsprechende Abwindintegral

$$W_n = \frac{\bar C_n}{V}\cdot(-i)\cdot(-1)^n\cdot\frac{e^{i(\nu t-\omega x)}}{2\cos^2\alpha}\int_1^{\infty}\frac{dg_n(u)}{du}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du \quad (9,23)$$

Die weitere Berechnung der Integrale geschieht in analoger Weise, wie wir es schon bei den symmetrischen Abwindfunktionen gesehen haben. Der allgemeine Ausdruck für die unsymmetrischen Abwindfunktionen ergibt sich dann zu:

$$W_n = \frac{\bar C_n}{V}\,e^{i(\nu t-\omega x)}\,(-1)^n\left[\frac{i^{n+1}}{\cos\alpha}\int_0^{\omega}\frac{(\omega-\bar\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\,\bar\omega\,\frac{\pi}{2}\,i\,H_1^{(1)}\,\mathfrak{Sin}\,[(\omega-\bar\omega)\,y]\,d\bar\omega + \right.$$
$$+\frac{i^n}{(n-1)!}\,\omega^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_1}{dy}\,\mathfrak{Sin}\,(\omega\cdot y) - i\,\frac{dQ_1}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y)\right) - \frac{i^{n-1}}{(n-2)!}\,\omega^{n-2}\left(\frac{dQ_2}{dy}\,\mathfrak{Sin}\,(\omega\cdot y) + i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_2}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y)\right) -$$
$$\left. -\frac{i^{n-2}}{(n-3)!}\,\omega^{n-3}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_3}{dy}\,\mathfrak{Sin}\,(\omega\cdot y) - i\,\frac{dQ_3}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y)\right) + \frac{i^{n-3}}{(n-4)!}\,\omega^{n-4}\left(\frac{dQ_4}{dy}\,\mathfrak{Sin}\,(\omega\cdot y) + i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{dP_4}{dy}\,\mathfrak{Cof}\,(\omega y)\right) + \ldots\right] \quad (9,24)$$

Damit ist die Aufstellung der für die weiteren Rechnungen notwendigen Abwindfunktionen abgeschlossen. Man erkennt, daß dieses Verfahren eine geschlossene und übersichtliche Bildung der Abwindfunktionen zweiter Art zuläßt. Außerdem ist leicht ersichtlich, daß man mit $\omega \to 0$ die stationären Werte der Abwindfunktionen bekommt, so wie sie in der eingangs erwähnten Kinnerschen Arbeit berechnet sind.

10. Die Abflußbedingung (vgl. [2]).

Die noch zu erfüllende Bedingung des glatten Abflusses an der Hinterkante der Platte bedeutet ein Verschwinden der Werte der Potentialfunktionen für

$$\mu = 0 \qquad \eta = 0 \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}.$$

Diese Bedingung ist für jede Potentialfunktion erster Art erfüllt, da diese am ganzen Scheibenrand verschwinden. Für die Potentialfunktionen zweiter Art erwähnte ich schon bei ihrer Bildung, daß ihre Werte am ganzen Scheibenrand wie $1/\mu$ nach Unendlich gehen.

Für die lineare Überlagerung der schon in Abschnitt 7 erwähnten Kompensationsrechnung wird eine unendliche Summe von Potentialfunktionen zweiter Art gebildet. Da diese Summe an der Hinterkante gegen Null gehen muß, gilt die Bedingungsgleichung:

Digitized by Google

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \cos 2k\varphi + \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_{2\lambda+1} \cos(2\lambda+1)\varphi = 0 \quad (10,1)$$

Zur analytischen Auswertung dieser Beziehung multipliziert man (10,1) mit $\cos(2\lambda+1)\varphi$ und integriert über φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Man erhält dann:

$$C_{2\lambda+1} = \frac{4}{\pi} \cdot (-1)^{\lambda+1} (2\lambda+1) \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k C_{2k}}{(2\lambda+1)^2 - (2k)^2} \quad \ldots \quad (10,2)$$

Für unsymmetrische Potentialfunktionen zweiter Art lautet analog die Bedingung des glatten Abflusses:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_{2k} \sin 2k\varphi + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \overline{C}_{2\lambda+1} \sin(2\lambda+1)\varphi = 0 \quad (10,3)$$

Durch Multiplikation von (10,3) mit $\sin 2K\varphi$ und entsprechende Integration erhält man

$$\overline{C}_{2k} = -\frac{4}{\pi} (-1)^k 2k \sum_{\lambda=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^\lambda \overline{C}_{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)^2 - (2k)^2} .$$

11. Kompensationsrechnung.

In diesem Abschnitt soll die analytische Durchführung der in Abschnitt 3 erwähnten Kompensationsrechnung erläutert werden.

Für die Abwindfunktion erster Art lautet der allgemeine Ausdruck nach (3,1):

$$W = f(x,y)\, e^{i\nu t} + e^{i(\nu t - \omega x)}\, g(y) \quad \ldots \quad (11,1)$$

wobei $f(x,y)\, e^{i\nu t}$ genau den geforderten Abwind darstellt. Die Abwindfunktionen zweiter Art werden dargestellt durch:

$$W_n = C_n h_n(y) \cdot e^{i(\nu t - \omega x)} , \quad \ldots \quad (11,2)$$

(11,1) und (11,2) überlagert man linear, so daß folgendes erfüllt ist:

$$g(y) + \sum_{n=0}^{\infty}{}' C_n h_n(y) = 0 \quad \ldots \quad (11,3)$$

wobei $g(y)$ und $h_n(y)$ beide entweder symmetrisch oder unsymmetrisch zur x-z-Ebene sein müssen. Die $h_n(y)$ sind aus (9,21) und (9,24) allgemein abzulesen. Für unsymmetrische bzw. symmetrische Abwindfunktionen bestimmen sich die ungeraden C_n ($n = 2\lambda+1$) bzw. geraden C_n ($n = 2k$) aus der in Abschnitt 10 behandelten Abflußbedingung. Im stationären Problem ($\omega \to 0$) benutzt man zur analytischen Durchführung der Aufgabe die Orthogonalitätseigenschaft der Kugelfunktionen, womit man unendlich viele Gleichungen für die unendlich vielen Unbekannten C_n erhält (vgl. Kinner [2]).

Im instationären ($\omega \neq 0$) kennt man zu den $h_n(y)$ keine Orthogonalfunktionen.

Wie man aus (9,21) und (9,24) erkennt, treten aber zum großen Teil Ausdrücke in $\cos^{2n}\alpha$ auf. Es soll daher hier die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen benutzt werden.

Zur Lösung der Aufgabe könnte man für symmetrische $g(y)$ und $h_n(y)$ (11,3) mit $\cos 2k\alpha$ multiplizieren und von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ integrieren.

Nun hat aber $\frac{dQ_n}{dy}$ die allgemeine Form

$$\frac{dQ_n}{dy} = \frac{a_1(y)}{1-y^2} + b_1(y) \ln \frac{1+y}{1-y},$$

wobei $a_1(y)$ und $b_1(y)$ Polynome in y sind. Da der Nenner $(1-y^2)$ die Integration über α erschweren würde, multipliziert man (11,3) mit $\cos^2\alpha \cdot \cos 2k\alpha$ und führt die erwähnte Integration aus. Dadurch erhält man unendlich viele inhomogene lineare Gleichungen für die noch unbekannten C_{2k}.

Die unsymmetrischen Abwindfunktionen erster und zweiter Art sind zum großen Teil mit dem Faktor $y = \sin\alpha$ versehen, im übrigen dann aber wieder gerade in y. Um die schon für die symmetrischen Abwindfunktionen durchgeführten Integrationen über α benutzen zu können, multipliziert man in diesem Falle (11,3) mit $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cos 2k\alpha$ und integriert über α von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$.

Man erhält analog unendlich viele Gleichungen für die noch unbekannten $\overline{C}_{2\lambda+1}$.

Die Konstanten C_n bzw. $\overline{C}_n$ werden dann nur noch Funktionen von ω sein.

12. Druckverteilung, Auftrieb und Momente.

Aus der durch die Eulersche Gleichung gegebenen Beziehung

$$\mathfrak{b} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = 0 \quad \ldots \quad (12,1)$$

und $\mathfrak{b} = \operatorname{grad}\varphi$ folgt die Gleichung

$$\varrho \cdot \varphi = p_\infty - p, \quad \ldots \quad (12,2)$$

wobei p_∞ den statischen Druck im Unendlichen bedeutet. Damit ist der resultierende Druck pro Flächeneinheit in einem Punkte der Scheibe, kurz Drucksprung

$$H(x,y,t) = p_u - p_{ob} = \varrho(\varphi_{ob} - \varphi_u), \quad \ldots \quad (12,3)$$

wobei in den Potentialfunktionen $\eta = 0$ zu setzen ist. Da die Werte der Potentialfunktionen an der Ober- und Unterseite entgegengesetzt gleich sind, so kann man für (12,3) schreiben:

$$H(x,y,t) = p_u - p_{ob} = 2\varrho\varphi_{ob} \quad \ldots \quad (12,4)$$

Kennt man also aus der Kompensationsrechnung die Werte der Koeffizienten der Potentialfunktionen, so kann man sich mit (12,4) die Druckverteilung berechnen, wie es im zweiten Teil der Arbeit numerisch durchgeführt wird.

Der Auftrieb berechnet sich zu

$$A = \int\int H \cdot F\, d, \quad \ldots \quad (12,5)$$

wobei das Flächenintegral über die Scheibe mit dem Radius c erstreckt wird.

Setzt man

$$dF = c^2 \cdot \mu\, d\mu\, d\varphi,$$

so wird aus (12,5)

$$A = c^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^{1} H \cdot \mu\, d\mu\, d\varphi \quad \ldots \quad (12,6)$$

Berücksichtigt man noch die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi\, d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin n\varphi\, d\varphi = 0 \qquad n = 1,2,3\ldots$$

so erkennt man, daß

$$A_1^0 = \frac{4}{3} \pi \varrho c^2 \cdot C_1^0 \cdot e^{i\nu t} \qquad A_0 = 4\pi\varrho c^2 C_0 \cdot e^{i\nu t} \quad (12,7)$$

ist, während der Auftrieb für alle anderen φ_n^m und φ_n verschwindet, womit die Berechnung des Gesamtauftriebes sehr einfach wird. Der Gesamtauftrieb wird somit kaum von der Konvergenz der Koeffizienten C_n abhängen. Dieses trifft für die Druckverteilung nicht zu.

Das Kippmoment der Auftriebskräfte um die y-Achse lautet

$$M = \int\int H \cdot x\, dF = c^3 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^{1} H \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos\varphi\, d\mu\, d\varphi \quad (12,8)$$

Mit den in der Auftriebsberechnung gegebenen Beziehungen gilt hier:

$$M_2^1 = \frac{4}{15} \pi \varrho c^3 C_2^1 \cdot e^{i\nu t} \qquad M_1 = \frac{4}{3} \pi \varrho c^3 C_1 \cdot e^{i\nu t} \quad \ldots \quad (12,9)$$

während das Moment für alle anderen Potentialfunktionen φ_n^m und φ_n verschwindet.

Digitized by Google

Dieses gilt natürlich nur für symmetrische Potentialfunktionen. Sind die Potentialfunktionen zur x-z-Ebene unsymmetrisch, so geben die Formeln (12,9) die Größe der Rollmomente an, wobei dann die entsprechenden $\overline{C}$ der unsymmetrischen Potentialfunktionen einzusetzen sind.

13. Schlußbemerkung.

Die vorliegende Arbeit wurde in ihrer ersten Fassung von der Universität Göttingen als Doktordissertation (Dezember 1938) angenommen. Herrn Prof. Prandtl bin ich für die Aufgabenstellung und für sein förderndes Interesse zu besonderem Dank verpflichtet. Die Weiterführung der Arbeit durch Integration der Ansätze und die numerischen Rechnungen wurden von mir im Institut für instationäre Vorgänge der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen vorgenommen. Herrn Prof. Küssner und Herrn Dr. Schwarz danke ich für Hinweise bei der Umformung der Abwind-Integrale. Der Teil II der Arbeit, welcher die Zahlenbeispiele behandelt, wird später veröffentlicht werden*).

14. Verzeichnis des Schrifttums.

[1] L. Prandtl, Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche. Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 360.

[2] W. Kinner, Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1936. Ing.-Archiv Bd. 8 (1937), S. 47.

[3] Whittacker, Edmund Taylor and G. N. Watson, A course of modern analysis. Edinbourgh 1920.

[4] E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen Bd. 1 u. 2. Berlin 1878 u. 1881.

[5] M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete Bd. 1. Springer, Berlin 1932.

*) Herr Dr. Krienes hat in Abwesenheit des zum Kriegsdienst einberufenen Verfassers die mühevolle Arbeit der Nachprüfung und des Korrekturlesens in dankenswerter Weise übernommen.
H. G. Küssner.

Abgeschlossen April 1940.

Digitized by Google

Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (Ebenes Problem).

Von Heinz Söhngen.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Aerodynamik.

Es wird unter den üblichen Voraussetzungen die Auftriebsverteilung für eine beliebig instationär bewegte oder angeströmte Platte bestimmt. Insbesondere wird dabei auf die Einordnung der Definition der kritischen Geschwindigkeit in den allgemeinen Stabilitätsbegriff eingegangen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Ergebnisse der Untersuchung.
III. Eindeutige Lösbarkeit der Aufgabenstellung und Bestimmung der Wirbeldichten für stetige Vorgänge.
IV. Verallgemeinerung auf unstetige Vorgänge.
V. Berechnung der Auftriebsverteilung, der Normalkraft und des Momentes.
VI. Harmonische Bewegungen.
VII. Bestimmung der Lastverteilung für einen Flügel mit Querruder.
VIII. Bemerkung zur Definition der kritischen Geschwindigkeit und Selbsteinstellung des losen Ruders.
IX. Zusammenfassung.
X. Anhang.
XI. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die bisher vorliegenden Untersuchungen über die Bestimmung der Auftriebsverteilung längs der Tiefe eines unendlich breiten Tragflügels, der einer instationären Bewegung unterworfen ist, beschränken sich auf reine Schwingungsprobleme, wobei noch angenommen wird, daß der Schwingungszustand schon sehr lange andauert [2], [11]. Für beliebige instationäre Bewegungen sind dagegen nur Ausdrücke für den gesamten Auftrieb und das Moment bekannt. Vgl. z. B. [4], [9], [11]. In Ergänzung dazu soll hier ein Verfahren angegeben werden, das für derartige Bewegungen eines dünnen und schwach gewölbten Profils bei kleinem Anstellwinkel die Auftriebsverteilung über die Tiefe liefert[1]). Wir lassen dabei zu, daß sich der Flügel mit der Zeit deformiert, nehmen aber an, daß durch diese Deformationen nur geringfügige Änderungen in der Tiefe des Profils hervorgerufen werden, so daß wir diese gleich 2 setzen dürfen. Weiter wollen wir voraussetzen, daß sich der Flügel in erster Näherung geradlinig mit einer nahezu konstanten Geschwindigkeit V bewegt, und daß die Geschwindigkeiten der einzelnen Flügelpunkte senkrecht zu dieser ausgezeichneten Richtung gemessen an V klein sind. Die letzte Voraussetzung gelte ebenfalls für die Deformationsgeschwindigkeiten und die von außen an den Flügel herantretenden Störungen.

Als Koordinatensystem wählen wir ein mit dem Profil bewegtes System, dessen positive x-Achse in die Richtung von V weist. Das Profil liege dann eindeutig über dem Intervall $[-1,1]$ der x-Achse und weiche von der betreffenden Strecke wenig ab (s. Bild 1).

Der Flügel bewege sich bis zu dem Zeitpunkt $t = 0$ stationär unter dem effektiven Anstellwinkel 0, dann möge das instationäre Verhalten der Bewegung einsetzen. Mit $s\,(t)$ werde derjenige Weg bezeichnet, den der Koordinaten-Anfangspunkt des x-y-Systems seit $t = 0$ zurückgelegt hat[2]).

[1]) Dieselbe Aufgabenstellung wurde, wie sich nach Abschluß dieser Arbeit ergeben hat, nahezu gleichzeitig mit der vorliegenden Untersuchung von H. G. Küssner behandelt und auf einem anderen Wege gelöst. Vgl. diese Lieferung S. 355.

[2]) Ist $V = \text{konst.}$, so setzen wir also $s = \frac{V \cdot t}{t/2}$, wenn mit t die Plattentiefe bezeichnet wird.

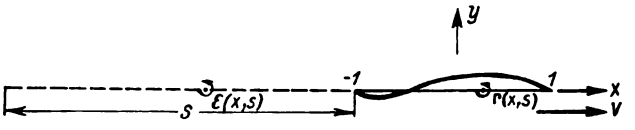


Bild 1.

Neben $s\,(t)$ und $V\,(s)$ dürfen wir noch diejenige Größe $w\,(x, s)$ als bekannt ansehen, die angibt, mit welcher Geschwindigkeit die Flüssigkeit auf den über der Abszisse x gelegenen Profilpunkt zur Zeit t in senkrechter Richtung zum Profil dann auftrifft, wenn keine Zusatzströmung vorhanden ist, die für die Umströmung des Profils sorgt. Diese Funktion, die wir stets in der y-Richtung messen wollen, stellt die Anströmung dar und setzt sich zusammen aus den Beiträgen herrührend von der Eigenbewegung des Flügels, der Deformation des Profils und den Störungen, deren Ursache im Außengebiet des Flügels liegt. Eine Trennung in die verschiedenen Arten instationärer Bewegungen machen wir nicht, sondern sehen diese durch die soeben angeführten drei Funktionen $s\,(t)$, $V\,(s)$ und $w\,(x, s)$ als ausreichend gekennzeichnet an.

In der Rechnung ersetzen wir mit Birnbaum [1] das schwach gewölbte und dünne Profil durch eine geeignete Wirbelverteilung der Dichte $\Gamma\,(x, s)$ auf der Strecke $[-1,1]$ der x-Achse. Desgleichen nehmen wir — gemäß den in dieser Theorie üblichen Vernachlässigungen — an, daß die sich von der Hinterkante $x = -1$ ablösenden freien Wirbel auf der x-Achse liegen und im Ablösepunkt haften bleiben. Die Dichte dieser Wirbel werde mit $\varepsilon\,(x, s)$ bezeichnet. Beide Funktionen sind unbekannt und so zu bestimmen, daß das Profil mit glattem Abfluß an der Hinterkante und unter Wahrung des Satzes von der Erhaltung der Gesamtzirkulation umflossen wird.

In der mathematischen Formulierung besagt die Umströmungsbedingung, daß die Funktionen $\Gamma\,(x, s)$ und $\varepsilon\,(x, s)$ für jedes x mit $-1 < x < 1$ der Integralbeziehung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1-s}^{-1}\frac{\varepsilon\,(\xi, s)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\Gamma\,(\xi, s)}{x-\xi}\,d\xi + w\,(x, s) = 0 \quad (1)$$

genügen müssen[3]). Hierin stellt der erste Bestandteil die von den freien Wirbeln der Schleppe in dem Punkte x des Profils induzierte Normalkomponente (y-Komponente) der Geschwindigkeit dar, während das zweite Glied den von der Belegung des Profils herrührenden Beitrag zu dieser Komponente angibt. Beide Glieder zusammen müssen die Normalkomponente $w\,(x, s)$ der Anströmung kompensieren. Die Erhaltung der Gesamtzirkulation ist mit der Relation

$$\int_{-1-s}^{-1}\varepsilon\,(\xi, s)\,d\xi + \int_{-1}^{1}\Gamma\,(\xi, s)\,d\xi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

gleichwertig, und die Forderung des glatten Abflusses an der Hinterkante bedingt, daß die Funktionen $\Gamma\,(x, s)$ und

[3]) Soll von einem singulären Integral der Cauchysche Hauptwert genommen werden, so schreiben wir $\oint$.

Digitized by Google

$\varepsilon(x,s)$ an der Stelle $x=-1$ einen endlichen Wert besitzen und dort stetig ineinander übergehen, d. h.

$$\varepsilon(-1,s)=\Gamma(-1,s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Annahme schließlich, daß die freien Wirbel im Ablösepunkt haften bleiben, findet ihren Ausdruck in der Gleichung

$$\varepsilon(x,s)=\varepsilon(-1,s+x+1) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Auf Grund dieser letzten Beziehung kann dann die Gl. (2) nach Differentiation auch in der Form

$$\varepsilon(-1,s)=-\frac{d}{ds}\int_{-1}^{1}\Gamma(\xi,s)\,d\xi$$

geschrieben werden, wodurch zum Ausdruck gebracht wird, daß sich in jedem Zeitpunkte von der Hinterkante des Profils ein Wirbel ablöst, dessen Stärke der zeitlichen Änderung der Gesamtzirkulation um das Profil entgegengesetzt gleich ist.

Ist die eindeutige Lösbarkeit dieses Gleichungssystems bewiesen, so interessiert neben der Bestimmung der Funktionen $\Gamma(x,s)$ und $\varepsilon(x,s)$ vor allem die Auftriebsverteilung über die Tiefe, die bei gegebenen Wirbelverteilungen mittels der Druckgleichung berechnet werden kann. Um den Zusammenhang der Funktion $\Gamma(x,s)$ mit der Auftriebsverteilung herzustellen, führen wir wie üblich durch die Gleichung

$$p(x,s)_u-p(x,s)_0=\varrho\cdot V\cdot\gamma(x,s), \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wobei $p(x,s)_u$ bzw. $p(x,s)_0$ den Druck an der Stelle x auf der Unter- bzw. Oberseite des Profils bedeuten, die Funktion $\gamma(x,s)$ ein, die in Analogie zur Theorie der stationären Bewegungen als Dichte der gebundenen Wirbel bezeichnet wird. Nach Birnbaum [2] ist diese Funktion mit der Wirbeldichte $\Gamma(x,s)$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{\partial\Gamma}{\partial x}-\frac{\partial\Gamma}{\partial s}$$

verknüpft. Wie benutzen hier die integrierte Relation

$$\gamma(x,s)=\Gamma(x,s)-\frac{\partial}{\partial s}\int_{1}^{x}\Gamma(\xi,s)\,d\xi, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

die man auch direkt aus der Druckgleichung gewinnen kann.

Wir wollen diese letzte Beziehung hier nur für den Fall ableiten, daß der Tragflügel selbst eine ungewölbte Platte ist und sich mit einer konstanten Geschwindigkeit V in Richtung der x-Achse bewegt. Das instationäre Verhalten der Bewegung möge also durch Störungen hervorgerufen sein, deren Ursache außerhalb des Tragflügels liegt. Dann gilt bis auf eine hier unwesentliche und nur von der Zeit abhängige Größe für den Druck bekanntlich die Relation

$$\frac{p}{\varrho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right], \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

wenn mit φ diejenige Potentialfunktion bezeichnet wird, die die Strömung in der Umgebung des Flügels relativ zu diesem beschreibt. An dem Flügel selbst verschwindet $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, denn dort strömt ja die Flüssigkeit tangential. Für $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ gelten dagegen am Profil die Beziehungen

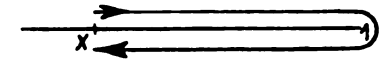
$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_0=-V-\frac{1}{2}\Gamma(x,s)+v_i$$

und

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_u=-V+\frac{1}{2}\Gamma(x,s)+v_i.$$

Darin rührt der erste Bestandteil jeweils von der Eigenbewegung der Platte her. Das zweite Glied gibt den Beitrag an, den der an der betrachteten Stelle der Platte liegende Wirbel zur Tangentialgeschwindigkeit liefert. In dem dritten Gliede schließlich sind alle restlichen Bestandteile zusammengefaßt. Da aber in dem vorliegenden Falle die Wirbel der Platte und der Schleppe nur die bereits berücksichtigte Größe $\pm\frac{1}{2}\Gamma(x,s)$ zur Tangentialgeschwindigkeit beitragen, diese Wirbel liegen ja nach Annahme alle auf der x-Achse,

Bild 2.



so ist v_i allein durch die vorgegebenen Störungen bedingt, kann also nach den oben getroffenen Voraussetzungen als klein angesehen und neben V vernachlässigt werden. Integriert man die soeben für den Randwert von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ gewonnenen Gleichungen längs eines die Vorderkante umschlingenden Weges, wie er im Bild 2 angedeutet ist, so ergibt sich für die Randwerte von φ die Gleichung

$$[\varphi]_u-[\varphi]_0=\int_{1}^{x}\Gamma(\xi,s)\,d\xi$$

und mithin

$$\frac{\partial}{\partial t}\{[\varphi]_u-[\varphi]_0\}=V\frac{\partial}{\partial s}\int_{1}^{x}\Gamma(\xi,s)\,d\xi.$$

Geht man mit diesen Ausdrücken für die Randwerte in die Druckdifferenz von Unter- und Oberseite ein, so erhält man die oben angegebene Gl. (6).

Führt der Flügel selbst eine instationäre und mithin ungleichförmige Bewegung aus, so kann die Beziehung (6) ganz analog hergeleitet werden, nur muß dann die in der Druckgleichung auftretende Potentialfunktion φ auf ein raumfestes Koordinatensystem bezogen werden, falls man die Gl. (7) beibehält (vgl. hierzu [7]).

Ist die Funktion $\gamma(x,s)$ und damit die Auftriebsverteilung über die Tiefe bekannt, so ergibt sich die hier weniger interessierende Wirbeldichte $\Gamma(x,s)$ aus der Gleichung

$$\Gamma(x,s)=\gamma(x,s)+\frac{\partial}{\partial s}\int_{1}^{x}\gamma(\xi,x+s-\xi)\,d\xi \quad \ldots \quad (8)$$

Weiter kann dann damit die Dichte $\varepsilon(x,s)$ der freien Wirbel mittels der Gl. (3) und (4) berechnet werden.

II. Ergebnisse der Untersuchung.

Hinsichtlich der eindeutigen Lösbarkeit des durch die Gl. (1) bis (4) gekennzeichneten Problems, beweisen wir im Abschnitt III den folgenden Satz:

Satz 1: Ist die Funktion $w(x,s)$ beschränkt und kann für jedes feste s das Intervall $(-1,1)$ der x-Achse in endlich viele offene Teilintervalle zerlegt werden, so daß für zwei beliebige Stellen aus ein und demselben Intervall eine Abschätzung der Form

$$|w(x_1,s)-w(x_2,s)|<M(s)\,|x_1-x_2| \quad \ldots \quad (9)$$

gilt, wobei $M(s)$ eine nur von s abhängige Größe ist, so gibt es, falls die Funktion

$$\boxed{\Gamma_0(s)=2\int_{-1}^{1}w(x,s)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx} \quad \ldots \quad (10)$$

für $s\geqq+0$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, genau ein Funktionenpaar $\Gamma(x,s)$, $\varepsilon(x,s)$, das den Gl. (1) bis (4) genügt, und für das $\varepsilon(-1,s)$ für $s>0$ und $\Gamma(x,s)$ an den Stellen x, in deren Umgebung $w(x,s)$ einer Ungleichung der Form (9) genügt, in x stetig ist.

Die Ungleichung (9) stellt nur eine verschärfte Stetigkeitsbedingung für $w(x,s)$ dar, die z. B. dann erfüllt ist, wenn $w(x,s)$ eine in den Teilintervallen stetige partielle Ableitung nach x besitzt. Wir sehen hier von der Differenzierbarkeitsbedingung ab, da diese z. B. bei einer Böe nicht immer erfüllt ist.

Die Funktion $\Gamma_0(s)$ ist bis auf den Faktor $l/2$ diejenige Gesamtzirkulation, die man erhält, falls man in dem vorliegenden Problem die sich von der Hinterkante ablösenden freien Wirbel vernachlässigt (dynamische Krümmung). Ist $\Gamma_0(s)$ für $s\geqq+0$ stetig, so wollen wir die Bewegung als »stetig« bezeichnen. Viele praktisch interessierende Fälle müssen in

Digitized by Google

diesem Sinne als »unstetig« angesehen werden. Ersetzt man z. B. bei einem Leitwerk den über der Zeit aufgetragenen Ruderwinkel durch einen Polygonzug, so weist $\Gamma_0(s)$ an den Knickstellen dieses Streckenzuges Unstetigkeiten auf. Aus diesem Grunde werden wir im Abschnitt IV den oben ausgesprochenen Satz 1 auch noch auf solche Funktionen $w(x, s)$ verallgemeinern, die zwar der Bedingung (9) genügen, für die aber die Funktion $\Gamma_0(s)$ nicht mehr durchweg stetig ist. Dabei müssen wir allerdings zulassen, daß $\varepsilon(-1, s)$ an den Sprungstellen von $\Gamma_0(s)$ Unendlichkeitsstellen aufweist.

In dem Satz 1 haben wir neben den Forderungen, daß die Funktionen Γ und ε den Gl. (1) bis (4) genügen sollen noch die Bedingung gestellt, daß $\Gamma(x, s)$ als Funktion von x an gewissen durch $w(x, s)$ bestimmten Stellen stetig sein soll. Diese oder andere Bedingungen müssen gestellt werden, wenn die Aufgabe eindeutig lösbar sein soll. Andernfalls gibt es beliebig viele Lösungen, denn die Funktion $\Gamma(x, s)$ geht ja, abgesehen von dem Wert an der Hinterkante, in die Gl. (1) bis (4) nur im Integral ein. Daß wir hier solche Lösungen suchen, die weitgehendst stetig sind, ist aus physikalischen Gründen verständlich. Aus dem gleichen Anlaß fordern wir die Stetigkeit der Funktion $\varepsilon(-1, s)$.

Gleichzeitig mit dem Beweis des Satzes 1 wird in III ein geschlossener Ausdruck (17) mit (18) für die Funktion $\gamma(x, s)$ gewonnen, der unter den in Satz 1 genannten Voraussetzungen gültig ist. Bemerkenswert ist hierbei, daß der Einfluß der freien Wirbel sich nur in dem Koeffizienten $a(s)$ auswirkt, während die restlichen Bestandteile durch den augenblicklichen Bewegungs- bzw. Anströmungszustand vollkommen bestimmt sind[4]). In $a(s)$ selbst geht die »Vergangenheit« nur in der Form $\Gamma_0(+0)\,k_1(s) + \int_0^s \Gamma_0'(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma$ ein, wobei die Wagnersche Funktion $k_1(s)$ den Faktor angibt, mit dem der stationäre Auftrieb einer Platte multipliziert werden muß, um den Auftrieb einer aus der Ruhe heraus mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten Platte zu erhalten.

Man sieht also, daß nicht nur für den gesamten Auftrieb, sondern auch für die Auftriebsverteilung und damit wegen (8) auch für das gesamte Geschwindigkeitsfeld der instationären Bewegungen die Funktion $k_1(s)$ eine beherrschende Rolle spielt.

Für numerische Rechnungen wird es oft zweckmäßig sein zu wissen, wann die in der Gl. (17) auftretende Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf und damit (17) in der bequemeren Form (21) geschrieben werden kann. Dies gilt z. B. in den beiden auf Seite 407 angeführten Fällen, die für die Anwendungen ausreichen dürften. Hervorgehoben sei noch, daß für eine raumfeste Böe die Auftriebsverteilung die einfache Form (22) annimmt, und mithin stets ein Anstellwinkel existiert, für den in dem betrachteten Zeitmoment die stationär bewegte Platte dieselbe Lastverteilung aufweist. Insbesondere ist hierin das Küssnersche Resultat enthalten, daß bei einer Böe der gesamte Auftrieb im vorderen Neutralpunkt angreift.

Wie schon oben hervorgehoben wurde, ist die Voraussetzung der Stetigkeit von $\Gamma_0(s)$ in der Praxis nicht immer erfüllt. Aus diesem Grunde wird in IV der Satz 1 auf solche Vorgaben verallgemeinert, für die die Funktion $\Gamma_0(s)$ sprunghafte Unstetigkeiten aufweist. Ein derartiger Vorgang kann stets als Überlagerung mehrerer Teilvorgänge aufgefaßt werden, für die $\Gamma_0(s)$ jeweils stetig ist. Insgesamt gilt dann noch die Formel (17). Die in ihr auftretende Funktion $a(s)$ darf dagegen jetzt nicht mehr nach (18) berechnet werden. Es treten vielmehr noch Sprungglieder hinzu. In (23) wird die Darstellung von $a(s)$ für den Fall angegeben, daß $\Gamma_0(s)$ eine einzige Sprungstelle besitzt.

Für den Leser, den mehr die numerische Auswertung der hier gewonnenen allgemeinen Ergebnisse interessiert, sind in V die notwendigen Anweisungen noch einmal kurz zusammengestellt. Neben den Ausdrücken für den gesamten Auftrieb (36) und das Moment (37), sowie der Fourierentwicklung (33) von $\gamma(x, s)$ findet man dort auch zwei Integralformeln, die die geschlossene Berechnung von $\gamma(x, s)$ für solche Vorgaben $w(x, s)$ gestatten, die stückweise durch Polynome in x gegeben sind.

In den Abschnitten I bis V haben wir uns nur mit der allgemeinen Theorie befaßt und für beliebige instationäre Bewegungen unter den in der Einleitung genannten Voraussetzungen die Auftriebsverteilung über die Tiefe bestimmt. Es sollen nun einige spezielle Bewegungsformen untersucht werden. So bestimmen wir z. B. im Abschnitt VI die Auftriebsverteilung für eine harmonische Bewegungsform. Dabei ergeben sich ohne jeden Ansatz die bekannten Ergebnisse, so daß also die übliche Annahme, daß zu einer genügend lange dauernden harmonischen Bewegung auch eine harmonische Belastung gehört, was nicht immer notwendig der Fall sein muß [15, S. 286], hier gerechtfertigt ist.

In dem Abschnitt VII betrachten wir ein Leitwerk ohne Spalt und geben dort in den Formeln (41), (42), (43), (46) und (47) die Auftriebsverteilung sowie die Normalkräfte und Momente für den Fall an, daß bei festgehaltener Flosse und nicht rückverlegter Drehachse dem Ruder ein vorgegebener Ausschlag $\eta(s)$ erteilt wird, der klein und zweimal stetig differenzierbar sein möge, aber sonst beliebig sein kann. Für die Auftriebe und Momente wurden die entsprechenden Formeln schon einmal von Ellenberger [4] abgeleitet. Die Gl. (50), (51), (52), (53), (54) liefern die entsprechenden Werte für ein Leitwerk mit rückverlegter Drehachse. Wir haben uns dabei auf den Fall beschränkt, daß $\eta = w\,s$ eine lineare Funktion von s ist. Damit können dann die Lastverteilung sowie die Auftriebe und Momente auch für jeden Ruderausschlag bestimmt werden, der durch einen Streckenzug gegeben ist. Schließlich werden in VII noch die Normalkräfte für einige Ruderausschläge dieser Art mit gemessenen Werten verglichen. Es ergibt sich hierbei eine gute Übereinstimmung, wenn man die stationären Anfangs- und Endwerte denen der Messung anpaßt. Die Schwingungen, die sich in den gemessenen Kurven bei sehr schnellem Anreißen kurz nach Beendigung des Anreißens einstellen, dürften zum großen Teil auf Eigenschwingungen des Meßgerätes zurückzuführen sein.

Um die Definition der kritischen Geschwindigkeit (vgl. VIII), in der nur lange andauernde harmonische Bewegungen eingehen, sinnvoll in den allgemeinen Stabilitätsbegriff einzuordnen, untersuchen wir in XIII allgemein das Verhalten eines Ruders nach einem Stoß. Die Flosse denken wir uns dabei festgehalten. Als Bewegungsgleichung ergibt sich dann nur die Momentengleichung, die unter Benutzung der instationären Luftkräfte zu der Integrodifferentialgleichung (59) für $\eta(s)$ führt, deren Lösung mittels der Laplace-Transformation gewonnen wird. Diese Lösung ist zwar der numerischen Behandlung nur sehr schwer zugänglich, sie gestattet aber eine Aussage über das Verhalten des aus einem Stoß resultierenden Ruderausschlages $\eta(s)$ für große Werte von s, die zur Aufstellung eines Stabilitätskriteriums ausreichend ist. Das infinitäre Verhalten des Ruderwinkels hängt auch hier wieder, wie bei Benutzung »stationärer« Luftkräfte, nur von der Lage der Nullstellen einer Funktion $f(z)$ (61) ab, die jetzt allerdings kein Polynom, sondern transzendent ist. Besitzt $f(z)$ in der rechten Halbebene mit Einschluß der imaginären Achse keine Nullstelle, so klingt der resultierende Ruderausschlag ab. Die Dämpfung ist dabei allerdings sehr gering, denn es existiert kein $\delta > 0$, so daß für große Werte von s die Funktion $\eta(s)$ in der Form $|\eta(s)| < C \cdot e^{-\delta s}$ abgeschätzt werden kann. Liegen dagegen Nullstellen von $f(z)$ auf der imaginären Achse oder rechts davon, so geht $\eta(s)$ je nach der Lage und der Vielfachheit der Nullstellen schließlich in eine reine oder angefachte Schwingung über. Maßgebend ist die am weitesten nach rechts gelegene Nullstelle. Wird diese mit β bezeichnet und hat sie die Vielfachheit n, so verhält sich $\eta(s)$ für große Werte von s im wesentlichen wie $s^{n-1}\,e^{\beta s}$.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der von Küssner [10] aufgestellten Definition der kritischen Geschwindigkeit, so

[4]) Vgl. hierzu auch [8].

Digitized by Google

zeigt sich, daß die Küssnersche Nennerdeterminante, deren Verschwinden mit dem Vorliegen einer kritischen Geschwindigkeit gleichbedeutend ist, mit der Funktion $f(z)$ übereinstimmt, falls man diese nur auf der imaginären Achse betrachtet. Eine Geschwindigkeit wird also demnach als kritisch bezeichnet, wenn die für diese Geschwindigkeit gebildete Funktion $f(z)$ auf der imaginären Achse eine Nullstelle hat. Stößt man mithin ein Ruder bei einer kritischen Geschwindigkeit an, so kehrt dieses bestimmt nicht in die Ruhelage zurück.

In welcher Beziehung steht nun die kritische Geschwindigkeit zu der Dämpfung bzw. Anfachung? Stellt insbesondere jede derartige Geschwindigkeit einen Übergang von der Dämpfung zur Anfachung bzw. umgekehrt dar? Der Hauptzweck der Definition der kritischen Geschwindigkeit ist es ja, diese Punkte zu bestimmen[4a]).

Zur Beantwortung dieser Frage denken wir uns auf der Geschwindigkeitsskala diejenigen Punkte markiert, in denen der aus einem Stoß resultierende Ruderausschlag gedämpft verläuft. Wir wollen sie Dämpfungspunkte nennen. Man kann leicht zeigen, daß um einen Dämpfungspunkt stets ein ganzes Intervall der Dämpfung existieren muß, so daß also die Dämpfungspunkte stets zu ganzen Bereichen der Dämpfung zusammengefaßt werden können. Diese Bereiche sind offen, d. h. ihre Endpunkte sind keine Dämpfungspunkte, denn andernfalls könnte der Bereich ja vergrößert werden. Die restlichen Punkte wollen wir als Anfachungspunkte bezeichnen. In ihnen verläuft der Ruderausschlag nicht gedämpft, er ist eine reine oder angefachte Schwingung. Diese Anfachungspunkte können nun nicht stets zu Bereichen zusammengefaßt werden, denn es kann ein isolierter Anfachungspunkt zwischen zwei Bereichen der Dämpfung liegen. Wir bezeichnen ihn kurz als isolierten Punkt. Dieser Fall tritt dann ein, wenn eine der am weitesten nach rechts gelegenen Nullstellen von $f(z)$ mit wachsendem V von links her kommend die imaginäre Achse berührt und dann wieder in die linke Halbebene zurückkehrt. Die restlichen Anfachungspunkte können jetzt wieder zu Gebieten zusammengefaßt werden. Diese Gebiete sind abgeschlossen, d. h. Anfangs- und Endpunkt sind Anfachungspunkte. Da in beliebiger Nähe eines derartigen Begrenzungspunktes stets ein Dämpfungs- und ein Anfachungspunkt liegen muß, so wollen wir diese Punkte als Übergangspunkte bezeichnen.

Wo liegen nun auf der so eingeteilten Geschwindigkeitsskala die kritischen Geschwindigkeiten V_k? Es läßt sich leicht zeigen, daß die isolierten und die Übergangspunkte notwendig kritisch sind. Weiter kann ein V_k kein Dämpfungspunkt sein. Dagegen ist es durchaus möglich, daß ein V_k mitten in einem Gebiet der Anfachung liegt, denn es kann ja die für diese Geschwindigkeit gebildete Funktion $f(z)$ neben der Nullstelle auf der imaginären Achse, durch die sie als kritisch gekennzeichnet ist, noch weitere Nullstellen rechts davon besitzen, so daß also eine echte Anfachung vorliegt, die sehr groß sein kann. Eine derartige kritische Geschwindigkeit wollen wir als einen inneren Punkt zweiter Art bezeichnen. Neben diesen inneren Punkten können schließlich noch solche V_k auftreten, die zwar im Innern eines Gebietes der Anfachung liegen, für die aber $f(z)$ außer auf der imaginären Achse keine Nullstelle rechts davon besitzt. Dieser Fall tritt dann ein, wenn $f(z)$ für einen ganzen Wertebereich von V Nullstellen auf der imaginären Achse aber nicht rechts davon hat. Wir nennen dann V_k einen inneren Punkt erster Art. In diesem sowie den Übergangs- und isolierten Punkten geht $\eta(s)$, außer wenn die Nullstellen mehrfach sind, schließlich in eine reine Schwingung über. In allen restlichen Anfachungspunkten liegt dagegen eine echte Anfachung vor.

Die Frage, ob man es bei einer gegebenen kritischen Geschwindigkeit mit einem Übergang von der Dämpfung zur Anfachung oder umgekehrt zu tun hat, ist also nicht immer sinnvoll. Damit wird auch der Vorschlag von Quessel [12] hinfällig, der diese Frage dadurch entscheiden will, daß man die kritischen Geschwindigkeiten für eine etwas größere Ruderdämpfung berechnet und feststellt, ob die betrachtete kritische Geschwindigkeit mit der größer gewordenen Dämpfung selbst größer oder kleiner geworden ist. Ist V_k größer geworden, so soll es sich bei wachsender Geschwindigkeit um einen Übergang von der Dämpfung zur Anfachung handeln, bei kleiner gewordener kritischer Geschwindigkeit soll dagegen ein Übergang in der umgekehrten Richtung vorliegen. Diese Betrachtung setzt stillschweigend voraus, daß tatsächlich für das betrachtete V_k ein Übergang der einen oder anderen Art herrscht. Sie versagt, wenn V_k ein isolierter oder innerer Punkt ist.

Dasselbe gilt auch für den Vorschlag, den Quessel hinsichtlich der angenäherten Berechnung der Dämpfung bzw. der Anfachung für ein beliebiges V macht. Danach wird das in den harmonischen Luftkräften auftretende Glied $e^{i\omega s}$ durch die Größe $e^{(\lambda+i\omega)s}$ ersetzt und entsprechend für $\eta(s)$ der Ansatz $c \cdot e^{(\lambda+i\omega)s}$ gemacht. Geht man damit in die Momentengleichung ein, so ergibt sich jetzt ein der Küssnerschen Nennerdeterminante ähnlich gebaute Funktion $f_1(\lambda,\omega)$ deren Verschwinden die Existenz einer Lösung der oben genannten Art sicherstellt. Die Nullstellen von $f_1(\lambda,\omega)$ liefern dann Wertepaare λ, ω, die als Anfachung bzw. Dämpfung und Frequenz des Ruderausschlages gedeutet werden. Führt man dies durch, so zeigt sich, daß $f_1(\lambda,\omega)$ aus der Funktion $f(z)$ dadurch hervorgeht, daß man dort abgesehen von der Funktion[5]) $z\,\mathfrak{L}\left\{k_1; z\right\}$ die Größe z durch $\lambda + i\omega$ ersetzt, während $z\,\mathfrak{L}\left\{k_1; z\right\}$ nur auf der imaginären Achse betrachtet wird. Es werden also an Stelle der Nullstellen von $f(z)$ die der Funktion

$$f_1(\lambda,\omega) = a_0 + a_1(\lambda + i\omega) + a_2(\lambda + i\omega)^2 + [a_3 + a_4(\lambda + i\omega)]\, i\omega\, \mathfrak{L}\left\{k_1;\ i\omega\right\}$$

bestimmt. Dies ist aber nur dann sinnvoll, wenn λ klein ist, man sich also auf die nächste Umgebung einer kritischen Geschwindigkeit V_k beschränkt. Aber auch dann kann diese Betrachtungsweise zu falschen Ergebnissen führen. Ist nämlich V_k ein innerer Punkt zweiter Art, so ergibt sich für $V = V_k$ der Wert $\lambda = 0$, während in Wahrheit dann eine Anfachung mit positivem λ vorliegt. Desgleichen müssen die isolierten Punkte ausgeschlossen werden, da in der Umgebung eines derartigen Punktes $\lambda \leqq 0$ ist. Aus $\lambda < 0$ kann aber nur geschlossen werden, daß der Ruderausschlag gedämpft verläuft. Über die Art der Dämpfung läßt sich dagegen noch keine Aussage machen. Eine so starke Dämpfung, wie sie der Ansatz vorsieht, existiert für große s, um die es sich hier nur handelt, nach dem Kriterium überhaupt nicht. Demnach sind nur die Übergangspunkte und die inneren Punkte erster Art, dieser Betrachtungsweise zugänglich, wobei man sich wieder auf positive λ beschränken muß.

Wie kann nun entschieden werden, welcher Art eine vorgegebene kritische Geschwindigkeit V_k ist? Ehe wir diese Frage beantworten, wollen wir zeigen, wie mit einfachen Mitteln festgestellt werden kann, ob eine gegebene Geschwindigkeit ein Dämpfungs- oder Anfachungspunkt ist. Besitzt nämlich $f(z)$ in $Rz \geqq 0$ keine Nullstelle, so kann der Bereich B, der aus der rechten Halbebene durch Abbildung mittels der Funktion $f(z)$ entsteht, den Nullpunkt nicht enthalten. Umgekehrt muß der Nullpunkt auf dem Rande von B oder im Innern liegen, wenn $f(z)$ in $Rz \geqq 0$ eine Nullstelle hat. Den Bereich B, der mehrfach überdeckt sein kann, erhält man nun aber bereits dadurch, daß man die imaginäre Achse nebst ihrer Richtung abbildet, und an Hand der so gewonnenen Randpunkte von B entscheidet, wo das Bereichinnere liegt. Ist das Bild der imaginären Achse ein doppelpunktfreier Kurvenzug, so stellt dieser in seiner Gesamtheit den Rand von B dar. Ergibt sich dagegen eine überschlagene Kurve als Bild, so besagt dies, daß die Funktion $f(z)$ in gewissen Punkten der imaginären Achse und des Innern von $Rz > 0$ gleiche Werte annimmt, so daß also dann bestimmte Teile des Bildes der Achse dem Innern

[4a]) Die folgende Betrachtung ist allgemein gültig und nicht etwa auf Ruderschwingungen beschränkt.

[5]) Vgl. A 4.

Digitized by Google

von B zugeordnet werden müssen. Dieser Fall tritt z. B. bei einem inneren Punkt zweiter Art ein. Hat man so den Bereich B bestimmt, so liest man aus der Lage des Nullpunktes unmittelbar das Verhalten des Ruderwinkels ab.

Zur Durchführung dieser Abbildung haben wir einige Werte der Funktion $z \, \mathfrak{L} \{k_1; z\}$ für rein imaginäre $z = i\omega$ in der Zahlentafel 1 angegeben.

Zahlentafel 1.

ω	$\tau'(\omega)$	$\tau''(\omega)$	ω	$\tau'(\omega)$	$\tau''(\omega)$
0	1	0	1,0	0,5395	—0,1003
0,002	0,9967	—0,0126	1,1	0,5342	—0,0936
0,01	0,9826	—0,0457	1,2	0,5300	—0,0877
0,02	0,9638	—0,0752	1,3	0,5265	—0,0825
0,04	0,9267	—0,1160	1,4	0,5235	—0,0778
0,06	0,8921	—0,1426	1,5	0,5210	—0,0736
0,08	0,8604	—0,1604	1,6	0,5189	—0,0698
0,10	0,8319	—0,1723	1,7	0,5171	—0,0663
0,12	0,8064	—0,1801	1,8	0,5155	—0,0632
0,14	0,7834	—0,1849	1,9	0,5142	—0,0603
0,16	0,7628	—0,1876	2,0	0,5130	—0,0577
0,18	0,7443	—0,1887	2,5	0,5088	—0,0473
0,20	0,7276	—0,1886	3,0	0,5063	—0,0400
0,30	0,6650	—0,1793	3,5	0,5047	—0,0346
0,40	0,6250	—0,1650	4,0	0,5037	—0,0305
0,50	0,5980	—0,1507	4,5	0,5030	—0,0273
0,60	0,5788	—0,1378	5,0	0,5024	—0,0246
0,70	0,5648	—0,1264	10,0	0,5006	—0,0125
0,80	0,5542	—0,1165		0,5000	0
0,90	0,5460	—0,1079			

$$i\omega \, \mathfrak{L} \{k_1; i\omega\} = \tau'(\omega) + i\tau''(\omega).$$
$$-i\omega \, \mathfrak{L} \{k_1; -i\omega\} = \tau'(\omega) - i\tau''(\omega).$$

Führt man diese Abbildung für drei Geschwindigkeiten $V_1 < V_k < V_2$, wobei V_1 und V_2 der kritischen Geschwindigkeit V_k benachbart sind, durch, so kann man feststellen, welcher Art V_k ist.

Bisher haben wir uns nur mit dem Verhalten des Ruderausschlages nach genügend langer Zeit befaßt. Für kleine Werte von s bis etwa $s = 10$ kann dieser näherungsweise bestimmt werden. Die Berechnung von $\eta(s)$ ist dann gleichbedeutend mit der Nullstellenbestimmung eines Polynoms 5. Grades. Eine Einschränkung hinsichtlich der Geschwindigkeit besteht hier nicht.

Wir haben uns hier auf den vielleicht weniger interessierenden Fall eines einzigen Freiheitsgrades beschränkt. Dies ist nur der Einfachheit halber geschehen. Schwierigkeiten bei der Übertragung auf mehrere Freiheitsgrade bestehen nicht.

III. Eindeutige Lösbarkeit der Aufgabenstellung und Bestimmung der Wirbeldichten für stetige Vorgänge.

Wir beweisen hier den in II formulierten Satz 1 und geben eine Darstellung für die Funktion $\gamma(x, s)$ an.

Geht man zunächst einmal von der Annahme aus, daß die Funktion $\varepsilon(x, s)$ bekannt und für $s > 0$ stetig ist, so stellt die Beziehung (1) eine Integralgleichung für $\Gamma(x, s)$ dar, und es ergibt sich, da $\Gamma(x, s)$ wegen (2) die Gesamtzirkulation $-\int_{1-s}^{-1} \varepsilon(\xi, s)\, d\xi$ hat, nach den Umkehrformeln (75) und (77) des Anhanges A 1 für $\Gamma(x, s)$ die Darstellung

$$\Gamma(x,s) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left\{ -\int_{-1-s}^{-1} \varepsilon(\xi,s)\, d\xi + 2 \oint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{x-x_1} \left[w(x_1,s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\xi,s)}{x_1-\xi}\, d\xi \right] dx_1 \right\}.$$

Wie eine leichte Überlegung zeigt, darf in dem letzten Integral die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Man erhält dann wegen

$$\oint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{(x-x_1)(x_1-\xi)}\, dx_1 = \pi \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{x-\xi} \right\} \quad (\xi < -1)$$

für $\Gamma(x, s)$ den Ausdruck

$$\Gamma(x,s) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left\{ 2 \oint_{-1}^{1} \frac{w(x_1,s)\sqrt{1-x_1^2}}{x-x_1}\, dx_1 - \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\xi,s)\sqrt{\xi^2-1}}{x-\xi}\, d\xi \right\}, \quad . \quad . \quad (11)$$

der nach Konstruktion den Gl. (1) und (2), d. h. der Umströmungsbedingung und dem Satz von der Erhaltung der Zirkulation genügt und an den der Abschätzung (9) genügenden Stellen von $w(x, s)$ stetig in x ist. Diese Funktion $\Gamma(x, s)$ wird dagegen bei beliebiger Wahl von $\varepsilon(x, s)$ keinen endlichen Wert an der Hinterkante $x = -1$ annehmen. Damit dies der Fall ist, muß zwischen $w(x, s)$ und $\varepsilon(x, s)$ die Beziehung

$$2 \int_{-1}^{1} w(x_1,s) \sqrt{\frac{1-x_1}{1+x_1}}\, dx_1 + \int_{-1-s}^{-1} \varepsilon(\xi,s) \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi+1}}\, d\xi = 0 \quad (12)$$

für alle $s > 0$ erfüllt sein. Dieser Relation können wir mit der durch die Gl. (4) ausgedrückten Annahme unter Beachtung von (10) auch die Gestalt

$$\int_{0}^{s} \varepsilon(-1,\sigma) \sqrt{\frac{s+2-\sigma}{s-\sigma}}\, d\sigma + \Gamma_0(s) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

geben.

Die Beziehung (13) stellt die zuerst von Wagner [16] aufgestellte Integralgleichung dar, der die Dichte der freien Wirbel genügen muß. Wir zeigen im Anhang A 3, daß diese Gleichung genau eine für $s > 0$ stetige und absolut integrable Lösung besitzt. Mithin kann $\varepsilon(x, s)$ als bekannt angesehen werden.

Durch Addition der Gl. (11) und (12) erhält man jetzt für $\Gamma(x, s)$ die Darstellung

$$\Gamma(x,s) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left\{ 2 \oint_{-1}^{1} w(x_1,s) \left(1 + \frac{1+x_1}{x-x_1} \right) \sqrt{\frac{1-x_1}{1+x_1}}\, dx_1 + \int_{-1-s}^{-1} \varepsilon(\xi,s) \left(1 + \frac{1+\xi}{x-\xi} \right) \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi+1}}\, d\xi \right\}$$

bzw.

$$\Gamma(x,s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left\{ 2 \oint_{-1}^{1} \frac{w(x_1,s)}{x-x_1} \sqrt{\frac{1-x_1}{1+x_1}}\, dx_1 + \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\xi,s)}{x-\xi} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi+1}}\, d\xi \right\},$$

die, wie sich unter Benutzung der Stetigkeit von $\varepsilon(x, s)$ leicht zeigen läßt, für $s > 0$ an der Stelle $x = -1$ den Wert $\varepsilon(-1, s)$ annimmt, also auch noch die letzte Bedingung erfüllt. Damit ist gezeigt, daß das durch die Gleichungen (1) bis (4) gekennzeichnete Problem genau eine Lösung besitzt, falls man von den möglichen Lösungen nur solche als physikalisch sinnvoll zuläßt, die weitgehendst stetig sind.

Es ist für spätere Zwecke nützlich der soeben bestimmten Funktion $\Gamma(x, s)$ eine Gestalt zu geben, der man das Verhalten von $\Gamma(x, s)$ an der Stelle $x = +1$ unmittelbar entnimmt. Dazu schreiben wir

$$\Gamma(x,s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left\{ 2 \oint_{-1}^{1} \frac{w(x_1,s)}{x-x_1} \sqrt{\frac{1-x_1}{1+x_1}}\, dx_1 + \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\xi,s)}{x-\xi} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi+1}}\, d\xi - a(s) \right\} + \frac{a(s)}{\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

und bestimmen $a(s)$ so, daß der erste Bestandteil von $\Gamma(x, s)$ an der Stelle $x = 1$ verschwindet. Wir setzen also

Digitized by Google

$$a(s) = 2\int_{-1}^{1} \frac{w(x_1, s)}{\sqrt{1-x_1^2}}\, dx_1 + \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\xi, s)}{\sqrt{\xi^2-1}}\, d\xi \quad . \quad (14)$$

und erhalten

$$\Gamma(x, s) = \frac{a(s)}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left\{2\oint_{-1}^{1} \frac{w(x_1, s)\, dx_1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}} + \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\xi, s)\, d\xi}{(x-\xi)\sqrt{\xi^2-1}}\right\}. \quad (15)$$

Hierin verschwindet der zweite Bestandteil offensichtlich an der Stelle $x = 1$.

Der Gl. (6) entnimmt man, daß zur Berechnung der Dichte $\gamma(x, s)$ neben der Funktion $\Gamma(x, s)$ auch noch deren Integral $\int_x^1 \Gamma(\xi, s)\, d\xi$ maßgebend ist. Dieses wollen wir jetzt wieder in Abhängigkeit von $\varepsilon(x, s)$ bestimmen und setzen dazu

$$W(x, s) = \int_{-1}^{x} w(\xi, s)\, d\xi \quad \text{sowie} \quad \Gamma(s) = \int_{-1}^{1} \Gamma(\xi, s)\, d\xi \quad . \quad (16)$$

Dann ist wegen (2) und (4)

$$\int_{-1-s}^{-1} \varepsilon(\xi, s)\, d\xi = \int_{-1-s}^{-1} \varepsilon(-1, 1+s+\xi)\, d\xi = \int_{0}^{s} \varepsilon(-1, \sigma)\, d\sigma = -\Gamma(s).$$

Die Umkehrformeln (75) und (79) des Anhanges A 1 liefern mithin in Verbindung mit (1) für das gesuchte Integral die Darstellung

$$\int_1^x \Gamma(\xi, s)\, d\xi = -\frac{\Gamma(s)}{\pi}\arccos x + \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\oint_{-1}^{1} \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}}\int_{x_1}^{x}\left\{w(\xi, s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(\eta, s)}{\xi-\eta}\, d\eta\right\} d\xi\, dx_1.$$

Beachtet man, daß für $x_1 > -1$ wegen $\Gamma(0) = 0$ die Beziehung

$$\int_{-1-s}^{x_1}\int_{\xi-\eta}^{-1} \varepsilon(\eta, s)\, d\eta\, d\xi = \int_{-1-s}^{-1} \varepsilon(\eta, s)\ln(x_1-\eta)\, d\eta = -\Gamma(s)\ln(1+x_1) - \int_{-1-s}^{-1} \frac{\Gamma(s+u+1)}{x_1-u}\, du$$

gilt und

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\oint_{-1}^{1} \frac{\ln(1+\xi)}{(x-\xi)\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = -\arccos x$$

ist, so ergibt sich für $\int_1^x \Gamma(\xi s)\, d\xi$ der Ausdruck

$$\int_1^x \Gamma(\xi, s)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\left\{\oint_{-1}^{1} \frac{W(x_1, s)\, dx_1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}} - \frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}}\int_{-1-s}^{-1} \frac{\Gamma(s+1+u)}{x_1-u}\, du\, dx_1\right\},$$

der mittels der hier erlaubten Vertauschung der Integrationsreihenfolge zu der Darstellung

$$\int_1^x \Gamma(\xi, s)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\left\{2\oint_{-1}^{1} \frac{W(x_1, s)\, dx_1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}} - \int_{-1-s}^{-1} \frac{\Gamma(s+u+1)}{(x-u)\sqrt{u^2-1}}\, du\right\}$$

führt, so daß also

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_1^x \Gamma(\xi, s)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\left\{2\frac{\partial}{\partial s}\oint_{-1}^{1} \frac{W(x_1, s)\, dx_1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}} + \int_{-1-s}^{-1} \frac{\varepsilon(-1, s+u+1)}{(x-u)\sqrt{u^2-1}}\, du\right\}$$

ist. Geht man mit diesem Ausdruck und der oben gewonnenen Darstellung (15) für $\Gamma(x, s)$ in die Beziehung (6) ein, so erhält man für die gesuchte Funktion $\gamma(x, s)$ die Gleichung

$$\boxed{\gamma(x, s) = \frac{a(s)}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \times \left\{\oint_{-1}^{1} \frac{w(x_1, s)\, dx_1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}} - \frac{\partial}{\partial s}\oint_{-1}^{1} \frac{W(x_1, s)\, dx_1}{(x-x_1)\sqrt{1-x_1^2}}\right\}} \quad , \quad (17)$$

in der nur noch der Koeffizient $a(s)$ von der Dichte der freien Wirbel abhängt, während die restlichen Glieder durch die Vorgabe $w(x, s)$ vollkommen bestimmt sind.

In der Gl. (17) ist die einzige noch unbekannte Größe der Koeffizient $a(s)$, den wir jetzt durch Zurückführung auf einen bereits bekannten Fall bestimmen wollen. Dazu bezeichnen wir mit $\varepsilon_1(-1, s)$ die Lösung der Integralgleichung (13) für $\Gamma_0(s) = 1$. Dann wird die Lösung derselben Gleichung für eine beliebige Funktion $\Gamma_0(s)$, die den in Satz 1 genannten Voraussetzungen genügt, nach Formel (81) des Anhanges A 3 durch den Ausdruck

$$\varepsilon(-1, s) = \Gamma_0(+0)\,\varepsilon_1(-1, s) + \int_0^s \Gamma_0'(\sigma)\,\varepsilon_1(-1, s-\sigma)\, d\sigma$$

dargestellt, so daß nach Gl. (14)

$$\boxed{a(s) = 2\int_{-1}^{1} \frac{w(x_1, s)\, dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} - \Gamma_0(s) + \Gamma_0(+0)\, k_1(s) + \int_0^s \Gamma_0'(\sigma)\, k_1(s-\sigma)\, d\sigma} \quad (18)$$

ist, wobei

$$k_1(s) = 1 + \int_0^s \frac{\varepsilon_1(-1, \sigma)\, d\sigma}{\sqrt{(s-\sigma)(s+2-\sigma)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gesetzt ist.

Diese Funktion $k_1(s)$ dürfen wir als bekannt ansehen. Für den von Wagner [16] und Küssner [11] behandelten Fall der aus der Ruhe heraus unter dem Anstellwinkel α (konstant) mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit V bewegten Platte ist nämlich für $s \geq 0$

$$w(x, s) = V\sin\alpha \quad \text{und} \quad \Gamma_0(s) = 2\pi V\sin\alpha$$

also nach (17) und (18)

$$\gamma(x, s) = \frac{a(s)}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

mit

$$a(s) = 2\pi V\sin\alpha\, k_1(s).$$

Diese Bewegungsform erzeugt demnach den Auftrieb

$$A(s) = l\pi\varrho V^2\sin\alpha\, k_1(s),$$

wenn mit l die Plattentiefe bezeichnet wird. Dieser Auftrieb wurde von den beiden soeben genannten Verfassern bestimmt und in Form einer Reihenentwicklung nach s angegeben[6]). Im Anhang A 4 beweisen wir für die Funktion $k_1(s)$ eine Formel, die mit der von Küssner auf anderem Wege gefundenen Darstellung übereinstimmt.

[6]) Bei Benutzung der in [11] und [16] angegebenen Werte von $k_1(s)$ beachte man die jeweilige Normierung. Bei Wagner bedeutet s den in ganzen Plattentiefen gemessenen Weg, während wir hier in halben Plattentiefen messen. Die von Küssner mit $k_1(s)$ bezeichnete Funktion ist gleich dem Doppelten der hier benutzten Größe $k_1(s)$.

Digitized by Google

Für numerische Rechnungen ist es oft zweckmäßig zu wissen, wann in dem letzten Integral der Gl. (17) die Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf. Wir beschränken uns hierbei auf die Angabe zweier Fälle, in denen diese Vertauschung statthaft ist, also mit

$$H(x,s) = w(x,s) - \frac{\partial}{\partial s}\int^{x} w(\xi,s)\,d\xi \quad \ldots \quad (20)$$

die Gl. (17) in der Form

$$\boxed{\gamma(x,s) = \frac{a(s)}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\oint_{-1}^{1}\frac{H(\xi,s)\,d\xi}{(x-\xi)\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \ldots \quad (21)$$

geschrieben werden darf. Dies gilt in den beiden folgenden Fällen:

Fall A: Das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ der x-Achse kann in endlich viele abgeschlossene und von s unabhängige Teilintervalle zerlegt werden, in denen die Vorgabe $w(x,s)$ für $s \geq 0$ und deren partielle Ableitungen nach x und s in beiden veränderlichen stetige Funktionen sind.

Dieser Fall wird im allgemeinen dann eintreten, wenn der ganze Flügel oder einzelne Teile desselben, z. B. das Ruder, »stetige« instationäre Bewegungen ausführen. Der Fall A ist dagegen für eine raumfeste Böe nicht mehr erfüllt. Hierfür gilt:

Fall B: Wird die Form einer raumfesten Böe, auf die der Flügel im Zeitpunkt $s = 0$ trifft, durch eine für $s > 0$ stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(u)$ mit $f(0) = 0$ beschrieben, so sind die sämtlichen Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt und es gilt (21). Diese Formel vereinfacht sich in dem vorliegenden Fall zu

$$\boxed{\gamma(x,s) = \frac{a(s)}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \quad \ldots \quad (22)$$

Für die eine raumfeste Böe ist nämlich (s. Bild 3)

$$w(x,s) = \begin{cases} 0 \\ f(x+s-1) \end{cases} \text{ falls } \begin{matrix} x+s-1<0 \\ x+s-1>0 \end{matrix}$$

und mithin ist

$$H(x,s) = \begin{cases} 0 \\ f(s-2) \end{cases} \text{ falls } \begin{matrix} s<2 \\ s>2. \end{matrix}$$

Daraus ergibt sich wegen

$$\oint_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(x-\xi)\sqrt{1-\xi^2}} = 0$$

aus Gl. (21) die oben behauptete Beziehung (22).

IV. Verallgemeinerung auf unstetige Vorgänge.

Wir haben uns bisher auf den Fall beschränkt, daß $\Gamma_0(s)$ eine für $s \geq +0$ stetige Funktion ist. Der Satz 1 ist aber, wie wir jetzt zeigen wollen, auch dann noch richtig, wenn man unter Aufrechterhaltung der übrigen Voraussetzungen für $\Gamma_0(s)$ sprunghafte Unstetigkeiten zuläßt und auf die Stetigkeitsforderung $\varepsilon(-1,s)$ an diesen Sprungstellen verzichtet. Die oben angegebenen Formeln für die Berechnung von $\gamma(x,s)$ verlieren dagegen jetzt ihre Gültigkeit. Es treten zu der Größe $a(s)$ noch Zusatzglieder hinzu.

Der Beweis der oben ausgesprochenen Behauptung ergibt sich in sehr einfacher Weise dadurch, daß man den gesamten »unstetigen« Vorgang in einzelne nacheinander einsetzende »stetige« Einzelvorgänge zerlegt und diese schließlich wieder überlagert. Dies ist möglich, da die gesuchten Lösungsgrößen lineare Funktionen der Vorgaben sind.

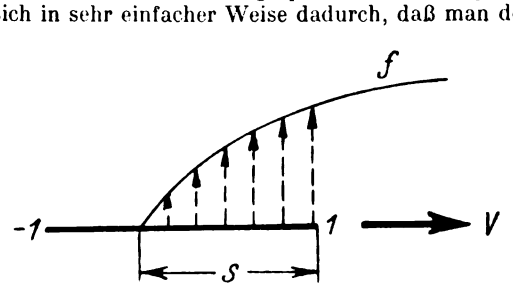


Bild 3.

Die zu der Vorgabe $w(x,s)$ gehörige Funktion $\Gamma_0(s)$ weise nur an der einen Stelle $s = s_1$ eine sprunghafte Unstetigkeit auf. Die übrigen Voraussetzungen des Satzes 1 mögen dagegen erfüllt sein. Man bestimme dann eine Funktion $w_1(x,s)$, die für $s < s_1$ mit $w(x,s)$ identisch ist und überdies die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt. Dies ist immer möglich. Zu dieser Funktion $w_1(x,s)$ gehört dann ein eindeutig bestimmtes Lösungspaar $\Gamma_1(x,s)$, $\varepsilon_1(x,s)$. Weiter kann die hierzu gehörige Funktion $\gamma_1(x,s)$ nach dem oben beschriebenen Verfahren bestimmt werden. Wir setzen dann

$$w_2(x,s) = w(x,s) - w_1(x,s).$$

und machen für $\Gamma(x,s)$ bzw. $\varepsilon(x,s)$ den Ansatz

$$\Gamma(x,s) = \Gamma_1(x,s) + \Gamma_2(x,s),\ \varepsilon(x,s) = \varepsilon_1(x,s) + \varepsilon_2(x,s).$$

Geht man damit in die Gl. (1) bis (4) ein, so ergibt sich für $\Gamma_2(x,s)$, $\varepsilon_2(x,s)$ das folgende Gleichungssystem

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1-s}^{-1}\frac{\varepsilon_2(\xi,s)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\Gamma_2(\xi,s)}{x-\xi}\,d\xi + w_2(x,s) = 0 \quad (1')$$

$$\int_{-1-s}^{-1}\varepsilon_2(\xi,s)\,d\xi + \int_{-1}^{1}\Gamma_2(\xi,s)\,d\xi = 0 \quad \ldots \quad (2')$$

$$\varepsilon_2(-1,s) = \Gamma_2(-1,s) \quad \ldots \quad (3')$$

und

$$\varepsilon_2(x,s) = \varepsilon_2(-1,s+x+1) \quad \ldots \quad (4')$$

Beachtet man nun, daß $w_2(x,s) \equiv 0$ falls $s < s_1$ ist und mithin für $s < s_1$, die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind, so gibt es, da $\Gamma_2(x,s)$ und $\varepsilon_2(-1,s)$ für $s < s_1$ stetig sein sollen, genau ein Lösungspaar $\Gamma_2(x,s)$ $\varepsilon_2(x,s)$, das für $s < s_1$ den soeben aufgestellten Gleichungen genügt. Mithin ist für $s < s_1$

$$\Gamma_2(x,s) \equiv 0, \quad \varepsilon_2(x,s) \equiv 0,$$

denn dieses Lösungspaar befriedigt ja die Gl. (1') bis (4').

Für $s > s_1$ setzen wir

$$s = s_1 + \sigma$$

und

$$\Gamma_2(x,s) = \overline{\Gamma}_2(x,\sigma),\ \varepsilon_2(x,s) = \overline{\varepsilon}_2(x,\sigma)$$

sowie

$$w_2(x,s) = \overline{w}_2(x,\sigma).$$

Damit gehen die Gl. (1') bis (4') wegen

$$\int_{-1-\sigma-s_1}^{-1-\sigma}\frac{\varepsilon_2(\xi,s)}{x-\xi}\,d\xi = \int_{-1-\sigma-s_1}^{-1-\sigma}\frac{\varepsilon_2(-1,\xi+\sigma+s_1+1)}{x-\xi}\,d\xi = \int_{-1-s_1}^{-1}\frac{\varepsilon_2(-1,\eta+s_1+1)}{x-\eta+\sigma}\,d\eta = 0,$$

es ist ja $\eta + s_1 + 1 < s_1$ und $\varepsilon_2(-1,s) = 0$ für $s < s_1$, in die Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1-\sigma}^{-1}\frac{\overline{\varepsilon}_2(\xi,\sigma)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\overline{\Gamma}_2(\xi,\sigma)}{x-\xi}\,d\xi + \overline{w}_2(x,\sigma) = 0,$$

$$\int_{-1-\sigma}^{-1}\varepsilon_2(\xi,\sigma)\,d\xi + \int_{-1}^{1}\Gamma_2(\xi,\sigma)\,d\xi = 0,$$

$$\overline{\varepsilon}_2(-1,\sigma) = \overline{\Gamma}_2(-1,\sigma),$$

$$\overline{\varepsilon}_2(x,\sigma) = \overline{\varepsilon}_2(-1,x+\sigma+1)$$

für $\sigma > 0$ über. Hierin erfüllt jetzt wieder die Funktion $\overline{w}_2(x,\sigma)$ für $\sigma > 0$ die sämtlichen Voraussetzungen des Satzes 1. Weiter sollen die Funktionen $\overline{\Gamma}_2(x,\sigma)$ und $\overline{\varepsilon}_2(-1,\sigma)$ für $\sigma > 0$ stetig sein. Mithin sind $\overline{\Gamma}_2(x,\sigma)$ und $\overline{\varepsilon}_2(x,\sigma)$ für $\sigma > 0$ eindeutig bestimmt und insbesondere kann $\overline{\gamma}_2(x,\sigma)$ wie oben angegeben berechnet werden.

Digitized by Google

Damit haben wir gezeigt, daß der unstetige Vorgang dessen Unstetigkeit an der einen Stelle s_1 liegt als Überlagerung zweier stetiger Einzelvorgänge aufgefaßt werden kann, die nacheinander einsetzen. Der eine Vorgang gehört zu der Vorgabe $w_1(x, s)$ und setzt zur Zeit $s = 0$ ein. Der zweite Vorgang gehört zu $w(x, s) - w_1(x, s) = w_2(x, s)$ und setzt zur Zeit s_1 ein. Für die beiden einzelnen Vorgänge können die Dichten der gebundenen Wirbel nach dem in dem Abschnitt III entwickelten Verfahren bestimmt werden. Die gesuchte Dichte $\gamma(x, s)$ ergibt sich dann durch Addition der einzelnen Dichten, wobei $\gamma_2(x, s) = 0$ zu setzen ist, falls $s < s_1$ ist. Führt man dies durch, so zeigt sich, daß die Darstellung (17) für $\gamma(x, s)$ formal erhalten bleibt, dagegen ändert sich jetzt die Berechnung des Koeffizienten $a(s)$. Im vorliegenden Falle ist nämlich für $s \neq s_1$

$$a(s) = 2\int_{-1}^{1} \frac{w(\xi, s)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi - \Gamma_0(s) + \Gamma_0(+0)\, k_1(s) + [\Gamma_0(s_1+0) - \Gamma_0(s_1-0)]\, k_1(s-s_1) + \int_0^s \Gamma_0'(\sigma)\, k_1(s-\sigma)\, d\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

wobei $\Gamma_0(s_1 + 0) - \Gamma_0(s_1 - 0)$ die Größe des Sprunges angibt, den die Funktion $\Gamma_0(s)$ an der Stelle s_1 macht. Weiter ist in (23) die Funktion $k_1(s) = 0$ zu setzen, wenn $s \leqq 0$ ist.

Wir haben uns hier mit dem Fall befaßt, daß die Funktion $\Gamma_0(s)$ nur eine Sprungstelle aufweist. Liegen n Sprungstellen vor, so muß der gesamte Vorgang in $n + 1$ Einzelvorgänge zerlegt werden. Entsprechend treten dann in der Formel für $a(s)$ n Sprungglieder auf.

V. Berechnung der Auftriebsverteilung, der Normalkraft und des Momentes.

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gezeigt, wie bei vorgegebenen Funktionen $V(s)$ und $w(x, s)$ die Dichte $\gamma(x, s)$ der gebundenen Wirbel und damit nach (5) die Auftriebsverteilung über die Tiefe bestimmt werden kann. Wir wollen hier das für die numerische Berechnung wesentliche noch einmal kurz wiederholen.

Hat man aus der vorgegebenen Bewegung des Flügels und der Anströmung die Normalkomponentenverteilung $w(x, s)$ bestimmt, so untersuche man, ob diese Funktion $w(x, s)$ den Voraussetzungen des Satzes 1 genügt. Sind diese bis auf die Stetigkeit der Funktion $\Gamma_0(s)$ erfüllt, so kann der gesamte Vorgang in Teilvorgänge zerlegt werden, die an den Sprungstellen von $\Gamma_0(s)$ einsetzen und jeweils selbst zu einer stetigen Zirkulation $\Gamma_0(s)$ gehören[7]). Die zu dem resultierenden Vorgang gehörige Wirbelverteilung $\gamma(x, s)$ ergibt sich dann durch Überlagerung der Wirbeldichten der Einzelvorgänge. Wir können uns mithin auf einen Vorgang mit stetigem $\Gamma_0(s)$ beschränken. Hierfür ist $\gamma(x, s)$ durch die Gl. (17) und (18) bestimmt. In den Fällen A oder B (s. S. 407) können an Stelle der Gl. (17) die vereinfachten Gl. (21) mit (20) bzw. (22) benutzt werden. Die Funktion $k_1(s)$, die neben den beiden Vorgaben $V(s)$ und $w(x, s)$ noch in (18) auftritt, kann als bekannt angesehen werden. Für sie sind neben den schon oben genannten Darstellungen von Wagner und Küssner[8]) noch zwei Näherungen bekannt, die man bei numerischen Rechnungen im allgemeinen heranziehen wird. Nach Kármán-Sears [9a][9]) ist

a) für $0 \leqq s \leqq 2$

$$k_1(s) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{8}s - \frac{1}{32}s^2 + 0{,}00554\, s^3, \quad \ldots \quad (24)$$

b) für $0 \leqq s \leqq 10$

$$k_1(s) \sim 1 - \frac{1}{4}e^{-\frac{s}{2}} + \frac{1+0{,}185\,s}{4}e^{-0{,}185\,s}. \quad (25)$$

Diese letzte Gleichung kann ohne einen bedeutenden Fehler auch noch für $0 \leqq s \leqq \infty$ angewandt werden. Nach Garrick [6] wird die Funktion $k_1(s)$ durch den einfachen Ausdruck

$$1 - \frac{2}{4+s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

mit einem Fehler von höchstens 2% angenähert. Diese Approximation ist insbesondere für kleine Werte von s sehr gut[10]).

Bei der Bestimmung der Funktion $a(s)$ nach (18) wird man im allgemeinen numerische oder graphische Methoden heranziehen müssen, falls man nicht die angegebenen Näherungen für die Funktion $k_1(s)$ verwenden will. Schwierigkeiten bestehen hier nicht. Die Berechnung des in (21) auftretenden singulären Integrals ist dagegen derartigen Methoden nur schwer zugänglich. Ist aber $w(x, s)$ und damit auch $H(x, s)$ als Funktion von x stückweise durch Polynome gegeben, so kann dieses Integral geschlossen berechnet werden. Dazu setze man in $H(x, s)$

$$x = \cos\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und forme die Potenzen von $\cos\vartheta$ mittels bekannter trigonometrischer Identitäten in Summen über $\cos(\nu\vartheta)$ um. Man erhält so eine Darstellung für $H(x, s)$, die als lineare Superposition von endlich vielen Ausdrücken der Form

$$H_m(\cos\vartheta, s) = \begin{cases} 0 & -1 \leqq x < x_1 \\ A_m(s)\cos(m\vartheta) & \text{für } x_1 < x < x_2 \\ 0 & x_2 < x \leqq 1 \end{cases} \quad (28)$$

aufgefaßt werden kann. Für jeden derartigen Summanden gilt aber mit

$$x_1 = \cos\vartheta_1 \text{ und } x_2 = \cos\vartheta_2$$

die Beziehung

$$\sqrt{1-x^2}\,\oint_{-1}^{1} \frac{H_m(\xi, s)\, d\xi}{(x-\xi)\sqrt{1-\xi^2}} = A_m(s)\left\{-\frac{1}{2}\cos(m\vartheta)\ln\frac{[1-\cos(\vartheta-\vartheta_2)][1-\cos(\vartheta+\vartheta_1)]}{[1-\cos(\vartheta+\vartheta_2)][1-\cos(\vartheta-\vartheta_1)]} - 2\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu}\sin[(m-\nu)\vartheta](\sin(\nu\vartheta_2) - \sin(\nu\vartheta_1)) + (\vartheta_2-\vartheta_1)\sin(m\vartheta)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Bei der Berechnung der Teilauftriebe und Momente hat man die Integrale $\int_{-1}^{x}\gamma(\xi, s)\, d\xi$ bzw. $\int_{-1}^{x}\xi\,\gamma(\xi, s)\, d\xi$ zu bestimmen. Diese lassen sich unter der soeben über $w(x, s)$ gemachten Annahme mittels der Integralformel

$$\int \ln[1-\cos(\vartheta-\alpha)]\sin(n\vartheta)\, d\vartheta = -\frac{1}{n^2}\cos(n\vartheta) - \frac{\vartheta}{n}\sin(n\alpha) + \frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{n-\nu}\cos[(n-\nu)\vartheta + \nu\alpha] - \frac{1}{n}[\cos(n\alpha) - \cos(n\vartheta)]\ln[1-\cos(\vartheta-\alpha)] \quad \ldots \quad (30)$$

[7]) Es ist nicht notwendig, daß die zu einem Einzelvorgang gehörige Funktion $w(x, s)$ gemessen an V klein ist. Dies muß nur für den gesamten Vorgang der Fall sein, damit die oben gemachten Ansätze sinnvoll sind. In die Lösung des Gleichungssystems selbst geht dagegen diese Bedingung nicht ein.

[8]) Vgl. S. 406 und Anm. 6).

[9]) Die dort auf Seite 238 angegebene Funktion Φ ist gleich $1 - k_1(s)$.

[10]) Eine eingehendere Untersuchung hinsichtlich der Funktion $k_1(s)$ hat L. Schwarz durchgeführt. Vgl. diese Lfg. S. 362.

Digitized by Google

wiederum geschlossen auswerten.

Obwohl die Annahme, daß $w(x, s)$ stückweise durch ein Polynom in x gegeben ist, in der Mehrzahl der praktisch interessierenden Fälle erfüllt sein dürfte, wollen wir der Vollständigkeit halber noch die Reihenentwicklung von $\gamma(x, s)$ angeben, die man erhält, wenn $w(x, s)$ als Funktion von ϑ in Form einer Fourierschen Reihe gegeben ist. Wir beschränken uns dabei auf die Bestimmung von $\gamma(x, s)$ an denjenigen Stellen, an denen $w(x. s)$ nach x differenzierbar ist und nehmen überdies an, daß an diesen Stellen die Reihe gliedweise nach s differenziert werden darf. Unter diesen Voraussetzungen ist auch das singuläre Integral der Gl. (21) in eine Fouriersche Reihe entwickelbar und mit

$$w_\nu(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w(\cos\vartheta, s)\cos(\nu\vartheta)\,d\vartheta \quad \ldots \quad (31)$$

also

$$w(x, s) = \frac{1}{2}w_0(s) + \sum_1^\infty w_\nu(s)\cos(\nu\vartheta) \quad \ldots \quad (32)$$

ergibt sich

$$\gamma(x, s) = \frac{a(s)}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} - 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[w_\nu(s) + \frac{w_{\nu+1}'(s) - w_{\nu-1}'(s)}{2\nu}\right]\sin(\nu\vartheta). \quad (33)$$

Weiter ist

$$\Gamma_0(s) = \pi[w_0(s) - w_1(s)] \quad \ldots \quad (34)$$

und

$$\frac{a(s)}{\pi} = w_1(s) + [w_0(+0) - w_1(+0)]\,k_1(s) + \int_0^s [w_0'(\sigma) - w_1'(\sigma)]\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma \quad \ldots \quad (35)$$

Unabhängig von der Konvergenzfrage der Reihenentwicklung (33) gelten mit den Fourierkoeffizienten (31) die Beziehungen (34) und (35) sowie für die Normalkraft und das auf den Mittelpunkt bezogene Moment die Gleichungen

$$N = \frac{1}{2}\varrho V l\int_{-1}^{1}\gamma(x, s)\,dx = \frac{\pi}{2}\varrho V l\left\{\frac{w_0'(s) - w_2'(s)}{2} + [w_0(+0) - w_1(+0)]\,k_1(s) + \int_0^s [w_0'(\sigma) - w_1'(\sigma)]\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma\right\} \quad (36)$$

und

$$M_0 = \varrho V\left(\frac{l}{2}\right)^2\int_{-1}^{1} x\cdot\gamma(x, s)\,dx = -\frac{\pi}{2}\varrho V\left(\frac{l}{2}\right)^2\left\{w_2(s) - w_1(s) + \frac{1}{4}[w_3'(s) - w_1'(s)] - [w_0(+0) - w_1(+0)]\,k_1(s) - \int_0^s [w_0'(\sigma) - w_1'(\sigma)]\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma\right\}. \quad (37)$$

Diese beiden letzten Ausdrücke stimmen wertmäßig mit denjenigen überein, die Kármán und Sears [9] für den Auftrieb und das Moment angegeben haben.

Außer der Normalkraft greift an der Vorderkante des Flügels noch eine Saugkraft an, die in den Größen $w_\nu(s)$ quadratisch ist und daher hier vernachlässigt wird.

VI. Harmonische Bewegungen.

Bisher haben wir uns nur mit dem Fall der Anfahrbewegung befaßt und hierfür die Auftriebsverteilung angegeben. Wir wollen nun zeigen, wie man daraus die bekannten Ergebnisse [11] für eine lange andauernde harmonische Bewegung erhält.

Es sei

$$w(x, s) = e^{i\omega s}\,\overline{w}(x) \quad \ldots \quad (38)$$

und

$$\overline{w}_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overline{w}(\cos\vartheta)\cos(\nu\vartheta)\,d\vartheta.$$

Geht man damit in die Gl. (17) ein, so ist die Abhängigkeit der in dieser Gleichung auftretenden Integrale von s unmittelbar evident. Weiter ist nach (35)

$$\begin{aligned}\frac{a(s)}{\pi} &= e^{i\omega s}\,\overline{w}_1 + (\overline{w}_0 - \overline{w}_1)\,k_1(s) \\ &\quad + i\omega(\overline{w}_0 - \overline{w}_1)\int_0^s e^{i\omega t}k_1(s-t)\,dt \\ &= e^{i\omega s}\,\overline{w}_0 + (\overline{w}_0 - \overline{w}_1)(k_1(s) - 1) \\ &\quad + i\omega(\overline{w}_0 - \overline{w}_1)\int_0^s e^{i\omega t}(k_1(s-t) - 1)\,dt \\ &= e^{i\omega s}[\overline{w}_0 + i\omega(\overline{w}_0 - \overline{w}_1)\int_0^s e^{-i\omega\sigma}[k_1(\sigma) - 1]\,d\sigma] \\ &\quad + (\overline{w}_0 - \overline{w}_1)(k_1(s) - 1).\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß $k_1(s)$ sich für große Werte von s wie $1 - \frac{1}{s}$ verhält (vgl. A 4), so existiert

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s e^{-i\omega t}(k_1(t) - 1)\,dt$$

und ist gleich der Laplace-Transformierten von $k_1(s) - 1$ an der Stelle $i\omega$[11]). Es gelten mithin für große Werte von s die Darstellungen

$$\frac{a(s)}{\pi} = w_1(s) + [w_0'(s) - w_1'(s)]\cdot\mathfrak{L}\{k_1, i\omega\} \quad \ldots \quad (39)$$

bzw.

$$\frac{a(s)}{\pi} = e^{i\omega s}\left\{\frac{i H_1^{(2)}(\omega)}{i H_1^{(2)}(\omega) - H_0^{(2)}(\omega)}\,\overline{w}_0 - \frac{H_0^{(2)}(\omega)}{i H_1^{(2)}(\omega) - H_0^{(2)}(\omega)}\,\overline{w}_1\right\}, \quad \ldots \quad (40)$$

von denen die letztere mit dem von Küssner angegebenen Wert für $\frac{a(s)}{\pi}$ übereinstimmt.

Für spätere Zwecke ist es nützlich noch den Fall zu betrachten, daß $w(x, s)$ eine angefachte bzw. gedämpfte Schwingung ist. Es sei also $w(x, s) = e^{\lambda s}\,\overline{w}(x)$ mit $\delta = \lambda + i\omega$. Ist $\lambda > 0$, so zeigt man genau wie oben, daß für große Werte von s die Äquivalenzrelation

$$\frac{a(s)}{\pi} \sim w_1(s) + [w_0'(s) - w_1'(s)]\,\mathfrak{L}\{k_1, \delta\}$$

gilt, und sich mithin $a(s)$ wie $e^{\lambda s}$ verhält. Ist dagegen $\lambda < 0$, so sieht man leicht ein, daß $a(s)$ nicht so stark abnimmt wie $e^{\lambda s}$. Ist etwa $\omega = 0$, so kann man zeigen, daß für große Werte von s eine Abschätzung der Form

$$|a(s)| > \frac{c}{s}$$

besteht, wobei c eine Konstante ist. Die Größe $a(s)$ klingt also gemessen an $w(x, s)$ sehr langsam ab.

VII. Bestimmung der Lastverteilung für einen Flügel mit Querruder.

Als Anwendung des oben entwickelten Verfahrens wollen wir jetzt die Kräfte und Momente berechnen, die auf ein

[11]) Vgl. A 2 und A 4 sowie [3] S. 47 Satz 1.

Digitized by Google

Leitwerk ohne Spalt wirken, falls das Ruder um einen gegebenen, zeitlich veränderlichen Winkel $\eta(s)$ ausgeschlagen wird. Die Flosse bewege sich dagegen mit der konstanten Geschwindigkeit V in Richtung der x-Achse. Weiter sei der Ruderwinkel η klein und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der Zeit, sowie $\eta(+0) = 0$. Dann ist, wenn die Leitwerktiefe mit l_L bezeichnet wird, und der Ruderdrehpunkt im Punkte $\frac{l_L}{2} x_0$ liegt (s. Bild 4),

$$w(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 1 \geq x > x_0 \\ V[\eta(s) + (x_0 - x)\,\eta'(s)] & \text{für} \quad -1 \leq x < x_0. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\eta'(s) = \frac{d\eta(s)}{ds}$$

gesetzt.

Für diese Funktion $w(x,s)$ gelten die Voraussetzungen des Falles A und es sind mithin die Gl. (21) und (35) anwendbar. Beachtet man, daß nach (20)

$$H(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 1 > x > x_0 \\ V[\eta + 2\eta'(x_0 - x) + \frac{1}{2}\eta''(x_0 - x)^2] & \text{für} \quad -1 < x < x_0, \end{cases}$$

also mit $x = \cos\vartheta$ und $x_0 = \cos\vartheta_0$

$$H(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < \vartheta < \vartheta_0 \\ V[\eta + 2\eta'\cos\vartheta_0 + \frac{1}{4}\eta''\cos 2\vartheta_0 + \frac{1}{2}\eta'' - (2\eta' + \eta''\cos\vartheta_0)\cos\vartheta + \frac{1}{4}\eta''\cos 2\vartheta] & \text{für} \quad \vartheta_0 < \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

ist und die Gl. (31) für die Größen $w_0(s)$ und $w_1(s)$ die Ausdrücke

$$w_1(s) = \frac{2}{\pi} V[\eta(\pi - \vartheta_0) + \eta'((\pi - \vartheta_0)\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta_0)]$$

und

$$w_1(s) = -\frac{2}{\pi} V[\eta\sin\vartheta_0 + \frac{1}{2}\eta'(\pi - \vartheta_0 + \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0)]$$

liefert, so ergibt sich nach (35)

$$\begin{aligned} a(s) = 2V\Big\{ & -\eta\sin\vartheta_0 - \frac{1}{2}(\pi - \vartheta_0 + \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0)\,\eta' \\ & + \Big[(\pi - \vartheta_0)\Big(\cos\vartheta_0 + \frac{1}{2}\Big) + \sin\vartheta_0\Big(1 + \frac{1}{2}\cos\vartheta_0\Big)\Big] \\ & \times [\eta'(+0)\,k_1(s) + \int_0^s \eta''(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma] \\ & + (\pi - \vartheta_0 + \sin\vartheta_0)\int_0^s \eta'(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma\Big\} \end{aligned}$$

und wegen (29) aus (21)

$$\begin{aligned} \gamma(x,s) = {} & \frac{a(s)}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + V\frac{2}{\pi}\Big\{\Big[2\eta'(\pi - \vartheta_0) \\ & + \eta''\Big((\pi - \vartheta_0)\cos\vartheta_0 + \frac{1}{2}\sin\vartheta_0\Big)\Big]\sin\vartheta \\ & - \frac{1}{4}\eta''(\pi - \vartheta_0)\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}\Big[\eta + 2\eta'(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) \\ & + \frac{1}{2}\eta''(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2\Big]\ln\frac{1 - \cos(\vartheta + \vartheta_0)}{1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)}\Big\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Weiter erhält man für die auf das gesamte Leitwerk wirkende Normalkraft N und das Moment M_0 um den Mittelpunkt des Leitwerks die Ausdrücke

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2}\varrho V l_L\int_{-1}^{1}\gamma(\xi,s)\,d\xi \\ &= q l_L\{n_1\eta'(s) + n_2\cdot\eta''(s) + C_2\int_0^s \eta'(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma \\ &\quad + C_1[\eta'(+0)\,k_1(s) + \int_0^s \eta''(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma]\} \quad \ldots \quad (42) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} M_0 &= \varrho V\Big(\frac{l_L}{2}\Big)^2\int_{-1}^{1}\xi\,\gamma(\xi,s)\,ds \\ &= q\Big(\frac{l_L}{2}\Big)^2\Big\{m_0\eta(s) + m_1\eta'(s) + m_2\eta''(s) + C_1[\eta'(+0)\,k_1(s) \\ &\quad + \int_0^s \eta''(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma] + C_2\int_0^s \eta'(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma\Big\}, \end{aligned} \quad (43)$$

wobei die Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \pi - \vartheta_0 + \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 \\ n_2 &= \pi - \vartheta_0 + \frac{3}{4}\sin\vartheta_0 + \frac{1}{12}\sin 3\vartheta_0 \\ C_1 &= (\pi - \vartheta_0)(1 + 2\cos\vartheta_0) + \sin\vartheta_0(2 + \cos\vartheta_0) \\ C_2 &= 2(\pi - \vartheta_0 + \sin\vartheta_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (44)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= 2\sin\vartheta_0(\cos\vartheta_0 - 1) \\ m_1 &= -(\pi - \vartheta_0) - \sin\vartheta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta_0 + \frac{1}{3}\sin 3\vartheta_0 \\ m_2 &= -\frac{1}{4}(\pi - \vartheta_0) - \frac{1}{6}\sin^2\vartheta_0 + \frac{1}{48}\sin 4\vartheta_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (45)$$

nur von dem Rudertiefenverhältnis l_R/l_L abhängen. Für die Normalkraft und das Moment des Ruders um den Ruderdrehpunkt ergeben sich aus (41) unter Benutzung von (30) die Darstellungen

$$\begin{aligned} N_R &= \varrho V(l_L/2)\int_{-1}^{x_0}\gamma(\xi,s)\,d\xi \\ &= q l_L\cdot\frac{1}{\pi}\{n_{R0}\eta(s) + n_{R1}\eta'(s) + n_{R2}\eta''(s) \\ &\quad + n_{R3}[C_1(\eta'(+0)\,k_1(s) + \int_0^s \eta''(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma) \\ &\quad + C_2\int_0^s \eta'(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma]\} \quad \ldots \quad (46) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} M_R &= \varrho V(l_L/2)^2\int_{-1}^{x_0}(x_0 - \xi)\,\gamma(\xi,s)\,d\xi \\ &= q(l_L/2)^2\frac{1}{\pi}\{m_{R0}\eta(s) + m_{R1}\eta'(s) + m_{R2}\eta''(s) \\ &\quad + m_{R3}[C_1(\eta'(+0)\,k_1(s) + \int_0^s \eta''(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma) \\ &\quad + C_2\int_0^s \eta'(\sigma)\,k_1(s-\sigma)\,d\sigma]\} \quad \ldots \quad (47) \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} n_{R0} &= 2\sin^2\vartheta_0 \\ n_{R1} &= (\pi - \vartheta_0)^2 + (\pi - \vartheta_0)\sin\vartheta_0(1 + 3\cos\vartheta_0) + \sin^2\vartheta_0(2 + \cos\vartheta_0) \\ n_{R2} &= (\pi - \vartheta_0)^2\cos\vartheta_0 + (\pi - \vartheta_0)\sin\vartheta_0(1 + \cos^2\vartheta_0) + \cos\vartheta_0\sin^2\vartheta_0 \\ n_{R3} &= (\pi - \vartheta_0 - \sin\vartheta_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (48)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} m_{R0} &= 2\sin\vartheta_0(1 - \cos\vartheta_0)(\pi - \vartheta_0 - \sin\vartheta_0) \\ m_{R1} &= (\pi - \vartheta_0)^2(1 + 2\cos\vartheta_0) + 2(\pi - \vartheta_0)\sin\vartheta_0(1 + \cos\vartheta_0 + \cos^2\vartheta_0) + \sin^2\vartheta_0\cos\vartheta_0(2 + \cos\vartheta_0) \\ m_{R2} &= (\pi - \vartheta_0)^2\Big(\frac{1}{4} + 2\cos^2\vartheta_0\Big) + (\pi - \vartheta_0)\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\Big(\frac{7}{2} + \cos^2\vartheta_0\Big) + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta_0(9 - 5\sin^2\vartheta_0) \\ m_{R3} &= (\pi - \vartheta_0)(2\cos\vartheta_0 - 1) + \sin\vartheta_0(2 - \cos\vartheta_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (49)$$

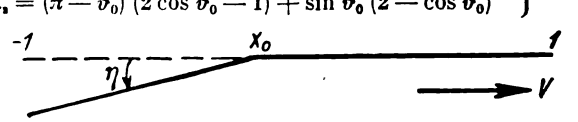


Bild 4.

Digitized by Google

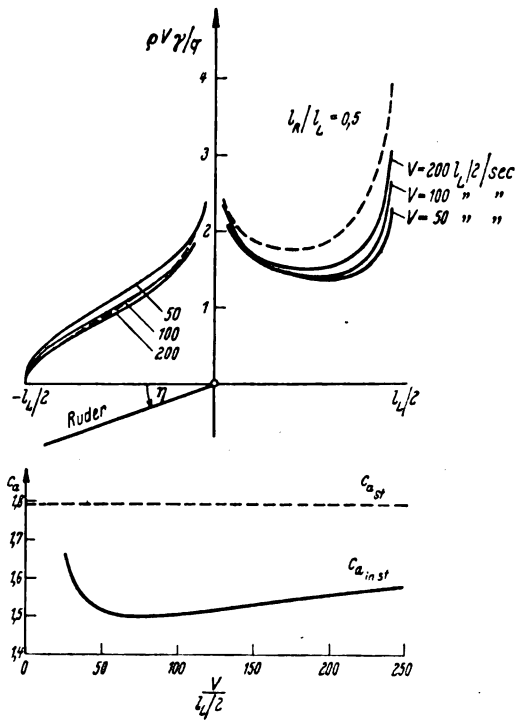


Bild 5. Auftriebsbeiwert und Auftriebsverteilung über die Tiefe eines Leitwerkes für $\eta = 20°$, falls das Ruder mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von 200°/s ausgeschlagen wird.
— — — stationäre Verteilung für diesen Ruderwinkel.

In Bild 5 sind die Luftkraftverteilungen aufgetragen, die sich an einem Leitwerk mit $l_K/l_L = 0{,}5$ für $\eta = 20°$ einstellen, falls das Ruder bei verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten mit der Winkelgeschwindigkeit von 200°/sec ausgeschlagen wird. Desgleichen ist dort die stationäre Lastverteilung dargestellt, die die Theorie für diesen Ruderwinkel liefert. Man entnimmt daraus, daß für den hier betrachteten Fall das Leitwerk im »Instationären« insgesamt schwächer belastet wird. Insbesondere ergeben sich an der Flosse recht erhebliche Belastungsunterschiede.

Die vorstehenden Formeln gelten für ein Leitwerk ohne Spalt und ohne aerodynamischen Ausgleich. Ganz analog können die entsprechenden Ausdrücke für den Fall einer rückverlegten Drehachse bestimmt werden. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, daß $\eta(s)$ eine lineare Funktion von s ist, also

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s < 0 \\ \omega s & \text{für } s \geq 0. \end{cases}$$

Als idealisiertes Modell legen wir hier die in Bild 6 angedeutete Figur zugrunde, aus der man entnimmt, daß

$$w(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 < x \leq 1 \\ V\omega(s + x_0 - x) & \text{für } x_1 > x \geq -1 \end{cases}$$

ist. Obwohl dieses Modell nur zur Bestimmung der Funktion $w(x, s)$ dient, könnten hier Bedenken wegen der bei diesem Modell für einen von Null verschiedenen Ruderwinkel auftretenden Öffnung bestehen. Es läßt sich aber zeigen, daß durch diese Spaltwirkung die Auftriebsverteilung für einen festen Ruderwinkel nur um Glieder gefälscht wird, die wie η^2 verschwinden. Um dies einzusehen, betrachten wir einen symmetrischen Doppelflügel mit endlichem Spalt S. Man kann dann zeigen, daß bei einer derartigen Flügelanordnung die Lage der Ruderdrehachse in einer linearen Theorie in η bei der Berechnung der Auftriebsverteilung nicht eingeht. Es darf also dabei stets angenommen werden, daß der Drehpunkt in der Rudernase liegt. Da dies für jedes S gilt und andererseits die Auftriebsverteilung von Flosse und Ruder mit verschwindender Spaltgröße in die Verteilung der geknickten Platte übergehen, so ergibt sich, daß im Stationären die in den Bildern 4 und 6 dargestellten Modelle hinsichtlich der Auftriebsverteilung gleichwertig sind. Mithin kann das durch die Öffnung hindurchtretende Strömungsmaterial höchstens einen in η quadratischen Einfluß ausüben. Es ist anzunehmen, daß für instationäre Bewegungen und insbesondere bei Ruderschwingungen die Verhältnisse im Hinblick auf die Spaltwirkung ganz ähnlich liegen.

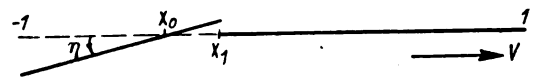


Bild 6.

Wir setzen wieder

$$x = \cos\vartheta, \quad x_0 = \cos\vartheta_0, \quad x_1 = \cos\vartheta_1$$

und erhalten

$$\gamma(x,s) = \frac{a(s)}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + \frac{2}{\pi}V\omega\left\{\frac{1}{2}\left[s + \cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1 - 2\cos\vartheta\right]\ln\frac{1-\cos(\vartheta+\vartheta_1)}{1-\cos(\vartheta-\vartheta_1)} + 2(\pi-\vartheta_1)\sin\vartheta\right\} \quad (50)$$

mit

$$a(s) = V\omega\left\{-2s\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_1 - 2\cos\vartheta_0) - (\pi-\vartheta_1) + \overline{C}_1 k_1(s) + \overline{C}_2\int_0^s k_1(\sigma)\,d\sigma\right\}$$

und

$$\overline{C}_1 = (\pi-\vartheta_1)(2\cos\vartheta_0 + 1) + \sin\vartheta_1(2 + 2\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1),$$
$$\overline{C}_2 = 2(\pi - \vartheta_1 + \sin\vartheta_1).$$

Damit ergeben sich für die auf das gesamte Leitwerk bzw. auf das Ruder wirkende Normalkraft die Ausdrücke

$$\overline{N}_L = \frac{1}{2}\varrho V l_L\int_{-1}^{1}\gamma(\xi,s)\,d\xi$$
$$= q l_L \omega\left\{\bar{n}_0 + \overline{C}_1 k_1(s) + \overline{C}_2\int_0^s k_1(\sigma)\,d\sigma\right\} \quad (51)$$

bzw.

$$\overline{N}_K = \frac{1}{2}\varrho V l_L\int_{-1}^{x_1}\gamma(\xi,s)\,d\xi$$
$$= q l_L\frac{\omega}{\pi}\left\{\bar{n}_{K0} + s\,\bar{n}_{K1} + \bar{n}_{K2}\left[\overline{C}_1 k_1(s) + \overline{C}_2\int_0^s k_1(\sigma)\,d\sigma\right]\right\} \quad (52)$$

sowie für das auf dem Mittelpunkt des Leitwerkes bezogene Moment

$$\overline{M}_0 = \varrho V\left(\frac{l_L}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}\xi\gamma(\xi,s)\,d\xi$$
$$= q\left(\frac{l_L}{2}\right)^2\omega\left\{\bar{m}_0 + s\,\bar{m}_1 + \overline{C}_1 k_1(s) + \overline{C}_2\int_0^s k_1(\sigma)\,d\sigma\right\} \quad (53)$$

und das auf den Ruderdrehpunkt bezogene Moment

$$\overline{M}_K = \varrho V\left(\frac{l_L}{2}\right)^2\int_{-1}^{x_1}(x_0 - \xi)\gamma(\xi,s)\,d\xi$$
$$= q\left(\frac{l_L}{2}\right)^2\frac{\omega}{\pi}\left\{\bar{m}_{K0} + s\,\bar{m}_{K1} + \bar{m}_{K2}\left(\overline{C}_1 k_1(s) + \overline{C}_2\int_0^s k_1(\sigma-)\,d\sigma\right)\right\} \quad (54)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\bar{n}_0 &= \pi - \vartheta_1 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1, \\
\bar{n}_{K0} &= (\pi-\vartheta_1)^2 + (\pi-\vartheta_1)\sin\vartheta_1(1 + 3\cos\vartheta_1) \\
&\quad + \sin^2\vartheta_1(2 + 2\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1), \\
\bar{n}_{K1} &= 2\sin^2\vartheta_1, \\
\bar{n}_{K2} &= \pi - \vartheta_1 - \sin\vartheta_1, \\
\bar{m}_0 &= -(\pi-\vartheta_1) + 2\sin\vartheta_1\cos\vartheta_0(\cos\vartheta_1 - 1) \\
&\quad - \frac{3}{2}\sin\vartheta_1 + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta_1 - \frac{1}{6}\sin 3\vartheta_1,
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Digitized by Google

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{m}_1 &= 2\sin\vartheta_1(\cos\vartheta_1 - 1),\\
\overline{m}_{R0} &= (\pi-\vartheta_1)^2(2\cos\vartheta_0+1)+2(\pi-\vartheta_1)\sin\vartheta_1(2\cos\vartheta_0\\
&\quad +2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_0-\cos^2\vartheta_1-\cos\vartheta_1+1)\\
&\quad +\sin^2\vartheta_1(2\cos\vartheta_0+4\cos^2\vartheta_0\\
&\quad -4\cos\vartheta_0\cos\vartheta_1+\cos^2\vartheta_1),\\
\overline{m}_{R1} &= 2(\pi-\vartheta_1)\sin\vartheta_1(1-\cos\vartheta_1)\\
&\quad +2\sin^2\vartheta_1(2\cos\vartheta_0-\cos\vartheta_1-1),\\
\overline{m}_{R2} &= (\pi-\vartheta_1)(2\cos\vartheta_0-1)\\
&\quad +\sin\vartheta_1(2+\cos\vartheta_1-2\cos\vartheta_0)
\end{aligned}\right\} \quad (55)
$$

Mittels der Formeln (50) bis (55) können die am Leitwerk angreifenden Kräfte und Momente für jede Funktion $\eta(s)$ berechnet werden, die durch einen Streckenzug gegeben ist. Ist z. B.

$$
\eta(s)=\begin{cases}0 & s<0\\ \omega s & \text{für } 0\le s\le s_1\\ \omega s_1 & s_1\le s,\end{cases} \quad \ldots\ldots (56)
$$

wobei ω und s_1 Konstante sind, so ist, wie im Abschnitt IV gezeigt wurde, z. B.

$$
N_R(s)=\overline{N}_R(s)-\overline{N}_R(s-s_1), \quad \ldots\ldots (57)
$$

dabei ist $\overline{N}_R(s)=0$ für $s<0$ zu setzen.

Diese letzten Ergebnisse wollen wir mit einigen in Göttingen durchgeführten Messungen vergleichen. Es handelt sich dabei um einen Flügel, dessen Ruder aus einer bestimmten Stellung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bis zu einem Endwinkel bewegt und dann in dieser Stellung festgehalten wurde. Die Flosse war fest. Um wenigstens einigermaßen den wirklichen Verhältnissen nahezukommen, passen wir die stationären Anfangs- und Endwerte der Rechnung durch Multiplikation und Addition von Konstanten denen der Messung an. Wir setzen also, wenn $(c_{n_R}(s))$ den nach (57) mit (52) berechneten Auftriebsbeiwert bedeutet und mit $(c_{n_R})_e$ der stationäre Endwert der Theorie bezeichnet wird,

$$
c_{n_R}(s)=[c_{n_R}]_0+(c_{n_R}(s))\,\frac{[c_{n_R}]_e-[c_{n_R}]_0}{(c_{n_R})_e}
$$

wobei $[c_{nR}]_0$ bzw. $[c_{nR}]_e$ die gemessenen Auftriebsbeiwerte des Ruders vor Beginn des Ruderausschlages bzw. lange nach Beendigung des Anreißens bedeuten. Entsprechend definieren wir die Funktion $c_n(s)$. In dem Bilde 7 sind diese beiden Auftriebsbeiwerte für verschiedene Winkelgeschwindigkeiten und Endausschläge aufgetragen und werden dort mit den entsprechenden Meßkurven verglichen.

VIII. Bemerkung zur Definition der kritischen Geschwindigkeit und Selbsteinstellung des losen Ruders.

Als kritische Geschwindigkeit eines federnd aufgehängten Flügels bezeichnet man [10] eine Anblasegeschwindigkeit dann, wenn eine harmonische Bewegungsform existiert, die der nur den Luft- und Federkräften unterworfene Flügel ausführt, falls man ihn genügend lange in eben dieser Weise zwangsmäßig bewegt hat.

Mit dieser Definition soll der gemeinsame Grenzpunkt erfaßt werden, den zwei aneinanderstoßende Geschwindigkeitsbereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ mit den folgenden Eigenschaften haben. Wird der Flügel angestoßen und liegt V in $\mathfrak{B}_1$, so kehrt der Flügel nach genügend langer Zeit in die Ruhelage zurück. Liegt dagegen V in $\mathfrak{B}_2$, so ist dies nicht mehr der Fall. Üblicherweise verbindet man damit die Vorstellung, daß der Flügel in $\mathfrak{B}_1$ gedämpfte und in $\mathfrak{B}_2$ angefachte Schwingungen ausführt.

Es ist nicht unmittelbar einzusehen, daß bei dem Vorliegen zweier derartiger Geschwindigkeitsbereiche für den gemeinsamen Grenzpunkt stets eine geeignete harmonische Bewegungsform derart existieren muß, daß der so genügend lange zwangsmäßig bewegte Flügel diesen ihm aufgeprägten Schwingungszustand auch nach Wegfall des Zwanges beibehält. Weiter wäre es durchaus denkbar, daß die nach obiger Definition ermittelten kritischen Geschwindigkeiten sowohl im Inneren von $\mathfrak{B}_1$ als auch im Inneren von $\mathfrak{B}_2$ liegen können, denn durch den Schwingungszustand wird ja eine »Vergangenheit« geschaffen, die von der eines Stoßes wesentlich abweicht.

Um diese Frage zu klären, bestimmen wir hier die Ruderbewegung, die sich nach einem Stoß auf das Ruder bei festgehaltener Flosse einstellt. Insbesondere gehen wir dabei auf das infinitäre Verhalten des Ruderwinkels ein und erhalten so ein Stabilitätskriterium.

Erfolgt der Stoß in dem Zeitpunkt $s=0$, so besteht für $s>0$ die Momentengleichung

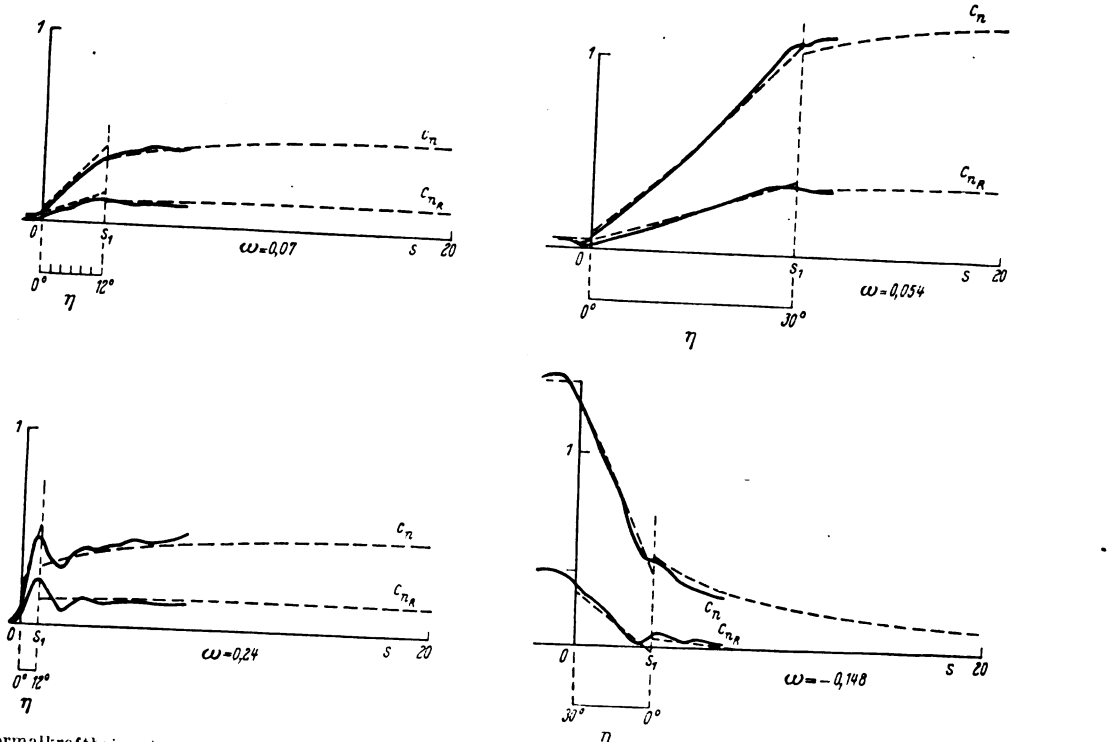


Bild 7. Normalkraftbeiwerte des Leitwerkes und des Ruders beim Anreißen des Ruders mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. $\eta=\omega s+\eta_0$ für $s<s_1$ $\eta=\omega s_1+\eta_0$ – – – – Theorie, für $s<s_1$ ——— Messung.

Digitized by Google

$$M_R + \eta(s)\frac{R}{b} + m\left(r\frac{l_L}{2}\right)^2 \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} = 0, \quad \ldots \quad (58)$$

wenn mit M_R das Rudermoment der Luftkräfte für ein Element der Breite 1 und mit R das Moment bezeichnet wird, mit dem das Ruder gegen Drehung um die Ruderdrehachse gefedert ist. Weiter soll b die Spannweite des Flügels, $m \cdot b$ die Masse des Ruders und $r\frac{l_L}{2}$ der Trägheitsradius desselben um die Ruderdrehachse sein. Die Größe M_R wurde in VII in ihrer Abhängigkeit von $\eta(s)$ bestimmt. Unter Benutzung der dort gefundenen Beziehung (47) ergibt sich dann mit

$$b \cdot m = \varrho \cdot \pi \left(\frac{l_L}{2}\right)^2 b \cdot \mu \text{ und } R = \varrho\pi \cdot \left(\frac{l_L}{2}\right)^2 b\, V^2 \bar{r}$$

aus (58) die Gleichung

$$a_0\eta(s) + a_1\eta'(s) + a_2\eta''(s) + a_3\int_0^s \eta'(\sigma)\, k_1(s-\sigma)\, d\sigma + a_4[\eta'(+0)\, k_1(s) + \int_0^s \eta''(\sigma)\, k_1(s-\sigma)\, d\sigma] = 0 \quad (59)$$

mit

$$a_0 = \bar{r} + \frac{m_{R0}}{2\pi^2}, \; a_1 = \frac{m_{R1}}{2\pi^2}, \; a_2 = \mu r^2 + \frac{m_{R2}}{2\pi^2},$$

$$a_3 = \frac{m_{R2}}{2\pi^2} C_2, \; a_4 = \frac{m_{R2}}{2\pi^2} C_1,$$

wobei die m_{Ri} und C_i nur von dem Rudertiefenverhältnis l_R/l_L abhängen. Ist die Ruderdrehachse rückverlegt, so bleibt die Gl. (59) formal erhalten. Es ändern sich dann nur die Werte der m_{Ri} und C_i. Die a_i sind also bis auf a_0 durch die Baudaten vollkommen bestimmt. In a_0 geht überdies noch die Geschwindigkeit V ein.

Die Beziehung (59) stellt eine Integrodifferentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $\eta(s)$ dar. Unter der Annahme, daß $a_2 \neq 0$ ist, zeigen wir, daß diese Gleichung genau eine Lösung besitzt, für die $\eta(0) = 0$ ist, und deren Ableitung an der Stelle $s = 0$ den vorgeschriebenen Wert $\eta'(0)$ annimmt, falls man nur solche Funktionen $\eta(s)$ zur Konkurrenz zuläßt, die nebst ihren beiden ersten Ableitungen für $s \geq 0$ stetig sind, sowie der Klasse der L-Funktionen angehören[12]). Diese letzte Bedingung besagt, daß wir nur solche Funktionen betrachten, die mit $s \to \infty$ höchstens wie $e^{\alpha s}$ wachsen.

Ist nämlich $\eta(s)$ eine Lösung dieser Art, so können wir auf die Gl. (59) die Laplace-Transformation (vgl. A 2) anwenden und erhalten wegen[13])

$$\mathfrak{L}\{\eta';\, z\} = z \cdot \mathfrak{L}\{\eta;\, z\} - \eta(0) = z \cdot \mathfrak{L}\{\eta;\, z\},$$

$$\mathfrak{L}\{\eta'';\, z\} = z^2 \cdot \mathfrak{L}\{\eta;\, z\} - \eta'(+0)$$

und

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^s \eta'(\sigma)\, k_1(s-\sigma)\, d\sigma;\, z\right\} = z\,\mathfrak{L}\{\eta;\, z\} \cdot \mathfrak{L}\{k_1;\, z\}$$

sowie

$$\mathfrak{L}\left\{\eta'(0)\, k_1(s) + \int_0^s \eta''(\sigma)\, k_1(s-\sigma)\, d\sigma;\, z\right\} = z^2\,\mathfrak{L}\{\eta;\, z\} \cdot \mathfrak{L}\{k_1;\, z\},$$

wobei $\mathfrak{L}\{k_1; z\}$ die in A 4 bestimmte Funktion bedeutet, die in $\mathfrak{L}\{\eta; z\}$ lineare Beziehung

$$f(z) \cdot \mathfrak{L}\{\eta;\, z\} = a_2 \cdot \eta'(0) \quad \ldots \quad (60)$$

mit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + (a_3 + a_4 z)\, z\, \mathfrak{L}\{k_1;\, z\}. \quad (61)$$

Beachtet man nun, daß $z\,\mathfrak{L}\{k_1; z\}$ im Inneren der Halbebene $\Re z > 0$ regulär ist und sich dort im Unendlichen wie $\frac{1}{2}$ verhält (vgl. A 4), so ist $f(z)$ im Innern dieser Halbebene ebenfalls regulär und besitzt dort höchstens endlich viele Nullstellen. Dies gilt auch noch auf der imaginären Achse mit Ausnahme des Nullpunktes, wo $z\,\mathfrak{L}\{k_1; z\}$ einen Windungspunkt hat. Mit $\alpha < 0$ werde nun der Realteil der am weitesten nach rechts gelegenen Nullstelle von $f(z)$ bezeichnet, und es werde $\alpha = 0$ gesetzt, wenn $f(z)$ im Innern der Halbebene $Rz > 0$ keine Nullstelle besitzt. Die Funktion $1/f(z)$ ist mithin in der Halbebene $Rz > \alpha$ regulär und verschwindet dort im Unendlichen wie $1/a_2 z^2$. Dann genügt aber die Funktion[14])

$$F(s) = \lim_{\omega \to \infty} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} \frac{e^{ts}}{f(t)}\, dt \qquad (x > \alpha), \quad \ldots \quad (62)$$

die von x unabhängig ist, der Gleichung

$$\mathfrak{L}\{F;\, z\} = \frac{1}{f(z)},$$

und es kann die Beziehung (60) in der Form

$$\mathfrak{L}\{\eta;\, z\} = a_2 \cdot \eta'(0)\, \mathfrak{L}\{F;\, z\} \quad \ldots \quad (63)$$

geschrieben werden. In A 8 zeigen wir, daß $F(s)$ für $s \geq 0$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, insbesondere also auch stetig ist. Wegen der Stetigkeit von $\eta(s)$ ergibt[15]) sich dann aus (62), daß

$$\eta(s) = a_2 \cdot \eta'(0)\, F(s) \quad \ldots \quad (64)$$

sein muß.

Wir sind bisher von der Annahme ausgegangen, daß eine Lösung $\eta(s)$ der obengenannten Art existiert und haben dann gezeigt, daß diese Lösung notwendig die Darstellung (64) besitzen muß, und es mithin höchstens eine derartige Lösung geben kann. Die durch die Gl. (64) dargestellte Funktion $\eta(s)$ genügt weiter den obengenannten Bedingungen. Sie ist zweimal stetig differenzierbar, da $F(s)$ diese Differenzierbarkeitseigenschaft aufweist. Die Randbedingungen sind erfüllt, da, wie in A 8 gezeigt wird, $F(0) = 0$ und $F'(0) = 1/a_2$ ist. Desgleichen wird dort gezeigt, daß $F(s)$, $F'(s)$ und $F''(s)$ L-Funktionen sind, die für jedes z mit $Rz > \alpha$ konvergieren. Damit können dann die sämtlichen Schlüsse umgekehrt werden, und es ergibt sich schließlich, daß die durch die Gl. (64) definierte Funktion $\eta(s)$ der Gl. (59) genügt.

Ganz analog kann der Fall des durch äußere Kräfte angeregten Flügels behandelt werden. Setzt diese Anregung in dem Zeitpunkte $s = 0$ ein, so gilt für $s > 0$ die Gl. (59) in der inhomogenen Form, d. h. die rechte Seite der Gleichung ist nicht gleich Null, sondern gleich einer bekannten Funktion $G(s)$, die das von der Anregung ausgeübte Moment beschreibt. Ist diese Funktion für $s \geq 0$ stetig und beschränkt, so erhält man mit der Randbedingung $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ jetzt die Beziehung

$$\mathfrak{L}\{\eta;\, z\} = \mathfrak{L}\{G;\, z\} \cdot \mathfrak{L}\{F;\, z\},$$

die wegen der Stetigkeit der darin auftretenden Funktionen zu[16])

$$\eta(s) = \int_0^s G(\sigma)\, F(s-\sigma)\, d\sigma \quad \ldots \quad (65)$$

führt, wobei $F(s)$ die oben angegebene Bedeutung hat. Ist also insbesondere $G(s)$ eine periodische Funktion $G(s) = c\, e^{i\omega s}$, so ist

$$\eta(s) = c\, e^{i\omega s} \int_0^s e^{-i\omega\sigma} F(\sigma)\, d\sigma.$$

Wie wir weiter unten zeigen, konvergiert $F(s)$ mit wachsendem s gegen Null, wenn $f(z)$ in der Halbebene $Rz \geq 0$ keine Nullstelle besitzt, so daß also $\eta(s)$ mit wachsendem s gegen $\mathfrak{L}\{F; i\omega\}\, c\, e^{i\omega s} = c\, e^{i\omega s}/f(i\omega)$ strebt, womit der übliche Ansatz $\eta(s) = C\, e^{i\omega s}$ für große Werte von s gerechtfertigt ist. Dieser Ansatz ist dagegen falsch, wenn $f(z)$

[12]) Vgl. A 2.
[13]) [3] S. 152 Satz 1 u. S. 165 Satz 7.
[14]) [3] S. 128, Satz 3. Die Größe x darf hierbei nicht mit dem Realteil von z verwechselt werden.
[15]) [3] S. 281.
[16]) [3] S. 165, Satz 7 u. S. 157.

Digitized by Google

in der Halbebene $Rz \geq 0$ Nullstellen besitzt. In diesem Fall existiert der Grenzwert $\lim_{s \to \infty} e^{-i\omega s}\,\eta(s)$ nicht mehr. Dies ergibt sich gleichfalls aus dem weiter unten angegebenem infinitären Verhalten von $F(s)$.

Die numerische Bestimmung der Funktion $F(s)$ und damit der resultierenden Ruderbewegung ist sehr schwierig. Wir beschränken uns hier deshalb auf die Angabe des Verhaltens von $F(s)$ für große Werte von s. Dies hängt, wie schon aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, sehr wesentlich von der Lage der Nullstellen der Funktion $f(z)$ ab. Weiter beachte man, daß für das vorliegende Problem $f(0) \neq 0$ ist, denn es ist, da $z\,\mathfrak{L}\left\{k_1; z\right\}$ an der Stelle $z = 0$ den Wert 1 annimmt, $f(0) = a_0 + a_3$. Diese beiden Größen sind aber ihrer physikalischen Bedeutung nach positiv, außer in dem Falle, daß das Ruder mit einem negativen Moment gegen Drehung gefedert ist[17]). Sehen wir davon ab, so gilt die folgende Aussage:

Besitzt $f(z)$ in der Halbebene $Rz \geq 0$ keine Nullstelle, so ist

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Besitzt dagegen $f(z)$ in der Halbebene $Rz \geq 0$ Nullstellen und ist $Rz = \lambda \geq 0$ die am weitesten nach rechts gelegene Parallele zur imaginären Achse, auf der noch Nullstellen von $f(z)$ liegen, so ist, wenn

$$\lambda + i\omega_1, \quad \lambda + i\omega_2, \quad \ldots, \quad \lambda + i\omega_n$$

diese Nullstellen mit den Vielfachheiten

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_n$$

sind,

$$F(s) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(\nu_k - 1)!}\, s^{\nu_k - 1}\, e^{(\lambda + i\omega_k)s} \quad (s \to \infty) \quad \ldots \quad (67)$$

Dabei ist

$$c_K = \lim_{s \to \lambda + i\omega_K} f(z)\,(z - \lambda - i\omega_K)^{\nu_K}$$

gesetzt.

Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem in [3] auf S. 269 angegebenen Satz 4.

Schließlich wollen wir noch zeigen, daß der aus einem Stoß resultierende Ruderausschlag sehr schwach gedämpft ist, wenn $f(z)$ in $Rz \geq 0$ keine Nullstelle besitzt. Es existiert dann kein $\lambda > 0$, so daß

$$|\eta(s)| < C\,e^{-\lambda s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

ist.

Gilt nämlich eine Abschätzung der Form (68), so ist die Funktion $\mathfrak{L}\left\{\eta; z\right\}$ in der Halbebene $Rz > -\lambda$ regulär, und es muß nach Gl. (60) die Funktion $1/f(z)$ dort ebenfalls regulär sein. Dazu ist aber, wie in A 7 gezeigt wird, notwendig, daß $a_3 = a_4 = 0$ ist. Für ein Leitwerk, wie wir es in VII behandelt haben, kann dieser Fall nie eintreten, denn hierfür ist

$$a_3 = \frac{m_{K_3}}{2\pi^2}\, C_2, \quad a_4 = \frac{m_{K_3}}{2\pi^2}\, C_1.$$

Wie eine kleine Rechnung lehrt, verschwinden diese beiden Größen nur für $\vartheta_0 = \pi$, d. h. $l_K/l_L = 0$ gleichzeitig.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß das Verhalten des resultierenden Ruderausschlages $\eta(s)$ für große Werte von s nur von der Lage der Nullstellen der Funktion $f(z)$ abhängt. Hat $f(z)$ in der Halbebene $Rz \geq 0$ keine Nullstelle, so konvergiert $\eta(s)$ mit der Zeit gegen Null. Die Dämpfung ist dabei allerdings gering. Hat $f(z)$ in $Rz \geq 0$ Nullstellen, so geht $\eta(s)$ je nach der Lage und der Vielfachheit der Nullstellen in eine reine oder angefachte Schwingung über.

Damit haben wir ein Stabilitätskriterium erhalten, das formal mit denjenigen Kriterien übereinstimmt, die sich unter Verwendung der für stationäre Bewegungen gültigen Luftkraftgesetze ergeben. Nur ist dort die Funktion $f(z)$ ein Polynom in z, während hier $f(z)$ transzendent ist. Wir werden aber weiter unten zeigen, daß auch hier ein algebraisches Kriterium aufgestellt werden kann, wenn man für die Funktion $k_1(s)$ eine geeignete Näherung wählt.

In welcher Beziehung stehen nun die hier gewonnenen allgemeinen Ergebnisse zu dem am Anfang dieses Abschnittes angegebenen Begriff der kritischen Geschwindigkeit? Nach dieser Definition ist eine Geschwindigkeit V_k dann als kritisch zu bezeichnen, wenn ein harmonischer Ruderausschlag $\eta(s)$ die Gl. (59) befriedigt, falls man dort für das Luftkraftmoment M_R denjenigen Ausdruck einsetzt, der sich für diesen Ausschlag nach genügend langer Zeit einstellt. Es muß also dann mit

$$\eta(s) = A\,e^{i\omega s}$$

nach den im Abschnitt VI gewonnenen Ergebnissen für mindestens ein reelles ω die Beziehung

$$A\,e^{i\omega s}\left[a_0 + i\omega a_1 + (i\omega)^2 a_2 + (a_3 + i\omega a_4)\, i\omega\, \mathfrak{L}\left\{k_1; i\omega\right\}\right] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

bestehen, die besagt, daß $f(z)$ an der Stelle $i\omega$ eine Nullstelle haben muß. Mithin kann das bei einer kritischen Geschwindigkeit angestoßene Ruder bestimmt keinen gedämpften Ruderwinkelverlauf besitzen. Gleichzeitig sieht man aber auch, daß nicht jede kritische Geschwindigkeit ein Grenzpunkt zwischen einem Bereich der Dämpfung und einem solchen der Anfachung sein muß. Besitzt nämlich $f(z)$ neben den Nullstellen auf der imaginären Achse auch noch solche im Inneren der rechten Halbebene, so liegt V_k im Innern eines Bereiches der Anfachung. Dagegen kann es nie eintreten, daß V_k im Inneren eines Bereiches der Dämpfung liegt. In dieser Hinsicht ist nur der Fall möglich, daß V_k als isolierter Punkt zwischen zwei Bereichen der Dämpfung liegt. Dies tritt z. B. dann ein, wenn sich mit wachsendem V_k eine Nullstelle von $f(z)$ der imaginären Achse von links nähert und nach Berührung dieser Achse in die linke Halbebene zurückkehrt. Dabei wird angenommen, daß für den betrachteten Wertebereich von V_k keine weiter nach rechts gelegene Nullstelle von $f(z)$ existiert. Schließt man den Fall eines isolierten V_k aus und nimmt an, daß für kleine Werte von V die aus einem Stoß resultierende Ruderbewegung gedämpft verläuft, so stellt die kleinste kritische Geschwindigkeit einen Übergang von der Dämpfung zur Anfachung dar.

Bisher haben wir uns nur mit dem qualitativen Verhalten von $\eta(s)$ für große Werte von s befaßt und hierfür in II ein relativ einfach zu handhabendes Kriterium angegeben. Die numerische Bestimmung des Ruderwinkelverlaufs stößt dagegen auf sehr große mathematische Schwierigkeiten, die ihre Ursache in dem transzendenten Verhalten der in $f(s)$ auftretenden Funktion $z\,\mathfrak{L}\left\{k_1; z\right\}$ hat. Diese Schwierigkeiten lassen sich zum Teil beheben, wenn man sich auf eine angenäherte Berechnung von $\eta(s)$ für kleine Werte von s beschränkt, denn dann kann die in der Gleichung auftretende Funktion $k_1(s)$ durch eine geeignete Näherung $\overline{k_1(s)}$ ersetzt und die Integralgleichung genau wie oben aufgelöst werden. Wir nehmen hier für $k_1(s)$ die durch (25) beschriebene Größe und kennzeichnen die dazugehörigen Funktionen durch einen Querstrich. Die Wahl dieser Näherung hat nämlich den Vorteil, daß dadurch die Berechnung von $\overline{\eta}(s)$ auf die Bestimmung der Nullstellen eines Polynomes zurückgeführt wird, denn es ist

$$z\,\mathfrak{L}\left\{k_1; z\right\} = 1 - \frac{z}{4}\left[\frac{1}{z + 0{,}5} + \frac{1}{z + 0{,}185} + \frac{0{,}185}{(z + 0{,}185)^2}\right] \quad (70)$$

so daß sich für $\overline{f(z)}$ ein Ausdruck der Form

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{(z + 0{,}5)\,(z + 0{,}185)^2} \sum_{i=0}^{5} b_i z^i \quad \ldots \quad (71)$$

ergibt. Sind nun $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die Nullstellen des Polynomes $\sum_{i=0}^{5} b_i z_i$ mit den Vielfachheiten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, so kann die

[17]) Läßt man zu, daß $f(z)$ an der Stelle $s = 0$ eine Nullstelle besitzen kann, so muß für diesen Fall eine gesonderte Betrachtung durchgeführt werden, da $f(z)$ dort einen Windungspunkt unendlich hoher Ordnung hat.

Digitized by Google

zur Berechnung von $\overline{F(s)}$ maßgebende Funktion $1/\overline{f(z)}$ in der Form

$$\frac{1}{\overline{f(z)}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_1^{(i)}}{(z-\beta_i)} + \frac{C_2^{(i)}}{(z-\beta_i)^2} + \cdots + \frac{C_{\mu_i}^{(i)}}{(z-\beta_i)^{\mu_i}}\right) \quad (72)$$

geschrieben werden. Daraus ergibt sich dann für $\overline{F(s)}$ die Darstellung[18])

$$\overline{F}(s) = \sum_{i=1}^{n}\left(C_1^{(i)} + C_2^{(i)} s + \cdots + C_{\mu_i}^{(i)} \frac{s^{\mu_i-1}}{(\mu_i-1)!}\right) e^{\beta_i s} \quad (73)$$

und mithin

$$\overline{\eta}(s) = a_2 \cdot \eta'(0) \cdot \overline{F(s)} \quad (74)$$

Diese Funktion $\overline{\eta}(s)$ stellt für kleine Werte von s eine gute Näherung der gesuchten Größe $\eta(s)$ dar, denn man kann leicht zeigen, daß die beiden ersten Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle $s = 0$ übereinstimmen, während bei der dritten Ableitung ein Fehler von noch nicht 15% begangen wird.

Die hier angestellten Überlegungen können ohne jede Schwierigkeit auf den Fall mehrerer Freiheitsgrade übertragen werden.

IX. Zusammenfassung.

In gewissen Fällen führen die auf der Vorstellung stationärer Bewegungen berechneten Luftkräfte und Lastverteilungen zu falschen Vorstellungen. Aus diesem Grunde wurde in dem vorstehenden Bericht in vollkommener Analogie zur Birnbaumschen Theorie der tragenden Wirbelfläche die Auftriebsverteilung über die Tiefe eines unendlich langen instationär bewegten oder angeströmten Tragflügels, der sich überdies deformieren kann, bestimmt. Die dabei auftretenden Ausdrücke sind denen der stationären Theorie ähnlich gebaut und führen, von einer numerisch durchzuführenden Integration abgesehen, zu genau demselben Grad der Schwierigkeit.

X. Anhang.

A 1. Ein Ergebnis der Theorie der Integralgleichungen.

Hinsichtlich der Lösungen der Integralgleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\xi = g(x) \qquad (-1 < x < 1) \quad (75)$$

gilt der folgende Satz [13]:

Sind die Funktionen $g(x)$ und $g^2(x)\sqrt{1-x^2}$ in dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ integrabel, und gibt es mit endlich vielen Ausnahmen um jeden Punkt des offenen Intervalles $-1 < x < 1$ ein abgeschlossenes Teilintervall, in dem für je zwei Punkte x_1 und x_2 aus diesem Intervall die Funktion $g(x)$ einer Ungleichung der Form

$$|g(x_1) - g(x_2)| < M\,|x_1 - x_2| \quad (76)$$

genügt, wobei M eine nur von dem betreffenden Intervall abhängige Konstante ist, so wird durch den Ausdruck

$$f(x) = \frac{k}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{g(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi}\, d\xi \quad (77)$$

genau die Gesamtheit derjenigen Funktionen $f(x)$ beschrieben, die

1. in dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ integrabel sind,
2. an den Stellen, in deren Umgebung die Vorgabe $g(x)$ einer Abschätzung der Form (76) genügt, stetig sind und
3. dort der Integralgleichung (75) genügen.

Durch geeignete Wahl der Konstanten k kann man stets erreichen, daß die Größe $\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi$ einen vorgegebenen Wert annimmt, denn es ist für die durch (77) dargestellte Funktion

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi = k.$$

Weiter wird in der genannten Arbeit gezeigt, daß

$$\int_1^x f(\xi)\, d\xi = -\frac{k}{\pi}\arccos x - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(\xi) \ln\frac{1-x\xi-\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}{1-x\xi+\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}\, d\xi \quad (78)$$

mit

$$0 < \arccos x < \pi$$

ist. Wir zeigen nun, daß mit

$$G(x) = \int^x g(\xi)\, d\xi$$

die Gl. (78) an den Stellen x, wo $g(x)$ beschränkt ist, auch in der Form

$$\int_1^x f(\xi)\, d\xi = -\frac{k}{\pi}\arccos x - \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1} \frac{G(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\frac{d\xi}{x-\xi} \quad (79)$$

geschrieben werden kann.

Dazu formen wir das Integral der Gl. (78) mittels partieller Integration um und erhalten wegen

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{1-x\xi-\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}{1-x\xi+\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}} = -\frac{2}{x-\xi}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}$$

mit $\varepsilon > 0$ die Beziehungen

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} g(\xi)\ln\frac{1-x\xi-\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}{1-x\xi+\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}\, d\xi = G(x-\varepsilon)\ln\frac{1-x(x-\varepsilon)-\sqrt{(1-x^2)[1-(x-\varepsilon)^2]}}{1-x(x-\varepsilon)+\sqrt{(1-x^2)[1-(x-\varepsilon)^2]}} + 2\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, d\xi$$

sowie

$$\int_{x+\varepsilon}^{1} g(\xi)\ln\frac{1-x\xi-\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}{1-x\xi+\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}\, d\xi = -G(x+\varepsilon)\ln\frac{1-x(x+\varepsilon)-\sqrt{(1-x^2)[1-(x+\varepsilon)^2]}}{1-x(x+\varepsilon)+\sqrt{(1-x^2)[1-(x+\varepsilon)^2]}} + 2\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, d\xi$$

und damit

$$\int_1^x f(\xi)\, d\xi = -\frac{k}{\pi}\arccos x - \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[G(x-\varepsilon)\ln\frac{1-x(x-\varepsilon)-\sqrt{(1-x^2)[1-(x-\varepsilon)^2]}}{1-x(x+\varepsilon)-\sqrt{(1-x^2)[1-(x+\varepsilon)^2]}}\right] + \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[G(x+\varepsilon)-G(x-\varepsilon)\right]\ln\left[1-x(x+\varepsilon)-\sqrt{(1-x^2)[1-(x+\varepsilon)^2]}\right] - \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{G(x)}{x-\xi}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, d\xi\right\}.$$

[18]) [3] S. 138.

Digitized by Google

Hierin konvergiert der erste Grenzwert gegen Null, wie man leicht durch eine zweimalige Anwendung der Regel von l'Hôpital zeigen kann. Dasselbe gilt ebenfalls für den zweiten Grenzwert, da $\lim_{\varepsilon \to 0} (\ln \varepsilon \cdot \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(\xi)\, d\xi) = 0$. Mithin existiert auch der Cauchysche Hauptwert des Integrals, und es gilt (79).

Wie man sieht, gilt die Formel (79) sogar an jeder Stelle x, wo $\lim_{\varepsilon \to 0} (\ln \varepsilon \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(\xi)\, d\xi) = 0$ ist.

A 2. Die Laplace-Transformation.

In der vorliegenden Untersuchung wird des öfteren die Laplace-Transformation [3] angewandt. Wir wollen deshalb kurz ihre Definition angeben.

Eine reelle Funktion $F(s)$ der reellen Veränderlichen s soll eine I-Funktion heißen, wenn sie für $s > 0$ definiert, in jedem endlichen Intervall $0 < s_1 \leq s \leq s_2$ eigentlich integrabel, also auch beschränkt und bis zum Nullpunkt absolut uneigentlich integrierbar ist.

Eine I-Funktion heißt L-Funktion, wenn es ein reelles z_0 gibt, so daß das Integral

$$\int_0^\infty e^{-z_0 s} f(s)\, ds$$

existiert.

Man kann dann zeigen, daß die Laplace-Transformierte von $F(s)$, d. i. die Funktion

$$\mathfrak{L}\{f, z\} = \int_0^\infty e^{-zs} f(s)\, ds$$

für jedes z mit $Rz > z_0$ existiert und in dieser Halbebene eine reguläre analytische Funktion darstellt.

Die Laplace-Transformation wendet man mit Nutzen dann an, wenn eine Volterrasche Integralgleichung vorliegt, deren Kern nur eine Funktion der Differenz $s - \sigma$ ist, also das in der Gleichung auftretende Integral die Form $\int_0^s F(\sigma) \cdot k(s-\sigma)\, d\sigma$ hat. Nach dem Faltungssatz gilt dann nämlich die Gleichung

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^s F(\sigma)\, k(s-\sigma)\, d\sigma; z\right\} = \mathfrak{L}\{F; z\} \cdot \mathfrak{L}\{k; z\},$$

falls die darin auftretenden Funktionen konvergieren.

A 3. Lösung der Wagnerschen Integralgleichung.

Wir zeigen, daß die Integralgleichung

$$\int_0^s \varepsilon(\sigma) \frac{\sqrt{s-\sigma+2}}{\sqrt{s-\sigma}}\, d\sigma + \Gamma_0(s) = 0 \quad (s > 0) \quad . \quad . \quad (80)$$

für eine für $s \geq 0$ stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $\Gamma_0(s)$ genau eine für $s > 0$ stetige und $s > 0$ absolut integrable Lösung besitzt.

Es genügt zu zeigen, daß die Gl. (80) mindestens eine derartige Lösung für den Fall besitzt, daß $\Gamma_0(s) \equiv 1$ für $s > 0$ ist. Ist nämlich $\varepsilon_1(s)$ irgendeine Funktion dieser Art, so gilt, wenn $\varepsilon(s)$ die Gleichung (80) unter den obengenannten Bedingungen befriedigt, die Beziehung

$$\int_0^s \varepsilon_1(s-t) \int_0^t \varepsilon(\sigma) \frac{\sqrt{t-\sigma+2}}{\sqrt{t-\sigma}}\, d\sigma\, dt + \int_0^s \varepsilon_1(s-t)\, \Gamma_0(t)\, dt = 0.$$

Beachtet man nun, daß

$$\int_0^s \varepsilon_1(s-t) \int_0^t \varepsilon(\sigma) \frac{\sqrt{t-\sigma+2}}{\sqrt{t-\sigma}}\, d\sigma\, dt = \int_0^s \int_\sigma^s \varepsilon_1(s-t)\, \varepsilon(\sigma) \sqrt{\frac{t-\sigma+2}{t-\sigma}}\, dt\, d\sigma$$

$$= \int_0^s \varepsilon(\sigma) \int_0^{s-\sigma} \varepsilon_1(u) \sqrt{\frac{s-u+2-\sigma}{s-u-\sigma}}\, du\, d\sigma$$

$$= -\int_0^s \varepsilon(\sigma)\, d\sigma$$

ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\int_0^s \varepsilon(\sigma)\, d\sigma = \int_0^s \varepsilon_1(\sigma)\, \Gamma_0(s-\sigma)\, d\sigma,$$

die wegen der Stetigkeit von $\varepsilon_1(s)$, $\Gamma_0(s)$ und $\varepsilon(s)$ sowie der stückweise stetigen Differenzierbarkeit von $\Gamma_0(s)$ nach Differentiation zu der Gleichung

$$\varepsilon(s) = \Gamma_0(+0) \cdot \varepsilon_1(s) + \int_0^s \Gamma_0'(\sigma)\, \varepsilon_1(s-\sigma)\, d\sigma \quad . \quad . \quad (81)$$

führt. Diese Funktion ist stetig und absolut integrabel und genügt, wie man leicht zeigt, der Gl. (80). Weiter entnimmt man der Darstellung (81), daß es höchstens eine stetige Lösung $\varepsilon_1(s)$ geben und mithin auch für jedes von 1 verschiedene $\Gamma_0(s)$ das den obengenannten Voraussetzungen genügt, höchstens eine stetige Lösung $\varepsilon(s)$ existieren kann. Die oben ausgesprochene Behauptung ist also vollständig bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß mindestens ein $\varepsilon_1(s)$ existiert. Wir beweisen genauer:

Es gibt genau eine für $s > 0$ stetige L-Funktion, die der Gleichung

$$\int_0^s \varepsilon_1(\sigma) \sqrt{\frac{s-\sigma+2}{s-\sigma}}\, d\sigma + 1 = 0 \quad (s > 0) \quad . \quad . \quad (82)$$

genügt. Diese Lösung befriedigt für kleine Werte von s die Äquivalenzbeziehung

$$\varepsilon_1(s) \sim -\frac{1}{\pi \sqrt{2s}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

so daß also $\varepsilon_1(s)$ bis in den Nullpunkt hinein absolut integrabel ist.

Um dies einzusehen, setzen wir $\varepsilon_1(s) = \varepsilon_{11}(s) + \varepsilon_{12}(s)$, wobei $\varepsilon_{11}(s)$ der Abelschen Integralgleichung

$$\int_0^s \frac{\varepsilon_{11}(\sigma)}{\sqrt{s-\sigma}}\, d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

genügen soll. Es ist also

$$\varepsilon_{11}(s) = -\frac{1}{\pi \sqrt{2s}},$$

und es muß $\varepsilon_{12}(s)$ die Gleichung

$$\int_0^s \varepsilon_{12}(\sigma) \sqrt{\frac{s-\sigma+2}{s-\sigma}}\, d\sigma = H(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

mit

$$H(s) = -\frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_0^s \frac{\sqrt{2} - \sqrt{s-\sigma+2}}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}}\, d\sigma$$

befriedigen. Diese Funktion $H(s)$ ist für $s \geq 0$ beliebig oft differenzierbar. Ist $s \neq 0$, so entnimmt man die Differenzierbarkeit von $H(s)$ der Darstellung

$$H(s) = -\frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left\{ \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}}\, d\sigma - \sqrt{s} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\sigma+\frac{2}{s}}}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}}\, d\sigma \right\}.$$

Gleichzeitig ersieht man daraus, daß für große Werte von s eine Abschätzung der Form $|H(s)| < M\sqrt{s}$ mit konstantem M gilt. Für kleine Werte von s gilt eine Entwicklung

Digitized by Google

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{s-\sigma+2})=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu(s-\sigma)^\nu+(s-\sigma)^{n+1}r_n(s-\sigma),$$

wobei $r_n(s-\sigma)$ beliebig oft nach s differenzierbar ist. Damit erhält man die Darstellung

$$H(s)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\int_0^s\frac{(s-\sigma)^\nu}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}}d\sigma+\int_0^s\frac{(s-\sigma)^{n+1}}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}}r_n(s-\sigma)\,d\sigma$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu s^\nu\int_0^1\frac{(1-\sigma)^\nu}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}}d\sigma+\int_0^s\frac{(s-\sigma)^{n+1}}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}}r_n(s-\sigma)\,d\sigma,$$

der man die Differenzierbarkeit von $H(s)$ für kleine Werte von s und $s=0$ entnimmt.

Die Gl. (84) kann nun durch Anwendung der Laplace-Transformation[19]) gelöst werden, wenn man $\varepsilon_{12}(s)$ als zweite Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $E_{12}(s)$ auffaßt, also (84) in der Form

$$\int_0^s E_{12}''(\sigma)\sqrt{\frac{s-\sigma+2}{s-\sigma}}\,d\sigma=H(s)\quad\ldots\quad(85)$$

schreibt. Weiter setzen wir

$$\mathfrak{L}\{H(s),z\}=\int_0^s e^{-sz}H(s)\,ds=h(z)$$

und erhalten wegen[20])

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^s E_{12}''(\sigma)\sqrt{\frac{s-\sigma+2}{s-\sigma}}\,d\sigma,z\right\}=\mathfrak{L}\{E_{12}''(s),z\}\cdot\mathfrak{L}\left\{\sqrt{\frac{s+2}{s}},z\right\}$$

und[21])

$$\mathfrak{L}\{E_{12}''(s),z\}=z^2\,\mathfrak{L}\{E_{12}(s),z\}-z\cdot E_{12}(0)-E_{12}'(0)$$

sowie

$$\mathfrak{L}\left\{\sqrt{\frac{s+2}{s}},z\right\}=e^z\{K_0(z)-K_0'(z)\},$$

wobei [5, S. 418]

$$K_0(z)=\int_1^\infty\frac{e^{-zt}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\quad\ldots\quad(86)$$

gesetzt ist, aus (85) die Beziehung

$$\left[z^2\,\mathfrak{L}\{E_{12}(s),z\}-z\cdot E_{12}(0)-E_{12}'(0)\right]e^z\left[K_0(z)-K_0'(z)\right]=\mathfrak{L}\{H(s),z\}\quad\ldots\quad(87)$$

Darin existiert $\mathfrak{L}\{H(s),z\}$ für $Rz>0$ nach den oben über $H(s)$ gemachten Aussagen. Es ist also

$$\mathfrak{L}\{E_{12}(s),z\}=\frac{\mathfrak{L}\{H(s),z\}}{z^2e^z\{K_0(z)-K_0'(z)\}}+\frac{1}{z}E_{12}(0)+\frac{1}{z^2}E_{12}'(0)\quad\ldots\quad(88)$$

Um daraus die Funktion $E_{12}(s)$ selbst zu erhalten, müssen wir eine Funktion $K(s)$ bestimmen, für die

$$\mathfrak{L}\{K(s),z\}=\frac{1}{z^2e^z[K_0(z)-K_0'(z)]}\quad\ldots\quad(89)$$

ist. Dies ist möglich, denn die Funktion $K_0(z)$ ist im Inneren der Halbebene $Rz>0$ regulär und die Differenz $K_0(z)-K_0'(z)$ hat dort, wie in A 5 gezeigt wird, einen positiven Realteil und kann demnach in dieser Halbebene keine Nullstelle besitzen. Schließlich gilt noch für große Werte von z mit $|\arc z|<\frac{\pi}{2}$ die Äquivalenzrelation[22])

$$K_0(z)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left(1+\sum_2^n\frac{a_i}{z^i}+\frac{\mu_n(z)}{z^{n+1}}\right)\quad\ldots\quad(90)$$

Dabei sind die a_i-Konstante und die $\mu_n(z)$ beschränkt. Beachtet man noch, daß

$$K_0(z)=i\,\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(iz)\quad\ldots\quad(91)$$

und

$$\frac{dH_0^{(1)}(z)}{dz}=-H_1^{(1)}(z)\quad\ldots\quad(92)$$

ist, wobei $H_0^{(1)}$ und $H_1^{(1)}$ Hankelsche Funktionen sind, so ergibt sich für dieselben Werte von z die weitere Beziehung

$$K_0'(z)\sim-\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left(1+\sum_2^n\frac{b_i}{z^i}+\frac{\nu_n(z)}{z^{n+1}}\right)\quad\ldots\quad(93)$$

Mithin gilt dort

$$\frac{1}{z^2e^z[K_0(z)-K_0'(z)]}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,z^{3/2}}\quad\ldots\quad(94)$$

Dann hat aber die Funktion

$$K(s)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\eta\to\infty}\int_{x-i\eta}^{x+i\eta}\frac{e^{sz}\,dz}{z^2e^z[K_0(z)-K_0'(z)]}\quad(x>0)\quad(95)$$

die verlangte Eigenschaft[23]). Beachtet man weiter, daß

$$\mathfrak{L}\{1,z\}=\frac{1}{z}\text{ und }\mathfrak{L}\{s,z\}=\frac{1}{z^2}$$

ist, so ergibt sich wegen der Stetigkeit von $E_{12}(s)$ aus (88), daß

$$E_{12}(s)=E_{12}(0)+sE_{12}'(0)+\int_0^s H(t)K(s-t)\,dt\quad(96)$$

sein muß. Diese Funktion ist eine L-Funktion[24]). Weiter ist $E_{12}(s)$ differenzierbar[25]), und es ist wegen $H(0)=0$

$$E_{12}'(s)=E_{12}'(0)+\int_0^s H'(t)K(s-t)\,dt$$

sowie

$$E_{12}''(s)=H'(0)K(s)+\int_0^s H''(t)K(s-t)\,dt\quad\ldots\quad(97)$$

Die so bestimmte Funktion $E_{12}''(s)$ ist wiederum eine L-Funktion[24]), die auch umgekehrt der Gl. (85) genügt, denn aus (97) folgt (87) und hieraus wegen der Stetigkeit der darin auftretenden Funktionen (85). Gleichzeitig ergibt sich, daß (97) die einzige stetige L-Funktion ist, die (85) löst. Damit ist der erste Teil der oben ausgesprochenen Behauptung bewiesen. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich nun daraus, daß nach (81) die Funktion $E_{12}''(s)$ in der Form

$$E_{12}''(s)=-\int_0^s H'(\sigma)\varepsilon_{11}(s-\sigma)\,d\sigma-\int_0^s H'(\sigma)E_{12}''(s-\sigma)\,d\sigma$$

geschrieben werden kann. Darin konvergiert der erste Bestandteil mit s gegen Null. Dies gilt aber auch für den zweiten Bestandteil, denn $E_{12}''(s)$ ist eine L-Funktion und mithin insbesondere integrabel.

A 4. Bestimmung der Funktion $k_1(s)$.

Die Funktion $k_1(s)$ ist mit der in A 3 berechneten Funktion $\varepsilon_1(s)=\varepsilon_1(-1,s)$ durch die Gl. (19) verknüpft. Darin existiert das Integral auf der rechten Seite, da sich $\varepsilon_1(s)$ in der Umgebung des Nullpunktes wie $-1/\pi\sqrt{2s}$ verhält, so daß also $k_1(0)=1/2$ ist.

Die Bestimmung der Funktion $k_1(s)$ nimmt man am zweckmäßigsten so vor, daß man aus der Definitionsgleichung (82) für $\varepsilon_1(s)$ und der Definitionsgleichung (19) für $k_1(s)$ die Größe $\varepsilon_1(s)$ durch Anwendung der Laplace-Transformation eliminiert. Dies ist erlaubt, da $k_1(s)$ wegen (19)

[19]) Vgl. A 22.
[20]) [3] S. 165, Satz 7.
[21]) [3] S. 152, Satz 1.
[22]) [5] S. 444.
[23]) [3] S. 128, Satz 2.
[24]) [3] S. 165, Satz 7.
[25]) [3] S. 159, Satz 2.
[26]) [3] S. 165, Satz 7.

Digitized by Google

selbst eine L-Funktion ist[26]). Mit $E(s) = \int_0^s \varepsilon_1(\sigma)\, d\sigma$ ergibt sich aus (82) die Gleichung

$$z\,\mathfrak{L}\{E(s), z\}\, e^z [K_0(z) - K_0'(z)] + \frac{1}{z} = 0$$

und entsprechend aus (19)

$$\mathfrak{L}\{k_1(s), z\} = \frac{1}{z} + z\,\mathfrak{L}\{E(s), z\} \cdot K_0(z) \cdot e^z,$$

so daß also

$$\mathfrak{L}\{k_1(s), z\} = -\frac{K_0'(z)}{z[K_0(z) - K_0'(z)]} \quad \ldots\ldots (98)$$

wird. Beachtet man nun, daß nach (93) und (94) die Äquivalenzbeziehung

$$\frac{-K_0'(z)}{z[K_0(z) - K_0'(z)]} \sim \frac{1}{2z} \quad \ldots\ldots (99)$$

für große z besteht, so erhält man genau wie in A 3 jetzt für $k_1(s)$ die Darstellung

$$k_1(s) = -\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} e^{sz} \frac{K_0'(z)}{z[K_0(z) - K_0'(z)]}\, dz, \quad (100)$$

die wegen $K_0(z) = -i\frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(-iz)$ auch in der Form

$$k_1(s) = \lim_{\eta \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} e^{zs} \frac{H_1^{(2)}(-iz)}{z[iH_0^{(2)}(-iz) + H_1^{(2)}(-iz)]}\, dz \quad (101)$$

geschrieben werden kann. Diese Gleichung wurde von Küssner [11] auf einem anderen Wege abgeleitet.

Wir wollen noch untersuchen, wie sich $k_1(s)$ für große Werte von s verhält. Nach der auf Seite 406 gegebenen Deutung von $k_1(s)$ ist es anschaulich evident, daß $\lim_{s \to \infty} k_1(s) = 1$ ist. Wir wollen hier zeigen, daß

$$\lim_{s \to \infty} s \cdot \left(k_1(s) - 1 + \frac{1}{s}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (102)$$

ist.

Wegen Gl. (100) gilt

$$k_1(s) = 1 - \lim_{\eta \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} \frac{e^{sz}}{z} \cdot \frac{K_0(z)}{K_0(z) - K_0'(z)}\, dz.$$

Beachtet man nun, daß

$$\psi(z) = \ln z + \frac{K_0(z)}{z[K_0(z) - K_0'(z)]}$$

eine Funktion ist, die in der rechten Halbebene einschließlich der imaginären Achse aber mit Ausnahme des Unendlichfernen stetig ist (vgl. A 7) und die Funktion

$$q(z) = \frac{K_0(z)}{K_0(z) - K_0'(z)} \quad \ldots\ldots (103)$$

der Differentialgleichung (105) genügt, so können wir den Satz 4 ([3] S. 269/270) mit $a = 0$, $k = 0$ und $n = 1$ anwenden, obwohl die Funktion $\psi'(z)$ im Nullpunkte nicht existiert. Dort verhält sich $\psi'(z)$ wie $(\ln z)^2$. Eine derartige Singularität kann zugelassen werden, da die Existenz und Integrabilität der ersten Ableitung von $\psi(z)$ nur dazu dient, um den Integrationsweg von einer Parallelen der imaginären Achse mittels des Cauchyschen Satzes auf diese selbst zu verschieben. Der oben angegebene Satz liefert dann unmittelbar die behauptete Beziehung (102).

A 5. Beweis der Nullstellenfreiheit von $e^z[K_0(z) - K_0'(z)]$ in $Rz \geqq 0$.

Wir wollen zeigen, daß in $Rz \geqq 0$ die Funktion $e^z[K_0(z) - K_0'(z)]$ ebenfalls einen positiven Realteil hat.

Nach Gl. (86) ist mit $z = x + iy$

$$e^z[K_0(z) - K_0'(z)] = e^z \int_1^\infty e^{-zt} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} \sqrt{\frac{t+2}{t}}\, dt$$

also

$$R\{e^z[K_0(z) - K_0'(z)]\} = \int_0^\infty e^{-xt} \sqrt{\frac{t+2}{t}} \cos(ty)\, dt.$$

Wir können uns mithin bei dem Beweis der oben ausgesprochenen Behauptung auf den Fall beschränken, daß $x > 0$ und $y > 0$ ist. Dann gilt

$$R\{e^z[K_0(z) - K_0'(z)]\} = \frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-v\frac{x}{y}} \sqrt{\frac{v+2y}{v}} \cos v\, dv = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{x}{y}(v+2n\pi)} \sqrt{\frac{v+2n\pi+2y}{v+2n\pi}} \cos v\, dv$$

$$= \frac{1}{y} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{x}{y}(v+2n\pi)} \left(\sqrt{\frac{v+2n\pi+2y}{v+2n\pi}} - e^{-\frac{x}{y}\pi} \sqrt{\frac{v+2n\pi+\pi+2y}{v+2n\pi+\pi}}\right) \cos v\, dv.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist hierbei positiv und nimmt monoton ab. Dann sind aber die sämtlichen Glieder der Reihe auch positiv und von Null verschieden.

A 6. Die Differentialgleichung der Funktion $\frac{K_0(z)}{K_0(z) - K_0'(z)}$.

Für die durch die Gl. (103) definierte Funktion $q(z)$ gilt wegen (91) und (92) die Darstellung

$$q(z) = \frac{iH_0^{(1)}(iz)}{iH_0^{(1)}(iz) - H_1^{(1)}(iz)} \quad \ldots\ldots (104)$$

Daraus ergibt sich, da die Hankelsche Funktion $H_1^{(1)}(z)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dH_1^{(1)}(z)}{dz} = H_0^{(1)}(z) - \frac{1}{z} H_1^{(1)}(z)$$

genügt und die Ableitung von $H_0^{(1)}(z)$ die Gl. (92) befriedigt, für die Ableitung der Funktion $q(z)$ die Darstellung

$$\frac{dq(z)}{dz} = -\frac{H_1^{(1)}(iz)^2 + H_0^{(1)}(iz)^2}{(iH_0^{(1)}(iz) - H_1^{(1)}(iz))^2} - \frac{i}{z} \frac{H_0^{(1)}(iz) H_1^{(1)}(iz)}{(iH_0^{(1)}(iz) - H_1^{(1)}(iz))^2}$$

also

$$\frac{dq(z)}{dz} = -1 + 2q(z) - \frac{1}{z} q(z)(q(z) - 1). \quad (105)$$

A 7. Verhalten der Funktion $\frac{K_0'(z)}{K_0(z) - K_0'(z)}$ in der Umgebung des Nullpunktes.

Die obengenannte Funktion ist als Quotient von Hankelschen Funktionen im Innern der rechten Halbebene regulär[27]). Dies gilt auch noch für die imaginäre Achse mit Ausnahme des Nullpunktes, in dessen Umgebung wir jetzt den Quotienten untersuchen wollen.

Es ist

$$K_0(z) = i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(iz) = i\frac{\pi}{2}(J_0(iz) + iY_0(iz)) \quad (106)$$

und

$$K_0'(z) = \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2}(J_1(iz) + iY_1(iz)), \quad (107)$$

wobei J_k bzw. Y_k Besselsche Funktionen erster bzw. zweiter Art sind. Die Funktionen erster Art sind in der Umgebung

[27]) Vgl. A 5.

Digitized by Google

des Nullpunktes regulär, für die Funktion zweiter Art gelten dort dagegen die Darstellungen[28])

$$Y_0(iz) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{iz}{2}\right) J_0(iz) + r_0(z) \quad \ldots\ldots (108)$$

$$Y_1(iz) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{iz}{2}\right) J_1(iz) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{iz} + r_1(z), \quad (109)$$

wobei $r_0(z)$ und $r_1(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes regulär sind. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$K_0'(z) = i\left(C + \ln\frac{iz}{2}\right) J_1(iz) - \frac{1}{z} + R_0(z) \ldots (110)$$

und

$$K_0(z) - K_0'(z) = -(J_0(iz) + iJ_1(iz)) \times \left(C + \ln\frac{iz}{2}\right) + \frac{1}{z} + R_1(z) \ldots (111)$$

mit Funktionen $R_0(z)$ und $R_1(z)$, die in der Umgebung des Nullpunktes ebenfalls regulär sind. Aus diesen beiden Darstellungen entnimmt man, daß der betrachtete Quotient in der Umgebung des Nullpunktes beschränkt ist und

$$\lim_{z\to 0} \frac{K_0'(z)}{K_0(z) - K_0'(z)} = -1 \quad \ldots\ldots (112)$$

gilt.

Wir zeigen weiter, daß der Ausdruck

$$r(z)\,\frac{K_0'(z)}{K_0(z) - K_0'(z)} \quad \ldots\ldots\ldots (113)$$

mit regulärem $r(z)$ dann und nur dann in der Umgebung des Nullpunktes regulär ist, wenn $r(z)$ _ 0 ist.

Nimmt man nämlich an, daß dieses Produkt eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion $R(z)$ darstellt, so folgt aus den oben gegebenen Darstellungen von $K_0'(z)$ und $K_0(z) - K_0'(z)$, daß die Größe

$$[r(z)\,iJ_1(iz) + R(z)(J_0(iz) + iJ_1(iz))]\left[C + \ln\frac{iz}{2}\right]$$

in der Umgebung des Nullpunktes bis auf Pole regulär sein muß. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn

$$[r(z)\,iJ_1(iz) + R(z)(J_0(iz) + iJ_1(iz))] \equiv 0$$

ist. Unter Benutzung von (113) ergibt sich daraus, daß

$$r(z)\,[J_0(iz)\,Y_1(iz) - J_1(iz)\,Y_0(iz)] = 0$$

sein muß. Beachtet man nun[29]), daß

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z) \text{ und } \frac{dY_0(z)}{dz} = -Y_1(z).$$

ist, so ergibt sich wegen[30])

$$J_0(z)\,Y_0'(z) - J_0'(z)\,Y_0(z) = \frac{2}{\pi z},$$

daß $r(z) \equiv 0$ sein muß.

A 8. Eine Differenzierbarkeitsuntersuchung.

Wir zeigen hier, daß die durch die Gl. (61) definierte Funktion $F(s)$ beliebig oft differenzierbar und $F(0) = 0$ sowie $F'(0) = \frac{1}{a_2}$ ist.

Zum Beweis der ersten Behauptung beachte man, daß für genügend große Werte von t wegen $a_2 \neq 0$ und (98) eine Darstellung der Form

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{a_2 t^2} + \sum_{\nu=3}^{n} \frac{C_{\nu-1}}{t^\nu} + \frac{R_n(t)}{t^{n+1}}$$

besteht, wobei $R_n(t)$ beschränkt ist. Die Größe n kann dabei beliebig gewählt werden. Weiter ist

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} \frac{e^{st}}{t^{\nu+1}}\,dt = \frac{s^\nu}{\nu!} \quad (s > 0),$$

so daß also $F(s)$ in der Form

$$F(s) = \frac{s}{a_2} + \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{C_\nu}{\nu!} s^\nu + \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} e^{st} \frac{R_n(t)}{t^{n+1}}\,dt \quad \ldots\ldots (114)$$

geschrieben werden kann, wenn man nur x hinreichend groß wählt. Berücksichtigt man schließlich, daß für jedes feste η die Funktion $\int_{x-i\eta}^{x+i\eta} e^{st} \frac{R_n(t)}{t^{n+1}}$ beliebig oft nach s differenzierbar ist, und daß für alle Ableitungen bis zur $(n-1)$, die durch die Differentiation entstehenden Integrale für jeden beschränkten Wertebereich aus $s > 0$ gleichmäßig in s konvergieren, wenn η über alle Grenzen strebt, so ergibt sich, daß $F(s)$ mindestens $(n-1)$ mal differenzierbar ist und die Differentiation in der Gl. (114) unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf. Insbesondere ist also

$$F'(s) = \frac{1}{a_2} + \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{C_\nu}{(\nu-1)!} s^{\nu-1} + \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} e^{st} \frac{R_n(t)}{t^n}\,dt \quad \ldots\ldots (115)$$

Wir zeigen nun, daß $F(0) = 0$ ist. Sei etwa $n + 1 = 2\mu$ eine gerade Zahl und $|R_n(t)| < M$, dann ist

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} \frac{R_n(t)}{t^{n+1}}\,dt\right| < \frac{M}{\pi} e^{sx} \int_0^\infty \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^\mu}.$$

Diese Größe kann aber beliebig klein gemacht werden, wenn nur s hinreichend klein ist. Dazu wähle man x genügend groß und s andererseits so klein, daß $e^{sx} < 2$ ist. Aus der Gl. (114) entnimmt man dann, daß $F(0) = 0$ ist. Ganz analog ergibt sich für $F'(0)$ der Wert $\frac{1}{a_2}$.

Abschließend zeigen wir, daß $F(s)$, $F'(s)$ und $F''(s)$ L-Funktionen sind, und daß die Laplace-Transformierten dieser Funktionen für jedes z mit $Rz > \alpha$ konvergieren. Bei der Durchführung des Beweises beschränken wir uns wieder auf die Funktion $F(s)$, da für die anderen Funktionen die Beweisführung genau so verläuft.

Zunächst ist $F(s)$ eine I-Funktion, denn $F(s)$ ist ja, wie wir soeben gezeigt haben, bis in den Nullpunkt hinein differenzierbar. Weiter beachte man, daß die oben angegebene Zerlegung von $1/f(t)$ in jeder Halbebene $Rt \geq x > \alpha$ gilt, so daß also die Darstellung (114) für jedes $x > \alpha$ sinnvoll ist. Hierin sind aber die Potenzen von s L-Funktionen mit der Konvergenzabszisse 0. Wir können uns mithin auf die Betrachtung des Integrals in dieser Gleichung beschränken. Dieses kann aber bei festem x durch einen Ausdruck der Form $C e^{sx}$ abgeschätzt werden, und mithin konvergiert die Laplace-Transformierte von $F(s)$ für jedes z mit $Rz > x > \alpha$. Daraus ergibt sich die oben ausgesprochene Behauptung, da x beliebig nahe an α gewählt werden darf.

[28]) [6] S. 409.
[29]) [5] S. 413, Gl. 176 u. S. 409, Gl. 11.
[30]) [5] S. 414, Gl. 20.

XI. Schrifttum.

[1] W. Birnbaum, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 290/297.

[2] W. Birnbaum, Das ebene Problem des schlagenden Flügels. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 277/292.

[3] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Springer, Berlin 1937.

[4] G. Ellenberger, Luftkräfte bei beliebiger instationärer Bewegung eines Tragflügels mit Querruder und bei Vorhandensein von Böen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 173.

[5] Frank-Mises, Differentialgleichungen der Physik. 2. Auflage. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1930.

[6] J. E. Garrick, On some reciprocal relations in the theory of nonstationary flows. NACA Rep. 629 (1938).

[7] K. Jaeckel, Über die Kräfte auf beschleunigt bewegte, veränderliche Tragflügelprofile. Ing. Arch. Bd. 9 (1938), S. 371/395.

Digitized by Google

[8] K. Jaeckel, Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung für den zweidimensionalen Tragflügel bei beliebigen periodischen Bewegungen. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 135/138.

[9] Th. v. Kármán u. W. R. Sears, Airfoil theory for nun-uniform motion. J. Aeron. Sci. Bd. 5 (1938), S. 379/389.

[9a] Eine deutsche Übersetzung dieses Aufsatzes ist in »Luftfahrt-Schrifttum des Auslandes in Übersetzungen« Bd. 4 (1938), S. 230/240, erschienen.

[10] H. G. Küssner, Schwingungen von Flugzeugflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929), S. 41/62.

[11] H. G. Küssner, Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 410/424.

[12] W. Quessel, Beitrag zur Berechnung von Flügelschwingungen und des Querrudereinflusses auf diese. Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung. R. Oldenbourg, Berlin-München, S. 245/264.

[13] H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Math. Z. Bd. 16 (1939), S. 283/308..

[14] H. Söhngen, Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 18/22.

[15] A. Teichmann, Gedankengänge zur Flatterberechnung. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 283/308.

[16] H. Wagner, Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 17/35.

Digitized by Google

Kolbentemperaturen in Otto-Motoren

von Dr.-Ing. Walther Brecht

Mit 99 Seiten, 52 Abbildungen, 8°. 1940. Broschiert RM 4.–

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, einen Überblick über die an der Ausbildung der Kolbentemperaturen beteiligten Einzeleinflüsse zu geben und damit Wege aufzuzeigen, die zur Herabsetzung der Spitzentemperaturen und des für die Wärmespannungen maßgebenden Temperaturgefälles im Kolben und damit zur Verminderung einer Reihe von Störungsmöglichkeiten führen können. Für die Motorenversuche wurden sowohl in der Wahl der Kolben wie der Versuchsbedingungen die heute üblichen Verhältnisse im Flugmotor zugrunde gelegt.

Da der Wunsch bestand, ein möglichst geschlossenes Bild über die verschiedenen Einflüsse auf die Kolbentemperaturen zu geben, wurden die Untersuchungen über Fragen der Kolben- und Kolbenringgestaltung hinaus auch auf Veränderungen des Wärmeeinfalls (z. B. verschiedene Verbrennung, Drehzahl, Verdichtung usw.) und der Wärmeabfuhr (z. B. Kolbenspiel, Ölfilm, Zylinderwerkstoff und -kühlung) unter Einschluß von einigen Versuchen mit zusätzlicher Kühlung des Kolbeninnern ausgedehnt. Die im Schrifttum vorhandenen Ergebnisse wurden, soweit zugänglich, sinngemäß eingefügt.

Die Untersuchungen waren auf den Otto-Viertakt-Motor beschränkt. Doch sind die Ergebnisse, soweit nicht Fragen des Verbrennungsablaufes d. h. des Wärmeeinfalls auf den Kolbenboden betroffen werden, auch auf andere Verfahren (Zweitakt, Diesel) übertragbar.

R. OLDENBOURG / MÜNCHEN 1 UND BERLIN

Aufgaben und Formeln aus Aerodynamik und Flugmechanik

Von Gerhard Siegel VDI

Dozent für Flugzeugbau an der Ingenieurschule Weimar. 177 Seiten, 50 Abbildungen. 8°. 1940. RM. 7.—

An den Hoch- und Fachschulen, in der Luftfahrtindustrie wie in der Luftwaffe bedeutete bisher für Ingenieure und Studierende das Fehlen einer allgemeinverständlichen Aufgabensammlung aus dem Gebiet der Aerodynamik und Flugmechanik einen fühlbaren Mangel. Diese Lücke sucht nun Gerhard Siegel mit dem vorliegenden Werk zu schließen.

Um mühsames Nachsuchen in der stark zerstreuten Literatur zu ersparen, ist die Aufgabensammlung gleichzeitig als Formelsammlung ausgebaut.

Die Aerodynamik ist ausschließlich vom Gesichtspunkt des praktischen Flugzeugbaues her behandelt; die neuesten Erkenntnisse der Turbulenzeinflüsse sind berücksichtigt worden.

Die Flugmechanik behandelt neben den Grundflugzuständen eine Reihe Erfahrungsformeln für den Entwurf und die Flugleistungsberechnung.

Als besonders zweckmäßig für das schnelle und gründliche Eindringen in die Aerodynamik und Flugmechanik hat sich die Behandlung der Belastungsfälle nach den deutschen Bauvorschriften für Flugzeuge, Fassung 1936 (BVF), erwiesen. Deshalb wurde diesem Gebiet der ganze dritte Hauptteil gewidmet.

Im Anhang werden neben einer Reihe gebräuchlicher Motor- und Segelflugzeugprofile eine Anzahl Kurven und Tafeln von allgemeiner Gültigkeit gebracht; sie erleichtern beträchtlich die Durchführung der Rechnungen. Mit seinen Übersichten und Tafeln eignet sich der Anhang zur Verfertigung neuer, ähnlicher Aufgaben.

Die Lösungen der Aufgaben sind in ihren Endresultaten am Schluß des Buches verzeichnet; sie ermöglichen auf diese Weise, die Richtigkeit einer Aufgabenbehandlung zu überprüfen.

Die theoretischen Grundlagen sind vor allem bei Jaeschke „Flugzeugberechnung" Band I und II, Verlag R. Oldenbourg, München, nachzulesen.

Allgemeinverständlichkeit und Anschaulichkeit im Vortrag, pädagogisches Geschick der Darstellung in der Durchdringung von Theorie und Praxis lassen dieses Buch für Ingenieure und Studierende als geeigneten Führer auf dem Weg zum vollen Verständnis der flugmechanischen Zusammenhänge erscheinen.

R. Oldenbourg · München 1 und Berlin

Digitized by Google

Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung

Heft 11: Zur Sauerstoffbestimmung auf physikalischem Wege. Von Hermann Rein. 10 S., 3 Abb. Gr.-8°. 1940. Kart. RM. —.50.

Heft 13: Biologische Probleme des Hochgeschwindigkeitsfluges. Von Siegfried Ruff. 25 S., 16 Abb. Gr.-8°. 1940. Kart. RM. 1.40.

Heft 14: Das Widerstandsproblem der Flugmotorenkühlung. Von Heinrich Helmbold. 17 S., 5 Abb. Gr.-8°. 1940. Kart. RM. —.90.

Heft 15: Über den Dauerbruch metallischer Werkstoffe. Von Friedrich Körber. 56 S., 38 Abb. Gr.-8°. 1940. Kart. RM. 3.30.

Heft 17: Grundlagen und Eigenschaften des Variometers. Von Adolf Bestelmeyer. 32 S., 7 Abb. Gr.-8°. 1940. Kart. RM. 1.80.

Heft 20: Elektrische Wellen im Zentimetergebiet. Von A. Esau. — Die praktische Bedeutung der Mikrowellen. Von Wilh. Runge. 21 S. Gr.-8°. 1940. Kart. RM. 1.20.

R. OLDENBOURG · MÜNCHEN 1 UND BERLIN

Soeben erschien:

Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs

TEIL II

Veröffentlichung der Vorträge, die anläßlich des 25jährigen Bestehens der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt am 14. Juni 1939 gehalten wurden.

Herausgegeben von Dr.-Ing. G. Kempf

236 Seiten, 102 Abb. Gr.-8°. 1940. In Leinen RM. 12.50

INHALT:

Neue Kavitationsversuche. Von Dr.-Ing. H. Lerbs — Trägheitsmoment und Dämpfung belasteter Schiffsschrauben. Von Dr.-Ing. H. Lerbs und Dr. phil. H. Baumann — Ergebnisse naturgroßer Schraubenversuche auf Dampfer „Tannenberg". Von Dr.-Ing. G. Kempf — Berechnung des Einflusses der Oberflächenreibung auf den Wirkungsgrad von Schiffsschrauben. Von Dr.-Ing. G. Kempf — Der Tandempropeller. Von Obering. H. Schmierschalski — Erfahrungen über Formgebung von Seeschiffen. Von Ing. E. Heckscher — Manövrierversuche. Von Dr.-Ing. W. Graff — Tiefen- und Breiteneinflüsse von Kanälen auf den Schiffswiderstand. Von Obering. K. Helm — Über die Beziehungen zwischen Fahrtgebiet und Schiffsbewuchs. Von Dr. phil. H. Kühl — Behinderung der Schiffsgeschwindigkeit durch Bewuchs. Von Oberregierungsrat, Kapitän L. Schubart.

R. OLDENBOURG · MÜNCHEN 1 UND BERLIN

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOUND

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 01234 9554

DEC 30 1948

UNIV. OF MICH.
LIBRARY

2 3 4 5 6

1 NEERING
IBRARY

TL
503
L92

INDEX

Luftfahrt-Forschung

v.16-17,1939-40

NTERLIBRARY LOAN

JUL 1957 1

R. Ovs ext 2661

R Cullen
Aero Lab

IL

Digitized by Google